

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique Appliquées

Thème

Estimation et tests dans les processus de diffusion à dérive
non régulière

Présenté Par :

Melle Djebbour Khadidja

Devant le jury composé de :

Mr HARIRI Mohammed	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mr MAMI Tawfik Fawzi	Professeur	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Mme BALASKA Lamia	MAA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2024/2025



Remerciements



Je remercie tout d'abord « **Allah** », le tout puissant, qui par sa grâce m'a permis de mener à terme le présent travail, en me donnant la santé, la force, le courage, la volonté et la patience.

Je voudrais remercier tout particulièrement mon encadrante **Mme.L.Balaska** , pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je tiens à remercier avec plus grande gratitude **M Hariri** , de l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **Mr. T.Mami** , qui a accepté d'être membre de jury de ce mémoire et de bien vouloir étudier avec attention mon travaux.



Dédicace



Je dédie ce modeste travail à ma chère famille, qui a toujours été mon soutien, ma motivation et ma source de courage. Sans votre amour et vos encouragements, ce rêve n'aurait jamais pu se réaliser.

Table des matières

table des notation	1
Introduction générale	1
1 Notions fondamentales de calcul stochastique	3
1.1 Généralités sur les processus stochastiques	4
1.2 Mouvement Brownien	6
1.3 Intégrale stochastique	7
1.3.1 Processus d'Itô	9
1.3.2 Formules d'Itô :	10
1.4 Processus de diffusion	11
1.4.1 Équations différentielles stochastiques	11
1.4.2 Existence et unicité des solutions d'EDS	12
2 Estimation par maximum de vraisemblance d'un processus de diffusion à retard proportionnel	13
2.1 Introduction et formulation de problème	13
2.2 Processus de rapport de vraisemblance	14
2.3 Estimateur du maximum de vraisemblance	15
2.3.1 Normalité asymptotique locale	16
2.3.2 Comportement asymptotique de l'EMV	20
2.4 Simulation	25
2.4.1 Trajectoire d'un mouvement Brownien	25
2.4.2 Trajectoires d'un processus de type diffusion avec retard proportionnel	26
2.4.3 Comportement de l'estimateur de maximum de vraisemblance	28
3 Test paramétrique entre deux hypothèses simples pour un processus de diffusion à retard proportionnel	32
3.1 Introduction	32
3.2 Préliminaire et notations	32
3.3 Construction du test de rapport de vraisemblance	33

Résumé

De nombreux phénomènes naturels, économiques et biologiques intègrent une composante aléatoire que les modèles déterministes ne peuvent saisir. Les équations différentielles stochastiques (EDS) offrent un cadre pertinent en combinant dérive et diffusion. Ce mémoire étudie un processus de diffusion à retard proportionnel avec dérive non régulière. Deux axes sont développés : l'estimation du paramètre de retard par maximum de vraisemblance en régime de petite diffusion, et la construction d'un test paramétrique simple contre simple fondé sur le rapport de vraisemblance. Les résultats théoriques, inspirés des travaux d'Ibragimov, Has'minskii et Kutoyants, sont confirmés par simulations numériques.

Abstract

Many natural, economic, and biological phenomena involve random fluctuations that cannot be captured by purely deterministic models. Stochastic differential equations (SDEs) provide a suitable framework by combining drift and diffusion components. This thesis focuses on a diffusion process with proportional delay and non-regular drift. Two main objectives are addressed: estimating the delay parameter via maximum likelihood in the small-diffusion regime, and constructing a simple versus simple parametric test based on the likelihood ratio. Theoretical results, inspired by the works of Ibragimov, Has'minskii, and Kutoyants, are supported by numerical simulations.

الملخص

تتأثر العديد من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والبيولوجية بتقلبات عشوائية لا يمكن للنماذج الحتمية أن تصفها بدقة. توفر المعادلات التفاضلية العشوائية إطاراً مناسباً يجمع بين المكون الحتمي (الانجراف) والمكون العشوائي (الانتشار). يركز هذا البحث على عملية انتشار بزم من تأخير نسبي وانجراف غير منتظم. ويهدف إلى تحقيق محورين أساسيين: تقدير معامل التأخير باستخدام طريقة الاحتمال الأعظم في حالة الانتشار الصغير، وبناء اختبار مطابقة بارامتري من النوع البسيط مقابل البسيط اعتماداً على نسبة الاحتمال. وتؤكد المحاكاة العددية، المستندة إلى أعمال إبراغيموف وهاسمينسكي وكوتويانتس، صحة النتائج النظرية المتحصّل عليها.

Notations :

\mathbb{R} : Ensemble des réels.

\mathbb{R}_+ : Ensemble des réels positifs.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$: Tribu borélienne engendrée par les ouverts de \mathbb{R} .

(Ω, \mathcal{F}, P) : Espace de probabilité .

$\{W_t; 0 \leq t \leq T\}$ Mouvement brownien standard .

$X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$: Processus stochastique observé.

$v.a$: Variable aléatoire.

$\mathcal{C}[0, T]$: Espace des fonctions continues sur $[0, T]$.

\mathcal{B}_T : Tribu borélienne engendrée par $X_t, 0 \leq t \leq T$.

$\mathbb{E}_\theta[.]$: Espérance sous la loi $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$.

$N(0, 1)$: Loi normale centrée réduite.

$Cov_\theta(X, Y)$: Covariance de deux variables aléatoire X et Y sous la loi P_θ .

Introduction générale

De nombreux phénomènes naturels, économiques ou biologiques présentent une dynamique aléatoire qui ne peut être modélisée de manière purement déterministe. Dans ce contexte, les équations différentielles stochastiques (EDS) offrent un cadre rigoureux et souple pour modéliser l'évolution de tels systèmes sous l'effet de l'incertitude. Ces équations permettent d'intégrer à la fois une composante systématique (dérive) et une composante aléatoire (diffusion), et sont au cœur de nombreuses applications contemporaines.

Ce mémoire s'intéresse à un cas particulier, mais fondamental, des équations différentielles stochastiques : les processus de type diffusion à dérive non régulière, lorsque la fonction de dérive n'est pas différentiable par rapport au paramètre d'intérêt. Cette absence de régularité complique considérablement l'application des méthodes classiques d'estimation et de test statistique, et nécessite le recours à des techniques plus raffinées, issues de l'analyse asymptotique et de la statistique des processus stochastiques.

Le processus étudié dans ce mémoire, processus de type diffusion avec retard proportionnel, est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = X_{\theta t} dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\{W_t, t \in [0, 1]\}$ est un mouvement brownien, $\theta \in [0, 1]$ est un paramètre inconnu à estimer, et $\varepsilon \in (0, 1]$ désigne l'intensité du bruit. Ce travail poursuit deux objectifs principaux. Le premier consiste à étudier l'estimation du paramètre θ à partir de l'observation continue du processus, en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance (EMV). Le second objectif est de proposer un test paramétrique permettant d'évaluer la pertinence du modèle retenu et de tester des hypothèses portant sur le paramètre, en s'appuyant sur les propriétés asymptotiques du processus lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La méthodologie adoptée s'inspire des travaux fondateurs d'Ibragimov, Has'minskii et Kutoyants, pionniers de l'estimation dans les modèles à faible bruit. Nous adaptons ici leurs méthodes à un cadre plus délicat, caractérisé par l'absence de régularité de la dérive par rapport au paramètre θ , ce qui requiert des outils théoriques et numériques spécifiques. Le mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre présente les notions préliminaires nécessaires à la compréhension du travail. On y rappelle les propriétés fondamentales du mouvement brownien, les définitions des intégrales stochastiques, ainsi que la formulation générale des équations différentielles stochastiques.

Le deuxième chapitre, intitulé Estimation dans les processus de type diffusion non linéaire à dérive non différentiable, est consacré à la construction de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre et d'analyser ses propriétés asymptotiques. Des simulations numériques réalisées à l'aide du logiciel R illustrent les résultats théoriques.

Le troisième chapitre, intitulé test paramétrique entre deux hypothèses simples pour un processus de diffusion à retard proportionnel, est consacré à la construction et à l'analyse d'un test statistique basé sur le rapport de vraisemblance dans le cadre d'un modèle EDS à retard

proportionnel avec un petit paramètre de diffusion. Ce chapitre présente le cadre théorique du test, les hypothèses considérées, ainsi que la démonstration rigoureuse de ses propriétés asymptotiques en termes de contrôle du risque de première espèce et d'étude de la puissance limite. Ce travail constitue une contribution à l'analyse statistique des modèles stochastiques à retard, en mettant en évidence qu'il est possible de développer des tests paramétriques performants même dans des contextes non standards, grâce à l'utilisation d'outils probabilistes adaptés et d'expérimentations numériques illustratives.

Notions fondamentales de calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base en probabilités et statistiques. Nous présentons notamment une définition probabiliste de l'intégrale stochastique, puis nous introduisons des équations différentielles ordinaires perturbées par ce type d'intégrales stochastiques. Les notions préliminaires présentées dans ce chapitre sont issues des références suivantes : Lipster [3], Monic [6] et Karatzaz [5]

Définition 1.1. *La densité de probabilité f d'une variable aléatoire continue X sur l'ensemble des réels \mathbb{R} est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. L'intégrale de f sur tout l'ensemble réel est égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Théorème 1.1. (Radon-Nikodym) :

Soit ν une mesure définie positive sur $B(\mathbb{R})$. Une mesure de probabilité (paramétrique) \mathbb{P}_θ est absolument continue par rapport à la mesure ν et on note $\mathbb{P}_\theta \ll \nu$ si et seulement si \mathbb{P}_θ admet une densité f par rapport à ν c'est à dire :

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\nu} = f(x, \theta),$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ (l'espace des observations) et $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}$.

Nous rappelons la définition de l'information de Fisher, qui est d'un intérêt capital dans les problèmes d'estimation statistique de paramètres inconnus. Considérons une variable aléatoire X dont la loi dépend d'un paramètre θ (réel ou vecteur à n composantes inconnues), soit ses probabilités $P(X = x, \theta)$ (cas discret), soit sa densité $f(x, \theta)$ (cas continu).

Définition 1.2. (Information de Fisher) :

Si x est une réalisation d'une variable aléatoire X , on note $f(x, \theta)$ la fonction de vraisemblance associée à la variable X (qui peut être multidimensionnelle).

Si f est dérivable par rapport à θ , nous appelons quantité d'information de Fisher apportée par la Variable aléatoire X , ou par une observation x de X , sur le paramètre θ , la quantité :

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \log f(X, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\
&= \int_{\{x: f(x, \theta) \neq 0\}} \frac{1}{f(x, \theta)} \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Remarque : Dans cette définition, $\mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \log f(X, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$ désigne l'espérance mathématique sous la loi de probabilité P_θ .

Théorème 1.2. (Inégalités classiques) :

Supposons que X et Y soient deux variables aléatoires ayant des espérances du premier et du deuxième ordre finies. Nous énonçons les inégalités suivantes :

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $(\mathbb{E}(X.Y))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.
2. **Inégalité de Hölder :** Si p, q sont deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\mathbb{E}(X.Y) = [\mathbb{E}|X|^p]^{\frac{1}{p}} [\mathbb{E}|Y|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

3. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** Supposons que $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ (variance finie). Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.3. Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexées par un ensemble T (en général $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^+) et définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , qu'on appelle espace d'états.

Définition 1.4.

- 1- **Filtration :** Une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) est une suite croissante de sous tribus de \mathcal{F} i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall s \leq t$.
- 2- **Processus continu :** Le processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit continu si pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e les trajectoires sont continues).
- 3- **Processus mesurable :** Le processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit mesurable si l'application :

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega),$$

définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ muni de $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, processus à valeur dans \mathbb{R}^d muni de la tribu $B(\mathbb{R}^d)$, est mesurable.

- 4- **Processus adapté :** On dit que $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est \mathcal{F}_t - adapté si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est \mathcal{F}_t - mesurable.
- 5- **Processus progressif :** On dit que $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est \mathcal{F}_t - progressif si pour tout $t \geq 0$, la fonction $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ définie sur $([0, t] \times \Omega, B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ est mesurable.

Définition 1.5. Un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit **strictement stationnaire** si : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous choix de temps $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et pour tout décalage $h > 0$, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont la même loi.

Définition 1.6. Un processus aléatoire X_t est qualifié de **stationnaire au second ordre** lorsque :

- Sa moyenne $\mathbb{E}[X_t]$ est constante, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas avec le temps.
- la covariance entre X_s et X_t ne dépend que de l'intervalle de temps $\tau = t - s$, ce qui implique une invariance par translation dans le temps.
- De plus, la fonction de covariance $R(\tau)$ est continue en $\tau = 0$.

Définition 1.7. Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit **gaussien** si : pour tout entier n strictement positif et pour tous t_1, \dots, t_n dans T , $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien (ses lois de dimensions finies sont gaussiennes).

Nous rappelons aussi la propriété de Markov pour un processus. Un processus est de Markov si son comportement dans le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent.

Définition 1.8. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans un espace d'états E . On dit que (X_t) est un **processus de Markov** si pour tout $s, t \geq 0$ et pour tout ensemble borélien $A \in \mathcal{B}(E)$, on a :

$$P(X_{t+s} \in A \mid (X_u)_{0 \leq u \leq s}) = P(X_{t+s} \in A \mid X_s)$$

Proposition 1.1. (de Markov forte)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Alors, pour tout temps d'arrêt T borné et pour tout $t \in \iota$ on a

$$\mathbb{P}(X_{T+t} \in 1 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{T+t} \in A \mid X_T) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Définition 1.9. La famille des lois marginales d'un processus X est définie par :

$$\mu^X = \{\mu_{t_1, \dots, t_n}^X; n \in \mathbb{N}, (t_1, \dots, t_n) \in [\mathbb{R}^+]^n\}$$

avec

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}^X(A_1, \dots, A_n) \triangleq P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n), \quad (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd}),$$

et μ_{t_1, \dots, t_n}^X est une mesure de probabilité sur $((\mathbb{R}^d)^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd}))$

Définition 1.10. Une famille de lois de probabilités $\mu = \{\mu_{t_1, \dots, t_n}; n \in \mathbb{N}, (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n\}$, est dite cohérente si pour tout $n \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) (1 \leq i \leq n)$ les conditions suivantes sont satisfaites

1. **Condition de symétrie :** Pour toute permutation π de $\{1, \dots, n\}$

$$\mu_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(A_1, \dots, A_n) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_{\pi^{-1}(1)}, \dots, A_{\pi^{-1}(n)}).$$

2. **Condition de compatibilité :** pour tout $k \leq n$

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k) = \mu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_k, \mathbb{R}^d, \dots, \mathbb{R}^d).$$

Définition 1.11. Modification d'un processus stochastique) :

Soient deux processus stochastiques $X = (X_t)_{t \geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$.

On dit que Y est une modification de X si pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Théorème 1.3. (Critère de Kolmogorov)

Soit X un processus stochastique. On suppose qu'il existe des constantes α, β et C strictement positives telles que

$$E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq C|t - s|^{1+\beta}, \forall t, s \geq 0,$$

alors, il existe une modification de dont les trajectoires sont continue presque sûrement.

1.2 Mouvement Brownien

Pour les définitions et les propriétés du mouvement brownien, nous nous sommes appuyés sur les ouvrage de Karatzas, I. et Shreve, S.E.[5] et de Kutoyants [1]

Définition 1.12. Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard), également appelé processus de Wiener, si

1. $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
2. $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.
3. $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ les accroissements $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendants.
4. Les trajectoire $t \mapsto B_t$ sont continues presque sûrement.

Dans tout ce qui suit, nous notons un M.B standard par $(W_t)_{t \geq 0}$.

Proposition 1.2. (Régularité trajectorielle Brownienne)

Soit (W_t) un M.B, on a :

1. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$
2. $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$
3. La trajectoire d'un M.B (W_t) passe une infinité de fois par tout point et (W_t) n'est pas dérivable ni à gauche ni à droite.
4. Les trajectoires du M.B sont localement holdériennes-continues d'ordre α , avec $\alpha < 1/2$.

Lemme 1.1. Soit (W_t) un mouvement Brownien, on a :

pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}[\exp\{\lambda \sin |W_t|\}] \leq 1 + \lambda \sqrt{8\pi} e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}.$$

Pour la démonstration de ce lemme, nous avons besoin de la propriété suivante (voir [1], page28)

Proposition 1.3. Soit (W_t) un mouvement Brownien, on a :

$$P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} W_t > N\right\} = 2P\{W_T > N\}, \quad N > 0. \quad (1.1)$$

$$P\{W_T > N\} \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{N} \sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right) e^{-\frac{N^2}{2T}} \quad (1.2)$$

Démonstration. [1] Notons par $F(x)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|$ et soit $\lambda > 0$, alors par intégration par parties on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{\lambda \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|\} &= \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x) \\ &= - \int_0^\infty e^{\lambda x} d[1 - F(x)] \\ &= 1 + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda x} [1 - F(x)] dx. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (1.1) on a :

$$\begin{aligned} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| > N\} &< P\{\sup_{0 \leq t \leq T} W_t > N\} + P\{\sup_{0 \leq t \leq T} W_t < -N\} \\ &= P\{\sup_{0 \leq t \leq T} W_t > N\} + P\{\sup_{0 \leq t \leq T} (-W_t) > N\} \\ &= 4P\{W_T > N\}. \end{aligned}$$

Et par (1.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|\} &\leq 1 + 4\lambda \int_0^\infty e^{\lambda x} P\{W_T > x\} dx \\ &\leq 1 + 2\lambda \int_0^\infty \exp\{\lambda x - \frac{x^2}{2T}\} dx \\ &< 1 + 2\lambda e^{\frac{T\lambda^2}{2}} \int_0^\infty \exp\{-\frac{1}{2T}(x - T\lambda)^2\} \\ &= 1 + \sqrt{8\pi T} e^{\frac{T\lambda^2}{2}}. \end{aligned}$$

1.3 Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles (i.e., \mathcal{F}_0 contient les ensembles négligeables, la filtration est croissante, et elle est continue à droite).

Définition 1.13. On appelle **tribu des prévisibles** (ou σ -algèbre des prévisibles), la plus petite tribu sur $[0, T] \times \Omega$ rendant mesurables tous les processus **adaptés** et **continue à gauche avec limites à droite** (càgl ou **left-continue with riht limits, notés LCRL**).

Un processus $\varphi = (\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ est dit **prévisible** s'il est mesurable par rapport à cette tribu.

Soit maintenant $(W_t)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ tel que, pour tout $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s .

On note par Λ^2 l'ensemble des processus $\varphi = (\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ prévisibles, tels que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \varphi_t^2 dt \right] < +\infty.$$

Autrement dit, Λ^2 désigne l'ensemble des processus prévisibles, de carré intégrable sur $[0, T]$, presque sûrement.

Proposition 1.4. *Soit $\varphi \in \Lambda^2$, et soit $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ une subdivision de l'intervalle $[0, T]$. Si φ_t est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ pour $t \in [t_{i-1}, t_i)$, alors φ est prévisible, et chaque $\varphi_{t_{i-1}}$ est indépendant de l'accroissement $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$.*

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens rigoureux à des équations différentielles stochastiques (EDS) de la forme :

$$dX_t = b_t(X_t) dt + \sigma_t(X_t) dW_t. \quad (1.3)$$

Comme dans le cas déterministe, une solution de l'équation différentielle 1.3 est interprétée comme une solution de l'équation intégrale associée :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(X_s) ds + \int_0^t \sigma_s(X_s) dW_s.$$

Définition 1.14. *Pour tout processus $\varphi \in \Lambda^2$, on définit l'intégrale stochastique d'Itô comme la limite dans L^2 des accroissements des sommes ci-dessous. Ainsi, l'intégrale stochastique est construite comme la limite des sommes de Riemann.*

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s(\omega) dW_s := \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\omega) (W_{t_{i+1} \wedge t}(\omega) - W_{t_i \wedge t}(\omega)).$$

- $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ est un processus prévisible, qui représente l'intégrale stochastique.
- $\alpha_i(\omega)$ est une approximation simple du processus φ , constante par morceaux sur les intervalles $[t_i, t_{i+1})$.

On a de plus quelques propriétés complémentaires liées à la dépendance aléatoire de φ .

Proposition 1.5. *Pour tout $\psi, \varphi \in \Lambda^2$ tels que Λ^2 l'ensemble des processus prévisibles de carré intégrable et tout s, t tels que $0 < s < t$, on a :*

1. $t \mapsto I_t(\varphi)$ est à trajectoire continue P-p.s.
2. $I(\varphi) = (I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}_{t \geq 0}$.
3. $\mathbb{E}(I_t(\varphi)) = 0$, et $\text{Var}(I_t(\varphi)) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_s^2 ds \right)$.
4. $\mathbb{E}(I_t(\varphi) - I_s(\varphi) / \mathcal{F}_s) = 0$.
5. $\mathbb{E} \left((I_t(\varphi) - I_s(\varphi))^2 / \mathcal{F}_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_s^t \varphi_u^2 du / \mathcal{F}_s \right)$.
6. $\mathbb{E}[I_t(\varphi) I_s(\psi)] = \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s} \varphi_u \psi_u du$.
7. $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (I_{t-s}(\varphi) - I_s(\varphi))^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left(\int_s^{s+T} \varphi_u^2 du \right)$.

Corollaire 1.1. 1. *Si pour tout $t \in [0, T]$, la somme $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty$, alors :*

$$\mathbb{E}(I_t(\varphi) / \mathcal{F}_s) = I_s(\varphi), \quad \text{pour tout } s \leq t.$$

2. **Isométrie d'Itô** : Si $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_u^2) du < \infty$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s dW_s \right) \right] = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds.$$

3. D'après la définition, le processus $I(\varphi)$ est gaussien centré de covariance,

$$\text{cov}(I_t(\varphi), I_s(\varphi)) = \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge s} \varphi_u^2 du \right).$$

Lemme 1.2. Soit $f \in \Lambda^2$, si pour tout $n \geq 1$, $\int_0^T \mathbb{E} |f_t(\omega)|^{2n} dt < \infty$, alors nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}_\theta \left[\left(\int_0^T f(t) dW_t \right)^{2n} \right] \leq (n(2n-1))^n T^{n-1} \int_0^T \mathbb{E}_\theta(f^{2n}(t)) dt. \quad (1.4)$$

Ainsi. Pour tout processus f nous avons :

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \int_0^T f_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T f_t^2 dt \right\} \leq 1. \quad (1.5)$$

Lemme 1.3. Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un MB et $f \in \Lambda^2$, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $\delta > 0, \lambda > 0$, nous avons :

$$\mathbb{P} \left(0 \leq t \leq T \mid \int_0^T f_s(\omega) dW_s \mid > \delta \right) \leq \frac{\lambda}{\delta^2} + \mathbb{P}(\|f\|^2 > \lambda).$$

1.3.1 Processus d'Itô

Définition 1.15. On appelle processus d'Itô, un processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \quad P-p.s$$

avec :

- X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable.
- $(b_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont des processus adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
- $\int_0^t |b_s| ds \leq \infty$ P-p.s et $\int_0^t |\sigma_s| ds \leq \infty$ P-p.s pour tout $t \in [0, T]$.

Écrit sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Théorème 1.4. (théorème de Girsanov)

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Soit $(\theta_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté et mesurable tel que, pour un horizon fixé $T > 0$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right) \right] < +\infty.$$

On définit la densité de Radon–Nikodym par

$$Z_T = \exp\left(-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds\right).$$

Alors $Z_T > 0$ \mathbb{P} -p.s., $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$, et la mesure \mathbb{Q} définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = Z_T$$

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$

est équivalente à \mathbb{P} . De plus, sous \mathbb{Q} , le processus

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est un mouvement brownien. Autrement dit, un changement de probabilité permet de transformer un mouvement brownien avec dérive en un mouvement brownien standard, et inversement.

1.3.2 Formules d'Itô :

- **Première Formule d'Itô :**

Soit X un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornées, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds. \quad (1.6)$$

- **Deuxième Formule d'Itô :**

Soit $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'Itô, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds. \quad (1.7)$$

- **Formule d'intégration par parties :**

Soit X et Y deux processus d'Itô.

$$\begin{cases} dX = F^1 dt + G^1 dW_t \\ dY = F^2 dt + G^2 dW_t \end{cases}$$

Alors le produit XY est un processus d'Itô, et

$$d(XY) = Y dX + X dY + dX dY.$$

L'expression $dX dY$ est le terme correctif d'Itô. L'intégration de la règle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties.

1.4 Processus de diffusion

1.4.1 Équations différentielles stochastiques

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique (**EDS**), une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

avec :

$(W_t)_{t \geq 0}$: est un (\mathcal{F}_t) mouvement brownien m -dimensionnel sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P)

dW_t : est la différentielle d'un mouvement brownien standard (W_t) .

b, σ : deux fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

x_0 : est une valeur initiale.

Le coefficient b est appelé : **dérive**, tandis que σ est le : **coefficient de diffusion**.

Quand les coefficients b et σ ne dépend pas de temps, on dit que l'équation (1.8) est : **homogène**.

De plus, le processus qui résout l'équation (1.8) est appelé : **processus de diffusion**.

Définition 1.16. *Un processus stochastique à temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit de diffusion s'il est markovien c'est-à-dire s'il possède la propriété de Markov forte et à trajectoire presque sûrement continue.*

Définition 1.17. *Un processus X est solution de l'EDS (1.8). Si c'est un processus \mathcal{F} -adapté et satisfaisant :*

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds < \infty, \quad x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}^+,$$

et qui vérifiant l'équation

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s. \quad (1.9)$$

Définition 1.18. [**Processus de type diffusion avec retard proportionnel**]

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On appelle processus de type diffusion avec retard proportionnel toute solution $(X_t)_{t \in [0, T]}$ de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = X_{\theta t} dt + \epsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.10)$$

où

- $0 < \theta < 1$ est un paramètre de retard proportionnel,
- $x_0 \in \mathbb{R}$ est la condition initiale,

— $\epsilon \in (0,1)$ est l'intensité du bruit.

Remarque : Le processus (1.10) est qualifié de type diffusion, car il s'agit d'un processus à mémoire, ce qui lui fait perdre la propriété de Markov.

1.4.2 Existence et unicité des solutions d'EDS

Théorème 1.5. (Existence et unicité de solution)

On suppose que b et σ deux fonctions continues et bornées dans $[0, T]$ et qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$:

i) **Condition de Lipschitz :**

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|.$$

ii) **Condition de croissance :**

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2).$$

iii) $E(X_0) \leq +\infty$.

alors pour $t > 0$ l'EDS (1.8) admet une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$.

L'unicité signifie que si $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux solutions de (1.9), alors $X_t = Y_t$ P-p.s.

Remarque : On dit que les fonction b et σ vérifient la condition \mathcal{L} si et seulement si (i) et (ii) sont satisfaite.

Exemple 1.1.

- *Le mouvement brownien géométrique : il est utilisé dans le modèle de Black-Scholes(1975) d'évaluation d'option pour modéliser l'évolution du prix de l'action :*

$$dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- *Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck : il est utilisé dans le modèle de Vasicek (1979) de structure par terme des taux d'intérêt pour modéliser l'évolution du taux court instantané r_t :*

$$dr_t = b(a - r_t)dt + sdW_t.$$

Estimation par maximum de vraisemblance d'un processus de diffusion à retard proportionnel

2.1 Introduction et formulation de problème

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème fondamental d'estimation paramétrique dans un contexte non régulier. Plus précisément, nous considérons l'estimation d'un paramètre inconnu θ à partir de l'observation continue d'un processus de type diffusion dont la dérive présente une non-différentiabilité en θ . Cette irrégularité du modèle soulève des difficultés théoriques et méthodologiques qui nécessitent des approches spécifiques issues de l'analyse asymptotique. Soit un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien standard $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$. Pour chaque $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$, nous considérons le modèle, défini par l'équation différentielle stochastique à retard proportionnel :

$$dX_t = X_{\theta t} dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

où $\varepsilon \in (0, 1)$ est un petit paramètre de diffusion, et la fonction de dérive $S(\theta, X_t) = X_{t\theta}$ est non linéaire. L'équation intégrale correspondante à l'instant θt s'écrit :

$$X_{\theta t} = x_0 + \int_0^t X_{\theta^2 s} ds + \varepsilon W_{\theta t}.$$

Il est important de noter que ce modèle présente une irrégularité significative : la trajectoire de (X_t) possède la même régularité que celle du mouvement brownien, ce qui implique que la dérivée de $X_{t\theta}$ par rapport à θ n'existe pas, au sens classique, pour $t \in (0, T]$. De tels modèles apparaissent naturellement dans des domaines comme la finance, la biologie ou la physique, où des phénomènes complexes sont modélisés par des diffusions non linéaires à dérive non régulière. L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier le problème de l'estimation du paramètre θ à partir de l'observation du processus (X_t) sur l'intervalle $[0, T]$, dans l'asymptotique où le bruit ε tend vers zéro. Nous analysons les propriétés asymptotiques d'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) associé à ce modèle. En particulier, nous montrons que, sous certaines conditions, cet estimateur est consistant, asymptotiquement normal et efficace lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous associons à (2.1) l'équation déterministe correspondante à $\varepsilon = 0$ de solution $x = \{x_t, 0 \leq t \leq T\}$:

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = x_{\theta t}, & 0 \leq t \leq T, \\ x_0 \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu appartenant à un intervalle $\Theta = (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$.

Posons :

$$\sigma^2(\theta) = \int_0^T t^2 x_{\theta^2 t} dt.$$

La quantité σ^2 remplace la quantité de l'information de fisher $I(\theta)$ pour notre modèle. En effet :

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_0^T \left(\frac{\partial S_\theta(t)}{\partial \theta} \right)^2 dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta} x_{\theta t} \right)^2 dt \\ &= \int_0^T \left(t \cdot \frac{dx}{du} \Big|_{u=\theta t} \right)^2 dt \quad (\text{règle de la chaîne, avec } u = \theta t) \\ &= \int_0^T (t \cdot x_{t\theta^2})^2 dt \quad (\text{puisque } \frac{dx}{dt} = x_{\theta t} \text{ d'après l'EDO}) \\ &= \int_0^T t^2 (x_{t\theta^2})^2 dt \end{aligned}$$

Notons par (C_T, \mathcal{B}_T) l'espace mesurable des fonction continue sur $[0, T]$ où $\mathcal{B}_T = \sigma\{x_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Notons que, sous l'hypothèse où la condition initiale $X_0 = x_0 > 0$, la dérive de l'EDS satisfait les conditions \mathcal{L} d'où l'existence et l'unicité d'une solution forte de L'EDS (2.1) sur l'intervalle $[0, T]$. et tout les mesures $P_\theta^{(\varepsilon)}$ induit par le processus (2.1) dans l'espace mesurable (C_T, \mathcal{B}_T) sont équivalentes où $\varepsilon \in (0, 1)$. (pour plus de détails voir le livre de Kutoyants [3] théorème de Girsanov).

Définition 2.1. Un estimateur θ_ε du paramètre θ est défini comme une application mesurable

$$\theta_\varepsilon : C_T \rightarrow \overline{\Theta},$$

où $\overline{\Theta}$ est la fermeture de Θ .

2.2 Processus de rapport de vraisemblance

Notons par $L(\theta, X^T)$ le processus de rapport de vraisemblance (RV) associé à notre modèle (2.1)

$$L(\theta, X^T) := \frac{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}}$$

où $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ est la loi de probabilité de l'observation $(X_t, t \in [0, T])$ et $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}$ la loi de W_t s'appelle aussi la mesure de Wiener sur $[0, T]$.

D'après le théorème de Girsanov pour tout θ , les lois $\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$ et $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}$ sont équivalentes, nous avons le modèle statistique associée à l'observation $(X_t, t \in [0, T])$ défini par :

$$L(\theta, X^T) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t} dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t}^2 dt\right\}$$

(s'appelle la formule de Cameron- Martin).

Démonstration. Posons la variable aléatoire

$$Z_\varepsilon = \exp\left\{\frac{-1}{\varepsilon} \int_0^T X_{\theta t} dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t}^2 dt\right\}$$

Z_ε est strictement positive et $\mathbb{E}(Z_\varepsilon) = 1$ de sorte que $\mathbb{P}^{(\varepsilon)} = Z_\varepsilon \mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}$.

Or $dW_t = \frac{1}{\varepsilon}(dX_t - X_{\theta t} dt)$, donc :

$$Z_\varepsilon = \exp\left\{\frac{-1}{\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t} dX_t + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t}^2 dt\right\}$$

et

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^{(\varepsilon)}}{d\mathbb{P}^{(\varepsilon)}} = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t} dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T X_{\theta t}^2 dt\right\}$$

2.3 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_\varepsilon$, pour une observation $X^T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, vérifiant (2.1), est défini comme la solution de l'équation

$$L(\hat{\theta}_\varepsilon, \theta_1, X^T) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, \theta_1, X^T), \quad (2.2)$$

où le rapport de vraisemblance est

$$L(\theta, \theta_1, X^T) = \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}(X^T),$$

où θ_1 est une valeur fixée du paramètre θ .

Si l'équation (2.2) a plusieurs solutions, alors on prend une d'entre elles comme $\hat{\theta}_\varepsilon$. Le rapport de vraisemblance $L(\theta, \theta_1, X^T)$, $\theta \in \Theta$ dans notre problème est continu en θ , donc la solution de (2.2) va toujours exister. En général, la solution ne peut pas être trouvée directement, il est souvent nécessaire d'utiliser des méthodes numériques d'optimisation. De nombreuses techniques sont disponibles pour ce type d'optimisation.

la condition de normalité asymptotique locale de Le Cam est une notion de base qui joue un rôle important dans l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs de paramètre θ .

2.3.1 Normalité asymptotique locale

Notons par $Z_\varepsilon(\cdot)$ le processus de rapport de vraisemblance calculé pour l'observation

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(u) &:= \frac{dP_{\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T), \quad u \in \mathbb{R} \\ &= L(\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u, \theta, X^T), \end{aligned}$$

où $\theta \in \Theta$ et les valeurs $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u$ correspondent aux autres valeurs possibles du paramètre pour une normalisation adéquate φ_ε qui est une constante telle que $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u \in \Theta$.

Définition 2.2. Une famille $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ est dite localement asymptotiquement normale (LAN) au point $\theta_0 \in \Theta$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, si le rapport de vraisemblance admet, sous une normalisation adéquate $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\theta_0)$ et tout $u \in \mathbb{R}^d$, la représentation suivante

$$Z_\varepsilon(u) := L(\theta_0 + \varphi_\varepsilon(\theta_0)u, \theta_0, X^T) = \exp\left\{u\Delta_\varepsilon - \frac{1}{2}u^2 + \psi_\varepsilon(u, \theta_0)\right\}, \quad (2.3)$$

où Δ_ε et (u, θ_0) sont des variables aléatoires telle que

$$\mathcal{L}_{\theta_0}(\Delta_\varepsilon) \Rightarrow \mathcal{N}(0, I), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(u, \theta_0) = 0, \quad \text{en probabilité}$$

Ci-dessous (\cdot) est une fonction de perte de la classe $W_{e,2}$, espace de fonctions à croissance majorée par une exponentielle quadratique, c.à.d :

$$W_{e,2} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \gamma > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq e^{\gamma|x|^2}, \text{ lorsque } |x| \rightarrow \infty \right\}.$$

, et ξ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Comme précédemment, $P_\theta^{(\varepsilon)}$ désigne la mesure de probabilité induite dans (C_T, B_T) par le processus observé.

L'inégalité de Hajek-Le Cam est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.1. Pour tout estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ de paramètre θ , on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} E_\theta(\sigma(\theta_0)\varepsilon^{-1}(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)) \geq E_\theta(\xi). \quad (2.4)$$

Théorème 2.2. la famille de mesures $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN sur $\theta \in K$ de constante de normalisation $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon\sigma^{-1}(t)$ et sous P_θ^ε , la statistique.

$$\Delta(\theta, X^T) = \sigma(\theta)^{-1}\varepsilon^{-1} \int_0^T tx_{\theta t}^2 [dX_t - X_{\theta t}dt],$$

suit une normal centrée réduite.

Pour démontrer ce théorème on a besoin d'ennocer les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1. (Lemme de Grönwell)

Soient u, v deux fonctions continues positives telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq K + \int_0^T v(s)u(s)ds, \quad K \text{ est une constante,}$$

alors

$$u(t) \leq K \exp \int_0^t v(s)ds.$$

Lemme 2.2. *Sous l'hypothèse de régularité, nous avons $P_\theta^{(\varepsilon)}$ p.s les majorations suivantes : la condition \mathcal{L} , de Lipschitzet de croissance usuelles*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \leq K_1 \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq T} |W_t|, \quad K > 0. \quad (*)$$

$$\mathbb{E}_\theta |X_t - x_t|^2 \leq K_2 \varepsilon^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (**)$$

L'estimation (*) du lemme, établie la convergence uniforme de X_t vers x_t , pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. (du Théorème 2.2).

Pour tout $\theta \in k \in \Theta, u_\varepsilon \rightarrow u(\in \mathbb{R})$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

notons $\theta_u = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon$.

Le rapport de vraisemblance normalisé

$$Z_\varepsilon(u) = L(\theta_u, \theta, X^T),$$

admet l'expression suivante :

$$\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t}) dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t})^2 dt.$$

Pour l'intégrale stochastique, on écrit :

$$X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t} = \varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon \cdot tx_{\theta^2 t} + (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t} - \varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon \cdot tx_{\theta^2 t}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t}) dW_t &= \frac{u_\varepsilon \varphi_\varepsilon(\theta)}{\varepsilon} \int_0^T tx_{\theta^2 t} dW_t \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t} - \varphi_\varepsilon(\theta)u_\varepsilon tx_{\theta^2 t}) dW_t \end{aligned}$$

or $\varphi_\varepsilon(\theta) = \varepsilon \sigma^{-1}(\theta)$.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t}) dW_t &= u_\varepsilon \sigma^{-1}(\theta) \int_0^T tx_{\theta^2 t} dW_t \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{u_t}} - X_{\theta_t} - \varepsilon \sigma^{-1}(\theta)u_\varepsilon tx_{\theta^2 t}) dW_t. \end{aligned}$$

En posant

$$\Delta(\theta, X^T) = \sigma^{-1}(\theta) \int_0^T tx_{\theta^2 t} dW_t,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) &= u\Delta(\theta, X^T) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{ut}} - X_{\theta t} - \varepsilon\sigma^{-1}(\theta)u_\varepsilon tx_{\theta^2 t}) dW_t \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (X_{\theta_{ut}} - X_{\theta t})^2 dt. \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$u \cdot \Delta(\theta, X^T) = u_\varepsilon \cdot \Delta(\theta, X^T) - (u_\varepsilon - u) \cdot \Delta(\theta, X^T),$$

et par suit :

$$\ln Z_\varepsilon(u_\varepsilon) = u\Delta(\theta, X^T) - \frac{1}{2}u^2 + r_1(u_\varepsilon) - \frac{1}{2}r_2(u_\varepsilon),$$

avec

$$\begin{cases} r_1(u_\varepsilon) = (u_\varepsilon - u)\Delta(\theta, X^T) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_{ut}} - X_{\theta t} - \varepsilon\sigma^{-1}(\theta)u_\varepsilon tx_{\theta^2 t}) dW_t, \\ r_2(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (X_{\theta_{ut}} - X_{\theta t})^2 dt - u^2. \end{cases}$$

Il convient maintenant d'étudier la convergence en loi $\Delta(\theta, X^T)$ et de montrer que r_1 et r_2 sont négligeable .

i) La variable $\Delta(\theta, X^T)$ est définie par :

$$\Delta(\theta, X^T) = \sigma^{-1} \int_0^T tx_{\theta^2 t} dW_t$$

Commençons par rétablir la variance du $\Delta(\theta, X^T)$. en utilisant l'isométrie d'Ito, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta(\theta, X^T)) &= E \left[\left(\frac{1}{\sigma(\theta)} \int_0^T tx_{\theta^2}(t) dW_t \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2(\theta)} \int_0^T (tx_{\theta^2}(t))^2 dt. \end{aligned}$$

En résulte que :

$$\text{Var}(\Delta(\theta, X^T)) = 1$$

Puisque $\Delta(\theta, X^T)$ est une intégrale stochastique d'Itô, on a :

$$\mathbb{E}[\Delta(\theta, X^T)] = \frac{1}{\sigma(\theta)} \mathbb{E} \left(\int_0^T tx_{\theta^2}(t) dW_t \right) = 0$$

car l'espérance d'une intégrale d'Itô est nulle des lors que l'intégrante est dans $L^2([0, T])$, ce qui est le cas ici .

alors

$$\mathcal{L}_\varepsilon \{ \Delta(\theta, X^T) \} = \mathcal{N}(0, 1).$$

ii) Montrons que $P_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_2(u_\varepsilon) = 0$.

On a

$$\begin{aligned} |r_2(u_\varepsilon)|^2 &= \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t})^2 dt - u_\varepsilon^2 \right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t})^2 dt - \int_0^T (\varepsilon^{-1} \varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon t x_{\theta^2 t})^2 dt \right]^2 \end{aligned}$$

car : $\varepsilon^{-1} \varphi_\varepsilon(\theta) = \sigma^{-1}(\theta)$ et $\sigma^2(\theta) = \int_0^T t^2 x_{\theta^2 t}^2$. Et par suite

$$\begin{aligned} |r_2(u_\varepsilon)|^2 &= \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left((x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t})^2 - (\varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon t x_{\theta^2 t})^2 \right) dt \right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t} - \varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon t x_{\theta^2 t})(x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t} + \varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon t x_{\theta^2 t}) dt \right]^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'intégrale de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$|r_2(u_\varepsilon)|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t} - \varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon t x_{\theta^2 t})^2 dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T (x_{\theta_{ut}} - x_{\theta t} + \varphi_\varepsilon(\theta) u_\varepsilon t x_{\theta^2 t})^2 dt$$

et considérez séparément les deux premiers termes. Nous avons

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2} E_\theta \int_0^T [X_{\theta_{uct}} - X_{\theta t} - u_\varepsilon \varepsilon t \sigma(\theta)^{-1} x_{\theta^2 t}]^2 dt \\ &= \varepsilon^{-2} E_\theta \int_0^T \left\{ \int_{\theta t}^{\theta_{uct}} [X_{\theta s} - x_{\theta^2 t}] ds + \varepsilon [W_{\theta_{uct}} - W_{\theta t}] \right\}^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2\sigma(\theta)^{-1} |u_\varepsilon| T}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\theta t}^{\theta_{uct}} E_\theta [X_{\theta s} - x_{\theta^2 t}] ds dt + 2T |u_\varepsilon| \sigma(\theta)^{-1} \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour la dernière espérance mathématique, nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned} \sup_{\theta t \leq s \leq \theta_{uct}} E_\theta |X_{\theta s} - x_{\theta^2 t}|^2 &\leq 2 \sup_{\theta t \leq s \leq \theta_{uct}} E_\theta |X_{\theta s} - x_{\theta s}|^2 \\ &\quad + 2 \sup_{\theta t \leq s \leq \theta_{uct}} |x_{\theta s} - x_{\theta^2 t}| \end{aligned}$$

La convergence vers zéro du dernier terme résulte de la continuité uniforme de la fonction x_t et pour le premier, on a

$$\begin{aligned} E_\theta |X_t - x_t|^2 &\leq 2E_\theta \left(\int_0^t (X_{\theta s} - x_{\theta s}) ds \right)^2 + 2\varepsilon^2 E W_t^2 \\ &\leq \int_0^t E_\theta (X_{\theta s} - x_{\theta s})^2 ds + 2\varepsilon^2 t \\ &\leq \frac{2T}{\theta} \int_0^{\theta t} E_\theta (X_v - x_v)^2 dv + 2\varepsilon^2 T \\ &< \frac{2T}{\theta} \int_0^t E_\theta (X_v - x_v)^2 dv + 2\varepsilon^2 T, \end{aligned}$$

en rassemblant toutes ces estimation, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \sup_{\theta \in K} E_{\theta} \|X_{\theta_{u_{\varepsilon}t}} - X_{\theta t} - u_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}(\theta) t x_{\theta 2t}\|^2 = 0.$$

Pour tout suite $u_{\varepsilon} \rightarrow u$. Nous avons donc établi la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\theta \in K} E_{\theta} |r_2(u_{\varepsilon})|^2 = 0.$$

La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité, d'où le 1^{er} résultat.

iii) Pour le terme $r_1(u_{\varepsilon})$

L'inégalité de Tchebychev fournit

$$\begin{aligned} P_{\theta}^{(\varepsilon)} \{|r_1(u_{\varepsilon})| > \delta\} &\leq \frac{E r_1^2}{\delta^2} \leq 2 \frac{(u_{\varepsilon} - u)^2}{\delta^2} \\ &+ \frac{2}{\delta^2} E_{\theta} \|X_{\theta_{u_{\varepsilon}t}} - X_{\theta t} - u_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}(\theta) t x_{\theta 2t}\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

également uniformément sur $\theta \in K$.

Et par suite ;

$$P_{\theta}^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_1(u_{\varepsilon}) = 0$$

2.3.2 Comportement asymptotique de l'EMV

Dans le cas régulier quand la famille $\{P^{(\varepsilon)\theta}, \theta \in \Theta\}$ est LAN on a le résultat suivants, (voir [5] théorème 10.1) :

Théorème 2.3. Soit $\Theta \subset \mathbb{R}$, et soient les fonctions $Z_{\varepsilon}(u)$ continues et possédant les propriétés suivantes :

1. Pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$

- il existe $\alpha > 1$ et $m \geq \alpha$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{K}$

$$\sup_{\theta \in \mathbb{K}} \sup_{|u_1| < R, |u_2| < R} |u_2 - u_1|^{-\alpha} \mathbb{E}_{\theta} |Z_{\varepsilon}^{1/m}(u_2) - Z_{\varepsilon}^{1/m}(u_1)|^m \leq C(1 + R^{\alpha}),$$

où C et α deux constantes qui dépendent de \mathbb{K} .

- Pour tout $u \in U_{\varepsilon}$ et $\theta \in \mathbb{K}$,

$$\mathbb{E}_{\theta} Z_{\varepsilon}^{1/2}(u) \leq \exp\{-g(u)\},$$

où $g(\cdot)$ est une fonction positive.

2. Uniformément en $\theta \in \mathbb{K}$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, les distributions à dimension finie des fonctions aléatoires $Z_{\varepsilon}(u)$ convergent vers les distributions des fonctions aléatoires $Z(u)$.

3. Les fonctions limites $Z(u)$ atteignent la maximum en un point unique $\tilde{u}(\theta)$.

Alors uniformément en $\theta \in \mathbb{K}$, la distribution de la v.a $\varphi_{\varepsilon}^{-1}(\theta)(\tilde{\theta}_{\varepsilon} - \theta)$ converge vers la distribution de $\tilde{u}(\theta)$.

Nous allons maintenant énoncer le théorème qui établit le comportement asymptotique de l'EMV.

Théorème 2.4. [1] Uniformément sur tout compact $\mathbb{K} = [a, b]$ de Θ , l'estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ vérifie :

1. $P_\theta^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta$.
2. $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_0 |\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)|^p = \mathbb{E}_0 |\Delta|^p$ pour tout $p > 0$,
où $\Delta \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Pour démontrer le théorème (2.4), nous vérifions les hypothèses du théorème (2.3) en nous basant sur les deux lemmes suivants.

Lemme 2.3. Pour tout $R > 0$ et $K \subset \theta$, nous avons

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{|u_i| < R} |u_2 - u_1|^{-2} E_\theta |Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_1)|^4 \leq B(1 + R^6)$$

avec une constante $B > 0$.

Démonstration. On note

$$\theta_i = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_i, i = 1, 2; \quad \Delta X_t = X_{\theta_1 t} - X_{\theta_2 t};$$

On considère le processus :

$$Y_t = \exp\left\{\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \Delta X_s dW_s - \frac{1}{8\varepsilon^2} \int_0^t (\Delta X_s)^2 ds\right\}.$$

En fait, on peut écrire :

$$Y_t = \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X) \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Si on pose

$$Y_t = \exp(Z_\varepsilon)$$

avec

$$Z_\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \Delta X_s dW_s - \frac{1}{8\varepsilon^2} \int_0^t (\Delta X_s)^2 ds$$

En appliquant la formule d'Itô, nous trouvons

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t \left(\frac{1}{4\varepsilon} \Delta X_t - \frac{1}{8\varepsilon^2} (\Delta X_t)^2 dt \right) + \frac{1}{2} Y_t \left(\frac{1}{16\varepsilon^2} (\Delta X_t)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{4\varepsilon} \Delta X_t Y_t dW_t - \left(\frac{1}{8\varepsilon^2} - \frac{1}{32\varepsilon^2} \right) (\Delta X_t)^2 Y_t dt \\ &= \frac{1}{4\varepsilon} \Delta X_t Y_t dW_t - \frac{3}{32\varepsilon^2} (\Delta X_t)^2 Y_t dt. \end{aligned}$$

Et par suite :

$$Y_T = 1 - \frac{3}{32\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t)^2 Y_t dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T \Delta X_t Y_t dW_t.$$

On a : $Z_\varepsilon(u) = L(\theta_u, \theta, X^T) = \frac{dP_{\theta_u}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T)$, avec $\theta_u = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u$.

Et :

$$\theta_1 = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_1, \quad \theta_2 = \theta + \varphi_\varepsilon(\theta)u_2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} (Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)) &= \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T) \right)^{1/4} - \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T) \right)^{1/4} \right|^4 \\ &= \int_\Omega \left| \left(\frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T) \right)^{1/4} - \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) \cdot \frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T) \right)^{1/4} \right|^4 dP_\theta^{(\varepsilon)} \\ &= \int_\Omega \frac{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}{dP_\theta^{(\varepsilon)}}(X^T) \left| 1 - \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) \right)^{1/4} \right|^4 dP_\theta^{(\varepsilon)} \\ &= \int_\Omega \left| 1 - \left(\frac{dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}}(X^T) \right)^{1/4} \right|^4 dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}(X^T). \\ &= \left| 1 - L^{1/4}(\theta_1, \theta_2, X^T) \right|^4 \\ &= \left| 1 - Y_T \right|^4. \end{aligned}$$

- Ci-dessous, nous utilisons l'inégalité $|a + b|^4 \leq 8a^4 + 8b^4$ et l'inégalité de Schwarz.

$$\begin{aligned} E_\theta |Z_\varepsilon^{1/4}(u_2) - Z_\varepsilon^{1/4}(u_1)|^4 &= E_{\theta_2} |1 - Y_T|^4 \\ &\leq 8E_{\theta_2} \left| \frac{3}{32\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta X_t)^2 Y_t dt \right|^4 + 8E_{\theta_2} \left| \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T \Delta X_t Y_t dW_t \right|^4 \\ &\leq \frac{8.3^4.T^3}{32^4\varepsilon^8} \int_0^T E_{\theta_2} Y_t^4 (\Delta X_t)^8 dt + \frac{9T}{8\varepsilon^4} \int_0^T E_{\theta_2} Y_t^4 (\Delta X_t)^4 dt \\ &= \frac{C_1}{\varepsilon^8} \int_0^T E_{\theta_1} (\Delta X_t)^8 dt + \frac{C_2}{\varepsilon^4} \int_0^T E_{\theta_1} (\Delta X_t)^4 dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour la dernière inégalité, nous avons utiliser l'estimation (1.4) du lemme(1.2),

De plus,

$$\begin{aligned} E_\theta (\Delta X_t)^8 &= E_\theta \left\{ \int_{\theta_1 t}^{\theta_2 t} X_{\theta_1 s} ds + \varepsilon [W_{\theta_2 t} - W_{\theta_1 t}] \right\}^8 \\ &\leq C_3 [(\theta_2 - \theta_1)t]^8 \int_{\theta_1 t}^{\theta_2 t} E_{\theta_1} (X_{\theta_1 s})^8 ds + C_4 \varepsilon^8 t^4 (\theta_2 - \theta_1)^4. \end{aligned}$$

En utilisant la représentation intégrale du modèle (2.1), nous dérivons l'inégalité

$$E_\theta(X_t)^8 \leq a + b \int_0^t E_{\theta_1}(X_{\theta_1 s})^8 ds \leq a + \frac{b}{\theta_1} \int_0^t E_{\theta_1}(X_s)^8 ds,$$

avec certaines constantes $a = a(x_0, T) > 0$ et $b = b(T) > 0$. Ainsi, l'espérance mathématique $\sup_{t, \theta} E_\theta(X_t)^8$, par conséquent, est bornée par le lemme de Grönwell.

Or

$$|\theta_2 - \theta_1| = \varphi(\theta) |u_2 - u_1|$$

donc :

$$E_{\theta_1}(\Delta X_t)^8 \leq C_1 |u_2 - u_1|^8 \varepsilon^8 + C_2 |u_2 - u_1|^4 \varepsilon^{12}.$$

de manière analogue

$$E_{\theta_1}(\Delta X_t)^4 \leq C_3 |u_2 - u_1|^4 \varepsilon^4 + C_4 |u_2 - u_1|^2 \varepsilon^6.$$

Avec certaines constantes $C_i > 0, i = 1, \dots, 4$.

En substituant ces inégalités dans (2.6), on obtient

$$E_\theta |Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_1)|^4 \leq C_1 |u_2 - u_1|^8 + C_2 |u_2 - u_1|^4 + C_3 |u_2 - u_1|^2,$$

où les constantes C_i ne dépendent pas de θ et θ . Finalement, on en déduit

$$\sup_{|u_i| < R} |u_2 - u_1|^{-2} E_\theta |Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_2) - Z_\varepsilon^{\frac{1}{4}}(u_1)|^4 \leq B(1 + R^6)$$

avec une constante $B > 0$ qui ne dépend pas de θ .

Lemme 2.4. Pour tout $K \subset \Theta$ et $p \in (0, 1)$, il existe $g(\cdot) \in G$ tel que

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta Z_\varepsilon^p(u) \leq e^{-g(u)}.$$

Démonstration. on a

$$Z_\varepsilon(u) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (X_{\theta_u} t - X_{\theta_t}) dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (X_{\theta_u} t - X_{\theta_t})^2 dt\right)$$

on a :

$$\Delta_t := \frac{1}{\varepsilon} (X_{\theta_u} t - X_{\theta_t}) \Rightarrow Z_\varepsilon(u) = \exp\left(\int_0^T \Delta_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \Delta_t^2 dt\right)$$

Donc

$$\mathbb{E}_\theta [Z_\varepsilon^p(u)] = \mathbb{E}_\theta \left[\exp\left(p \int_0^T \Delta_t dW_t - \frac{p}{2} \int_0^T \Delta_t^2 dt\right) \right].$$

on prend $q \in (p, 1)$,

on écrit sous la forme :

$$= \mathbb{E}_\theta \left[\exp \left(p \int \Delta_t dW_t - \frac{q}{2} \int \Delta_t^2 dt \right) \cdot \exp \left(-\frac{p-q}{2} \int \Delta_t^2 dt \right) \right].$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder en utilisant les exposants p_1, p_2 , où

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \quad p_2 = \frac{q}{p^2}$$

alors

$$\mathbb{E}_\theta [Z_\varepsilon^p(u)] \leq \left(\mathbb{E}_\theta \left[\exp \left(-\frac{p_1(p-q)}{2} \int \Delta_t^2 dt \right) \right] \right)^{1/p_1} \cdot \left(\mathbb{E}_\theta \left[\exp \left(qp_2 \int \Delta_t dW_t - \frac{q}{2} p_2 \int \Delta_t^2 dt \right) \right] \right)^{1/p_2}$$

Le second facteur est égal à 1 (c'est l'espérance exponentielle d'une martingale gaussienne). Dans le premier facteur, le coefficient devant l'intégrale est :

$$\gamma = \frac{(q-p)p_1}{2} > 0$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_\theta [Z_\varepsilon^p(u)] \leq E_\theta \left(\exp \left(-\gamma \int_0^T \Delta_t^2 dt \right) \right)^{1/p_1}.$$

Or, grâce aux propriétés de $X_{\theta,t}$, il existe des constantes $C_1, C_3 > 0$ telles que

$$\int_0^T \Delta_t^2 dt \geq C_1 u^2, \quad \left| \int_0^T \Delta_t dW_t \right| \leq C_3 |u| \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|.$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}_\theta [Z_\varepsilon^p(u)] \leq \exp(-\gamma C_1 u^2) \cdot \mathbb{E} [\exp(\gamma C_3 |u| \sup |W_t|)].$$

Par une estimation gaussienne bien connue, on a pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{E} [\exp(a \sup |W_t|)] \leq C e^{ca^2}.$$

Il vient donc :

$$\mathbb{E}_\theta [Z_\varepsilon^p(u)] \leq \exp(-c_1 u^2 + c_2 |u|).$$

En posant :

$$g(u) = c_1 u^2 - c_2 |u| \in \mathcal{G}$$

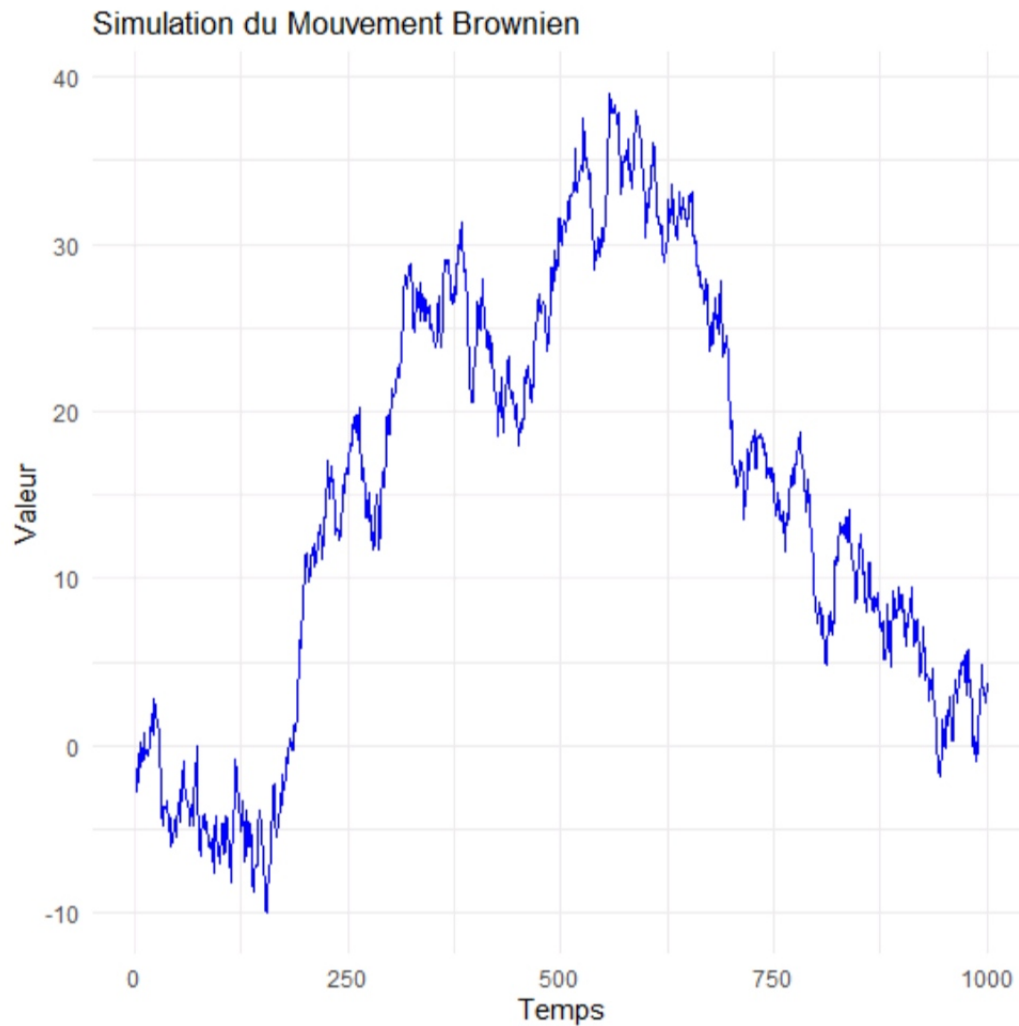
$$\sup_{\theta \in K} \mathbb{E}_\theta [Z_\varepsilon^p(u)] \leq e^{-g(u)}$$

2.4 Simulation

2.4.1 Trajectoire d'un mouvement Brownien

Nous utilisons la fonction "brownian-motion" pour simuler le mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$, $W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}$, représentant des variables aléatoires indépendantes de distribution gaussienne centrées réduites.

```
library(ggplot2)
Fonction pour simuler le mouvement brownien
brownian-motion <- fonction (n-steps=1000, delta-t=1)
{
# Générer les incréments de mouvement brownien
increments <- rnorm ( n-steps n-steps, mean=0, sd=sqrt(delta-t))
# Calculer les valeurs du mouvement brownien
brownian-values <-cumsum(increments)
return( brownian_values) }
# Paramètres de simulation
n-steps <-1000 # Nombre de pas
delta-t <-1 # Intervalle de temps
# Simulation du mouvement brownien
brownian-values <- brownian-motion (n_steps, delta-t)
# Créer un data frame pour les données
data <-data.frame(temps = seq(1, n-steps), valeur = brownian-values)
# Tracer le mouvement brownien avec ggplot2
ggplot (data, aes( x=temps, y=valeur))+
geom-line (color ="blue")+
labs (x ="Temps" , y="Valeur", title=" Simulation du Mouvement Brownien")
+
theme-minimal
```



2.4.2 Trajectoires d'un processus de type diffusion avec retard proportionnel

La dynamique du processus est gouvernée par une fonction de dérive dépendant d'une valeur retardée du processus et par un terme de diffusion proportionnel à un paramètre ε , Pour générer les trajectoires, nous utilisons :

1. La méthode d'Euler-Maruyama pour l'intégration stochastique.
2. Une condition initiale constante définie sur l'intervalle de retard.
3. Différentes valeurs de ε afin de comparer l'impact de l'intensité du bruit aléatoire sur les trajectoires.

L'implémentation est réalisée en langage *R*, en simulant plusieurs trajectoires du processus pour des valeurs décroissantes de ε .

```

library(ggplot2)
library(dplyr)
T <- 10
N <- 5000
h <- T / N
x0 <- 1
theta <- 0.1
epsilons <- c(0.1, 0.5, 2)
set.seed(123)

# Simulation Euler-Maruyama avec retard proportionnel
simulate_delay <- function(epsilon, T, N, h, x0, theta) {
  tgrid <- seq(0, T, length.out = N+1)
  X <- numeric(N+1)
  X[1] <- x0
  W <- c(0, cumsum(sqrt(h) * rnorm(N))) # Wiener
  for (i in 2:(N+1)) {
    t <- tgrid[i]
    t_delay <- theta * t
    j <- floor(t_delay / h) + 1
    if (j < 1) j <- 1
    drift <- X[j]
    diffusion <- epsilon * (W[i] - W[i-1])
    X[i] <- X[i-1] + drift * h + diffusion
  }
  return(data.frame(time = tgrid, X = X, epsilon = factor(epsilon)))
}

# Simulation déterministe (EDO)
simulate_edo <- function(T, N, h, x0, theta) {
  tgrid <- seq(0, T, length.out = N+1)
  X <- numeric(N+1)
  X[1] <- x0
  for (i in 2:(N+1)) {
    t <- tgrid[i]
    t_delay <- theta * t
    j <- floor(t_delay / h) + 1
    if (j < 1) j <- 1
    drift <- X[j]
    X[i] <- X[i-1] + drift * h # pas de bruit ici
  }
  return(data.frame(time = tgrid, X = X))
}

# Générer trajectoires stochastiques
trajectories <- do.call(rbind, lapply(epsilons, simulate_delay,
  T = T, N = N, h = h, x0 = x0, theta = theta))
# Générer trajectoire déterministe
traj_deterministic <- simulate_edo(T, N, h, x0, theta)

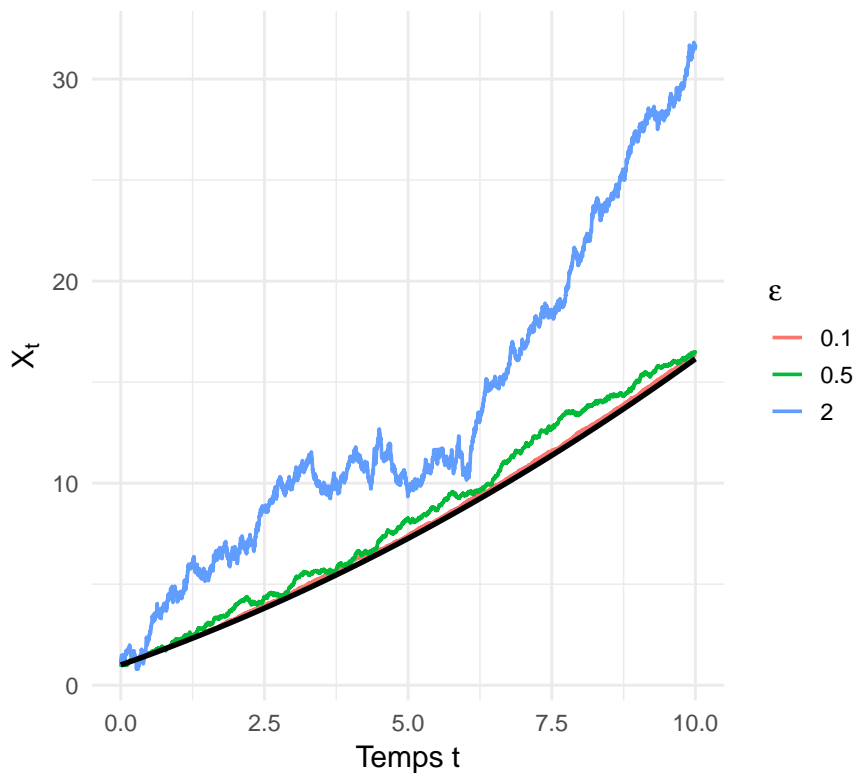
```

```

# Tracer
ggplot() +
  geom_line(data = trajectories, aes(x = time, y = X, color = epsilon),
    size = 0.8) + geom_line(data = traj_deterministic, aes(x = time, y = X),
    color = "black", size = 1.2, linetype = "solid") +
  labs(title = "Trajectoires du processus à retard proportionnel",
    subtitle = "En noir : solution déterministe (EDO)",
    x = "Temps t", y = expression(X[t]),
    color = expression(epsilon)) +
  theme_minimal(base_size = 14)

```

Trajectoires du processus à retard proportionnel
En noir : solution déterministe (EDO)



Conclusion :

Les résultats numériques montrent que lorsque ε est grand, les trajectoires de l'EDS présentent de fortes fluctuations dues à l'effet du bruit. En revanche, plus ε devient petit, plus les trajectoires deviennent régulières et tendent à s'approcher de la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) associée, c'est-à-dire le modèle sans bruit. Ainsi, la simulation illustre clairement la convergence du modèle stochastique vers le modèle déterministe lorsque l'intensité du bruit diminue.

2.4.3 Comportement de l'estimateur de maximum de vraisemblance

Pour bien mettre en évidence le comportement asymptotique de l'emv pour cet exemple nous abordons une simulation numérique. suit des étapes pour calculer la valeur explicite de l'emv du paramètre inconnu θ qui maximise la fonction Log-vraisemblance pour chaque $\varepsilon \in (0, 1)$.

La formule discrétisée de la fonction Log-vraisemblance est :

$$\ln L(\theta; \theta_0; X) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_\theta} - X_{t_{\theta_0}}) \Delta W_i - \frac{1}{2\epsilon^2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_\theta} - X_{t_{\theta_0}})^2 \Delta t,$$

où $\Delta W_i = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ est l'incrément brownien et $\Delta t = h = T/N$ est le pas de discrétisation.

```

library(ggplot2)
# Paramètres
T <- 10
N <- 2000
h <- T/N
x0 <- 1
theta0 <- 0.25 # vraie valeur
epsilon_values <- seq(0.01, 1, by = 0.01) # valeurs de epsilon
theta_grid <- seq(0.05, 0.95, length.out = 100)
# Fonction de simulation (EDS simplifiée)
simulate_X <- function(theta, epsilon) {
  tgrid <- seq(0, T, length.out = N+1)
  W <- c(0, cumsum(sqrt(h) * rnorm(N)))
  X <- numeric(N+1)
  X[1] <- x0
  for (i in 2:(N+1)) {
    t <- tgrid[i]
    j <- min(N+1, max(1, floor(theta * t / h) + 1)) # borne de sécurité
    drift <- X[j]
    diffusion <- epsilon * (W[i] - W[i-1])
    X[i] <- X[i-1] + drift*h + diffusion
  }
  return(list(t=tgrid, X=X, W=W))
}

# Log-vraisemblance discrétisée
loglik <- function(X, W, theta, theta0, epsilon) {
  n <- length(X)
  tgrid <- seq(0, T, length.out = n)
  idx_theta <- pmax(1, pmin(n, floor(theta * tgrid / h) + 1))
  idx_theta0 <- pmax(1, pmin(n, floor(theta0 * tgrid / h) + 1))
  diff_proc <- X[idx_theta] - X[idx_theta0]
  dW <- diff(W)
  dt <- rep(h, n-1)
  term1 <- sum(diff_proc[-1] * dW) / epsilon
  term2 <- sum((diff_proc[-1])^2 * dt) / (2*epsilon^2)
  return(term1 - term2)
}

# Calcul de l'EMV pour chaque epsilon
results <- data.frame()
for (eps in epsilon_values) {
  sim <- simulate_X(theta0, eps)
  ll_vals <- sapply(theta_grid, function(th) loglik(sim$X, sim$W, th,
    theta0, eps))
  theta_hat <- theta_grid[which.max(ll_vals)]
  results <- rbind(results, data.frame(epsilon=eps, theta_hat=theta_hat))
}

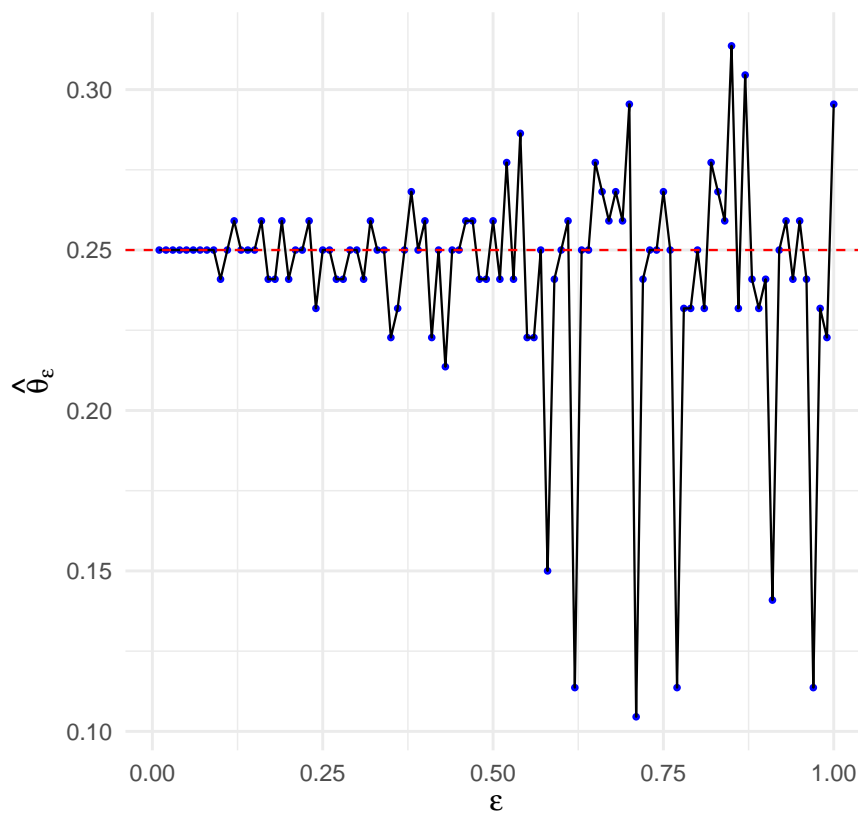
```

```

# Tracé
ggplot(results, aes(x=epsilon, y=theta_hat)) + geom_point(size=1,
color="blue")
+   geom_line() + geom_hline(yintercept=theta0, linetype="dashed",
color="red") +
labs(title="Convergence en probabilité de l'EMV vers \theta 0",
x=expression(epsilon),
y=expression(hat(theta)[epsilon])) +
theme_minimal(base_size=14)

```

Comportement de l'EMV en fonction de epsilon

**conclusion :**

Nous remarquons des fluctuations récurrentes dues au mouvement brownien et qu'à partir d'un certain ordre de grandeur de ε l'interaction du mouvement brownien diminue. Dans ce cas l'emv est d'autant plus proche de la vraie valeur de θ ($=0.25$) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ ceci confirme les résultats obtenus théoriquement

Test paramétrique entre deux hypothèses simples pour un processus de diffusion à retard proportionnel

3.1 Introduction

Après avoir étudié dans le chapitre précédent l'estimation paramétrique par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV) pour un processus de diffusion à retard proportionnel avec petit paramètre de diffusion, il est naturel de s'intéresser à la problématique du test statistique. L'objectif de ce chapitre est d'introduire un premier exemple de test paramétrique pour notre modèle de diffusion retardé. Nous allons nous restreindre au cas le plus simple, celui d'un test d'hypothèse simple contre hypothèse simple, afin de mettre en évidence les mécanismes essentiels de la méthode et d'illustrer le rôle fondamental du rapport de vraisemblance et de son comportement asymptotique lorsque le bruit ε tend vers zéro. Ce test permet d'évaluer la compatibilité des données observées avec l'hypothèse nulle spécifiée.

3.2 Préliminaire et notations

Nous considérons le modèle suivant

$$dX_t = X_{\theta t} dt + \varepsilon dW_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = x_0,$$

Le paramètre $\theta \in (0, 1)$.

Nous voulons tester les hypothèses simples

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1,$$

où $\theta_1 \in (0, 1)$ est une valeur alternative donnée.

Notations

1. L'accroissement de la dérive est

$$\Delta S_\varepsilon(t) := S_{\theta_1}(t) - S_{1/2}(t) = X_{\theta_1 t} - X_{t/2}, \quad t \in [0, T].$$

2. Soit $x^0 = \{x_t^0, 0 \leq t \leq T\}$ la solution de l'équation déterministe associée sous \mathcal{H}_0 :

$$\frac{dx_t^0}{dt} = x_{t/2}^0, \quad x_0^0 = x_0.$$

On pose

$$I_0 := \int_0^T (x_{\theta_1 t}^0 - x_{t/2}^0)^2 dt.$$

3. De même, soit $x^1 = \{x_t^1, 0 \leq t \leq T\}$ la solution de l'équation déterministe correspondante sous \mathcal{H}_1 :

$$\frac{dx_t^1}{dt} = x_{\theta_1 t}^1, \quad x_0^1 = x_0,$$

et on pose

$$I_1 := \int_0^T (x_{\theta_1 t}^1 - x_t^1)^2 dt.$$

4. Enfin, définissons les variables aléatoires

$$\xi_0^{(\varepsilon)} := \int_0^T \frac{\Delta S_\varepsilon(t)}{\sqrt{I_0}} dW_t, \quad \xi_1^{(\varepsilon)} := \int_0^T \frac{\Delta S_\varepsilon(t)}{\sqrt{I_1}} dW_t,$$

en supposant $I_0, I_1 > 0$.

3.3 Construction du test de rapport de vraisemblance

Pour l'observation $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, le logarithme du rapport de vraisemblance s'écrit

$$\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \Delta S_\varepsilon(t) dX_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (S_{\theta_1}(t)^2 - S_{1/2}(t)^2) dt, \quad (3.1)$$

où $\Delta S_\varepsilon(t) = X_{\theta_1 t} - X_{t/2}$. Sous \mathcal{H}_0 (c.-à-d. $dX_t = X_{t/2} dt + \varepsilon dW_t$) on obtient la représentation

$$\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Delta S_\varepsilon(t) dW_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T (\Delta S_\varepsilon(t))^2 dt, \quad (3.2)$$

\mathbf{P}_0 -presque sûrement.

Nous étudions l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$ et construisons des tests de niveau asymptotique α , i.e. la classe

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ \varphi_\varepsilon : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_0[\varphi_\varepsilon(X)] \leq \alpha \right\},$$

où $\mathbf{E}_0[\varphi_\varepsilon(X)]$ est la probabilité (sous \mathbf{P}_0) de rejeter \mathcal{H}_0 . La puissance sous \mathcal{H}_1 est

$$\beta_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = \mathbf{E}_{\theta_1}[\varphi_\varepsilon(X)].$$

Variable de test. Sous \mathcal{H}_0 , le logarithme du rapport de vraisemblance s'écrit

$$\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) = \frac{\sqrt{I_0}}{\varepsilon} \xi_0^{(\varepsilon)} - \frac{I_0}{2\varepsilon^2},$$

avec $\xi_0^{(\varepsilon)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ asymptotiquement. On définit la statistique de test

$$Z_\varepsilon := \frac{\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) + \frac{I_0}{2\varepsilon^2}}{\sqrt{I_0}/\varepsilon} = \xi_0^{(\varepsilon)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{sous } \mathcal{H}_0.$$

Seuil critique. Pour un niveau asymptotique $\alpha \in (0, 1)$, on choisit

$$c_\alpha := \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Règle de décision. On définit le test

$$\varphi_\varepsilon(X) = \mathbf{1}_{\{Z_\varepsilon > c_\alpha\}}.$$

Niveau du test. Sous \mathcal{H}_0 , on a $Z_\varepsilon \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_0(Z_\varepsilon > c_\alpha) = 1 - \Phi(c_\alpha) = \alpha.$$

Le test φ_ε appartient donc à la classe \mathcal{K}_α .

Valeur observée. À partir des données X , on calcule

$$Z_\varepsilon^{\text{obs}} = \frac{1}{\sqrt{I_0}/\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \Delta S_\varepsilon(t) dW_t \right),$$

soit la réalisation numérique de $\xi_0^{(\varepsilon)}$.

Conclusion.

- Si $Z_\varepsilon^{\text{obs}} \leq c_\alpha$, on **ne rejette pas** \mathcal{H}_0 : les données sont compatibles avec le modèle $X_{t/2}$.
- Si $Z_\varepsilon^{\text{obs}} > c_\alpha$, on **rejette** \mathcal{H}_0 avec un risque asymptotique de première espèce égal à α .

Puissance. Sous \mathcal{H}_1 , on a

$$\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) = \frac{\sqrt{I_1}}{\varepsilon} \xi_1^{(\varepsilon)} + \frac{I_1}{2\varepsilon^2}, \quad \xi_1^{(\varepsilon)} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi

$$Z_\varepsilon \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_0}}, 1\right).$$

La probabilité de rejet sous \mathcal{H}_1 converge alors vers

$$\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_{\theta_1}(Z_\varepsilon > c_\alpha) = 1 - \Phi\left(c_\alpha - \frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_0}}\right).$$

Il s'agit de la *puissance limite* du test.

Exemple numérique. Considérons un risque fixé à $\alpha = 0.01$.

Variable de test. On rappelle que la statistique est

$$Z_\varepsilon = \frac{\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) + \frac{I_0}{2\varepsilon^2}}{\sqrt{I_0}/\varepsilon}.$$

Seuil critique. Pour $\alpha = 0.01$, on obtient

$$c_{0.01} = \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.33.$$

Règle de décision. Le test est défini par

$$\varphi_\varepsilon(X) = \mathbf{1}_{\{Z_\varepsilon > 2.33\}}.$$

Autrement dit, on rejette \mathcal{H}_0 si

$$\ln L(\theta_1; \frac{1}{2}; X) > \frac{I_0}{2\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{I_0}}{\varepsilon} 2.33.$$

Niveau du test. Sous \mathcal{H}_0 , $Z_\varepsilon \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$ et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_0(Z_\varepsilon > 2.33) = 1 - \Phi(2.33) \approx 0.01 = \alpha.$$

Le test appartient donc bien à la classe $\mathcal{K}_{0.01}$.

Puissance asymptotique. Sous \mathcal{H}_1 , la loi limite de Z_ε est

$$Z_\varepsilon \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_0}}, 1\right),$$

et la puissance est

$$\beta = 1 - \Phi\left(2.33 - \frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_0}}\right).$$

Illustration numérique.

- Si $\frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_0}} = 3$, on obtient $\beta \approx 1 - \Phi(-0.67) \approx 0.75$.
- Si $\frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_0}} = 5$, on obtient $\beta \approx 1 - \Phi(-2.67) \approx 0.996$.

Conclusion.

Le test de rapport de vraisemblance construit contrôle correctement le risque de première espèce à 1% et présente une puissance croissante avec le rapport $\sqrt{I_1}/\sqrt{I_0}$, qui mesure l'écart entre les deux dynamiques considérées.

conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit un test paramétrique basé sur le rapport de vraisemblance pour comparer deux hypothèses simples. Nous avons montré que ce test contrôle rigoureusement le risque de première espèce et que sa puissance asymptotique croît avec l'écart entre les deux dynamiques considérées. Bien entendu, ce test constitue seulement une première étape. D'autres tests plus généraux peuvent être envisagés, notamment pour des situations d'hypothèse simple contre hypothèse composite, ou encore de composite contre composite. La construction et l'analyse de tels tests nécessitent cependant des outils probabilistes et statistiques plus avancés (théorie asymptotique des processus stochastiques, statistiques empiriques fonctionnelles, méthodes de localisation adaptatives, etc.). Ces développements, bien que très intéressants, dépassent le cadre du présent travail, mais ouvrent des perspectives de recherche prometteuses.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'estimation statistique dans le cadre des équations différentielles stochastiques à retard proportionnel, en nous plaçant dans le régime de faible bruit. Nous avons analysé le comportement de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et montré qu'il conserve de bonnes propriétés asymptotiques même en l'absence des conditions classiques de régularité. Nous avons ensuite construit un test paramétrique de type rapport de vraisemblance pour comparer une hypothèse simple contre une autre hypothèse simple. L'étude asymptotique a montré que ce test contrôle correctement le risque de première espèce et présente une puissance limite satisfaisante, croissante avec l'écart entre les dynamiques considérées. Sur le plan numérique, nous avons simulé des trajectoires du processus étudié à l'aide du logiciel R. Les expériences ont illustré que, lorsque ε diminue, les trajectoires deviennent plus régulières et les estimateurs se rapprochent de la vraie valeur du paramètre. En conclusion, bien que les modèles à retard soient complexes, ils restent accessibles à l'analyse statistique grâce à des outils théoriques rigoureux et à des méthodes numériques adaptées. Ce travail ouvre également la voie à des perspectives futures, notamment la construction de tests plus généraux (hypothèse simple contre composite, ou composite contre composite), qui nécessiteraient toutefois un bagage plus avancé en probabilités et statistiques.

Bibliographie

- [1] Kutoyants, Y.A., Identification of dynamical systems with small noise. Vol. 300. Springer Science and Business Media. (1994).
- [2] Mémoire Mahdjoub Abir, Estimation Paramétrique dans un Contexte de Petite Diffusion Linéaire, 2023/2024.
- [3] Liptser, R.S., and Shiryaev, A.N., Statistics of random process III. Springer New York. (1978).
- [4] I. A-Ibragimov, R.Z-Has'minskii, Statistical Estimation-Asymptotic- Theory Springer-Verlag New York (1981).
- [5] Karatzas, I., and S.E. Shreve, 1991. Brownian Motion and Stochastic Calculus. *Springer* (2nd ed.)
- [6] Monique Jeanblanc, Cours de Calcul stochastique, Master 2 IFEVRY, (2006).
- [7] Pitman, E. J. G. (1948). *Notes on non-parametric statistical inference*. Columbia University.