

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Biomathématique

Thème

Existence et stabilité des solutions du problème de Cauchy pour une équation d'ondes dans $\mathbb{R}^n$ avec amortissement par dérivée fractionnaire

Présenté Par :

Mlle BRINI Khadidja

Devant le jury composé de :

M. BENTOUT Soufiane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mme. GAOUAR Soumia	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
M. BENAÏSSA Abdelkader	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2025/2026

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère et douce mère, Mon très cher père à qui j'adresse au ciel les vœux les plus ardents pour la conservation de leur santé et de leur vie.

À mon cher frère : Med Abd Elouahid

À ma chère sœur : Aouicha

À toutes la familles : Brini et Kaddour

À mes très chères amies

qui ont partagé avec moi les moments de doute comme les moments de réussite.

À toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Merci à vous tous

Khadija

Remerciements

Je remercie avant tout Allah, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la force, la patience et le courage nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrant Mr BENAISSA Abdelkader pour son accompagnement, sa disponibilité, ses conseils avisés et son soutien constant tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Mr BENJOUIT Soufiane, président du jury, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury, ainsi qu'à Mme GAOUAR Soumia, examinatrice, pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail et pour le temps consacré à son évaluation.

Je n'oublie pas d'adresser un grand merci à ma famille pour son soutien indéfectible, sa compréhension et ses encouragements permanents.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Abstract

Wave equation with fractional derivative in generalized Caputo sense is investigated. In this thesis, we analyze the Cauchy problem in $\mathbb{R}^n$ with linear fractional damping (frictional). First, we establish the system's well-posedness through semi group theory, ensuring the existence and uniqueness of solutions, named the quantitative results. In addition, we show the strong stability of our system, where qualitative results are obtained by applying the general criterion of Arendt and Batty fombed with C_0 -semi group approach.

Résumé

On étudie l'équation des ondes avec une dérivée fractionnaire généralisé au sens de Caputo. Dans ce travail, on étudie le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ impliquant un terme d'amortissement linéaire (par friction) à dérivée fractionnaire. Tout d'abord, nous établissons le caractère bien posé du système par la théorie des semi-groupes, garantissant ainsi l'existence et l'unicité des solutions, ce que nous qualifions de résultats quantitatifs. En outre, nous démontrons la stabilité forte de notre système ; des résultats qualitatifs sont obtenus en appliquant le critère général d'Arendt et Batty avec l'approche par les C_0 -semi-groupes.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces fonctionnels	3
1.1.1 Espace de Banach	3
1.1.2 Espace de Hilbert	3
1.1.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	3
1.1.4 Espaces de Sobolev	4
1.2 Formes bilinéaires continues et coercives	6
1.3 Théorème de Lax–Milgram	7
1.4 Fonctions spéciales	8
1.4.1 La fonction Gamma	8
1.4.2 La fonction Bêta	9
1.5 Quelques égalités et inégalités algébriques et fonctionnelles	9
1.6 Analyse spectrale	12
1.7 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs	13
1.8 Semi-groupe	14
1.8.1 Semi-groupe fortement continu	14
1.8.2 Spectre et résolvant de semi-groupe	14
1.8.3 Stabilité d’un C_0 -semi-groupe	16
1.9 Notions sur les dérivées fractionnaires	17
2 Existence et unicité	19
2.1 Système augmenté	19
2.2 Existence et unicité des solutions	21
3 Etude de la stabilité	25
3.1 Stabilité forte du système	25
4 Taux de décroissance polynomiale	29
4.1 Stabilité polynomiale du système	29

Notations

Nous introduisons à présent les notations qui seront employées dans la suite :

Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: la frontière de Ω .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, f mesurable.

H : Espace de Hilbert.

$\mathcal{A}$: Opérateur linéaire non borné.

$D(\mathcal{A})$: Domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$.

u_t : La dérivée première de u par rapport à la variable du temps t .

u_{tt} : La dérivée seconde de u par rapport à la variable du temps t .

I : Identité.

$e^{\mathcal{A}}$: Exponentielle de la matrice $\mathcal{A}$.

$\Re$: La partie réelle d'un nombre complexe.

$\Im$: La partie imaginaire d'un nombre complexe.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.

∇u : Gradient de u , $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Δu : Laplacien de u , $\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{(\partial x_i)^2}$.

$\rho(\mathcal{A})$: Ensemble de résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}$.

$\sigma(\mathcal{A})$: Spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$.

$\sigma_p(\mathcal{A})$: Spectres ponctuel de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Introduction

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence globale et l'unicité des solutions et la stabilisation du problème de Cauchy pour une équation des ondes :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \phi(x)\Delta u(x, t) + \gamma \partial_t^{\alpha, \eta} u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in L_g^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (1)$$

où les espaces $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L_g^2(\mathbb{R}^n)$ sont définis en (1.3), on suppose que $\phi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, avec $(\phi(x))^{-1} = g(x)$, où :

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ dans } L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad g(x) \in C^{0, \gamma}, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (2)$$

La notation $\partial_t^{\alpha, \eta}$ représente la dérivée fractionnaire généralisée de Caputo d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) par rapport au temps t définie par :

$$\partial_t^{\alpha, \eta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{df}{ds}(s) ds, \quad \eta \geq 0. \quad (3)$$

De nombreux phénomènes physiques sont modélisés par des problèmes aux limites avec conditions initiales bien définies. La dissipation interne d'ordre fractionnaire apparaît dans divers domaines théoriques et appliqués, incluant des contextes physiques, écologiques et biologiques, voir par exemple Valério [20], Tarasov [19] et Magin [14]. Par conséquent, le problème formulé en (1) est pertinent pour de nombreuses branches de la physique, telles que la physique nucléaire, l'optique et la géophysique, pour des études connexes, voir Martino et al. [15], Buljan et al. [10], et Krolkowski et al. [12]. Les travaux sur les espaces pondérés ont été étudiés par de nombreux auteurs (voir [9, 11, 17]).

Notre mémoire est divisé en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce premier chapitre, nous rappelons quelques notions et préliminaires de base d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans les chapitres suivants de ce mémoire.

Chapitre 2 : nous transformons le système (1) en un système augmenté en couplant l'équation des ondes avec une équation de diffusion appropriée, et nous démontrons que le système est bien posé du système (1), en appliquant des arguments basés sur la théorie des semi-groupes.

Chapitre 3 : nous prouvons que le système est fortement stable, même en l'absence de la compacité de la résolvante par un critère général d'Arendt et Batty.

chapitre 4 : si $\eta \neq 0$, nous montrons également un taux de décroissance de type polynomial en utilisant une approche par domaine fréquentiel et un théorème récent d'A. Borichev et Y. Tomilov.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous commençons par introduire quelques notions et par établissons quelques lemmes techniques qui seront employés par la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. (*Espace de Banach*)

Un espace de Banach X est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans X converge vers un élément de X , où la distance entre deux points x et y est donnée par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1.2. (*Espace de Hilbert*)

Un espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ est appelé espace de Hilbert s'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que

$$\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}, \quad \forall x \in X.$$

De manière équivalente, un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

Dans le cas réel, le produit scalaire se reconstitue à l'aide de la formule de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

1.1.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.3. (*Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in [1, +\infty[$. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ comme

l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dont la puissance p -ième est intégrable sur Ω , c'est-à-dire

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) ; \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

qui en fait un espace de Banach. Dans le cas particulier $p = +\infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) ; \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ pour presque tout } x \in \Omega\},$$

muni de la norme essentielle

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Lorsque $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ possède une structure hilbertienne induite par le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

Remarque 1.1.1. L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$ est un exemple classique d'espace de Hilbert.

1.1.4 Espaces de Sobolev

Définition 1.1.4. (Espace de Sobolev)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $k \geq 0$ un entier, l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ est défini par

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout multi-indice } \alpha, |\alpha| \leq k \right\}.$$

Autrement dit, $H^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées faibles jusqu'à l'ordre k appartiennent également à $L^2(\Omega)$.

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et du produit scalaire associé

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx.$$

Théorème 1.1.1. *Pour tout $k \geq 1$, l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}$, est un espace de Banach. En outre, c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé.*

Exemple 1.1.1. *L'espace de Sobolev fondamental est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n\}$$

avec le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(f \bar{g} dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial g}{\partial x_i}} \right) dx \quad (1.1)$$

et la norme :

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(|f(x)|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

en particulier

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega), f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Remarque 1.1.2. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par (1.1)*

Définition 1.1.5. [21] *Les espaces fonctionnels pondérés $D^{\tau,2}(\mathbb{R}^n)$ et leur norme sont définis comme suit :*

$$\mathcal{D}^{\tau,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^r(\mathbb{R}^n) : \nabla^{\tau} f \in L^2(\mathbb{R}^n), r = \frac{2n}{n-2\tau}, n \geq 3\tau \right\} \quad (1.2)$$

pour $\tau = 1$, les espaces fonctionnels pondérés $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ de notre problème sont définis comme suit :

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n) : \nabla_x f \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n \right\} \quad (1.3)$$

avec la norme

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} =: \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \quad (1.4)$$

Il est connu que $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe $k > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq k \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}. \quad (1.5)$$

L'inégalité de Poincaré généralisée suivante sera fréquemment appliquée dans nos arguments.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq \alpha \int_{\mathbb{R}^n} g u^2 dx, \quad \forall u \in C_0^{\infty}, g \in L^{\frac{n}{2}} \quad (1.6)$$

où $\alpha := k^{-2} \|g\|_{L^{n/2}}^{-1}$. L'espace $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert séparables et l'espace $L_g^2(\mathbb{R}^n)$ est l'adhérence de $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ où

$$(f, h)_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} g f h dx. \quad (1.7)$$

Dans le cas où $1 < p < \infty$, si w est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\|f\|_{L_g^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} g|f|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.8)$$

Par conséquent, on a

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \subset L_g^2(\mathbb{R}^n) \subset D^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$$

où toutes les injections sont compactes et denses.

Lemme 1.1.1. [7] Pour tout $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} g|f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.9)$$

où

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ dans } L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad g(x) \in C^{0,\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (1.10)$$

$$s = \frac{2n}{2n - qn + q},$$

pour

$$\begin{cases} \text{Si } n = 1 \text{ ou } n = 2, & \text{alors } 2 \leq q < +\infty \\ \text{Si } n \geq 3, & \text{alors } 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Lemme 1.1.2. [17] Soit g vérifiant (1.10). Alors, pour tout $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} g|f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma_\theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} g|f|^q dx \right)^{\frac{1-\theta}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx \right)^{\frac{\theta}{2}} \quad (1.12)$$

pour tout $0 < \theta < 1$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{s}$$

où

$$s = \frac{2n}{n-2}$$

et

$$2 \leq q \leq p \leq s.$$

1.2 Formes bilinéaires continues et coercives

Définition 1.2.1. (*Continuité*)

Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|_H$. Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue (ou bornée) s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

La constante M est appelée constante de continuité de a .

Définition 1.2.2. (Coercivité)

Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ est dite coercive (ou H -elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\Re a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

La constante α est appelée constante de coercivité (ou d'ellipticité).

Remarque 1.2.1. La coercivité implique en particulier que $\Re a(v, v) > 0$ pour tout $v \neq 0$, donc a est définie positive. Cette propriété est essentielle pour garantir l'unicité de la solution dans le théorème de Lax–Milgram.

Exemple 1.2.1. Sur $H = H_0^1(\Omega)$, la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ est :

- **continue** : $|a(u, v)| \leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$ (avec $M = 1$).
- **coercive** : $a(v, v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 = \|v\|_{H_0^1}^2$ (avec $\alpha = 1$).

Théorème 1.2.1. (formule de Green)

Soient Ω un ouvert de classe C^1 et $u, v \in C^2(\Omega)$ dont une au moins est à support compact dans Ω . Alors on a

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} =$ la dérivée normale de u .

Théorème 1.2.2. (Théorème du graphe fermé)

Soient E, F deux espaces de Banach. Une application linéaire f de E dans F est continue si et seulement si son graphe $G(f) = \{(x, f(x)); x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.

1.3 Théorème de Lax–Milgram

Théorème 1.3.1. (Lax–Milgram [8])

Soit H un espace de Hilbert, et soit $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $L(\cdot) : H \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue, il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \right\}.$$

Exemple 1.3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier. Pour $f \in L^2(\Omega)$, on considère

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On pose $H = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (équivalente à la norme usuelle de H^1 par l'inégalité de Poincaré).

On pose :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Vérifions les hypothèses du théorème :

- **Continuité de a** : Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

d'où $M = 1$.

- **Coercivité de a** :

$$a(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

donc $\alpha = 1$.

- **Continuité de L** : Par Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré ($\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$),

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2} = C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

ainsi $L \in H'$ avec $\|L\|_{H'(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

1.4 Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales sont des fonctions reconnues par l'usage et la fréquence de leurs apparitions, bien que leur définition reste assez vague. Parmi celles-ci figurent la fonction Gamma et la fonction Bêta.

1.4.1 La fonction Gamma

Définition 1.4.1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Remarque 1.4.1. La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. **Relation de récurrence** : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

En particulier, $\Gamma(1) = 1$.

2. **Représentation par une limite** :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)(z+2) \cdots (z+n)},$$

avec $\Re(z) > 0$.

3. **Dérivée** : La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est :

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \Psi(z),$$

où $\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z))$.

4. *Quelques valeurs particulières :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Pour $z = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

1.4.2 La fonction Bêta

Définition 1.4.2. La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler, définie pour des nombres complexes z et w par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$$

avec $\Re(z) > 0$ et $\Re(w) > 0$.

Remarque 1.4.2. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(z) > 0$ et $\Re(w) > 0$. La fonction Bêta présente les propriétés suivantes :

1. *Lien avec la fonction Gamma :*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

2. *Symétrie :*

$$B(z, w) = B(w, z).$$

3. *Formes intégrales :*

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1} \theta \cos^{2w-1} \theta d\theta$$

$$B(z, w) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt.$$

4. *Dérivée :*

$$\frac{\partial}{\partial z} B(z, w) = B(z, w) \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+w)}{\Gamma(z+w)} \right).$$

1.5 Quelques égalités et inégalités algébriques et fonctionnelles

Lemme 1.5.1. (*Inégalité de Hölder*[2])

Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ et $1 \leq p \leq \infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lemme 1.5.2. (Inégalité de Young)

Soient $a, b > 0$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 1.5.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Lemme 1.5.4. (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω , telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 1.5.5. [4] Soit $\eta \geq 0$, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2\alpha-n+2}}{(1+|\xi|^2+\eta)^2} d\xi < +\infty.$$

Lemme 1.5.6. [4] Soit μ la fonction :

$$\mu(\xi) = |\xi|^{(2\alpha-n)/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1.$$

Si $\lambda \in D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda + \eta > 0\} \cup \{\Im \lambda \neq 0\}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu^2(\xi)}{(|\lambda| + \eta + |\xi|^2)^2} d\xi = \frac{n(2-\alpha)\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\sin(\alpha\pi)2\Gamma(\frac{n}{2}+1)} (|\lambda| + \eta)^{\alpha-2}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu^2(\xi)}{|\lambda| + \eta + |\xi|^2} d\xi = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2\sin(\alpha\pi)\Gamma(\frac{n}{2}+1)} (|\lambda| + \eta)^{\alpha-1}. \quad (1.13)$$

Preuve : En utilisant les coordonnées hypersphériques et le fait que le jacobien J est donné par

$$J = p^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{n-1-j}(\phi_j), \quad (1.14)$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu^2(\xi)}{(|\lambda| + \eta + |\xi|^2)^2} d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{p^{2\alpha-1}}{(|\lambda| + \eta + p^2)^2} \left(\prod_{j=1}^{n-2} \left(\int_0^\pi \sin^{n-1-j}(\phi_j) d\phi_j \right) \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} \right) dp. \quad (1.15)$$

D'autre part

$$\prod_{j=1}^{n-2} \left(\int_0^\pi \sin^{n-1-j}(\phi_j) d\phi_j \right) \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \quad (1.16)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu^2(\xi)}{(|\lambda| + \eta + |\xi|^2)^2} d\xi &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_0^{+\infty} \frac{p^{2\alpha-1}}{(a + p^2)^2} dp, \quad \text{avec } a = |\lambda| + \eta \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot \frac{a^{\alpha-2}}{2} \int_0^1 z^{\alpha-1} (1 - z)^{1-\alpha} dz, \quad \text{avec } z = \frac{p^2}{a + p^2} \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} a^{\alpha-2}}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} B(\alpha, 2 - \alpha) \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} a^{\alpha-2}}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \Gamma(\alpha) \Gamma(2 - \alpha) \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} a^{\alpha-2}}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \Gamma(\alpha) (1 - \alpha) \Gamma(1 - \alpha) \\
 &= \frac{n(1 - \alpha) \pi^{\frac{n}{2}+1}}{2 \sin(\alpha\pi) \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} (|\lambda| + \eta)^{\alpha-2}.
 \end{aligned}$$

L'égalité (1.13) peut être démontrée de la même manière.

Lemme 1.5.7. [3] Si $\lambda \in D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda + \eta > 0\} \cup \{\Im \lambda \neq 0\}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{\alpha+\frac{n}{2}}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{n+1}} d\xi = k_1(\alpha, n) (|\lambda| + \eta)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4} - 1}, \\ I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2n-2}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{2n}} d\xi = k_2(n) (|\lambda| + \eta)^{-\frac{n}{2} - 1}, \\ I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2n}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{2n+2}} d\xi = k_3(n) (|\lambda| + \eta)^{-\frac{n}{2} - 2}, \end{array} \right.$$

avec

$$k_1(\alpha, n) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{4} - \frac{\alpha}{2} + 1) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{3n}{4})}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(n + 1)}, \quad k_2(n) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{3n}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(2n)},$$

et

$$k_3(n) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(2 + \frac{n}{2}) \Gamma(\frac{3n}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(2 + 2n)}.$$

Preuve : En utilisant les coordonnées hypersphériques, on obtient

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{\alpha+\frac{n}{2}}}{(|\lambda| + \eta + |\xi|^2)^{n+1}} d\xi \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{p^{\alpha+\frac{3n}{2}-1}}{(|\lambda| + \eta + p^2)^{n+1}} \left(\prod_{j=1}^{n-2} \left(\int_0^\pi \sin^{n-1-j}(\phi_j) d\phi_j \right) \int_0^{2\pi} d\phi_{n-1} \right) dp \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_0^{+\infty} \frac{p^{\alpha+\frac{3n}{2}-1}}{(a + p^2)^{n+1}} dp \quad \text{avec } a = |\lambda| + \eta \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3n}{4}-1}}{(a + u)^{n+1}} du \quad \text{avec } u = p^2 \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}-1} \int_0^1 z^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3n}{4}-1} (1-z)^{\frac{n}{4}-\frac{\alpha}{2}} dz \quad \text{avec } z = \frac{u}{a+u} \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}-1} B\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3n}{4}, \frac{n}{4} - \frac{\alpha}{2} + 1\right) \\
 &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3n}{4}\right) \Gamma\left(\frac{n}{4} - \frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\Gamma(n+1)} \\
 &= k_1(\alpha, n) (|\lambda| + \eta)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{4}-1}.
 \end{aligned}$$

De la même manière, nous pouvons calculer I_2 et I_3 .

1.6 Analyse spectrale

Définition 1.6.1. Soit X un espace de Banach et soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire, borné ou non borné, sur X .

1. **Ensemble résolvant.** On appelle ensemble résolvant de $\mathcal{A}$ l'ensemble

$$\rho(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X \text{ est inversible et } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ est borné} \}.$$

L'ensemble $\rho(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2. **Résolvante.** Pour $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, on note $R(\lambda) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$. La famille d'opérateurs

$$\{ (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : \lambda \in \rho(\mathcal{A}) \},$$

est appelée la résolvante de $\mathcal{A}$.

On a les propriétés suivantes :

- L'application $\lambda \mapsto R(\lambda)$ est analytique de $\rho(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{L}(X)$.
- D'après le théorème du graphe fermé, l'opérateur $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : X \rightarrow X$ est continu sur X .
- L'opérateur $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : X \rightarrow D(\mathcal{A}) \subset X$ est compact si l'injection

$$(D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|_X)$$

est compacte.

- Pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \rho(\mathcal{A}) \times \rho(\mathcal{A})$, on a l'identité de la résolvante :

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu).$$

3. **Spectre.** On appelle spectre de $\mathcal{A}$ l'ensemble

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - \mathcal{A} \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Un tel λ est appelé une valeur spectrale de $\mathcal{A}$. Le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est un compact de $\mathbb{C}$.

4. **Valeurs propres.** L'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{A}$ est

$$\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Autrement dit, $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$ s'il existe un vecteur non nul $u \in X$ tel que $\mathcal{A}u = \lambda u$.

5. **Spectre résiduel.** Le spectre résiduel de $\mathcal{A}$ est défini par

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - \mathcal{A} \text{ est injectif mais } \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \neq X\}.$$

6. **Spectre continu.** Le spectre continu de $\mathcal{A}$ est

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \lambda I - \mathcal{A} \text{ est injectif et } \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X, \\ \text{mais } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A}) \text{ n'est pas borné} \end{array} \right\}.$$

Le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ se décompose en l'union disjointe des trois parties précédentes :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A}).$$

1.7 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

Définition 1.7.1. (*Opérateur dissipatif*)

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme induite $\|\cdot\|$. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire à domaine dense sur H , c'est-à-dire

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H \quad \text{et} \quad \overline{D(\mathcal{A})} = H.$$

Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est dit dissipatif si pour tout $x \in D(\mathcal{A})$,

$$\Re \langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0.$$

Définition 1.7.2. (Opérateur m -dissipatif)

Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ dans un espace de Hilbert H est dit m -dissipatif si $\mathcal{A}$ est dissipatif et si $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif, c'est-à-dire

$$\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = H, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Proposition 1.7.1. (Propriétés des opérateurs dissipatifs [18])

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur dissipatif dans un espace de Hilbert H . Alors :

1. Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est injectif et

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|, \quad \forall y \in \operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}).$$

2. S'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ soit surjectif, alors $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas, $]0, +\infty[\subset \rho(\mathcal{A})$.
3. $\mathcal{A}$ est fermé si et seulement si $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A})$ est fermé pour un certain $\lambda_0 > 0$ (et alors $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A})$ est fermé pour tout $\lambda > 0$).

Proposition 1.7.2. [18] Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert H .

1. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif, alors $\mu \mathcal{A}$ est dissipatif pour tout $\mu > 0$.
2. Si $\mathcal{A}$ est m -dissipatif, alors

$$\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = H \quad \forall \lambda > 0,$$

c'est-à-dire $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

1.8 Semi-groupe

1.8.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.8.1. On appelle semi-groupe fortement continu ou semi-groupe de classe C_0 ou C_0 -semi-groupe, une famille d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t \geq 0}$ définis sur un espace de Banach X par :

1. $T(t)$ est opérateur linéaire borné pour chaque $t \geq 0$.
2. $T(0) = I$ et $T(t + s) = T(t)T(s)$ pour tous $t, s \geq 0$.
3. $\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$.

Remarque 1.8.1. La condition 2 est une propriété de la fonction exponentielle.

1.8.2 Spectre et résolvant de semi-groupe

Définition 1.8.2. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire sur l'espace de Banach X , avec le domaine $D(\mathcal{A})$. Alors :

1. **Résolvante.** Si $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, l'inverse de $(\lambda I - \mathcal{A})$ est appelé résolvant de $\mathcal{A}$ au point λ et on le note :

$$R(\lambda, \mathcal{A}) := (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

2. **Spectre.** Le spectre de $\mathcal{A}$, noté $\sigma(\mathcal{A})$, est l'ensemble de tous les nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $(\lambda I - \mathcal{A})$ n'est pas inversible. Ainsi :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Théorème 1.8.1. (Lumer-Phillips)

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans un espace de Hilbert H .

1. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, alors $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction sur X .
2. Si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X , alors $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$ pour tout $\lambda_0 > 0$ et $\mathcal{A}$ est un opérateur dissipatif. De plus, pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et tout $f \in H$ on a $\text{Re}\langle f, \mathcal{A}x \rangle \geq 0$.

Théorème 1.8.2. (Hille-Yosida)

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné. $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{A}$ est fermé.
2. $D(\mathcal{A})$ est dense dans H .
3. $\forall \lambda > 0$, $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ existe et est borné dans H , avec $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Théorème 1.8.3. (Lumer-Phillips)

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H .

Alors $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur H si et seulement si :

(i) $\overline{D(\mathcal{A})} = H$

(ii) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont dissipatifs.

La majorité des équations d'évolution peuvent être réduites sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

où $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H .

Théorème 1.8.4. (Hille-Yosida)

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Hilbert H , supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors,

1. Pour $U_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (1.17) admet une solution forte unique

$$U(t) = T(t)U_0 \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}). \quad (1.18)$$

2. Pour $U_0 \in \mathcal{H}$, le problème (1.17) admet une solution faible unique

$$U(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}). \quad (1.19)$$

1.8.3 Stabilité d'un C_0 -semi-groupe

Théorème 1.8.5. (Arendt et Batty)

Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert X .

On suppose que

$$i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A}),$$

est un ensemble dénombrable et

$$i\mathbb{R} \cap \sigma_p(\mathcal{A}) = \emptyset.$$

Alors, le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est fortement stable, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)u\|_H = 0, \quad \forall u \in H.$$

Définition 1.8.3. (Stabilité exponentielle)

Un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ défini sur un espace de Hilbert H est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives C et γ telles que

$$\|T(t)u\|_H \leq C e^{-\gamma t} \|u\|_H, \quad \forall t > 0, \forall u \in H.$$

La constante γ est appelée taux de décroissance exponentielle.

Définition 1.8.4. (Stabilité polynomiale)

On note $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H , alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit polynomialement stable s'il existe des constants $\alpha, \gamma, C > 0$ telles que

$$\|T(t)(d - \mathcal{A})^{-\alpha}\|_H \leq C t^{-\gamma}, \quad \forall t > 0, \forall d > 0. \quad (1.20)$$

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est borné et $0 \in \rho(\mathcal{A})$, on peut normaliser (1.20) par l'estimation suivante

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-\alpha}\|_H \leq C t^{-1}, \quad \forall t > 0.$$

Théorème 1.8.6. (Borichev-Tomilov)

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe de contraction borné sur un espace de Hilbert H , de générateur $\mathcal{A}$.

On suppose que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C |\beta|^\alpha, \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

si et seulement si

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(D(\mathcal{A}), H)} \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}, \quad \forall t > 0.$$

Remarque 1.8.2. Lorsque $0 \in \sigma(\mathcal{A})$, les résultats classiques de stabilité exponentielle ou polynomiale ne s'appliquent plus directement. Il devient alors nécessaire d'étudier le comportement du résolvant

$$\|R(i\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(H)},$$

lorsque $|\lambda| \rightarrow 0$ et lorsque $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

1.9 Notions sur les dérivées fractionnaires

Définition 1.9.1. *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, au sens de Riemann–Liouville est donnée par*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a.$$

Définition 1.9.2. *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann–Liouville d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par*

$$D_{RL,a}^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad n = [\alpha] + 1, \quad t > a,$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$D_{RL,a}^0 f(t) = I_a^0 f(t) = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$D_{RL,a}^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

De plus, si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, donc

$$D_{RL,a}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad t > a.$$

Exemple 1.9.1. *Soit $\alpha > 0$, $\gamma > -1$ et $f(t) = (t-a)^\gamma$, alors*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (t-a)^{\gamma+\alpha},$$

$$D_{RL,a}^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}.$$

En particulier, si $\gamma = 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$D_{RL,a}^\alpha (C) = C \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Définition 1.9.3. *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Caputo, définie sur l'intervalle $[a, b]$, est donnée par*

$$D_{C,a}^\alpha f(t) = D_{RL,a}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right), \quad (1.21)$$

où

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.21) prend la forme

$$\begin{aligned} D_{C,a}^\alpha f(t) &= D_{C,a}^\alpha ([f(t) - f(a)]) \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-a)^{-\alpha} f'(s) ds. \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $f^{(\alpha)}(t)$ et $D_{C,a}^\alpha f(t)$ coïncident, c'est à dire

$$D_{C,a}^\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t).$$

Exemple 1.9.2. Soit $\alpha > 0$ et $f(t)(t-a)^\gamma$ où $\gamma > -1$. Alors

$$D_{C,a}^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha + 1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}.$$

En particulier, si $\gamma = 0$ et $\alpha > 0$, alors $D_{C,a}^\alpha C = 0$.

Chapitre 2

Existence et unicité

L'objectif de ce chapitre est de donner un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1) en utilisant la théorie des semi-groupes.

2.1 Système augmenté

Tout d'abord, nous réécrivons le problème (1) sous la forme d'un système augmenté. Afin d'effectuer cette transformation, nous commençons par énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. [16] Soit μ la fonction :

$$\mu(\xi) = |\xi|^{(2\alpha-n)/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1. \quad (2.1)$$

On considère la relation entre la variable d'entrée U et la variable de sortie O du système suivant :

$$\partial_t \varphi(\xi, x, t) + (|\xi|^2 + \eta) \varphi(\xi, t) - U(t) \mu(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \geq 0, t > 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi(\xi, 0) = 0, \quad (2.3)$$

$$O(t) = \frac{2 \sin(\alpha\pi) \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{n\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi(\xi, t) d\xi, \quad (2.4)$$

est donnée par

$$O = I^{1-\alpha, \eta} U = D^{\alpha, \eta} U, \quad (2.5)$$

où

$$[I^{\alpha, \eta} U](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} e^{-\eta(t-\tau)} U(\tau) d\tau.$$

L'utilisation du théorème précédent permet de reformuler le système (1) sous la forme d'un modèle augmenté :

$$\begin{cases} g(x)u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_t \varphi(x, \xi, t) + (|\xi|^2 + \eta) \varphi(x, \xi, t) - \mu(\xi) u_t(x, t) = 0, & (x, \xi, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi(x, 0, \xi) = 0, & (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in L_g^2(\mathbb{R}^n), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\zeta = \gamma \frac{2 \sin(\alpha\pi) \Gamma(\frac{n}{2}+1)}{n\pi^{\frac{n}{2}+1}}$, $\eta \geq 0$ et μ est une mesure générale.

Nous définissons l'énergie de la solution de (2.6) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \zeta \|\varphi\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^2 \right). \quad (2.7)$$

Lemme 2.1.1. *Soit (u, φ) une solution du problème (2.6), alors la fonction d'énergie défini dans (2.7) vérifiant*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (\xi^2 + \eta) |\varphi(\xi, t)|^2 d\xi dx \leq 0. \quad (2.8)$$

Preuve : En multipliant la première équation de (2.6) par u_t et nous intégrons sur $\mathbb{R}^n$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u_{tt}(x, t) u_t(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x, t) u_t(x, t) dx \\ & + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi dx = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_t\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \right] + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi dx = 0. \quad (2.9)$$

En multipliant la deuxième équation de (2.6) par $\zeta g(x) \varphi$ et nous intégrons sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} & \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi \partial_t \varphi(x, \xi, t) d\xi dx + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + \eta) |\varphi(\xi, t)|^2 d\xi dx \\ & - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi dx = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}^2 + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (\xi^2 + \eta) |\varphi(\xi, t)|^2 d\xi dx \\ & - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi dx = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

en effectuant la somme des deux équations (2.9) et (2.10), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + \eta) |\varphi(\xi, t)|^2 d\xi dx \leq 0. \quad (2.11)$$

On montre que le problème (2.6) est bien posé. À cette fin, on définit l'espace d'énergie comme étant l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times L_g^2(\mathbb{R}^n) \times L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \quad (2.12)$$

Pour $U = (u, v, \varphi)^T$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi})^T$.

On définit le produit scalaire de l'espace $\mathcal{H}$ par :

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(g(x) v \tilde{v} + \nabla u \nabla \tilde{u} \right) dx + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi \tilde{\varphi} d\xi dx. \quad (2.13)$$

On reformule (2.6) dans un cadre de la théorie des semi-groupes, en introduisant la fonction vectorielle $U = (u, v, \varphi)^T$, le système (2.6) est équivalent à

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

où $U_0 := (u_0, u_1, \varphi_0)^T$.

L'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et défini par :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \Delta u(x, t) - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi \\ -(|\xi|^2 + \eta) \varphi(x, \xi, t) + v(x, t) \mu(\xi) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est alors donné par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (u, v, \varphi)^T \in \mathcal{H} : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), v \in L_g^2(\mathbb{R}^n), \\ \phi(x) \Delta u(x) - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ -(|\xi|^2 + \eta) \varphi + v(x) \mu(\xi) \in L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \\ |\xi| \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant sur l'existence et l'unicité :

2.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 2.2.1. (*Existence et unicité*)

1. Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors le système (2.6) admet une unique solution forte

$$U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}). \quad (2.17)$$

2. Si $U_0 \in \mathcal{H}$, alors le système (2.6) admet une unique solution faible

$$U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}). \quad (2.18)$$

Preuve : Nous commençons par montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif. Pour tout $U \in D(\mathcal{A})$, posons $U = (u, v, \varphi)^T$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\phi(x) \Delta u - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi d\xi \right) \bar{v} dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \bar{v} dx \\ &\quad + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (-(|\xi|^2 + \eta) \varphi + v \mu) \bar{\varphi} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \bar{v} dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \bar{v} dx - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (|\xi|^2 + \eta) |\varphi|^2 d\xi dx \\ &\quad + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) (\bar{\varphi} v - \varphi \bar{v}) d\xi dx \\ &= -\zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (|\xi|^2 + \eta) |\varphi|^2 d\xi dx + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mu(\xi) (\bar{\varphi} v - \varphi \bar{v}) d\xi dx \end{aligned}$$

ainsi, en prenant la partie réelle, on trouve :

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + \eta) |\varphi(\xi, t)|^2 d\xi dx \leq 0. \quad (2.19)$$

Par conséquent, $\mathcal{A}$ est dissipatif.

Nous montrons à présent que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$ nous montrons qu'il existe $U = (u, v, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1 \\ \lambda v - \phi \Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi = f_2 \\ \lambda \varphi + (|\xi|^2 + \eta) \varphi(\xi, t) - v(x) \mu(\xi) = f_3. \end{cases} \quad (2.20)$$

Alors, à partir de (2.20)₁ et (2.20)₃, on trouve que

$$v = \lambda u - f_1 \quad (2.21)$$

il est clair que $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, et on a :

$$\varphi = \frac{f_3(\xi) + \mu(\xi) v(x)}{\lambda + |\xi|^2 + \eta}. \quad (2.22)$$

D'après (2.20)₁ et (2.20)₂, on montre que u vérifie

$$\lambda^2 u - \phi \Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi = \lambda f_1 + f_2. \quad (2.23)$$

Résoudre le système (2.23) équivaut à trouver $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda^2 u \bar{w} - \phi \Delta u \bar{w}) dx + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi(x, \xi, t) d\xi \right) \bar{w} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f_1 + f_2) \bar{w} dx \quad (2.24)$$

pour tout $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant (2.24) et (2.22), puis la formule de Green, obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda^2 u \bar{w} + \phi \nabla u \nabla \bar{w}) dx + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu^2(\xi)}{|\xi|^2 + \eta + \lambda} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \bar{w} dx + \\ & \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu(\xi)}{|\xi|^2 + \eta + \lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f_3(x, \xi) \bar{w} dx d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f_1 + f_2) \bar{w} dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En utilisant à nouveau (2.21), on déduit que

$$v(x) = \lambda u(x) - f_1(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.26)$$

En insérant (2.26) dans (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda^2 g(x) u \bar{w} + \nabla u \nabla \bar{w}) dx + \lambda \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u \bar{w} dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (f_2 + \lambda f_1) \bar{w} dx \\ & - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu(\xi)}{|\xi|^2 + \eta + \lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_3(x, \xi) \bar{w} dx d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_1(x) \bar{w} dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

où

$$\tilde{\zeta} = \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu^2(\xi)}{|\xi|^2 + \eta + \lambda} d\xi.$$

Alors (2.27) est équivalent au problème

$$a(u, w) = L(w) \quad (2.28)$$

où $a(u, w) : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire défini par :

$$a(u, w) = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda^2 g(x) u \bar{w} + \nabla u \nabla \bar{w}) dx + \lambda \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u \bar{w} dx$$

et $L(w) : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire défini par :

$$L(w) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (f_2 + \lambda f_1) \bar{w} dx - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu(\xi)}{|\xi|^2 + \eta + \lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_3(x, \xi) \bar{w} dx d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_1(x) \bar{w} dx.$$

la forme sesquilinéaire $a(., .)$ est bornée pour tout $(u, w) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, en effet

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &\leq \lambda^2 \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda \tilde{\zeta} \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

et est coercive pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda^2 g(x) |u|^2 + |\nabla u|^2) dx + \lambda \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) |u|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + (\lambda^2 + \lambda \tilde{\zeta}) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) |u|^2 dx \\ &\geq M \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Lax–Milgram, on conclut que pour tout $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, le problème (2.28) admet une unique solution $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Ainsi, la preuve du théorème 2.2.1 est obtenue par une application du théorème de Hille–Yosida.

Chapitre 3

Etude de la stabilité

3.1 Stabilité forte du système

Dans cette partie, nous utilisons un critère général d'Arendt et Batty (voir [5] ou [13]), d'après lequel un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contraction $e^{\mathcal{A}t}$ dans un espace de Banach est fortement stable si $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres imaginaires pures et si $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre dénombrable d'éléments. Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 3.1.1. [5] *Supposons que $\eta \geq 0$. Le semi-groupe $\mathcal{C}_0 e^{\mathcal{A}t}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, la solution de (2.14) vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\mathcal{A}t} U_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour la démonstration du théorème 3.1.1, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.1.1. $\mathcal{A}$ n'admet pas des valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous considérons deux possibilités : $i\lambda = 0$ et $i\lambda \neq 0$.

Cas 1 : $i\lambda = 0$. Supposons qu'il existe $U = (u, v, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ non nul tel que

$$\mathcal{A}U = 0.$$

D'après la définition de $\mathcal{A}$ en (2.15), on obtient le système :

$$\begin{cases} v = 0 \\ \phi \Delta u - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi d\xi = 0 \\ -(|\xi|^2 + \eta) \varphi + \mu(\xi) v = 0 \end{cases}$$

cela implique que $v = \varphi = u = 0$, donc la résolution de $\mathcal{A}U = 0$ donne $U = 0$.

Par conséquent, $i\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de $\mathcal{A}$.

Cas 2 : $i\lambda \neq 0$. Nous raisonnons par contradiction. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, et $U = (u, v, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ non nul tels que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U.$$

Alors, nous avons :

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0, \\ i\lambda v - \phi\Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi)\varphi d\xi = 0, \\ i\lambda\varphi + (|\xi|^2 + \eta)\varphi - \mu(\xi)v = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

à partir de (2.19) nous avons

$$0 = \mathcal{R}e \langle i\lambda U, U \rangle = \mathcal{R}e \langle \mathcal{A}U, U \rangle = -\zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (\xi^2 + \eta) |\varphi(t, \xi)|^2 d\xi dx$$

on obtient

$$\varphi \equiv 0. \quad (3.2)$$

La substitution de (3.2) dans (3.1)₃, donne

$$v = 0,$$

on déduit alors de (3.1)₁, que $u = 0$, et par suite $U = 0$.

Par conséquent, $i\lambda \neq 0$ n'est pas une valeur propre de $\mathcal{A}$.

Ainsi $\mathcal{A}$ n'admet pas des valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.

Lemme 3.1.2. *Nous considérons les cas suivants :*

- Lorsque $\lambda \neq 0$ l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.
- Lorsque $\lambda = 0$ et $\eta \neq 0$ l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

Preuve : Cas 1 : $\lambda \neq 0$. Nous allons prouver que l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$. Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$, nous cherchons $X = (u, v, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de l'équation suivante :

$$(i\lambda I - \mathcal{A})X = F,$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1, \\ i\lambda v - \phi\Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi)\varphi d\xi = f_2, \\ i\lambda\varphi + (|\xi|^2 + \eta)\varphi - \mu(\xi)v = f_3, \end{cases} \quad (3.3)$$

d'après (3.3)₁, on obtient :

$$v = i\lambda u - f_1, \quad (3.4)$$

d'après (3.3)₃, on obtient :

$$\varphi = \frac{f_3(x, \xi) + \mu(\xi)v}{i\lambda + |\xi|^2 + \eta} = \frac{f_3(x, \xi)}{i\lambda + |\xi|^2 + \eta} + \frac{i\lambda\mu(\xi)u}{i\lambda + |\xi|^2 + \eta} - \frac{\mu(\xi)f_1(x, \xi)}{i\lambda + |\xi|^2 + \eta}, \quad (3.5)$$

en insérant (3.4) dans (3.3)₂, on trouve :

$$-\lambda^2 u - \phi\Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi)\varphi d\xi = f_2 + i\lambda f_1. \quad (3.6)$$

Résoudre le système (3.6) équivaut à trouver $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(-\lambda^2 g(x)u\bar{w} - \Delta u\bar{w} + \zeta g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi)\varphi d\xi \right) \bar{w} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (f_2 + i\lambda f_1) \bar{w} dx, \quad (3.7)$$

pour tout $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Ensuite, en utilisant (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (-\lambda^2 g(x) u \bar{w} - \Delta u \bar{w}) dx + i\lambda \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u \bar{w} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (f_2 + i\lambda f_1) \bar{w} dx - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu(\xi)}{i\lambda + |\xi|^2 + \eta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_3(x, \xi) \bar{w} dx d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_1 \bar{w} dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) peut se réécrire sous la forme

$$\hat{a}(u, w) = \hat{L}(w), \quad (3.9)$$

où la forme bilinéaire $\hat{a} : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ et la forme linéaire $\hat{L} : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ sont définies comme suit :

$$\hat{a}(u, w) = \int_{\mathbb{R}^n} (-\lambda^2 g(x) u \bar{w} - \Delta u \bar{w}) dx + i\lambda \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u \bar{w} dx$$

et

$$\hat{L}(w) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) (f_2 + i\lambda f_1) \bar{w} dx - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu(\xi)}{i\lambda + |\xi|^2 + \eta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_3(x, \xi) \bar{w} dx d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_1 \bar{w} dx.$$

La forme sesquilinéaire $a(., .)$ est bornée pour tout $(u, w) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, en effet

$$\begin{aligned} |\hat{a}(u, w)| &\leq \lambda^2 \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda \tilde{\zeta} \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq (\lambda^2 + \lambda \tilde{\zeta}) \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

et est coercive pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \hat{a}(u, u) &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\lambda^2 g(x) |u|^2 - \Delta u \bar{u}) dx + i\lambda \tilde{\zeta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) |u|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ((i\lambda \tilde{\zeta} - \lambda^2) g(x) |u|^2 - \Delta u \bar{u}) dx \\ &\geq M \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

La forme bilinéaire $\hat{a}$ est à la fois continue et coercive, tandis que la forme linéaire $\hat{L}$ est continue. Grâce au théorème de Lax-Milgram, on a pour tout $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, le système (3.9) admet une solution unique $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Cas 2 : $\lambda = 0$ et $\eta \neq 0$.

Le système (3.3) se réduit au système suivant :

$$\begin{cases} -v = f_1, \\ -\phi \Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi d\xi = f_2, \\ (|\xi|^2 + \eta) \varphi - \mu(\xi) v = f_3. \end{cases}$$

Alors, d'après (3.8) on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\Delta u \bar{w} dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_2 \bar{w} dx - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bar{w} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_3 - \mu(\xi) f_1}{|\xi|^2 + \eta} d\xi dx. \quad (3.10)$$

Ainsi, le système (3.10) peut s'écrire comme le problème :

$$\widehat{a}_\eta(u, w) = \widehat{L}_\eta(w), \quad (3.11)$$

où la forme bilinéaire $\widehat{a}_\eta : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ et la forme linéaire $\widehat{L}_\eta : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ sont définies comme suit :

$$\widehat{a}_\eta(u, w) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \bar{w} \, dx$$

et

$$\widehat{L}_\eta(w) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_2 \bar{w} \, dx - \zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \bar{w} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_3 - \mu(\xi) f_1}{|\xi|^2 + \eta} \, d\xi \, dx.$$

La forme sesquilinéaire $\widehat{a}_\eta(., .)$ est bornée pour tout $(u, w) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, en effet

$$\begin{aligned} |\widehat{a}_\eta(u, w)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

et est coercive pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{a}_\eta(u, u) &= - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \bar{u} \, dx \\ &\geq M \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

Nous avons que $\widehat{a}_\eta$ est continue, coercive et que $\widehat{L}_\eta$ est continue. Grâce à nouveau au théorème de Lax–Milgram, le système (3.11) admet une unique solution $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, l'opérateur $-\mathcal{A}$ est surjectif.

Lemme 3.1.3. *Supposons que $\eta = 0$. Alors, l'opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas inversible et par conséquent $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.*

Preuve : On définit le vecteur $F = (\sin x, 0, 0) \in \mathcal{H}$. Supposons qu'il existe $U = (u, v, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ tel que :

$$-\mathcal{A}U = F$$

on conclut que

$$\varphi(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-n-4}{2}} \sin x \notin L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

Alors, l'hypothèse de l'existence de U est fausse et par conséquent, l'opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas inversible.

Preuve : (Théorème 3.1.1) D'après le lemme 3.1.1, l'opérateur $\mathcal{A}$ ne possède pas de valeurs propres imaginaires pures. En utilisant le lemme 3.1.2, on obtient que $R(i\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ainsi que $R(i\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ pour $\lambda = 0$ et pour tout $\eta > 0$. Alors, le théorème du graphe fermé de Banach implique que

$$\begin{cases} \sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset & \text{si } \eta > 0, \\ \sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \{0\} & \text{si } \eta = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, le C_0 -semi-groupe $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable.

Chapitre 4

Taux de décroissance polynomiale

4.1 Stabilité polynomiale du système

Dans ce chapitre, nous démontrons le taux de la décroissance de l'énergie relative au système (1). Pour ce faire, nous exploitons une estimation particulière de la résolvante basée sur des travaux de C. Batty, R. Chill et Y. Tomov [6]. Avant d'énoncer notre résultat principal de ce chapitre, nous avons besoin du théorème suivant.

Théorème 4.1.1. [6] *Supposons que $\mathcal{A}$ soit le générateur d'un C_0 -semi-groupe fortement continu de contractions $(e^{t\mathcal{A}})_{t \geq 0}$ sur l'espace d'énergie $\mathcal{H}$. Si $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un $\ell > 0$ fixé :*

1. $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^\ell)$.
2. $\|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\ell}, \quad \forall t > 0, U_0 \in D(\mathcal{A}),$ avec $C > 0$ une constante.

Théorème 4.1.2. (Résultat principal) *Supposons que $\eta > 0$, Alors, pour tout $U_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de U_0 , telle que l'énergie de la solution U de (1) vérifie l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\frac{2}{1-\alpha}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que l'énergie d'une solution régulière du système (1) décroît polynômialement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Preuve : (Théorème 4.1.2)

En conséquence du théorème 4.1.1, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$, défini par (2.15) et (2.16) vérifie :

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow +\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^{1-\alpha}).$$

Raisonnons par absurde, supposons que :

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \rightarrow \infty$, ainsi qu'une suite de vecteurs $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$, telles que :

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$$

et

$$\lambda_n^{1-\alpha}(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n = o(1) \quad \text{dans } \mathcal{H}. \quad (4.1)$$

Afin d'alléger les notations, nous convenons d'omettre l'indice n dans ce qui suit. Le but est de montrer que $U \rightarrow 0$, ce qui conduit à une contradiction. Soit $U = (u, v, \varphi)^\top$, l'équation (4.1) est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} i\lambda u - v = \frac{f_1}{\lambda^{1-\alpha}}, \\ i\lambda v - \phi \Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi d\xi = \frac{f_2}{\lambda^{1-\alpha}}, \\ i\lambda \varphi + (|\xi|^2 + \eta) \varphi - v(x) \mu(\xi) = \frac{f_3}{\lambda^{1-\alpha}}, \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $F = (f_1, f_2, f_3)^\top \in \mathcal{H}$.

En effectuant le produit scalaire de (4.1) avec U dans $\mathcal{H}$ et en utilisant (2.19)

$$\begin{aligned} \Re \langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= -\Re \langle \mathcal{A}U, U \rangle \\ &= \zeta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + \eta) |\varphi(x, t, \xi)|^2 d\xi dx \\ &= \frac{o(1)}{\lambda^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

cela implique que

$$\|(|\xi|^2 + \eta)^{1/2} \varphi\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} = \frac{o(1)}{\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}},$$

par conséquent,

$$\|\varphi\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} = \frac{o(1)}{\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}}. \quad (4.3)$$

En multipliant l'équation (4.2)₃ par $(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{-1-n} |\xi|^n$, en intégrant sur $\mathbb{R}^n$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} & |v(x)| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{\alpha+\frac{n}{2}}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{n+1}} d\xi \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2n-2}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{2n}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi| |\varphi(x, \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{|\lambda|^{1-\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2n}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{2n+2}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_3(x, \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En notant

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{\alpha+\frac{n}{2}}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{n+1}} d\xi, \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2n-2}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{2n}} d\xi,$$

et

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2n}}{(|\lambda| + |\xi|^2 + \eta)^{2n+2}} d\xi,$$

et en utilisant le Lemme 1.5.7, on obtient

$$\begin{cases} I_1 = k_1(\alpha, n)(|\lambda| + \eta)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4} - 1}, \\ I_2 = k_2(n)(|\lambda| + \eta)^{-\frac{n}{2} - 1}, \\ I_3 = k_3(n)(|\lambda| + \eta)^{-\frac{n}{2} - 2}, \end{cases}$$

où

$$k_1(\alpha, n) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{4} - \frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3n}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma(n+1)}, \quad k_2(n) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma(2n)},$$

et

$$k_3(n) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma(2+2n)}.$$

En appliquant l'inégalité de Young, en multipliant par g et en intégrant sur $\mathbb{R}^n$, on obtient pour $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|v|^2 dx &\leq \frac{2I_2}{I_1^2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|\xi\varphi(x, \xi)|^2 d\xi dx + \frac{2I_3}{I_1^2|\lambda|^{2(1-\alpha)}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|f_3(x, \xi)|^2 d\xi dx \\ &\leq \frac{2I_2}{I_1^2} \|(|\xi|^2 + \eta)^{1/2} \varphi\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} + \frac{2I_3}{I_1^2|\lambda|^{2(1-\alpha)}} \|f_3\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

et on conclut que :

$$\|v\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} = o(1). \quad (4.4)$$

De la première équation de (4.2) et du résultat précédent, il s'ensuit que

$$\|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{o(1)}{\lambda}. \quad (4.5)$$

Enfin, en substituant $v = i\lambda u - \frac{f_1}{\lambda^{1-\alpha}}$ dans l'équation (4.2)₂, on obtient :

$$-\lambda^2 u - \phi \Delta u + \zeta \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi d\xi = \frac{f_2 + i\lambda f_1}{\lambda^{1-\alpha}}. \quad (4.6)$$

En multipliant (4.6) par $g(x)\bar{u}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(-\lambda^2 g(x)u\bar{u} - \Delta u\bar{u} + \zeta g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu(\xi) \varphi d\xi \right) \bar{u} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{f_2 + i\lambda f_1}{\lambda^{1-\alpha}} \bar{u} dx,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq c \|\lambda u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \zeta \|(|\xi|^2 + \eta)^{-\frac{1}{2}} \mu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|(|\xi|^2 + \eta)^{\frac{1}{2}} \varphi\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}} \|u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{|\lambda|^{1-\alpha}} \|\lambda u\|_{L_g^2(\mathbb{R}^n)} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

De (4.3), (4.5), et du fait que $\|f_1\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = O(1)$, $\|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(1)$, on obtient :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = o(1).$$

Donc

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = o(1). \quad (4.7)$$

Avec (4.3), (4.4) et (4.7) nous concluons que toutes les composantes de U convergent vers zéro dans leurs normes, i.e. $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$. Ceci contredit la condition de normalisation $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$. Par conséquent, notre hypothèse était fausse et l'estimation de la résolvante est satisfaite.

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^{1-\alpha})$$

D'après le Théorème 4.1.1 (avec $l = 1 - \alpha$), on obtient la décroissance polynomiale.

$$\|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/(1-\alpha)}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})},$$

ce qui correspond exactement à l'estimation de l'énergie énoncée dans le Théorème 4.1.2, puisque $E(t) = \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2$. La preuve est donc complète.

Conclusion

En conclusion, il convient de souligner que la difficulté majeure réside dans le caractère non borné du domaine de notre système à la présence d'un amortissement fractionnaire. Cette configuration nécessite le recours à des méthodes avancées pour atteindre nos objectifs, le domaine non borné introduisant des complexités analytiques particulières. Cette situation soulève des défis importants en analyse fonctionnelle, particulièrement en ce qui concerne les espaces de travail. Notre apport principal se décline comme suit :

1. En ce qui concerne la dérivée fractionnaire de l'amortissement frictionnel dans la dérivée fractionnaire généralisée au sens de Caputo, donnée dans (1).
2. On utilise le théorème 2.1.1 pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution dans le théorème 2.2.1. Sur la base des lemmes 1.5.5 et 1.5.6, nous avons étudié le comportement asymptotique des solutions dans les théorèmes 3.1.1 et 4.1.2.
3. L'adoption de la théorie des semi-groupes pour analyser notre système.

Bibliographie

- [1] Z. Achouri, N. Amroun and A. Benaissa. The Euler Bernoulli beam equation with boundary dissipation of fractional derivative type. *Math. Methods Appl. Sci*, 40, (2017)-11, 3837-3854.
- [2] R. A. Adams. *Sobolev spaces*, Academic press, Pure and Applied Mathematics, vol. 65 1978.
- [3] M. Akil and A. Wehbe. Indirect stability of a multidimensional coupled wave equations with one locally boundary fractional damping. *athematical News / Mathematische Nachrichten*, 22, 295 (12), pp.2272-2300.
- [4] M. Akil and A. Wehbe. Stabilization of multidimensional wave equation with locally boundary fractional dissipation law under geometric conditions. *Mathematical Control and Related Fields*, 2019, 9(1) : 97-116.
- [5] W. Arendt and C. J. K. Batty. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Am. Math. Soc*, 374(2) : 306 (1988), pp. 837-852.
- [6] C. Batty, R. Chill and Y. Tomilov. Fine scales of decay of operator semigroups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 2016, 18, 853–929
- [7] A. Beniani, A. Benaissa and Kh. Zennir. Polynomial decay of solutions to the Cauchy problem for a Petrovsky-Petrovsky system in $\mathbb{R}^n$. *Acta Appl. Math*, **146**(2016), 67-79.
- [8] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. théorie et applications, collection mathématiques appliquées pour la maitrise. 1983.
- [9] K. Brown and N. Stavrakakis. Global bifurcation results for semilinear elliptic equations on all of $\mathbb{R}^n$. *Duke Math. J.* 85, 77–94 (1996).
- [10] H. Buljan, A. Siber, M. Soljagic, T. Schwartz, M. Segev and D. N. Christodoulides, Incoherent white light solitons in logarithmically saturable noninstantaneous nonlinear media, *Phys. Rev. E*(3), 68(2003), no. 3, 036607.
- [11] N. Karachalios and N. Stavrakakis. Existence of global attractor for semilinear dissipative wave equations on $\mathbb{R}^n$. *J. Differ. Equ.* 157, 183–205 (1999).
- [12] W. Krolikowski, D. Edmundson and O. Bang, Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media, *Phys. Rev. E*(61)(2000), 3122-3126.
- [13] I. Lyubich Yu and V.Q. Phng. Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces. *Studia Mathematica*, 88 (1) (1988), 37-42.
- [14] RL. Magin. Fractional Calculus in Bioengineering, *Begell House Publishers. USA : Reding CT*, 2006.
- [15] S. De Martino, M. Falanga, C. Gordano and G. Lauro. Logarithmic Schrodinger like equation as a model for magma transport, *Europhys. Lett.* (63)(2023), no. 3, 472-178.

- [16] B. Mbodje. Wave energy decay under fractional derivative controls. *IAM J. Control Optim*, 23 (2006), 237-257.
- [17] P.G. Papadopoulos and N. Stavrakakis. Global existence and blow-up results for an equations of Kirchhoff type on $\mathbb{R}^n$. *Topol. Methods Nolinear Anal.* 17, 91–109 (2001).
- [18] J. Pierre Raymond. Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.
- [19] V.E. Tarasov. Fractional dynamics : Applications of fractional calculus to dynamics of particles, *New York : Field and Media, Springer*, (2011).
- [20] D. Valério, J. Machado and V. Kiryakova. Some pioneers of the applications of fractional calculus, *Frac. Calc. Appl. Anal.* 17(2)(2014), 552-578.
- [21] R.C.A.M Van Der Vorst. *Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^{2n/n-4}(\Omega)$* , *Diff. Int. Eq.* 6(2), 259-276, 1993.
- [22] Kh. Zennir. General decay of solutions for damped wave equation of Kirchhoff type with density in $\mathbb{R}^n$. *Ann Univ Ferrara*, Volume 61, pages 381–394, (2015).