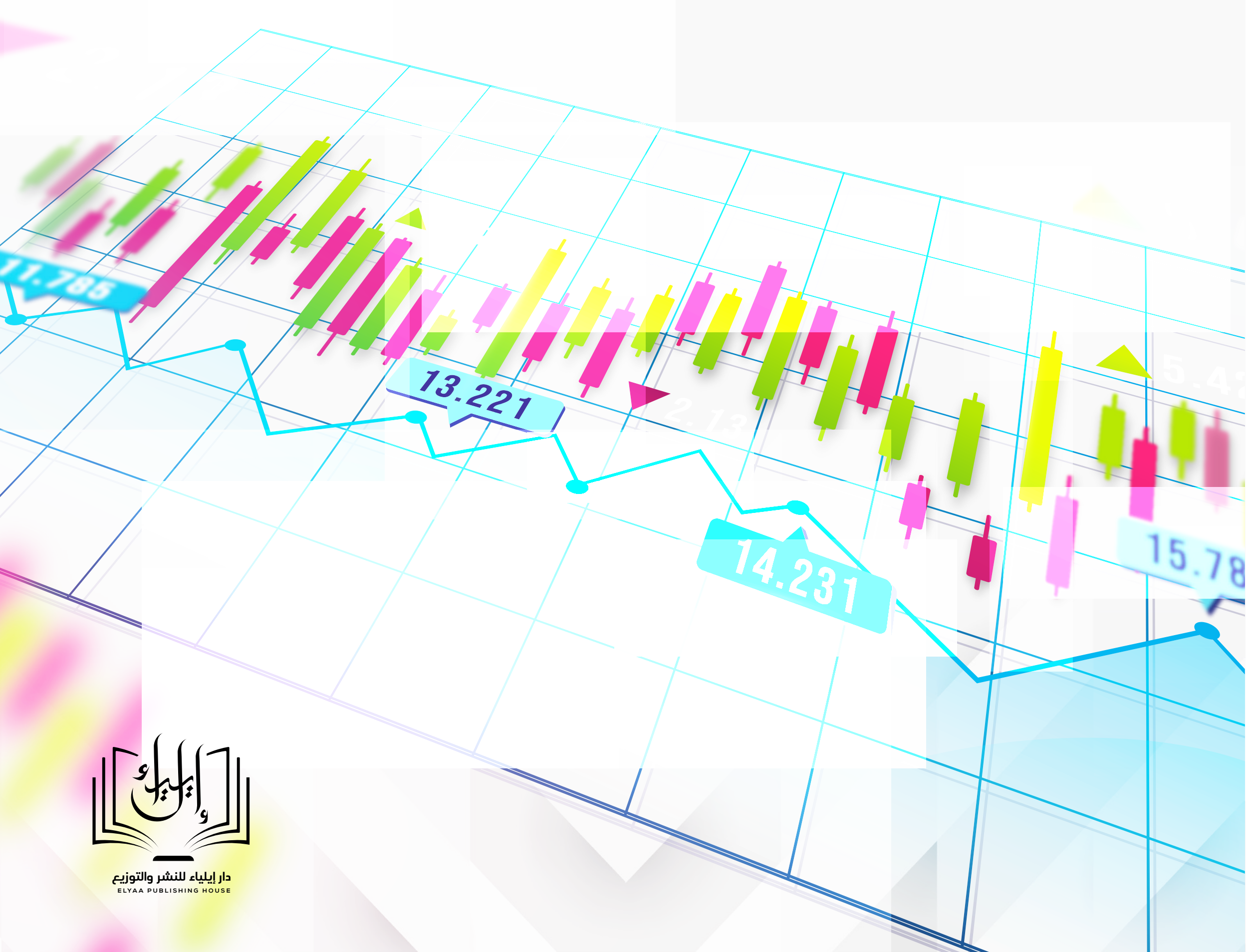
د. فايزة سي محمد

تحليـــــل السلاسل الزمنية

-محاضرات وتطبيقات-



دار إيلياء للنشر والتوزيع
ELYAA PUBLISHING HOUSE

د. فايزة سي محمد

تحليل السلاسل الزمنية -محاضرات وتطبيقات-

د. فايزة سي محمد

أستاذة جامعية بجامعة عين تموشنت، متخصصة في الاقتصاد القياسي والبنكي والمالي. حاصلة على دكتوراه في العلوم الاقتصادية، وتنصب اهتماماتها البحثية على قضايا سعر الصرف، الأداء الاقتصادي الكلي، التمويل الإسلامي والتحول الرقمي. لها إسهامات علمية متعددة من خلال مشاركات وطنية ودولية ونشر مقالات محكمة في مجالات علمية مصنفة، إلى جانب مساهمتها في مشاريع بحث جامعية ولجان علمية أكاديمية.

عـــن الكتاب

يتناول هذا الكتاب بطريقة واضحة جميع الأساليب -الكلاسيكية والحديثة -لتحليل السلسلة الزمنية، والتي تكون تطبيقاتها الاقتصادية دائمًا أكثر عددًا: التنبؤ بالاقتصاد الكلي، والتمويل، والتسويق...، وهو يتناسب مع طلاب الدراسات العليا في الاقتصاد أو الإدارة وكذلك طلاب كليات الهندسة ورجال الأعمال. كما أنه مخصص للمهنيين وممارسي الاقتصاد القياسي للسلسلة الزمنية (اقتصاديو الأعمال والباحثون والباحثون...) الذين سيجدون في هذا الكتاب حلولًا عملية للمشاكل المختلفة التي يواجهونها.

ISBN :978-9969-05-823-9

9 789969 058239

دار إيلياء للنشر والتوزيع
ELYAA PUBLISHING HOUSE

حي ميموني حمود 02 برج الكيفان
الجزائر العاصمة – الجزائر
email :elyaa.publishing@gmail.com
www.dar-elyaa.com

تحليل السلاسل الزمنية

-محاضرات وتطبيقات-

تحليل السلاسل الزمنية

-محاضرات وتطبيقات-

عنوان الكتاب:

تحليل السلاسل الزمنية

-محاضرات وتطبيقات-

الحجم: 15.5 X 23.5

عدد الصفحات: 232

من تأليف: د. سي محمد فايزة

© المكتبة الوطنية الجزائرية

ردمك: ISBN:978-9969-05-823-9

الإيداع القانوني: جانفي 2026

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو أي جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله بأي شكل من الأشكال، دون إذن خطي مسبق من الناشر

دار إيلياء للنشر والتوزيع

حي ميموني حمود 02 برج الكيفان - الجزائر العاصمة - الجزائر

email : adm@dar-elyaa.com

www.dar-elyaa.com

الآراء والأفكار الواردة في هذا الكتاب تعبّر عن وجهة نظر المؤلف وحده، ولا تعكس بالضرورة مواقف أو آراء دار إيلياء للنشر.

جميع الحقوق محفوظة

2026

تحليل السلاسل الزمنية

-محاضرات وتطبيقات-

من تأليف:

د. سي محمد فايزة

دار إيلياء للنشر والتوزيع

ELYAA PUBLISHING HOUSE

المحتويات

مقدمة

مقدمة:

هذا الكتاب هو مقدمة للاقتصاد القياسي للسلسلة الزمنية. هدفها هو نمذجة السلسلة الزمنية. يوفر إطارًا للتفكير النظري وعالمًا مفاهيميًا للأدوات الرياضية والإحصائية اللازمة للنمذجة الكمية المخصصة للاقتصاد. يسمح في الوقت المناسب بقياس الظواهر الاقتصادية المعقدة في كثير من الأحيان وتحليل سلوكياتها الديناميكية. وهو مخصص لطلاب الماجستير في التخصصات ذات الصلة.

الغرض من هذا الكتاب هو تقديم عرض كامل ومفصل لتقنيات نمذجة السلاسل الزمنية. الجزء الأول مخصص لعموميات عن السلاسل الزمنية من طرق الكشف عن شكل السلسلة الزمنية والتعرف على مركباتها وتحليل الاتجاه العام ويتناول الجزء الثاني بالتفصيل طرق إزالة الاثر الموسمي والذي يتناسب مع شكل السلسلة الزمنية. كما يقدم الكتاب في الجزء الثالث منه تحليلًا متعمقًا لاختبارات جذر الوحدة ودوال الارتباط الذاتي والجزئي وفي الفصل الأخير تم التطرق إلى نماذج التنبؤ في المدى القصير من طرق التمهيد الاسي البسيط والمزدوج إلى التحليل الأحادي والمتعدد المتغيرات للعمليات الثابتة حيث تتم دراسة عمليات ARMA ونماذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين.

الهدف من الكتاب إكمال أول دليل للاقتصاد القياسي للنماذج الديناميكية من خلال عرض الأدوات الرئيسية للسلسلة الزمنية ومرافقتها باستخدامها العملي، حيث تمت من خلاله الاستجابة للحاجة التربوية لوضع الاختبارات المختلفة والطرق النظرية لتحليل السلاسل الزمنية نظرا لأهميتها في مختلف المجالات كالتأمين والمالية وغيرها

يتناول هذا الكتاب بطريقة واضحة وتعليمية جميع الأساليب -الكلاسيكية والحديثة -لتحليل السلسلة الزمنية، والتي تكون تطبيقاتها الاقتصادية دائمًا أكثر عددًا: التنبؤ بالاقتصاد الكلي، والتمويل، والتسويق. ......، وهو مخصص لطلاب الدراسات

العليا في الاقتصاد أو الإدارة وكذلك طلاب كليات الهندسة ورجال الأعمال. كما أنه مخصص للمهنيين وممارسي الاقتصاد القياسي للسلسلة الزمنية (اقتصاديو الأعمال والباحثون والباحثون...) الذين سيجدون في هذا الكتاب حلولًا عملية للمشاكل المختلفة التي يواجهونها.

الفصل الأول:

عموميات عن السلاسل الزمنية

I.مفاهيم عامة عن السلاسل الزمنية

السلسلة الزمنية عبارة عن مجموعة من القيم أو البيانات أو المشاهدات حول ظاهرة معينة يتم رصدها على فترات زمنية متتالية ومتساوية ومن الامثلة عنها البيانات اليومية، الاسبوعية، الشهرية أو السنوية التي يمكن رصدها عن ظاهرة ما قابلة للملاحظة والقياس.

يتم الحصول على المعطيات الخاصة بالسلاسل الزمنية من المصادر الداخلية للمنشأة (مستندات أو إدارة المبيعات) أو من المصادر الخارجية كالمنشورات والاحصائيات التي تقوم بإعدادها الدوائر او المعاهد البحثية الخاصة بالطلاب في الجامعات لكنها لا تستغل بشكل مباشر في تحليل السلاسل الزمنية إلا بعد القيام بتعديلات في الانحرافات ثم محاولة اسقاط المعطيات على منحنى بياني من اجل ملاحظة الظاهرة المدروسة وما تشمل عليه من تذبذبات وقياسها عن طريق معامل الخشونة الذي يتناسب بشكل عكسي مع استقرارية السلسلة.

1. أهداف ومجالات تطبيق السلاسل الزمنية:

- **أهداف السلاسل الزمنية:**

الوصف: تمثل المشاهدات في صورة بيانية لمعرفة سلوكها عبر الزمن

التنبؤ: باستخدام القيم الحالية نستطيع التنبؤ بالقيم المستقبلية

الضبط والسيطرة: وهي حالة يمكن بواسطتها ضبط سلسلة ما من مجرد معرفة سلوك سلسلة أخرى:

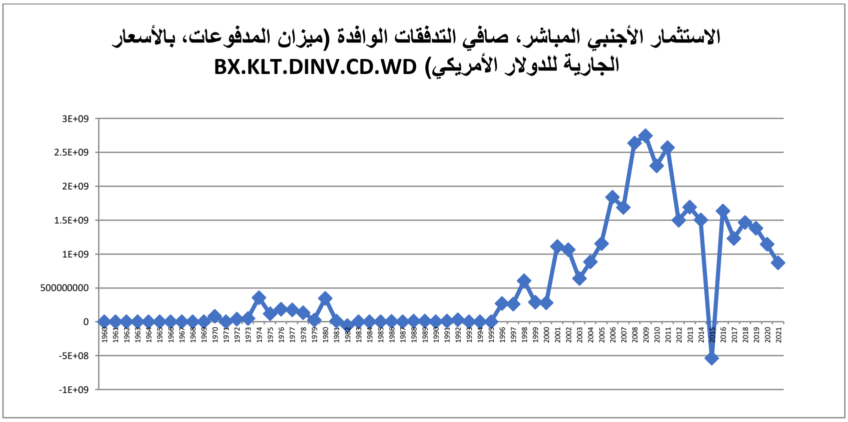
بافتراض مثلا سلسة الأسعار مرتبطة بسلسلة الطلب على النقد فيمكن بذلك معرفة سلوك سلسلة الطلب على النقد والسيطرة عليها ومثال على ذلك وجود علاقة بين متغيري

التضخم والكتلة النقدية في السوق فيمكن من خلال أساليب السياسة النقدية التحكم في حجم الكتلة النقدية من اجل التأثير على المستوى العام للأسعار في بلد ما.

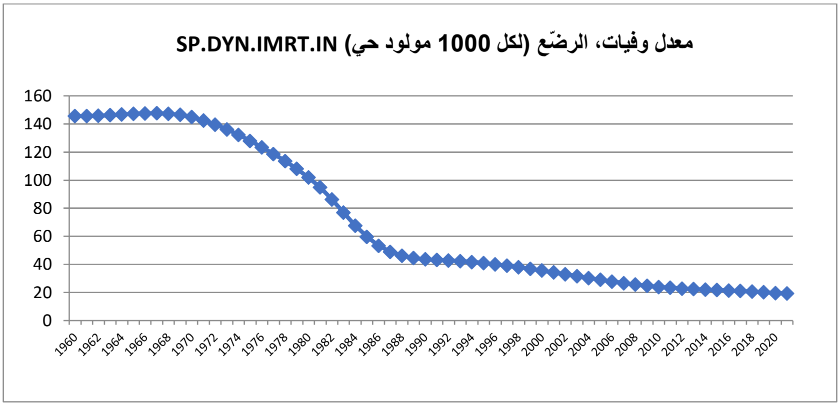
✦ **مجالات تطبيق السلاسل الزمنية:**

يمكن العثور على أمثلة على السلاسل الزمنية الأحادية في العديد من المجالات المختلفة وتنشئ بأشكال متعددة ونذكر منها

- المالية والاقتصاد القياسي: تطور مؤشرات سوق الأوراق المالية، والأسعار، والبيانات الاقتصادية التجارية، ومبيعات السلع ومشترياتها، والإنتاج الزراعي أو الصناعي. مثال سلسلة زمنية اقتصادية كسلسلة الاستثمار الأجنبي المباشر، البطالة



- التأمين: تحليل عدد الحوادث وأسبابها.
- السلاسل الزمنية السكانية: هي بيانات عدد السكان خلال فترات متعاقبة كتعداد السكان في الشريحة العمرية، معدل الوفيات والولادات

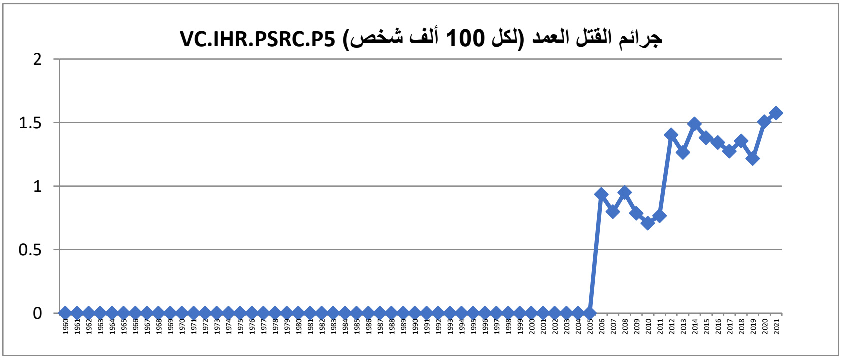


- معالجة الإشارات: إشارات الاتصالات، الرادار، السونار،

- معالجة البيانات: المقاييس المتتالية لموقع أو الجسم المتحرك (المسار)

- علوم الأرض والفضاء: مؤشرات المد والجزر، اختلافات الظواهر الفيزياء (الأرصاد الجوية)، تطور البقع الشمسية

- السلاسل الزمنية المعبرة عن حدث ما: ومثال عليها السلاسل الزمنية التي تمثل جرائم القتل العمد أو حوادث الطائرات والسيارات وغيرها



<u>ورياضيا</u> نقول إن متغير الزمن المستقل t والقيم المناظرة له المتغير التابع y وان كل قيمة في الزمن t يقابلها قيم للمتغير التابع y فإن y دالة في الزمن t أي تكتب من الشكل التالي:

$$Y = F(t)$$

<u>وتتميز بيانات السلاسل الزمنية عن بقية أنواع البيانات في الآتي:</u>

أ-تأخذ عامل الزمن كمتغير أساسي ووحيد في التأثير على الظاهرة المدروسة.

ب-بيانات السلسلة الزمنية عادة ما تغطي فترات زمنية متتالية وطويلة نسبيا يفترض أن يكون لها تأثير على الظاهرة المدروسة.

ج-بيانات أو قيم السلسلة الزمنية عادة ما تكون مرتبطة ببعضها البعض بأنماط وأشكال عدة تختلف بإخلاف طبيعة الظاهرة المدروسة، وهو ما يجعل من **ترتيب قيم أو بيانات السلسلة الزمنية أمر ضروري.**

2. **أنواع السلاسل الزمنية:** تصنف السلاسل الزمنية إلى:

✦ **<u>أولا:</u> حسب نوعية قيم السلسلة:** من حيث كونها قيم متصلة أو غير متصلة، ويؤدي هذا المعيار إلى الصنفين التاليين:

- **سلاسل زمنية متصلة (مستمرة) Continuous Time Series :** وهي السلاسل التي تقاس قيمها في أي لحظة من الزمن، كقياس نسبة المواليد في السنة أو قياس كمية الأمطار أو قياس دقات القلب

- **سلاسل زمنية منفصلة (متقطعة) Discrete Time Series:** وهي السلاسل التي تقاس قيمها أو بياناتها خلال فترات محددة، كقياس الإنتاج الشهري للمؤسسة، إحصاء عدد الطلبة المتخرجين في نهاية كل سنة دراسية ... الخ.

✦ **<u>ثانيا:</u> حسب طبيعة الزمن:** الذي تحدث فيه قيم السلسلة الزمنية: من حيث أن هذا الزمن محدد مسبقا او غير محدد، وينقسم إلى:

- **السلاسل الزمنية النقطية:** هي السلاسل التي تقاس قيمتها في أزمنة غير متوقعة، مثل سلاسل الحوادث والكوارث
- **السلاسل الزمنية غير النقطية:** هي السلاسل التي تقاس قيمتها في أزمنة محددة مسبقا مثل سلسلة ارباح شركة معينة سلسلة معدل الدخل السنوي

✦ **<u>ثالثا:</u> حسب عدد القيم التي تأخذها السلسلة عند كل قياس:** ومن انواعه

- **السلاسل الزمنية الثنائية:** هي السلاسل التي تأخذ إحدى القيمتين صفر أو واحد (فشل، نجاح) وتظهر في العديد من النظريات كنظرية الاتصالات
- **السلاسل الزمنية الغيرثنائية:** وتأخذ أكثر من قيمتين كعدد الطلبة في الجامعات أو عدد السكان في منطقة معينة.

✦ **<u>رابعا:</u> حسب التغيرات التي تحدث في السلسلة مع الزمن:** ويقصد بها تغيرات الاتجاه العام لنمو السلسلة والتكرارات التي تحدث خلال هذا النمو ومن اصنافها:

- **السلاسل ذات الاتجاه المتزايد:** ميل المنحنى موجب حيث المتوسط يتزايد مع الزمن كسلاسل عدد المواليد او الوفيات خلا حادثة معينة
- **السلاسل ذات الاتجاه المتناقص:** الميل سالب يتوسط نقط السلسلة خط مستقيم متناقص
- **السلاسل ذات الاتجاه الثابت:** الميل مساوي للصفر ويرجع ذلك غلى الخط المستقيم الثابت الذي يتوسط نقط السلسلة الزمنية كعدد الولايات والدوائر في بلد معين
- **السلاسل ذات التغيرات المتكررة على فترات متباعدة:** سلاسل يمكن ان يتوسط نقطها حط يشبه منحنى أقرب إلى دالة الجيب أو (جيب التمام) بعد تعرضه لدوران بزاوية مناسبة، وذلك لان قيم السلسلة قد تتأثر بأمور فصلية او سنوية.

✦ **<u>خامسا</u>: من حيث استقرارية السلاسل الزمنية:** حيث نميز نوعين

- **سلسلة زمنية مستقرة:** الخصائص الاحتمالية للسلسلة لا تتأثر بالزمن
- **سلسلة زمنية غير مستقرة:** الخصائص الاحتمالية للسلسلة لا تتأثر بالزمن

3. **آليات ونماذج السلاسل الزمنية:**

✦ **آليات السلاسل الزمنية:** تنحصر آليات التعامل مع السلاسل الزمنية في ثلاثة طرق:

<u>الطريقة الوصفية:</u> أي رسم صورة بيانية للسلسلة الزمنية بغرض البحث عن **اتجاه** البيانات **والتذبذبات الموسمية** وغيرها

<u>طريقة التحليل في المجال الزمني:</u> تقوم هذه الطريقة على تحليل واستعمال ما يسمى دالة الارتباط الذاتي التي تزودنا بمعلومات هامة عن كيفية تطور السلسلة الزمنية عبر الفترات المتعاقبة

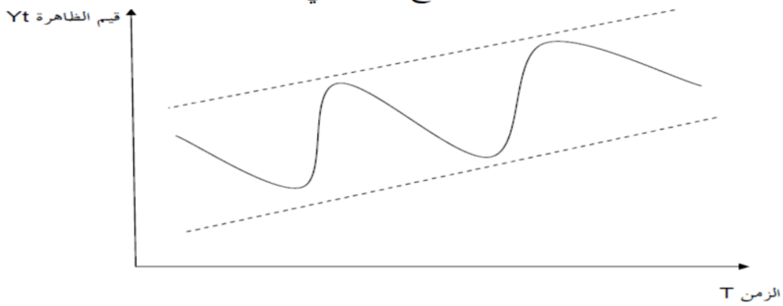
<u>طريقة التحليل الطيفي:</u> أو ما يسمى بشكل عام التحليل في **<u>المجال الترددي</u>** وفيها ينظر إلى السلسلة أنها تتكون من مركبات مختلفة وهي الاتجاه : الدوري، الموسمي والعشوائي وتقيس في المجال الزمني عدد الوحدات الزمنية التي تستغرقها الظاهرة قيد الدراسة حتى تتحقق وكيف تؤثر كل مشاهدة عبر الزمن بالمشاهدات القريبة والبعيدة عنها

عادة ما يتم تفكيك السلسلة الزمنية إلى أربع مركبات أساسية هذه المركبات مجتمعة أو منفردة هي مصدر **التغاير الأساسي** في أي سلسلة زمنية

✦ **نماذج السلاسل الزمنية:** توجد العديد من نماذج السلاسل الزمنية المساعدة على تحليل وتجزئة مركباتها وأهم هذه النماذج:

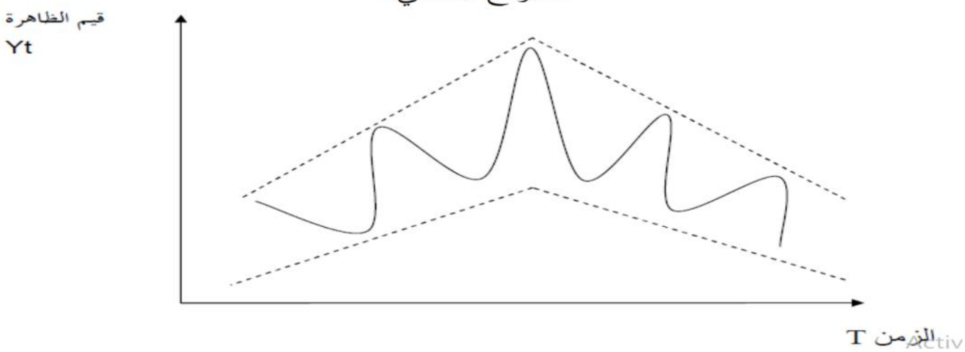
<u>النموذج التجميعي:Additive Model:</u> يفترض هذا النموذج أن قيم السلسلة الزمنية هي حاصل جمع مركبات السلسلة الزمنية الأربعة، أي: $Y_t = T+S+C+I$

النموذج التجميعي.



النموذج الجدائي Multiplicative Model: هذا النموذج يمثل العلاقة الجدائية بين مركبات السلسلة الزمنية ، أي $Y_t = T^* S^* C^* I$

النموذج الجدائي.



النموذج المختلط يمثل علاقة تجميعية وجدائية في آن واحد بين مركبات السلسلة الزمنية.

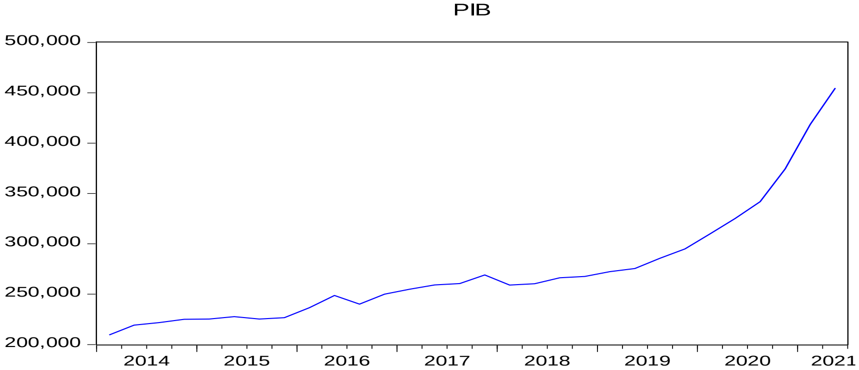
4. مركبات السلسلة الزمنية:

تتكون السلسلة الزمنية عادة من أربعة مركبات تحدد التغيرات التي تطرأ على الظاهرة المدروسة خلال فترة زمنية ما وهي:

✦ **الاتجاه العام Trend:** ويمثل الحركة المنتظمة الصاعدة أو النازلة لقيم الظاهرة خلال فترة زمنية معينة وعادة ما يمثل بيانيا بخط تصاعدي أو تنازلي أو منحنى، وتعرف بأنها **التغير الحاصل في متوسط قيم السلسلة الزمنية في الأمد الطويل**، و يعبر عنها إحصائيا بالشكل:

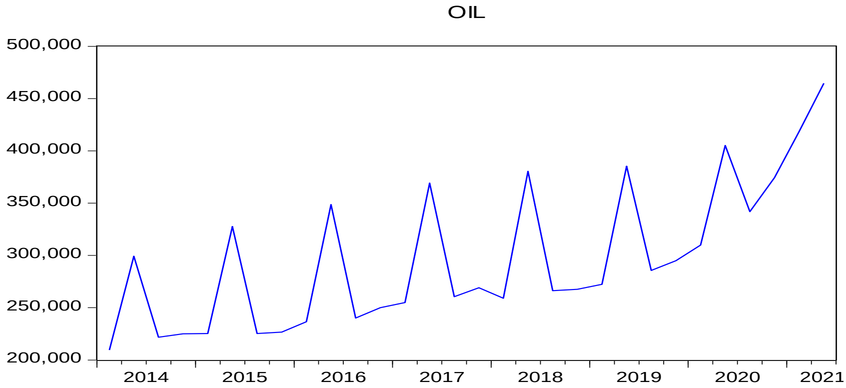
tt a bt

اتجاه عام لسلسلة زمنية (حالة اتجاه موجب)

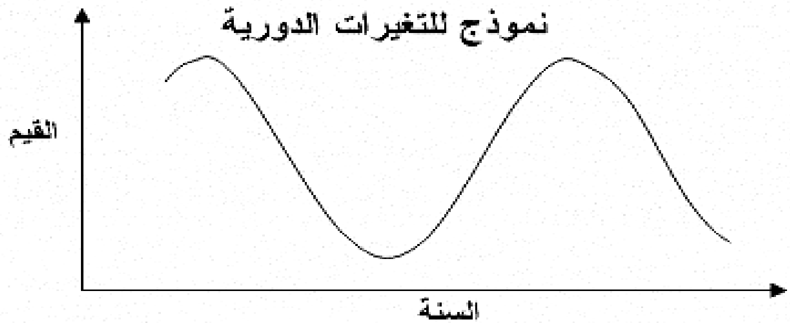


تظهر تغيرات الاتجاه العام نتيجة التغير التدريجي في حجم المجتمع، الناتج القومي الاجمالي، التطور التكنولوجي ويقيس الاتجاه العام متوسط النغير لكل فترة زمنية وقد يكون خط مستقيم أو منحنى أو أي شكل آخر بناءا على بيانات السلسلة

✦ **المركبة الموسميةSeasonal Component** : تعرف بأنها **التذبذبات التي تحصل خلال فترات زمنية متشابهة** وتستقر حول قيمة معينة من سنة معينة مثلا: استهلاك المنزلي للكهرباء خلال 24 ساعة، الإنتاج الزراعي، استهلاك نوعا معينا من المشروبات، إنتاج الطاقة الكهربائية...الخ وتعد التغيرات الموسمية التي تحدث في فترات زمنية شهرية أو ربع سنوية من اكثر هذه التغيرات مجالا للدراسة كمبيعات السيارات أو حالة الطقس التي تؤدي إلى حدوث تغيرات موسمية في الانتاج الزراعي والنشاط السياحي

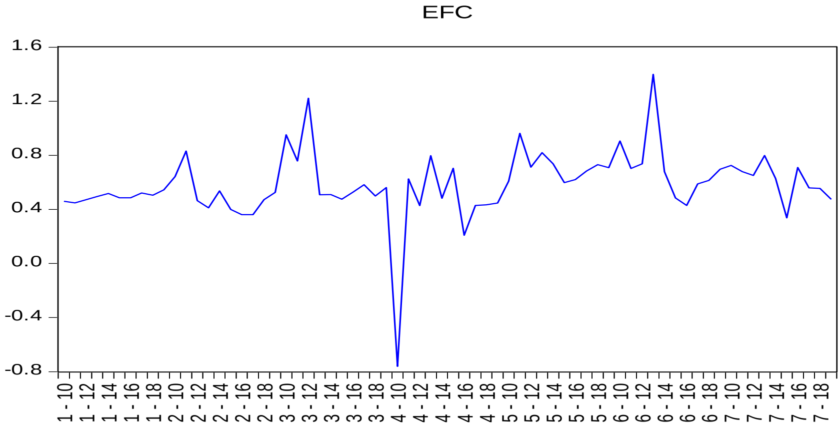


✦ **المركبة الدورية: Cyclical Component:** تعرف بانها التذبذبات الحاصلة في السلسلة الزمنية حول خط الاتجاه، وتمثل المراحل المتعاقبة من **التوسع والانحسار** مثلا (ركود، إنعاش، رواج، كساد) فهاتين الحالتين تتعقبان بشيء من الانتظام في فترات متباعدة وتؤثران في الطلب عبى المبيعات ذلك أنه في حالة الركود يكون الطلب على المبيعات منخفض عكس فترات الرخاء ولكن كون التنبؤ عموما يحدث في المدى القريب والمتوسط فإن الدورات تهمل دراستها.



✦ **المركبة العشوائيةIrregular Component:** تعبر هذه المركبة عن التغيرات التي يصعب التحكم فيها و ضبطها و هي ناتجة عن عوامل غير منتظمة و لا علاقة لها بعنصر الزمن مثلا :انخفاض الإنتاج نتيجة خمل في وسائل الإنتاج أو نتيجة الاضطرابات وفي هذه الحالة تكون المركبة العشوائية ناتجة عن عوامل غير هامة و مستقيمة. وهي تصف جميع

العوامل والمتغيرات التي لم تأخذ بعين الاعتبار أو التي لا يمكن قياسها والتنبؤ بها لكونها مفاجئة وعشوائية الحدوث مثل الحروب والفيضانات والزلازل وبقية العوامل المؤثرة في طلب السلع والخدمات بشكل غير متوقع.



II. طرق تحديد شكل السلاسل الزمنية

1. طريقة المتوسط الحسابي السنوي

تستعمل هذه الطريقة فيما إذا كانت السنة مقسمة إلى فترات (شهر، ثلاثي، سداسي.... إلخ)، ولهذه الطريقة خطوتان:

- أولا-حساب المتوسط الحسابي السنوي لكل سنة.$\bar{y}_i$
- ثانيا-حساب الفرق بين القيم الأصلية للسلسلة الزمنية الخاصة بكل سنة والوسط السنوي المقابل لها (نحسب قيم مركزية).
- إذا كانت هذه الفروق تشكل متتالية حسابية أو قيم متقاربة فالسلسلة الزمنية تأخذ الشكل التجميعي
- أما إذا كانت هذه الفروق على شكل متتالية هندسية، أي الفروق تتضاعف من سنة إلى أخرى فنكون في حالة النموذج الجدائي.

مثال 1: إليك السلسلة الزمنية التالية: المبيعات الفصلية لسلعة معينة خلال 5 سنوات

الفصل/ السنوات	1	2	3	4
2005	20	28	22	34
2006	19	39	25	44
2007	21	49	33	55
2008	23	60	37	66
2009	24	71	42	76

الحل:

- حساب المتوسط الحسابي السنوي:

الفصل / السنوات	1	2	3	4	$\bar{y}_i$
2005	20	28	22	34	*26*
2006	19	39	25	44	*31.75*
2007	21	49	33	55	*39.5*
2008	23	60	37	66	*46.51*
2009	24	71	42	76	*53.25*

$$\bar{y}_{2005} = \frac{20+28+22+34}{4} = 26$$

$$\bar{y}_{2006} = \frac{19+39+25+44}{4} = 31.75$$

- حساب الفرق بين القيم الأصلية للسلسلة الزمنية الخاصة بكل سنة والوسط السنوي المقابل لها

السنوات الفصل	1	2	3	4	$\bar{y}_i$
2005	-6	2	-4	8	26
2006	-12.75	7.25	-6.75	12.25	31.75
2007	-18.5	9.5	-6.5	15.5	39.5
2008	-23.5	13.5	-9.5	19.5	46.51
2009	-29.25	17.75	-11.25	22.75	53.25

مثلا: 20-26=-6

24-26=2

نلاحظ هذه الفروقات تتضاعف من سنة إلى أخرى، وبالتالي فالسلسلة الزمنية تأخذ **الشكل الجدائي**.

2. طريقة الانحراف المعياري السنوي:

لهذه الطريقة خطوة واحدة وهي تحديد الانحراف المعياري السنوي لكل سنة:

- إذا كانت هذه الانحرافات السنوية متساوية أو متقاربة نكون في حالة **النموذج التجميعي**،

- إذا كانت هذه القيم هذه القيم متباعدة فنكون في حالة **النموذج المضاعف**.

<u>مثال تطبيقي</u>: نفس المثال السابق لكن بطريقة الانحراف المعياري السنوي

<u>حساب الانحراف المعياري السنوية:</u> وهذا بتطبيق معادلة الانحدار التالية:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{P}\sum\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}$$

السنوات	σ
2005	5.47
2006	10.13
2007	13.37
2008	17.36
2009	21.29

لدينا قيم $\left(y_{ij} - \bar{Y}_i\right)$ تحصلنا عليها في الجدول السابق، نقوم بتربيع القيم وجمعها كمثال لسنة 2005 :

$$\sigma_{2005} = \sqrt{\frac{1}{P}\sum\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(36 + 4 + 16 + 64)} = \sqrt{30}$$

$$= 5.47$$

نلاحظ أن قيم الانحرافات غير ثابتة وهي تتضاعف من سنة إلى أخرى، وعليه فالسلسلة تأخذ **الشكل الجدائي.**

3. طريقة المعادلة الانحدارية

تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق التي نعتمدها في تحديد شكل السلسلة الزمنية، وتعتمد على قيمة معامل انحدار المعادلة التالية: $\sigma_i = \hat{a} + \hat{b}\bar{y}_i$

يتم استعمال طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية

- σ_i: الانحراف المعياري السنوي.

$$\sigma_i = \frac{1}{P}\sum_{j=i}^{P}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$$

- $\bar{y}_i$: المتوسط الحسابي السنوي.

$$\bar{y}_i = \frac{\sum y_{ij}}{P}$$

- m: عدد السنوات.

- P:دورية السلسلة الزمنية (تقسيمات السنة)

$$\hat{b} = \frac{cov(\sigma.\bar{y}}{var(\bar{y})} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \bar{y}_i - m\bar{\sigma}\ \bar{\bar{y}}}{\sum_{i=1}^{m} {\bar{y}_i}^2 - m\,\bar{\bar{y}}^2}$$

<u>القرار:</u>

- إذا كان $\hat{b} < 0.05$: تكون السلسلة الزمنية في حالة نموذج تجميعي.
- إذا كان $\hat{b} > 0.1$: تكون السلسلة الزمنية في حالة نموذج جدائي.
- إذا كان $\hat{b} > 0.1$: تكون السلسلة الزمنية في حالة نموذج جدائي.

<u>مثال تطبيقي:</u> حل نفس المثال السابق باستعمال طريقة المعادلة الانحدارية

السنوات	$\bar{y}_i$	σ_i	$\bar{y}_i\sigma_i$	$\bar{y}^2$
2005	26	5.47	142.22	676
2006	31.75	10.13	321.62	1008.06
2007	39.5	13.37	528.11	1560.25
2008	46.51	17.36	807.41	21163.18
2009	53.25	21.29	1133.69	2835.56
Σ	197.01	67.62	2933.05	8243.05

تقدير المعادلة

$$\sigma_i = \hat{a} + \hat{b}\bar{y}_i$$

لدينا:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum \bar{y}_i}{5} =$$

$$=39.40\frac{197.01}{5}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum \sigma_i}{5} = \frac{67.62}{5} = 13.52$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \bar{y}_i - m\bar{\sigma}\,\bar{\bar{y}}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i^{\,2} - m\bar{\bar{y}}^2} = \frac{2933.05 - 5(13.52)(39.40)}{8243.05 - 5\,(39.40)^2} = 0.56$$

القرار: بما أن $0.56 > 0.1$:تكون السلسلة الزمنية في حالة نموذج جدائي.

III. طرق الكشف عن مركبات السلاسل الزمنية:

1. تحليل الاتجاه العام:

✦ **الطريقة البيانية** :ان استعمال هذه الطريقة يتطلب دقة كبيرة في عرض بينات السلسلة الزمنية، ونهتم في هذه المرحلة بدراسة وتحليل الظروف التي تولدت عنها هذه السلسلة الزمنية. التمثيل البياني لمشاهدات السلسلة الزمنية يعكس مركباتها الأساسية بشكل أوضح، ولهذا فانه إذا كان ميل اتجاه السلسلة الزمنية موجبا فانه يدفع الاتجاه نحو الأعلى وإذا كان سالبا فانه يدفع به نحو الأسفل هذا يدل على وجود مركبة الاتجاه العام. بينما المركبة الفصلية أو الدورية، فمن خلال العرض البياني لهما يكون على شكل قمم أو نتوءات بشكل منتظم، شريطة أن الفترة الزمنية تكون شهر، فصل .... أو سنوات بالنسبة للمركبة الدورية. بينما تتمثل المركبة العشوائية في تلك التذبذبات التي تشوش سلوك المركبات المنتظمة تطبعها بصبغة عشوائية، وألا شكال السابقة توضح ذلك

✦ **الاختبارات الإحصائية** :في كثير من الحالات يكون التمثيل البياني كافيا للكشف عن مركبة السلسلة الزمنية مما يستلزم استعمال الادوات الإحصائية والتي بدورها تنقسم إلى قسمين:

- **طريقة الاختبارات الحرة** :وسميت بالحرة لأن المتغير العشوائي لا يخضع لأي توزيع احتمالي مع العلم أنه يدخ ضمن فرضيات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ونجد فيها

عدة اختبارات، هذه الاختبارات هي سهلة في حساباتها إلا أنه يعاب على ضعفها في الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية، وفي هذه المجموعة سنحاول ترتيب هذه المقاييس حسب الأفضلية الممكنة.

- **اختبار التوالي (تعاقب الاشارات):** أو ما يسمى باختبار العشوائية ويستعمل لمعرفة مدى عشوائية السلسلة الزمنية ويقوم على الفرضيتين التاليتين:

H0 : الفرضية العدمية : السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام

ويعتمد الاختبار على الخطوات التالية:

¬ ترتيب المشاهدات حسب الترتيب الزمني من الاصغر إلى الأكبر

¬ حساب الوسيط Mdوهي المشاهدات المقابلة للرتبة m حيث:

T فردي $m=(T+1)/2$ $\qquad$ $Md = Ym$

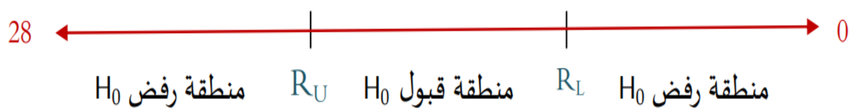
T زوجي $m=T/2$ $\qquad$ $$Md = \frac{Ym + Ym+1}{2}$$

¬ اعطاء إشارة سالبة للقيم التي أصغر من Md وموجبة للقيم التي أكبر منها

¬ حساب R ويمثل عدد توالي الاشارات من الموجب إلى السالب أو العكس ويكون القرار على أساس:

¬ **اتخاذ القرار:** إذا كان

* $m \le 20$ يتم رفض أو قبول الفرضية كما يلي:



* $m > 20$ حيث تحتسب هذه القيمة Z حسب القانون التالي:

$$|Z| = \frac{\mathbf{R-u}_R}{\sigma_R}$$

حيث $U_R = \mathbf{m}+1$ $\qquad$ $$\sigma_R = \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m-1}}$$

- إذا كان $Z_{\alpha/2} < |Z|$:يتم رفض الفرضية العدمية، أي السلسلة تحوي مركبة الاتجاه العام
- إذا كان $Z_{\alpha/2} > |Z|$:يتم قبول الفرضية العدمية، أي السلسلة لا تحوي مركبة الاتجاه العام

ملاحظة : $Z_{\alpha/2}$ تمثل القيمة الجدولية (جدول التوزيع الطبيعي المعياري) وهي في الغالب مساوية إلى 1.96

مثال تطبيقي: تأكد من وجود مركبة الاتجاه العام في مشتريات أحد المتاجر باستعمال اختبار التوالي؟

8	7	6	5	4	3	2	1	T
54	32	30	24	22	18	22	20	Y

الحل:

- ترتيب المشاهدات ترتيب تصاعدي حيث يصبح كما يلي:

8	7	6	5	4	3	2	1	T
54	32	30	24	22	20	18	15	Y

- حساب الوسيط Mdوهي المشاهدات المقابلة للرتبة m
- وبما أن T عدد زوجي فإن: m=T /2 = 4 وبالتالي:

$$\mathbf{Md} = \frac{Y4+Y5}{2} = \frac{22+24}{2} = \mathbf{23}$$

- اعطاء إشارة سالبة للقيم التي أصغر من Md وموجبة للقيم التي أكبر منها (ليس من الجدول المرتب بل من الجدول الاصلي:

T	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	20	22	18	22	24	30	32	54
الإشارة $\mathbf{Md} = \mathbf{23}$	-	-	-	-	+	+	+	+

- حساب R
- عدد مرات اختلاف الإشارة **R=2**
- اتخاذ القرار: حسب جدول القيم الحرجة لاختبار R نجد أن:

$$M{=}4 \Rightarrow \boldsymbol{R_L = 1} \quad \boldsymbol{R_U = 9}$$

بما أن R_L<R<R_U حيث نجد 1 <2<9 موجودة في منطقة القبول H0، هذا يعني أن السلسلة لا توجد بها مركبة اتجاه عام

مثال تطبيقي: تأكد من وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة التالية باستعمال اختبار التوالي؟

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	20	250	260	150	180	170	270	30	280	80	100	120	350	210	220
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
300	60	70	90	200	40	340	330	230	240	290	320	310	320	350	190
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
362	367	380	382	384	386	388	400	420	440	460	480	482	484	486	488

الحل:

- ترتيب المشاهدات ترتيب تصاعدي حيث يصبح كما يلي:

الترتيب	20	30	40	60	70	80	90	100	120	150	170	180	190	200	210
220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	320	330	340	350	350
362	367	380	382	384	386	388	400	420	440	460	480	482	484	486	488

- حساب الوسيط M_d وهي المشاهدات المقابلة للرتبة m وبما أن T فردي فإن:

m= T+1 /2 =47+1/2 = 24

وبالتالي: $\mathbf{Md} = Y24 = \mathbf{300}$

- اعطاء إشارة سالبة للقيم التي أصغر من Md وموجبة للقيم التي أكبر منها (ليس من الجدول المرتب بل من الجدول الاصلي:

220	210	350	120	100	80	280	30	270	170	180	150	260	250	20	T
-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-/+
190	350	320	310	320	290	240	230	330	340	40	200	90	70	60	300
-	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+
488	486	484	482	480	460	440	420	400	388	386	384	382	380	367	362
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

- حساب R عدد مرات اختلاف الإشارة R=10
- اتخاذ القرار:

* m> 20 من الواجب احتساب قيمة Z:

$$=\frac{R-u_R}{\sigma_R}=\frac{R-(m+1)}{\sqrt{\frac{m(m+1)}{2m-1}}}=\frac{10-(24+1)}{\sqrt{\frac{24(25)}{2(24)-1}}}\Leftrightarrow\Leftrightarrow|Z|=\frac{-15}{0.272}|Z|$$

$$|Z|=|-55.15|$$

بما أن 1.96 قيمة Z الجدولية مساوية إلى 1.96 وهي أصغر من المحسوبة= $|Z|$ $|-55.15|$ أي نرفض الفرضية العدمية، أي السلسلة تحوي مركبة الاتجاه العام

اختبار نقطة الانعطاف :المقصود بنقطة الانعطاف تلك الفترة التي تختلف فيها الاشارة من السالب إلى الموجب أو العكس أي عدد مرات صعود ونزول المنحنى، يهتم الاختبار بعدد مرات تغير الإشارة من خلال حساب الفروقات .إذا كانت السلسلة الزمنية عشوائية دون اتجاه عام، فان الفروقات من الدرجة الأولى فتوزيع عدد مرات تغير الإشارة يكون تقريبا طبيعيا حتى بالنسبة الى العينات الصغيرة مما يمكن الاستعانة بجدول التوزيع

الطبيعي لاستخراج القيم الطبيعية. ويستعمل هذا الاختبار في حالة العينات الأكبر من عشرة، تصاغ فرضياته كالتالي:

H0 : الفرضية العدمية : السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام

ويتبع الاختبار الخطوات التالية:

- حساب الفروقات من الدرجة الأولى للسلسلة الزمنية
- إعطاء إشارة موجبة للفرق الموجب وسالبة للفرق السالب
- حساب U وهو عدد مرات تغيرات الإشارة في ΔY
- **اتخاذ القرار:**

– إذا كان $|Z| > Z_{\alpha/2}$: يتم رفض الفرضية العدمية، أي السلسلة تحوي مركبة الاتجاه العام

– إذا كان $|Z| < Z_{\alpha/2}$: يتم قبول الفرضية العدمية، أي السلسلة لا تحوي مركبة الاتجاه العام

حيث:

$$|Z| = \frac{U - u_U}{\sigma_U}$$

مع العلم ان:

$$u_U = \frac{2(T-2)}{3} \qquad \sigma_U = \frac{16T-29}{90}$$

مثال تطبيقي: لتكم لدينا السلسلة التالية، اختبر وجود مركبة الاتجاه العام باستعمال اختبار نقطة الانعطاف

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_t	120	125	130	115	112	121	124	110	115	113	117	118	109	108

الحل:

- حساب الفروقات من الدرجة الأولى للسلسلة الزمنية مع إعطاء إشارة موجبة للفرق الموجب وسالبة للفرق السالب

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_t	120	125	130	115	112	121	124	110	115	113	117	118	109	108
ΔY		+5	5	-15	-3	9	3	-14	5	-2	4	1	-9	-1
الاشارة		+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-

- حساب U وهو عدد مرات تغيرات الإشارة في ΔY

حسب المثال لدينا: **U = 8** ، **T=14**

¬ **اتخاذ القرار:**

نحسب:_ $|Z| = \frac{U-u_U}{\sigma_U}$

$u_U = \frac{2(T-2)}{3} \Rightarrow u_U = \frac{2(14-2)}{3} \Rightarrow u_U = 8$

$\sigma_U = \frac{16T-29}{90} \Rightarrow \sigma_U = \frac{16(14)-29}{90} \Rightarrow \sigma_U = 2.17$

$$|Z| = \frac{U-u_U}{\sigma_U} \quad \Leftrightarrow \quad |Z| = \frac{8-8}{2.17} = 0$$ ومنه:

$$|Z| = 0$$

بما أن 1.96 قيمة Z الجدولية مساوية إلى 1.96 وهي أكبر من المحسوبة $|Z| = 0$ أي نقبل الفرضية العدمية، أي السلسلة لا تحوي مركبة الاتجاه العام.

- **اختبار الإشارة :يعتمد** اختبار الإشارة (V) على إشارات الفروق من الدرجة الأولى من موجبة وسالبة، كما يفترض التوزيع العشوائي للمعطيات. يتم صياغة فرضياته التالي:

H0 : الفرضية العدمية : السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام

ويتم هذا الاختبار وفق الخطوات التالية:

¬ تحديد عدد الفروق الموجبة V وعدد الفروق الغير صفريةn

¬ لا يمكن متابعة هذا الاختبار إلا إذا كانت **$n \geq 20$**

¬ **اتخاذ القرار**

- إذا كان $\boldsymbol{|Z| > Z_{\alpha/2}}$: يتم رفض الفرضية العدمية، أي السلسلة تحوي مركبة الاتجاه العام

- إذا كان $\boldsymbol{|Z| < Z_{\alpha/2}}$: يتم قبول الفرضية العدمية، أي السلسلة لا تحوي مركبة الاتجاه العام

حيث أن:

$$|Z| = \frac{V-u_V}{\sigma_V}$$

مع العلم أن

مثال تطبيقي: لتكم لدينا السلسلة التالية، اختبر وجود مركبة الاتجاه العام باستعمال اختبار الاشارة

23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	t
5	4	1	2	3	6	9	9	36	14	31	32	34	28	3	5	8	7	13	8	24	12	10	y_t

الحل:

¬ تحديد عدد الفروق الموجبة V وعدد الفروق الغير صفريةn

1	3	1 -	-1	-3	-3	0	-27	22	-17	-1	-2	6	25	-2	-3	1	-6	5	-16	12	2	-	ΔY

V= 9 n=21

¬ **20** ≥ **n** يمكن متابعة هذا الاختبار

$$=\frac{n}{2}=\frac{21}{2}=10,5U_V$$

$$=\sqrt{\frac{n}{4}}=\sqrt{\frac{21}{4}}=\sigma_V$$

1.3125

$$=\frac{V-u_V}{\sigma_V}\Leftrightarrow|Z|=\frac{9-10,5}{1.3125}\Leftrightarrow|Z| = |-1,14||Z|$$

$|-1,14|<1.96$:يتم قبول الفرضية العدمية، أي السلسلة لا تحوي مركبة الاتجاه العام

- **اختباردانيال:** يعتبر أحسن اختبار للكشف عن مركبة الاتجاه العام ويستعين هذا الاختبار لمعامل الارتباط الرتبي لسبيرمان، ولتطبيق هذا الاختبار نتبع الخطوات التالية:

- وضع رتبا لقيم السلسلة الزمنية من أقل قيمة إلى أكبر قيمة
- حساب معامل الارتباط الرتبي بين عنصر الزمنt ورتب قير السلسلة الزمنية r_t

ويعطى معامل ارتباط الرتب بالعلاقة التالية:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D^2}{n(n^2-1)}$$

حيث أن:

r_s: معامل ارتباط الرتب لسبيرمان و$-1 \leq r_s \leq 1$

$D = t - r_t$: هي الفرق بين الرتبة والترتيب الزمني:

r_t: الترتيب التصاعدي للقيم

n : عدد المشاهدات

الفرضيات:

H0 : الفرضية العدمية :السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام

القرار:

- القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط الرتبي لسبيرمان أكبر من القيمة الجدولية نرفض فرضية العدم، وعليه السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية.
- القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط الرتبي لسبيرمان أقل من القيمة الجدولية نقبل فرضية العدم، وبالتالي السلسلة الزمنية لا تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية.

ملاحظة: القيمة الجدولية لمعامل الارتباط الرتبي لسبيرمان تؤخذ من جدول سبيرمان حسب حجم العينة n ومستوى المعنويةα

حالات الاختبار:

- **حالة العينات الصغيرة:**

$n \leq 30$ حيث: $|r_s| \geq r_{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ في هذه الحالة فإن السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية.

- **حالة العينات الكبيرة:**

$n > 30$ **حيث:** $|z| \geq z_{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ في هذه الحالة فإن السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام، بالإضافة إلى المركبة العشوائية حيث $z = r_s\sqrt{n-1}$ و $z_{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ تمثل القيمة الجدولية و تؤخذ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

مثال (حالة العينات الصغيرة): إليك السلسلة الزمنية التالية:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	16	32	23	24	26	29	26	31	32	**34**

المطلوب: اختبر وجود مركبة الاتجاه العام عند مستوى معنوية $\lambda = 5\%$

الحل: اختبار وجود مركبة الاتجاه العام جميع الخطوات موضحة في الجدول التالي:

t	t	R_t	D	D^2
1	16	1	0	0
2	32	8.5	-6.5	42.25
3	23	2	1	1

4	24	3	1	1
5	26	4.5	0.5	0.25
6	29	6	0	0
7	26	4.5	2.5	6.25
8	31	7	1	1
9	32	8.5	0.5	0.25
10	34	10	0	0
Σ				51

وضع الفرضيات:

H0 : الفرضية العدمية : السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام

- **حساب معامل الارتباط:**

$$rs = 1-\frac{6\sum_{i=1}^{n} D^2}{n(n^2-1)} = 1-\frac{6*51}{10*(100-1)}$$

$$= 1-\frac{306}{990} = 0.69$$

- **القرار:** لدينا 0.648= $r_t = r_{\left(\frac{\lambda}{2},10\right)}$ ، القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط الرتبي لسبيرمان أكبر من القيمة الجدولية نرفض فرضية العدم، وعليه السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية.

- **حالة العينات الكبيرة:**

بافتراض توفر سلسلة زمنية ذات 75 مشاهدة، وبعد الحساب وفق الطريقة السابقة قدر معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان بالقيمة

$$rs = 1-\frac{6\sum_{i=1}^{n} D^2}{n(n^2-1)} = 0.51 = 1-\frac{6*494}{20*(20^2-1)}$$

المطلوب: التأكد من احتواء السلسة الزمنية على مركبة الاتجاه العام.

الحل: تتم عملية الكشف في هذه الحالة باستعمال طريقة العينات الكبيرة، لدينا 75 مشاهدة أي في هذه الحالة سوف نقارن القيمة المحسوبة Z بالقيمة الجدولية $Z_{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ والتي تؤخذ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. حيث

$$=4.38Z = r_s\sqrt{n-1} \quad = 0.51\sqrt{75-1}:$$

أما 1.96= $Z_{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ عند مستوى معنوية 5%

نلاحظ أن: $|Z| \geq_{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ إذن نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، إذن السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية

- **طريقة الاختبارات غير الحرة -الطرق الكمية**: تعد من أهم اختبارات الكشف عن مركبة الاتجاه العام حيث تكشف استقرارية السلسلة وسيتم دراستها في الفصول اللاحقة في طريقة بوكس-جينكيز تتمثل في افتراض وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة بالإضافة إلى العشوائية ومن بينها اختبارات الجذور الأحادية. تستند الطرق الكمية للتنبؤ أساسا على النماذج الرياضية والإحصائية لتحليل البيانات مع المقارنات التاريخية (تحليل السلاسل الزمنية).

- **طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية:** تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات الانحدار حيث تمثل α معلمة القاطع، , β معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى أدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على , α، , β بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

✦ **طريقة المربعات الصغرى:** تعطينا مقدرات الانحدار , α، , β ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف هذه الطريقة.

أ: **<u>النموذج الخطي</u>:** لتكن لدينا سلسلتين زمنيتين نمثلهما بمتغيرين t وy نحصل على:

$$y = a + bt$$

$(\mathbf{t, y})$التباين المشترك أو التغاير بين Tو Y حيث:

$$cov(t, y) = \frac{\sum \boldsymbol{t_i} \sum \boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{n\bar{t}\bar{y}}}{n}$$

<u>$\boldsymbol{\delta_t}$: الانحراف المعياري ل Tهو $\boldsymbol{\delta_x}$</u>

$$var(t) = \delta_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{t_i} - \boldsymbol{\bar{t}})^2}{n} = \frac{\sum t_i^2}{n} - \bar{t}^2$$

<u>الانحراف المعياري ل Y هو $\boldsymbol{\delta_y}$:</u>

$$var(y) = \delta_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})^2}{n} = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2$$

n : عدد المشاهدات

$$\delta_{ty} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{t_i} - \boldsymbol{\bar{t}})(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})}{n} = \frac{1}{n}\sum (ty) - \bar{t}\bar{y}$$

معامل الارتباط:

$$r_{tt} = \frac{cov(t, y)}{\delta_t \delta_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{t_i} - \boldsymbol{\bar{t}})(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{t_i} - \boldsymbol{\bar{t}})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})^2}}$$

معادلة الانحدار: ويعبر عنه رياضيا بالكتابة على الشكل التالي:

<u>معادلة خط الانحدار هو كما يلي:</u>

$$y_i = \alpha + \beta t_i + u_i \qquad ....(1)$$

النموذج المقدر هو كما يلي:

$.\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t_i$ ....(2)

معادلة البواقي: الفرق بين المعادلتين (1) و (2) نجد u_i

$$u_i = y_i - \hat{y}_i$$

ومنه:

$$u_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} t_i)$$

حيث يعبر عن الفرق بين القيمة الفعلية y، والقيمة المقدرة $\hat{y} = b + a\,t$

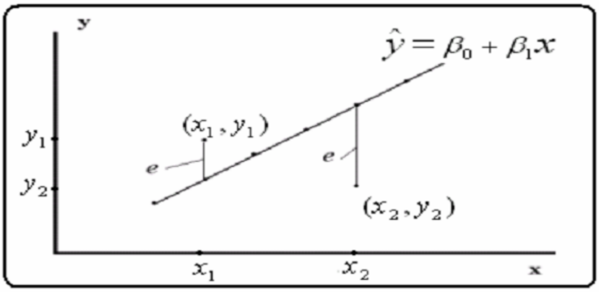
$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t} \ldots$$

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{n\sum t_i y_i - \sum t \sum y_i}{n\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}}$$

ومن المفيد استخدام صيغ أخرى:

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2}}$$

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum (t_i - \bar{t})^2}}$$



ب-**النموذج الغير الخطي:** التطور العام للسلسلة ليس دائمًا خطيًا، بل يمكن أن يكون مرتبطًا بنماذج أخرى على وجه الخصوص، يمكن أن تكون السلسلة شكل دالة لوغاريتمية أو أسية:

- **الدالة الأسية**: من الشكل: $y = ba^t$

- بإدخال اللوغاريتم العشري لهذه العبارة، نحصل على: $logy = logb + tloga$

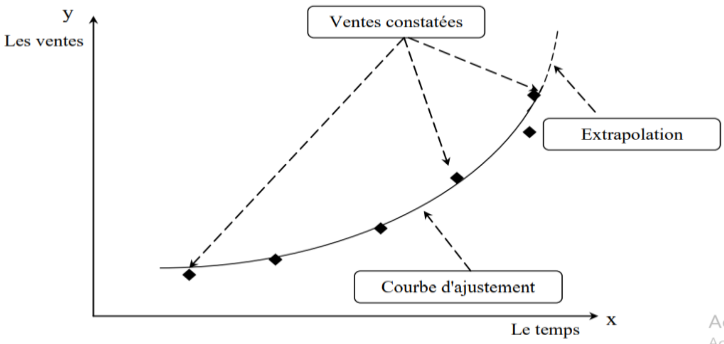
بوضع: $\boldsymbol{A} = loga \quad B = logb\boldsymbol{Y} = logy$

يصبح النموذج من الشكل: $logY = logB + tlogA$

هذا هو النموذج الخطي للدالة الأسية، ثم يمكن تطبيق طريقة المربعات الأقل لتحديد المعلمات A وB، ثم يتم تحديد المعلمات a وb على النحو التالي:

$$\boldsymbol{a} = 10^A \text{ و } \boldsymbol{b} = 10^B$$

التمثيل البياني لطريقة التعديل غير الخطية (الاسية):



مثال: تعديل بعض الدوال وتحويلها إلى خطية:

$$y_t = \frac{1}{a+bt} \Longrightarrow z_t = \frac{1}{y_t}$$

$$y_t = e^{a+bt} \Longrightarrow z_t = In(y_t)$$

كثير الحدود من الشكل: $at^2 + bt + c$

$$y_t = In(at^2 + bt + c) \Longrightarrow z_t = exp(y_t)$$

- **الارتباط ومعامل التحديد**: وهو عبارة عن النسبة بين التغير في القيم المقدرة على التغير الكلي، كما يمكن حسابه عن طريق المتممة بالنسبة لتغير البواقي على التغير الكلي: يستخدم معامل التحديد كمقياس يحدد القوة التفسيرية لنموذج الانحدار الخطي حيث يعتبر مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع Yi الذي سببه التغير في المتغير المستقل Tiمعبرا عنها بمجموع مربعات انحراف قيم المتغير التابع Yi عن وسطه الحسابي $\overline{y}$بمعنى: لدينا المعادلة التالية :

$$y_i = \widehat{y_i} + u_i$$

بإدخال $\overline{\boldsymbol{y}}$ نجد

$$y_i - \overline{y} = \widehat{y_i} - \overline{y} + u_i$$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة نجد:

$$\sum (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})^2 = \sum (\boldsymbol{\hat{y}_\imath} - \boldsymbol{\bar{y}})^2 + \sum \boldsymbol{u_i^2}$$

$$SST = \; SSE \; + \; SSR$$

$SST \Leftrightarrow \sum (y_{\mathrm{i}} - \bar{y})^2$ هو مجموع مربعات الانحرافات الكلية في المتغيرy

$SSE \Leftrightarrow \sum (\widehat{y_i} - \bar{\mathrm{y}})^2$ فهو مجموع مربعات الانحرافات المفسرة (الجزء المفسر)

$SSR \Leftrightarrow \sum u_i^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2$ الذي هو مجموع مربعات البواقي (الجزء الغير مفسر)

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية (SST) نجد:

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

وحسب الشرح السابق يمكن حسابه بالطريقة التالية:

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum (\widehat{y_i} - \bar{\mathrm{y}})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{\hat{\beta} \sum (t_i - \bar{t})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

بتعويض قيمة $SSE = SST - SSR$نحصل على:

$$\boldsymbol{R^2} = 1 - \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum u_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

$$= 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

- يعتبر من أهم المعاملات التي تقيس علاقة الارتباط بين المتغيرين، تتراوح قيمته ما بين الواحد الصحيح والصفر أي أن:

$$0\leq R^2 \leq 1$$

الطريقة البراميترية أو المعلمية :هذه الطريقة يتم الكشف عن مركبة الاتجاه العام باستخدام الخطوات التالية:

¬ تقدير معادلة الاتجاه العام حيث تأخذ معادلة الاتجاه العام الشكل التالي:

$$Y_t = \hat{a} + \hat{b}\, t + \varepsilon_t$$

حيث $\hat{a}$ و $\hat{b}$هي مقدرات a و b بينما ε_t تمثل تقدير الأخطاء والتي تسمى البواقي، حيث يتم تقدير $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بالعلاقات التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{t_i y_i - T\bar{t}\bar{y}}{\sum {t_i}^2 - T\bar{t}^2} \qquad\qquad \hat{\beta} = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum(t_i - \bar{y})^2}$$

حيث:

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{T} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{T}$$

ويمكن استخراج $\hat{a}$ وفق المعادلة التالية:

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t}$$

¬ حساب التباين والانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة $\hat{a}$ ، $\delta_{\hat{b}}$ على النحو التالي:

$$v(\hat{a}) = \delta_{\hat{a}}^2 = \delta_{u_i}^2 \left[\frac{1}{T} + \frac{\bar{t}^2}{\sum(t_i - \bar{t})^2}\right] \qquad v(\hat{\beta}) = \frac{\delta_{u_i}^2}{\sum(t_i - \bar{t})^2}$$

مع العلم أن:

$$\delta_{\varepsilon_i}^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{T - K}$$

¬ حساب قيمة ستودنت المحسوبةtcal

$$t_{\hat{a}} = \frac{\hat{a}}{\delta_{\hat{a}}} \qquad t_{\hat{b}} = \frac{\hat{b}}{\delta_{\hat{b}}}$$

¬ **اتخاذ القرار:** اختبار معنوية معلمة الاتجاه العام بالاعتماد على اختبارstudent

حيث يتم اختبار معنوية المعلمات كل واحدة على حدا باتباع الفرضيات التالية:

H0 : الفرضية العدمية : السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام

و لقبول أو رفض الفرضيات واتخاذ القرار حول وجود مركبة الاتجاه العام نقوم بمقارنة قيمة ستودنت المحسوبة $tcal$ مع قيمة ستودنت الجدولية $t$tab(n−2) عند درجة حرية n−2 ومستوى معنوية $\propto$

فإذا كانت:

- t المحسوبة أكبر من t الجدولية نرفض الفرضية العدمية وبالتالي وجود مركبة الاتجاه العام.

- tالمحسوبة أقل من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية و بالتالي السلسلة لا تحوي مركبة الاتجاه العام

مثال تطبيقي: البيانات التالية تبين الكميات المعروضة من سلعة معينة (y)خلال فترة زمنية (t)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	8	9	10	7	11	12	11	10	8

- اكشف عن مركبة الاتجاه العام بالطريقة المعلمية؟

الحل:

t	y	$(t_i - \bar{t})$	$(t_i - \bar{t})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\hat{y}_i$	ε_i	ε_i^2
1	6	-4,5	20,25	-3	13,5	7,42	-1,42	2,0164
2	8	-3,5	12,25	-1	3,5	7,77	0,23	0,0529
3	9	-2,5	6,25	0	0	8,12	0,88	0,7744
4	8	-1,5	2,25	-1	1,5	8,47	-0,47	0,2209
5	7	-0,5	0,25	-2	1	8,82	-1,82	3,3124
6	11	0,5	0,25	2	1	9,17	1,83	3,3489
7	12	1,5	2,25	3	4,5	9,52	2,48	6,1504
8	11	2,5	6,25	2	5	9,87	1,13	1,2769
9	10	3,5	12,25	1	3,5	10,22	-0,22	0,0484
10	8	4,5	20,25	-1	-4,5	10,57	-2,57	6,6049
55	90	-4,5	82,5	0	29			23,8065

$$\bar{\boldsymbol{t}} = \frac{\sum \boldsymbol{t_i}}{T} = \frac{55}{10} = 5.5 \qquad \bar{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum \boldsymbol{y_i}}{T} = \frac{90}{10} = 9$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum(\boldsymbol{t_i} - \bar{\boldsymbol{t}})(\boldsymbol{y_i} - \bar{\boldsymbol{y}})}{\sum(\boldsymbol{t_i} - \bar{\boldsymbol{y}})^2} = \frac{29}{82.5} = 0.35$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t} \Rightarrow \hat{a} = 9 - (0.35)(5) = 7.07$$

وبالتالي يصبح النموذج المقدر كما يلي:

$$\widehat{y_i} = \hat{a} + \hat{b}\ t \ \Rightarrow \widehat{y_i} = 7.07 + 0.34t_i$$

وتعتبر هذه المعادلة: معادلة الاتجاه العام، والتي يمكن استخدامها في عملية التنبؤ، ولكن بعد إجراء عملية الاختبار الاحصائي على معالم النموذج المقدر، وفيما يلي الاختبارات الإحصائية.

- ويمكن احتساب قيم $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ باستخدام المعادلة التالية: $\boldsymbol{\varepsilon_i} = \widehat{\boldsymbol{y_i}} - \boldsymbol{y_i}$ وهذا بعد احتساب قيم $\widehat{\boldsymbol{y_i}}$ المقدرة لكل فترة (حسب ما هو مبين في الجدول)

¬ احتساب الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة

$$\delta^2_{\varepsilon_i} = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{T - K} = \frac{23{,}80}{10 - 2} = 2{,}975$$

K: يمثل عدد المعلمات المقدرة

$$v(\hat{\beta}) = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum(t_i - \bar{t})^2} \Longrightarrow v(\hat{\beta}) = \frac{2{,}975}{82{,}5} = 0.036$$

$$\delta_{\hat{\beta}}=0.189$$

¬ حساب قيمة ستودنت المحسوبة$t$cal

$$t_{\hat{b}}=\frac{\hat{b}}{\delta_{\hat{b}}}\Longrightarrow t_{\hat{b}}=\frac{0.35}{0.189}=1.851$$

¬ **اتخاذ القرار:**

$$t_{\hat{b}}=1.851>t_{tab(10-2)}^{5\%}=2.306$$

tالمحسوبة أصغر من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي عدم وجود مركبة الاتجاه العام.

2. **تحليل المركبة الفصلية:** للكشف عنها نجد

✦ **الاختبار البياني:** حيث تظهر المركبة الفصلية على شكل قمم أو انخفاضات بشكل منتظم وفي نفس الفترات في الرسم البياني الخاص بالسلسلة.

✦ **الاختبارات الاحصائية:** وتنقسم غلى صنفين:

- **الاختبارات الحرة:** ومن بينها

- اختبارKruskallWalli : هي من الاختبارات الأكثر استعمالا للتأكد من وجود مركبة موسمية ويركز له ب KW ومن فرضياته :

H0 : الفرضية العدمية :السلسلة الزمنية لا تحتوي على مركبة موسمية.

H1 : الفرضية البديلة: السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة موسمية

أما صيغته الرياضية كالتالي:

$$K_W=\frac{12}{n(n+1)}\sum\frac{R_j^2}{m_i}-3(n+1)$$

حيث:

R_j : مجموع رتب الفصل j

m : (عدد السنوات)

n حجم العينة

ملاحظة: هذا الاختبار يتبع توزيع كاي مربع ب (P -1) كدرجة حرية: $kw \rightarrow \chi^2_{(P-1)}$

- **خطوات الاختبار:**

¬ إبعاد الاتجاه العام: الكشف عن مركبة الاتجاه العام ثم تقديرها وابعاد هذه المركبة

¬ تحديد وجود أو عدم وجود المركبة الفصلية من خلال تحديد الرتب للسلسلة، تعديلها وترتيبها في حالة تساوي الرتب

¬ حساب القيمة المحسوبة لكروكسال وتحديد القيمة المجدولة $\chi^2_{(P-1)}$ ثم مقارنة القيمة الجدولية مع القيمة المحسوبة

¬ **اتخاذ القرار:** إذا كانت القيمة المحسوبة لكروكسال أكبر من القيمة الجدولية نرفض فرضية العدم، وبالتالي نقبل الفرضية البديلة، وعليه نقول إن السلسلة الزمنية تحتوي على المركبة الفصلية، أما إذا كانت القيمة المحسوبة لكروكسال أقل من القيمة الجدولية نقبل فرضية العدم، وبالتالي السلسلة الزمنية لا تحتوي على المركبة الفصلية.

ملاحظة: إذا تأكدنا أن السلسلة الزمنية لا تحتوي على مركبة الاتجاه العام فإننا ننتقل إلى الخطوة التالية

مثال تطبيقي: إليك السلسلة الزمنية التالية:

الفصل السنة	1	2	3	4
1	27	6	12	19
2	9	4	11	14
3	25	8	21	20
4	16	24	10	23

المطلوب: اختبر وجود المركبة الفصلية باستعمال اختبار كروكسال عند 5%.

الحل:

الفصل السنة	1	2	3	4
1	16	2	7	10
2	4	1	6	8
3	15	3	12	11
4	9	14	5	13

¬ الكشف عن مركبة الاتجاه العام باستعمال اختبار دانيال:

للسلسة الزمنية مع أخذ متوسط للرقمين المتساويين:

أولا تحديد Rt، مثلا: الرتبة 5 مكررة مرتين: نحسب الوسط الحسابي كما يلي :

$$\frac{5+6}{2} = 5.5$$

الفصل / السنة	1	2	3	4
1	-15	0	-4	-6
2	1	5	1	0
3	-6	7	-1	1
4	4	0	10	3

¬ حساب الفروقات: $d_t = t - r_t$

1-16=-15

2-2=0

الفصل / السنة	1	2	3	4
1	225	0	16	36
2	1	25	1	0
3	36	49	1	1
4	16	0	100	9

¬ حساب d_t^2:

-معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان يساوي تطبيق عددي بسيط :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D^2}{n(n^2-1)}$$

$$=0.39 r_s = 1 - \frac{6(516)}{16(16^2-1)}$$

¬ **اتخاذ القرار:** لدينا القيمة الجدولية مساوية إلى $= \boldsymbol{S_t}$ **0.635** إذن : $\boldsymbol{r_S < S_t}$

وبالتالي نقبل فرضية العدم وبالتالي السلسلة الزمنية لا تحتوي على مركبة الاتجاه العام

¬ حساب القيمة المحسوبة ل KWومقارنتها بالقيمة الجدولية لKW

¬ **اتخاذ القرار:** لدينا القيمة المحسوبة لكروكسال= $\boldsymbol{K_{Wcal}}$ ***4.15*** أقل من القيمة الجدولية $\boldsymbol{K_{Wtab}}$ **<u>7.82</u>=(5%.P-1)** $\boldsymbol{\chi^2}$= ، وبالتالي السلسلة الزمنية لا تحتوي على المركبة الفصلية

$=\chi^2(5\%.P\text{-}1)=\underline{7.82}K_{Wtab}$

$4.15 < K_{Wtab} = \chi^2(5\%.P\text{-}1) = \underline{7.82} K_{Wcal} =$

الفص / السنة	1	2	3	4
1	16	2	7	10
2	4	1	6	8
3	15	3	12	11
4	9	14	5	13
R_j	*44*	*20*	*30*	*42*

$$\boldsymbol{K_W = \frac{12}{n(n+1)} * \sum \frac{R_j^2}{m_i} - 3(n+1)}$$

R_j^2	1936	400	900	1764
$\frac{R_j^2}{m_i}$	484	100	225	441
$\sum \frac{R_j^2}{m_i}$	484+100+225+441=1250			

$$K_W = \frac{12}{16(16+1)}(1250) - 3(16+1) = 4.15$$

3. اختبار تحليل التباين واختبار فيشر: (نموذج BAOLLOT)

قد يصعب الكشف عن المركبة الموسمية باستعمال الرسم البياني لذلك نلجأ للاختبارات الاحصائية منها اختبار تحليل التباين أو اختبار فيشر وترتكز على النقاط التالية ومن فرضياته:

H0 : الفرضية العدمية : السلسلة الزمنية لا تحتوي على مركبة اتجاه عام أو مركبة موسمية.

H1 : الفرضية البديلة : السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة اتجاه عام أو مركبة موسمية حيث نتبع الخطوات التالية:

- حساب المتوسط الحسابي السنوي والشهري والمتوسط الحسابي السنوي الشهري:

$$\overline{X_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad \overline{X_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \qquad \overline{x} = \frac{1}{n.m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

المتوسط الحسابي ل X_{ij}	المتوسط الحسابي لكل شهر	المتوسط الحسابي لكل سنة

¬ حساب مجموع مربعات الانحرافات الشهرية، السنوية، المربع والكلية:

¬ مجموع مربعات الانحرافات الشهرية

$$S_M = n\sum_{j}^{m}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2$$

¬ مجموع مربعات الانحرافات السنوية

$$S_A = M\sum_{i}^{n}(\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

¬ مجموع مربعات الانحرافات المربعة

$$S_R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j - \bar{x}\right)^2$$

¬ مجموع مربعات الانحرافات الكلية

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2$$

¬ حساب التباين السنوي، الشهري، المربعة والاجمالي حيث:

$V_m = {S_M}/{(m-}$ $V_A = {S_A}/{(n-}$ $V_R = {S_R}/{(m-1)(n}$ $V_T = {S_T}/{(n.m-}$

¬ اعداد جدول تحليل التباين وحساب درجات الحرية وقيمة فيشر المحسوبة

مجموع مربعات الانحر افات	درجات الحرية	التباين	F
$S_M = n\sum_{j}^{m}(\bar{x}_j - \bar{x})^2$	*m-1*	$V_m = {S_M}/{(m-1)}$	$F_{CM} = \frac{V_m}{V_R}$
$S_A = M\sum_{i}^{n}(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	*n-1*	$V_A = {S_A}/{(n-1)}$	
$S_R == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j - \bar{x})^2$	*(m-1)(n-1)*	$V_R = {S_R}/{(m-1)(n-1)}$	$F_{CA} = \frac{V_A}{V_R}$
$S_T = = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij} - \bar{x})^2$	$n.m-1$	$V_T = {S_T}/{(n.m-1)}$	

¬ **اتخاذ القرار:** بعد حساب قيمة F يتم مقارنتها معF الجدولية فإذا كانت F المحسوبة أكبر منF الجدولية نرفض الفرضية العدمية وبالتالي وجود مركبة فصلية أما إذا كانت F المحسوبة أقل منF الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي عدم وجود مركبة فصلية ويتم استخراج القيمة الجدولية من جدول فيشر حسب القانون التالي:

$$F_{tab} = F^{\alpha}_{(P-1),(n-1)(P-1)}$$

ويمكن كتابتها بالشكل الرياضي التالي:

$\mathbf{F_{cal}} > F_{tab} \Leftrightarrow$ نرفض الفرضية العدمية وبالتالي وجود مركبة فصلية

$\mathbf{F_{cal}} < F_{tab} \Leftrightarrow$ نقبل الفرضية العدمية وبالتالي عدم وجود فصلية

مثال تطبيقي: باستعمال اختبار فيشر اكشف وجود كل من مركبة الاتجاه العام والمركبة الموسمية في السلسلة الزمنية التالية:

الفصل / السنة	1	2	3	4	$\overline{x}_i$	$(\overline{x}_i - \overline{x})^2$
2000	27	6	12	19	16	$= (16 - 15.56)^2$ =0,19
2001	9	4	11	14	9.5	36,75
2002	25	8	21	20	18.5	8,63
2003	16	24	10	23	18 .25	7,22
$\overline{x}_j$	19.25	10.50	13.50	19.00		
$(\overline{x}_j - \overline{x})^2$	13,60	25,63	4,25	11,82		

¬ حساب مجموع مربعات الانحرافات الكلية

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n.m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \Longrightarrow \bar{\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{1}{4.4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \frac{1}{16}\,(249) = 15.56$$

¬ حساب مجموع مربعات الانحرافات السنوية، الفصلية

$S_M = m\sum_j^m\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 \Longrightarrow S_M = 4((19.25 -$
$15.56)^2 + (10.50 - 15.56)^2 + (13.50 -$
$\Longrightarrow S_M = 15.56)^2 + (19.00 - 15.56)^2)$
$4(13.60 + 25.63 + 4.25 + 11.82) = 221.19$
$S_A = n\sum_i^n(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \Longrightarrow S_M = 4((16 -$
$15.56)^2 + (9.5 - 15.56)^2 + (18.50 -$
$\Longrightarrow S_M = 15.56)^2 + (18.25 - 15.56)^2)$
$4(0.19 + 36.75 + 8.63 + 7.22) = 211.19$

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = 1273.62$$

$$S_R = S_T - (S_M + S_A)$$
$$= 1273.62$$
$$- (221.19 + 211.19) = 804.62$$

-حساب القيم: $(x_{ij} - \bar{x})^2$

الفصل / السنة	1	2	3	4
2000	130,82	91,44	12,69	11,82
2001	43,07	133,69	20,82	2,44
2002	89,07	57,19	29,57	19,69
2003	0,19	71,19	30,94	529,00

¬ اعداد جدول تحليل التباين وحساب درجات الحرية وقيمة فيشر المحسوبة

مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	التباين	F
$S_M = 221.19$	3	$V_m = 221.19/3 = 73.73$	$F_{CM} = \frac{73.73}{89.40}$ =0.82
$S_A = 211.19$	3	$V_A = 211.19/3 = 70.39$	
$S_R = 804.62$	(3)(3)=9	$V_R = 804.62/9 = 89.40$	$F_{CA} = \frac{70.39}{89.40} = 0.79$
$S_T = 1273.62$	$4.4 - 1 = 15$	$V_T = 1273.62/15 = 84.91$	

ملاحظة: للتأكد فقط لدينا:

$$n.m-1=(m-1)+(n-1)+(m-1)(n-1)$$

¬ **اتخاذ القرار**: بعد حساب قيمة F يتم مقارنتها معF الجدولية

$$F_{tab}=F^{\alpha}_{(P-1),(n-1)(P-1)}=F^{5\%}_{3,9}=3.86$$

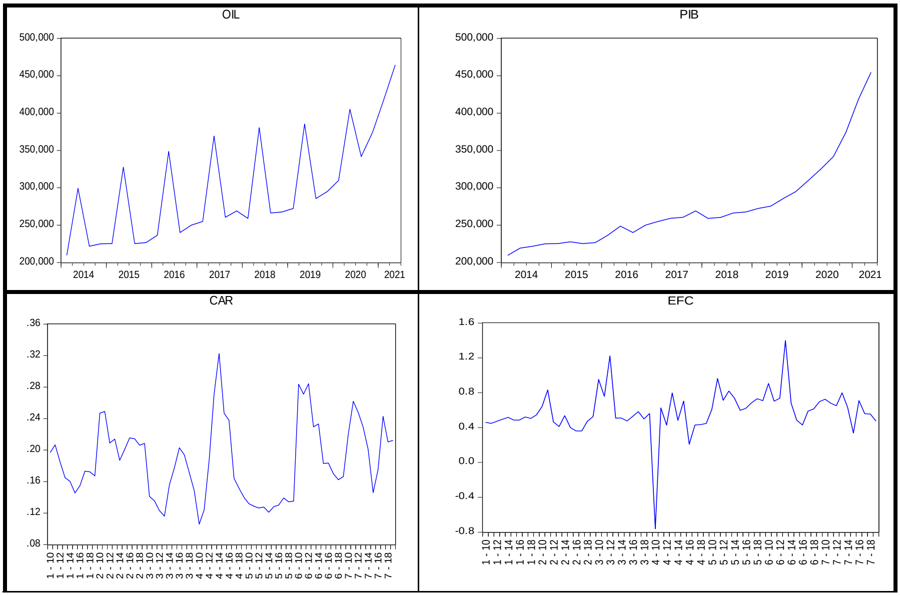
يمكن اتخاذ القرار التالي:

$0.82<3.86 \Longleftarrow$ نقبل الفرضية العدمية وبالتالي عدم وجود مركبة فصلية

$0.79<3.86 \Longleftarrow$ نقبل الفرضية العدمية وبالتالي عدم وجود مركبة اتجاه عام

تمارين الفصل الأول

التمرين الأول: لتكن الأشكال التالية



- بماذا يسمى المنحنى الذي يمثل التطور التاريخي للسلسلة الزمنية؟

- قدم تعليقاً على المنحنيات السابقة , مع توضيح أهم نقاط التحول في كل سلسلة وأهم مركباتها.

حل التمرين الأول:

- يسمى المنحنى الذي يمثل التطور التاريخي للسلسلة الزمنية بمنحنى Correlogramme

- المنحنيات السابقة تمثل التطور الزمني للمتغيرات خلال فترة محدودة، وكل سلسلة لها خصائص ومركبات معينة

- السلسلة 1 (PIB): نلاحظ وجود مركبة الاتجاه العام في هذه السلسلة حيث تزيد قيمة PIB بزيادة الزمن

- السلسلة 2(OIL): هذا المنحنى يحتوي مركبة فصلية حيث نلاحظ ارتفاع وانخفاض في قيم هذه السلسلة خلال نفس الفترات من السنة

- السلسلة 3 (EFC): يحتوي المنحنى على مركبة عشوائية حيث نجد انخفاض كبير في قيم هذه السلسلة خلال الفصل الرابع من سنة 2010

- السلسلة 4(CAR): تحتوي على مركبة دورية حيث نلاحظ عدة تقلبات في هذه السلسلة

التمرين الثاني: الجدول التالي يوضح تطورات سلسلة زمنية لمشتريات سلعة معينة خلال ثلاثة سنوات مقسمة إلى سداسيات، باستخدام طريقة الانحراف المعياري السنوي، بين شكل هذه السلسلة الزمنية؟

السنوات	السداسي الاول	السداسي الثاني
1	12	18
2	14	40
3	16	45

التمرين الثالث: الجدول التالي يوضح تطورات سلسلة زمنية لمشتريات سلعة معينة خلال ستة سنوات مقسمة إلى فصول. باستخدام طريقة المعادلة الانحدارية، بين شكل هذه السلسلة الزمنية؟

السنوات	الفصل الاول	الثاني	الثالث	الرابع
1	20	29	23	35
2	20	40	26	45
3	21	50	34	56
4	24	61	38	67
5	25	72	50	56
6	20	61	45	34

التمرين الرابع: يبين الجدول التالي تطورات الادخار خلال فترة زمنية، تأكد من وجود مركبة الاتجاه العام عند مستوى معنوية 5%؟ قيمة سبيرمان الجدولية مساوية الى: 0.700

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الادخار	60	55	45	35	35	40	25	15	10
الادخار	60	55	45	35	35	40	25	15	10

التمرين الخامس: يبين الجدول التالي تطورات الاستثمار خلال فترة زمنية، تأكد من وجود مركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار نقطة الانعطاف، واختبار التوالي واختبار دانيال، بمعلومية كل من: $Z = 1.96$ $S_{tab} = 0.587$

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاستثمار	110	112	125	130	127	135	137	128	140	125	131	132

التمرين السادس: يبين الجدول التالي تطورات الاستثمار خلال فترة زمنية، تأكد من وجود مركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار الإشارة، بمعلومية كل من: **Z = 1.96**

السنة	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
الاستثمار	112	110	108	103	103	115	120	130	135	135	132	131
السنة	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
الاستثمار	140	142	148	150	154	151	147	143	143	145	148	150

التمرين السابع: الجدول التالي يوضح تطورات الاستثمار خلال خمسة سنوات مقسمة إلى فصول، تأكد من وجود المركبة الفصلية إذا علمت أن:

S_{tab} = 0 .635   **KW_{tab} =7.82؟**

السنوات	الفصل الاول	الثاني	الثالث	الرابع
1	20	16	60	25
2	16	20	35	44
3	15	25	16	18
4	16	30	30	35
5	14	32	35	18

التمرين الثامن: باستعمال اختبار فيشر اكشف وجود كل من مركبة الاتجاه العام والموسمية في السلسلة الزمنية التالية:

الفصل السنة	1	2	3	4
2000	30	16	14	20
2001	10	8	41	24
2002	35	10	20	20
2003	26	24	12	23

التمرين التاسع: لتكن لديك المعطيات التالية الخاصة بتقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_i$

$\sum t_i y_i = 22206745$ $\sum t_i = 92\,599.98$ $\sum t_i^2 = 68301935$

n=204 $\sum y_i = 43\,649.77$ $\sum y_i^2 = 9\,598\,710$

المطلوب: قدر معلمات النموذج

التمرين العاشر: لتكن لديك المعطيات التالية

$$\hat{y}_i = 174.3006 + 0.091\, t_i$$

$\delta_{u_i} = 177$ $R^2 = 0.88$ *n=27*

المطلوب:

- احسب قيم SSR, SSE, SST؟
- احسب إحصائية فيشر؟

ملاحظة: حلول التمارين 2 لغاية 8 تتم بالاستعانة بالأمثلة التطبيقية أعلاه

حل التمرين التاسع: تقدير معلمات النموذج:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum t_i\, y_i - \sum t_i \sum y_i}{n\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$$

$$= \frac{204(22206745) - (92599.98)(43649.77)}{204(68301935) - (92599.98)^2} = 0.091$$

$$\boxed{\hat{\beta} = 0.091}$$

بحساب قيم $\boldsymbol{\bar{t}}$ و $\boldsymbol{\bar{y}}$

$\bar{t} = \frac{\sum \boldsymbol{t_i}}{n} = \frac{\mathbf{92\ 599.98}}{204} = 435.9215$

$\bar{y} = \frac{\sum \boldsymbol{y}}{n} = \frac{\mathbf{43649.77}}{204} = 213.9695$

$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t} \Rightarrow \hat{\alpha} = 213.9695 - 0.091(435.9215) = 174.3006$

$$\boxed{\hat{\alpha} = 174.3006}$$

- معادلة التقدير:

$$\boxed{\widehat{y}_i = 174.3006 + 0.091\, t_i}$$

حل التمرين العاشر:

- حساب قيم SST .SSE ,SSR

لدينا:

$$\delta_{u_i} = 177 \Rightarrow \delta_{ui}^2 = 31\,329$$

$$\delta_{u_i}^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{SSR}{n-2} \Rightarrow SSR = \delta_{u_i}^2\,(n-2)$$

$$\Rightarrow SSR = 31\,329(25) = 783\,225$$

$$\boxed{SSR = 783\,225}$$

حسب القانون:

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} \Rightarrow \frac{SSR}{SST} = 1 - R^2 \Rightarrow \frac{SSR}{SST} = 1 - 0.88$$

$$SST = \frac{SSR}{0.12}$$

$$\boxed{SST = 6\,526\,875}$$

$$SSE = SST - SSR = 5\,221\,500 - 783\,225$$

$$\boxed{SSE = 5\,743\,650}$$

حساب إحصائية فيشر:

$$F=\frac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}}=\frac{\frac{5\ 743\ 650}{2-1}}{\frac{783\ 225}{27-2}}$$

$\boxed{F= 183.33}$

التمرين الحادي عشر: إذا توفرت لديك البيانات التالية:

$\sum t_i y_i = 3301$ n=37 $\sum y_i^2$ =1524.716

$\delta_x = 32.90$ =124 $\sum t_i^2$ 806 $\delta_{u_i} = 2.53$ $\delta_y = 2.91$

المطلوب:

- أحسب SST، SSR, SSE؟
- قدر معلمات النموذج ؟
- اختبر معنوية $\widehat{\beta}$ عند مستوى معنوية5%؟
- اختبر معنوية النموذج ككل؟

حل التمرين 11: حساب **SST، SSR, SSE؟**

$$\delta_y^2=\frac{\sum(\boldsymbol{y_i}-\overline{\boldsymbol{y}})^{\boldsymbol{2}}}{n}=\frac{\sum y_i^2}{n}-\bar{y}^2=\frac{SST}{n}$$

$$\Rightarrow SST=n*\delta_y^2 \Rightarrow SST=37*(2.91)^2=313.32$$

$$\boxed{SST=313.32}$$

$$\delta_{u_i}^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{SSR}{n-2} \Rightarrow SSR = (n-2) * \delta_{u_i}^2$$

$$\Rightarrow SSR = 35 * (2.53)^2 = 224.03$$

$$\boxed{SSR = 224.03}$$

$$SST=SSE+SSR \Longrightarrow SSE = SST - SSR$$

$$\Longrightarrow SSE = 313.32 - 224.03 = 89.29$$

$$\boxed{SSE = 89.29}$$

- تقدير معلمات النموذج:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum t_i y_i - n\bar{t}\,\bar{y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2}$$

$$\delta_t = 32.90 = \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{t_i} - \boldsymbol{t})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum t_i^2}{n} - \bar{t}^2}$$

$$\Longrightarrow \delta_t^2 = (32.90)^2 = \frac{\sum t_i^2}{n} - \bar{t}^2 \Longrightarrow \bar{t}^2 = \frac{\sum t_i^2}{n} - \delta_t^2$$

$$\Longrightarrow \bar{t}^2 = \frac{124\,806}{37} - (32.90)^{\mathbf{2}} = 3373.135 - 1082.41$$

$$\Longrightarrow \bar{t}^2 = 2290.725$$

$$\boxed{\bar{t} = 47.86}$$

$$\delta_y^2 = (2.91)^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 \Longrightarrow \bar{y}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \delta_y^2$$

$$\Longrightarrow \bar{y}^2 = \frac{1524.716}{37} - (2.91)^2 = 41.208 - 8.468$$

$$\Longrightarrow \bar{y}^2 = 32.74$$

$$\boxed{\bar{y} = 5.72}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2} = \frac{3301 - 37*5.72*47.86}{124\,806 - 37*(47.86)^2} = \frac{-6828.09}{40054.55} =$$
0.17

$$\boxed{\hat{\beta} = -0.17}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t} \Rightarrow \hat{\alpha} = 5.72 + 0.17 * 47.86$$
$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 13.85$$

$$\boxed{\mathbf{\hat{y}_i = 13.85 - 0.17\, t_i}}$$

- اختبر معنوية ^ عند مستوى معنوية 5%

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\delta_{\hat{\beta}}}$$

$$\delta^2{}_{\hat{\beta}} = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum(t_i - \bar{t})^2}$$

لدينا:

$$\delta_t^2 = \frac{\sum(t_i - \bar{t})^2}{n} \Rightarrow \sum(t_i - \bar{t})^2 = n * \delta_t^2$$
$$= 37 * (32.90)^2$$
$$\Rightarrow \sum(t_i - \bar{t})^2 = 40\,049.17$$

$$\delta^2_{\widehat{\beta}} = \frac{(2.53)^2}{40\ 049.17} = 0.00015$$

$= 0.012\delta_{\widehat{\beta}}$

$= -14.16 \quad t_{\widehat{\alpha}} = \frac{\widehat{\beta}}{\delta_{\widehat{\beta}}} = \frac{-0.17}{0.012}$

$$t_{cal} = 14.16 > t^{\alpha\%}_{tab(10-2)} = 2.00$$

tالمحسوبة أكبر من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي المعامل معنوي احصائيا

- اختبار معنوية النموذج ككل:

$$F = \frac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}} = \frac{89.29}{\frac{224.03}{35}}$$

$$\boxed{F = 13.94}$$

$$\mathrm{F_{cal}} = 13.94 > F_{tab} = F^{0.05}_{(1,35)} = 4.11$$

نقبل الفرضية البديلة وبالتالي النموذج معنوي

الفصل الثاني:
النماذج الموسمية
للسلاسل الزمنية

I. التعديل بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية:

1. تقدير التأثيرات الموسمية للنموذج الجدائي:

لدينا:

$$\boldsymbol{y_t = T_t * \ S_t}$$

تحديد الاتجاه العام بالطريقة البيانية

تقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية

- لكل فترة زمنية t نحسب النسبة $\boldsymbol{d_t = y_t / y_t^*}$ وتسمى نسبة الاتجاه
- حساب المعاملات الموسمية (متوسط هذه النسب) C_t المقابلة لنفس الفصل

ونقوم أيضا بحساب المعاملات الموسمية c_j حيث تمثل j الفصول

- حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$ إذا تم اختيار النموذج هذا المتوسط يقترب من الواحد الصحيح وخلاف دلك
- حساب التصحيحات $\boldsymbol{C_j^*} = \frac{C_j}{\bar{C}}$ حيث $1 = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{n}} \sum \boldsymbol{c^*}_{\boldsymbol{j}}$ حيث $\boldsymbol{n}$ هو عدد المعاملات الموسمية
- حساب السلسلة الموسمية المعدلة (بعد إزالة الأثر الموسمي – سلسلة ليس بها أثر موسمي)

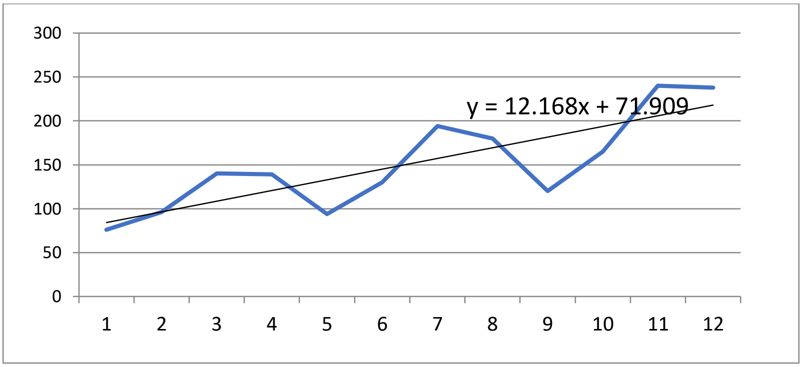
$$y_t^* = y_t \ / \ \ C_j^*$$

مثال تطبيقي: إزالة الأثر الموسمي بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية

لتكن لدينا السلسلة التالية: احسب قيم السلسلة المعدلة بعد إزالة الأثر الموسمي، مع توضيح ذلك بشكل بياني؟

السنوات	2019	2020	2021
الفصل الاول	76	94	120
الفصل الثاني	96	130	165
الفصل الثالث	140	194	240
الفصل الرابع	139	180	238

- رسم الشكل البياني: من خلال الرسم يتضح أن للسلسلة شكل جدائي حيث الفروقات بين الخطوط التي تربط بين القيم الدنيا والقصوى تتزايد مع الزمن



- تقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، حساب القيم المقدرة و نسبة الاتجاه d_t:

السنوات	t	Y	$(t_i - \bar{t})$	$(t_i - \bar{t})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\hat{y}_i$	$d_t = y_t / y_t^*$
2019	1	76	-5,5	30,25	-75	412,5	84,07	0,90
	2	96	-4,5	20,25	-55	247,5	96,24	1,00
	3	140	-3,5	12,25	-11	38,5	108,41	1,29
	4	139	-2,5	6,25	-12	30	120,58	1,15

2020	5	94	-1,5	2,25	-57	85,5	132,75	0,71
	6	130	-0,5	0,25	-21	10,5	144,92	0,90
	7	194	0,5	0,25	43	21,5	157,09	1,24
	8	180	1,5	2,25	29	43,5	169,26	1,06
2021	9	120	2,5	6,25	-31	-77,5	181,43	0,66
	10	165	3,5	12,25	14	49	193,6	0,85
	11	240	4,5	20,25	89	400,5	205,77	1,17
	12	238	5,5	30,25	87	478,5	217,94	1,09
	78	1812	**0**	**143**		**1740**		

$$\bar{t}=\frac{\sum t_i}{T}=\frac{78}{12}=6.5 \qquad \bar{y}=\frac{\sum y_i}{T}=\frac{1812}{12}=151$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum(t_i-\bar{y})^2}=\frac{1740}{143}=12.17$$

$$\hat{a}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{t}\Rightarrow \hat{a}=151-(12.17)(6.5)=71{,}90$$

وبالتالي يصبح النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{y}_i=\hat{a}+\hat{b}\,t \;\Rightarrow \hat{y}_i=71{,}90+12{,}17\,t_i$$

ملاحظة: حساب القيم المقدرة للسلسلة باستخدام المعادلة أعلاه وهذا بتعويض قيم الزمن في المعادلة

¬حساب المعاملات الموسمية c_j ومتوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

السنوات	الفصل الاول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع	
2019	0,90	1,00	1,29	1,15	
2020	0,71	0,90	1,24	1,06	
2021	0,66	0,85	1,17	1,09	
المعامل الموسمي	***0,76***	***0,92***	***1,23***	***1,10***	$\bar{c} =$ ***(0.76+0.92+1.23+1.10) /4=1,00***
(C_j^*)	***0,76***	***0,92***	***1,23***	***1,10***	

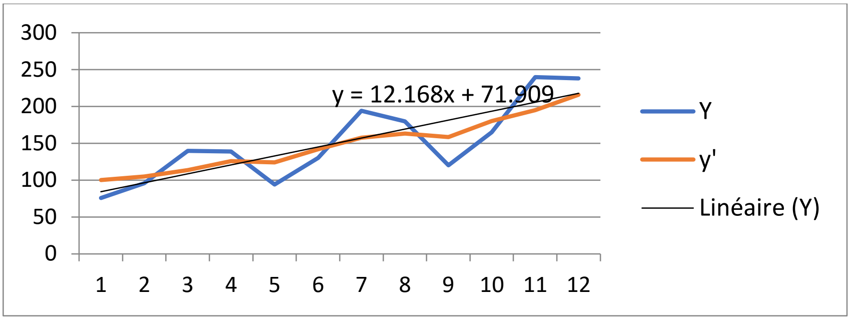
ملاحظة: بما أن المتوسط مساوي للواحد الصحيح اذن نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية لتصبح $C_j^* = C$

¬حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي)

$$y_t^* = y_t \ / \ C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 76/0.76 = 100$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	76	96	140	139	94	130	194	180	120	165	240	238
y_t^*	100	104.34	113.82	126 .36	123.68	141.30	157.72	163.64	157.89	179.35	195.12	216.36

- رسم الشكل البياني: حسب الشكل نلاحظ أن السلسلة الموسمية المعدلة قيمها تقترب كثيرا من خط الاتجاه وهو ما يؤكد على إزالة الأثر الموسمي



- التنبؤ:

الفصول	13	14	15	16
توقعات الاتجاه: $\hat{y}_i = 71.89 + 12,17t_i$	230.1	242.27	254.44	266.61
المعامل الموسمي	0.76	0.91	1.23	1.17
توقعات المبيعات الفصلية $\grave{y}_i = \frac{y_i}{C_i} \Longrightarrow y_i = \grave{y}_i * C_i$	174.87	220.46	312.96	311.93

2. تقدير التأثيرات الموسمية للنموذج التجميعي:

لدينا:

$$y_t = T_t + S_t$$

- تحديد الاتجاه العام بالطريقة البيانية

- تقدير النموذج بطريقة المربعات الصـــغرى والقيم المقدرة وكذا الفروقات لكل فترة زمنية t حيث:

$$d_t = y_t - MM_t$$ -

- حساب المعاملات الموسمية c_j حيث تمثل j الفصول (متوسط هذه الفروقات d_t)

- حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$ إذا تم اختيار النموذج هذا المتوسط يقترب من الصفر وخلاف دلك.

- حساب التصحيحات $C_j^* = c_j - \bar{C}$

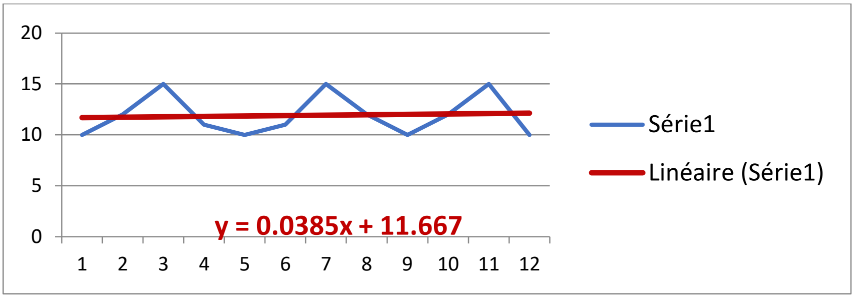
- حساب السلسلة الموسمية المعدلة (بعد إزالة الأثر الموسمي – سلسلة ليس بها أثر موسمي)

$$y_t^* = y_t - C_j^*$$

مثال تطبيقي: تحديد الاتجاه العام بالطريقة البيانية: حسب الشكل يتضح لنا للسلسلة شكل تجميعي

السنوات	2019	2020	2021
الفصل الاول	10	10	10
الفصل الثاني	12	11	12
الفصل الثالث	15	15	15
الفصل الرابع	11	12	10

الرسم البياني:



- تقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وايجاد القيم المقدرة

- حسب الفروقات $d_t = y_t - y_t^*$

السنوات	t	Y	$(t_i - \bar{t})$	$(t_i - \bar{t})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\hat{y}_i$	$d_t = y_t - y_t^*$
2019	1	10	-5,5	30,25	-1,92	10,56	11,71	1,71-
	2	12	-4,5	20,25	0,08	-0,36	11,74	0,26
	3	15	-3,5	12,25	3,08	-10,78	11,78	3,22
	4	11	-2,5	6,25	-0,92	2,3	11,82	0,82-
2020	5	10	-1,5	2,25	-1,92	2,88	11,86	1,86-
	6	11	-0,5	0,25	-0,92	0,46	11,90	0,90-
	7	15	0,5	0,25	3,08	1,54	11,94	3,06
	8	12	1,5	2,25	0,08	0,12	11,97	0,03
2021	9	10	2,5	6,25	-1,92	-4,8	12,01	2,01-
	10	12	3,5	12,25	0,08	0,28	12,05	0,05-
	11	15	4,5	20,25	3,08	13,86	12,09	2,91

	12	10	5,5	30,25	-1,92	-10,56	12,13	2,13-
	78	**143**	**0**	**143**	**-0,04**	**5,5**		

$$\bar{\boldsymbol{t}} = \frac{\sum \boldsymbol{t_i}}{T} = \frac{78}{12} = 6.5$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum \boldsymbol{y_i}}{T} = \frac{143}{12} = 11.92$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum(\boldsymbol{t_i} - \bar{\boldsymbol{t}})(\boldsymbol{y_i} - \bar{\boldsymbol{y}})}{\sum(\boldsymbol{t_i} - \bar{\boldsymbol{y}})^2} = \frac{5.5}{143} = 0.038$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t} \Rightarrow \hat{a} = 11.92 - (0.038)(6.5) = 11.67$$

وبالتالي يصبح النموذج المقدر كما يلي:

$$\widehat{\boldsymbol{y}_\imath} = \widehat{\boldsymbol{a}} + \widehat{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{t} \;\Rightarrow \widehat{\boldsymbol{y}_\imath} = \mathbf{11.67 + 0.038}\boldsymbol{t_i}$$

¬ حساب المعاملات الموسمية c_j ومتوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

السنوات	الفصل الاول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع	
2019	1,71-	0,26	3,22	0,82-	
2020	1,86-	0,90-	3,06	0,03	
2021	2,01-	0,05-	2,91	2,13-	
المعامل الموسمي	-1,86	-0,23	3,06	-0,97	$\bar{c}$ = (-1,86+0,23+3,06+-0,97) /4=0,00

CSN (C_j^*)	-1,86	-0,23	3,06	-0,97	

ملاحظة: بما أن المتوسط مساوي للصفر اذن نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية لتصبح $C_j^* = C$

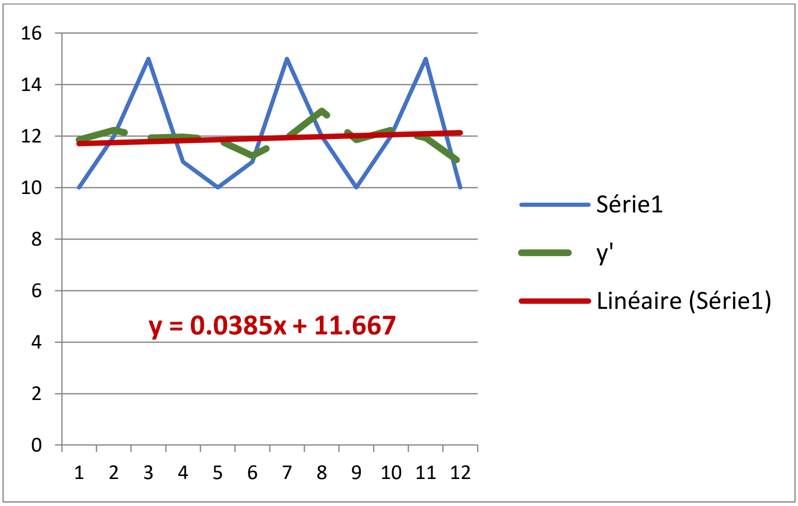
¬ حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي =سلسلة ليس بها أثر موسمي)

$$y_t^* = y_t - C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 10 - 11.71 = -11.86$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t^*	11,86	12,23	11,94	11,97	11,86	11,23	11,94	12,97	11,86	12,23	11,94	10,97

- رسم الشكل البياني بعد إزالة الأثر الموسمي:

حسب الشكل نلاحظ أن السلسلة الموسمية المعدلة قيمها تقترب كثيرا من خط الاتجاه وهو ما يؤكد على إزالة الأثر الموسمي



II. التعديل بطريقة المتوسطات المتحركة:

من أهم النماذج المكيفة والتي تستخدم في التنبؤ، تعتمد على المتوسط الحسابي في حسابها، معناه انه في السلسلة الزمنية يتم حساب متوسط حسابي لعدد محدود من الفترات أي يصبح المتوسط الحسابي متحركا وهذا ما يساعد على إزالة التذبذبات التي تتضمنها السلسلة.

ركزت الأساليب السابقة على التنبؤ بالمبيعات السنوية من استقراء الاتجاه السابق. لكن إدارة الشركة غالبًا ما تتطلب أن نأخذ في الاعتبار فترات أقصر (الشهر أو الربع على سبيل المثال)

نادرًا ما يكون التعديل البسيط لاتجاه سابق ذا صلة بقدر ما يحدد عامل آخر غالبًا: موسمية المبيعات. تقضي المتوسطات المتحركة على التحركات الموسمية وتوفر الاتجاه العام للظاهرة المرصودة.

1. طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة:

معناه أننا نقوم بحساب المتوسط الحسابي لعدد فترات محدودة من السلسلة الزمنية مع إعطاء أوزان متساوية لكافة المشاهدات المعنية بالدراسة والقيمة المتنبؤ بها تعتمد على الفترات السابقة حيث يحسب المتوسط المتحرك كالتالي:

$$\hat{y}_{t+1} = MAk = \frac{1}{n}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \cdots \ldots + y_{t-n+1})$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+1} = \frac{1}{n}\sum y_{t-n}$$

$\hat{y}_{t+1}$ القيمة التنبؤية للفترة $t+1$

n : عدد الفترات المتضمنة في حساب المتوسط

$\sum y_{t-n}$: مجموع القيم المشاهدة في الفترات

مثال توضيحي :

البيانات المبينة في الجدول التالي تتعلق بالمبيعات السنوية لمؤسسة ما، قدر مبيعات المؤسسة للسنة المقبلة باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة بالاعتماد على 03سنوات، أيn=3

الحل:

السنوات	1	2	3	4	5
المبيعات	112	120	115	124	125

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{3}\sum(112+120+115) = 122$$

$$\hat{y}_5 = \frac{1}{3}\sum(120+115+124) = 123.66$$

السنوات	1	2	3	4	5	التنبؤ
المبيعات	120	124	122	124	125	-
MA	-	-	-	122	123.66	144

إذن القيمة التنبؤية لحجم المبيعات للسنة المقبلة هو 144

من عيوبها أنها تتعامل مع بيانات السلسلة الزمنية كقيم متساوية الأهمية في التنبؤ وهذا لا يكون صحيحا فالقيمة الأحدث هي ذات أهمية تنبؤية أكبر وخاصة في حالة اتجاه تصاعدي أو تنازلي تم اللجوء غلى طريقة أخرى.

2. طريقة المتوسطات المتحركة المرجحة:

معناه أننا نقوم بحساب المتوسط الحسابي لعدد فترات محدودة من السلسلة الزمنية مع إعطاء أوزان غير متساوية لكافة المشاهدات المعنية بالدراسة وإعطاء وزن أكبر للفترات الأحدث لأنها الأقرب بما هو موجود في الوقت الراهن في السوق بالمقارنة مع الفترات التي تسبقها.

$$\hat{y}_{t+1} = WMA = a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + a_3 y_{t-2} + \cdots \ldots$$

مثال توضيحي :لنأخذ معطيات المثال السابق للتنبؤ بالمبيعات السنوية لمؤسسة ما، قدر مبيعات المؤسسة للسنة المقبلة باستخدام المتوسط المتحرك لثلاث فترات مع إعطاء الفترة الأحدث وزن 0.5 والفترة التي تسبقها وزن 0.3 والفترة الأسبق 0.1؟

السنوات	1	2	3	4	5	
المبيعات	112	120	115	124	125	
WMA	-	-	-	146.8	148	

طريقة الحساب:

$$\hat{y}_4 = 0.6 * 122 + 0.4 * 124 + 0.2 * 120 = 146.8$$

$$\hat{y}_5 = 0.6 * 124 + 0.4 * 122 + 0.2 * 122 = 148$$

$$\hat{y}_6 = 0.6 * 125 + 0.4 * 124 + 0.2 * 122 = 149$$

إذا القيمة التنبؤية لمبيعات المؤسسة لشهر جانفي 2021 تساوي 174.20 وحدة،

من عيوبه لا توجد مجموعة دقيقة من الأوزان الترجيحية حيث تختلف من ظاهرة لأخرى

3. تقدير التأثيرات الموسمية إزالة الأثر الموسمي:

- **حساب مختلف المتوسطات:**

وفيما يلي صيغ المتوسط المتحرك:

المتوسط المتحرك غير المركزي:

$$\boldsymbol{m_i} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{4}$$

$$\boldsymbol{m_i} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \cdots \ldots \ldots \ldots y_{i+10}}{12}$$

المتوسط المتحرك المركزي:

$$\boldsymbol{M_i} = \frac{m_{i-1} + m_i}{2}$$

المعامل الموسمي:

$$\boldsymbol{C_i} = \frac{y_i}{\boldsymbol{M_i}}$$

صيغة توقعات المبيعات:

$$\boldsymbol{y_i} = (\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{C_i}$$

ملاحظة: يمكن حساب المتوسط المتحرك المركزي بطريقة ثانية ومباشرة وبدون اللجوء إلى احتساب الغير المركزي وهذا وفق المعادلة التالية:

$$\boldsymbol{M_1} = \frac{\frac{y_{i-2}}{2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

مثال تطبيقي رقم01 : لتكن لدينا سلسلة المبيعات التالية المطلوب إيجاد مختلف المتوسطات:

الفصل السنة	س 1	س 2	س 3
1	230	250	290
2	290	300	320
3	480	550	620
4	350	380	410

نحسب المتوسطات المتحركة الغير المركزية:

$$\boldsymbol{m_1} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{4}$$
$$= \frac{230 + 290 + 480 + 350}{4} = 337.5$$

$$\boldsymbol{m_2} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{4}$$
$$= \frac{290 + 480 + 350 + 250}{4} = 342.5$$

كخطوة ثانية نحسب المتوسطات المتحركة المركزية

$$\boldsymbol{M_i} = \frac{m_{i-1} + m_i}{2} = \frac{3337.5 + 342.5}{2} = 340$$

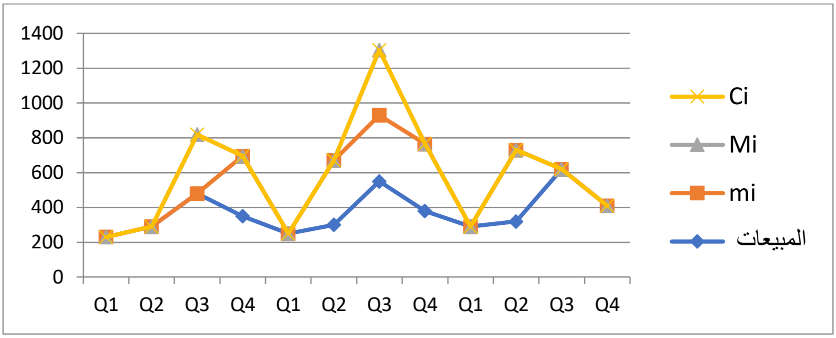
ملاحظة: يمكن حساب المتوسط المتحرك المركزي بطريقة ثانية ومباشرة وبدون اللجوء إلى احتساب الغير المركزي وهذا وفق المعادلة التالية:

$$\boldsymbol{M_1} = \frac{\frac{y_{i-2}}{2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$
$$= \frac{115 + 290 + 480 + 350 + 125}{4} = 340$$

$$\boldsymbol{M_2} = \frac{145 + 480 + 350 + 250 + 150}{4}$$
$$= \frac{115 + 290 + 480 + 350 + 125}{4}$$
$$= 343.75$$

الفترات		المبيعات	m_i	M_i	C_i
N-2	الفصل الأول	230	-	-	-
	الفصل الثاني	290	337.5	-	-
	الفصل الثالث	480	342.5	340	1.41
	الفصل الرابع	350	345	343.75	1.02
N-1	الفصل الأول	250	362.5	353.75	0.71
	الفصل الثاني	300	370	366.25	0.82
	الفصل الثالث	550	380	375	1.47
	الفصل الرابع	380	385	382.5	0.99
N	الفصل الأول	290	402.5	393.75	0.74
	الفصل الثاني	320	410	406.25	0.79
	الفصل الثالث	620	-	-	
	الفصل الرابع	410	-	-	

- الرسم البياني:



أ: **النموذج الجدائي**: لدينا:

$$y_t = T_t * S_t$$

- تحديد الاتجاه العام بالطريقة البيانية أو بطريقة المتوسطات المتحركة
- لكل فترة زمنية t نحسب النسبة $S_t = \frac{y_t}{T_t}$ وتسمى نسبة الاتجاه
- حساب المعاملات الموسمية (متوسط هذه النسب) C_t المقابلة لنفس الفصل

ونقوم أيضا بحساب المعاملات الموسمية c_j حيث تمثل j الفصول

- حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$ إذا تم اختيار النموذج هذا المتوسط يقترب من الواحد الصحيح وخلاف دلك
- حساب التصحيحات $C_j^* = \frac{c_j}{\bar{C}}$ حيث $\frac{1}{n}\sum S^*{}_j = 1$ حيث n هو عدد المعاملات الموسمية
- حساب السلسلة الموسمية المعدلة (بعد إزالة الأثر الموسمي – سلسلة ليس بها أثر موسمي)

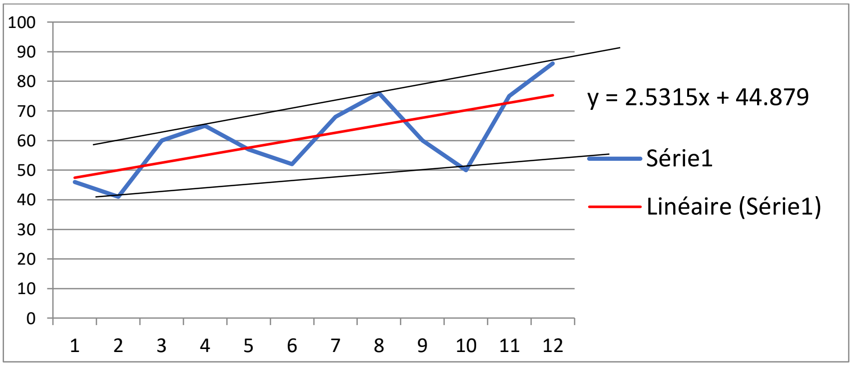
$$y_t^* = \frac{y_t}{S^*{}_j}$$

مثال تطبيقي:

لتكن لدينا السلسلة التالية:

الفصل سنوات	1	2	3	4
2005	46	41	60	65
2006	57	52	68	76
2007	60	50	75	86

- تحديد الاتجاه العام بالطريقة البيانية: حسب الشكل يتضح لنا للسلسلة شكل جدائي:



- حساب المتوسطات المتحركة الموسمية ثم حساب الفروقات بين القيمة الفعلية وقيمة المتوسط المتحرك

$$M_1=\frac{\frac{y_{i-2}}{2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+\frac{y_{i+2}}{2}}{4}=\frac{\frac{46}{2}+41+60+65+\frac{57}{2}}{4}=54.38$$

$$M_2=\frac{\frac{y_{i-2}}{2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+\frac{y_{i+2}}{2}}{4}=\frac{\frac{41}{2}+60+65+57+\frac{52}{2}}{4}=57.13$$

$$= \frac{\frac{60}{2}+65+57+52+\frac{68}{2}}{4} = 59.50\ M_3 = \frac{\frac{y_{i-2}}{2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+\frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

- حساب النسبة S_t

$$S_3 = y_t \ / \ MM_t = 60/54.38 = 1.10$$
$$S_4 = y_t \ / \ MM_t = 65/57.13 = 1.14$$

	2019				2020				2021			
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	46	41	60	65	57	52	68	76	60	50	75	86
MM4			54,38	57,13	59,50	61,88	63,63	63,75	64,38	66,50		
S_t			1,10	1,14	0,96	0,84	1,07	1,19	0,93	0,75		

- حساب المعاملات الموسمية c_j ومتوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

السنوات	الفصل الاول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع	
2019			1,10	1,14	
2020	0,96	0,84	1,07	1,19	
2021	0,93	0,75			
C	**0,95**	**0,80**	**1,09**	**1,17**	$\bar{c} = ($0.95+ 0.80 + 1.09+1.17) /4=1
$\mathbf{C_j^*}$	**0.95**	**0.80**	**1.09**	**1.17**	

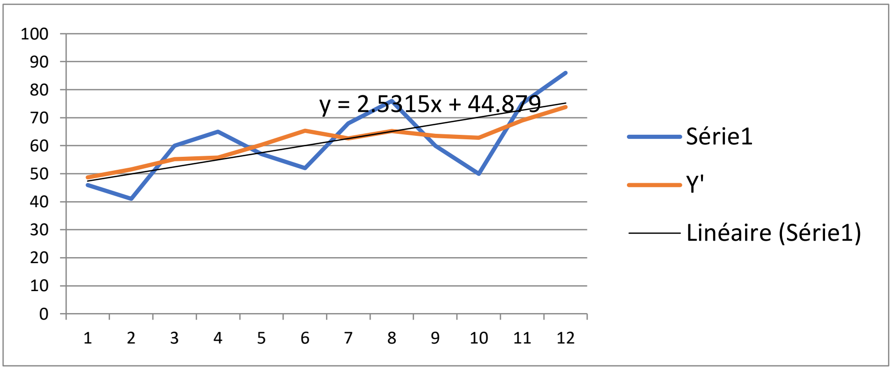
ملاحظة: بما أن المتوسط $\bar{c}$ مساوي للواحد اذن نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية ولا نقوم بحساب المعاملات الموسمية المصححة ليصبح لدينا $\boldsymbol{C_j^* = C}$

- حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي) بوجود المعاملات الموسمية المصححة يمكننا الآن إجراء تعديل على السلسلة الزمنية لإزالة الأثر الموسمي وهذا بإجراء القسمة بين القيم الفعلية للسلسلة الزمنية وقيمة هذه المعاملات الموسمية المصححة

$$y_1^* = y_t \;/\;\; C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 46/0.95 = 48.68$$
$$y_2^* = y_t \;/\;\; C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 41/0.80 = 51{,}50$$
$$y_3^* = y_t \;/\;\; C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 60/1.09 = 55{,}24$$

	2019				2020				2021			
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	46	41	60	65	57	52	68	76	60	50	75	86
y_t^*	48,68	51,50	55,24	55,79	60,32	65,31	62,61	65,24	63,49	62,80	69,05	73,82

- الشكل البياني بعد إزالة الاثر الموسمي: حسب الشكل نلاحظ أن السلسلة الموسمية المعدلة قيمها تقترب كثيرا من خط الاتجاه وهو ما يؤكد على إزالة الأثر الموسمي



ب: النموذج التجميعي:

لدينا:

$$y_t = T_t + S_t$$

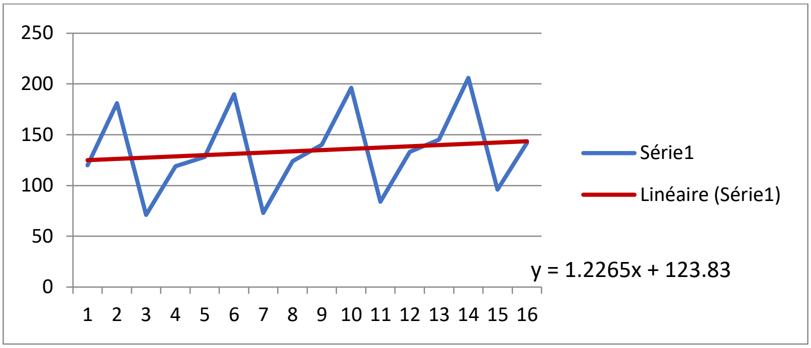
- تحديد الاتجاه العام بالطريقة البيانية:
- حساب المتوسطات المتحركة MMعلى طول الفترات (سداسي ثلاثي ،رباعي ....)
  وكذا الفروقات لكل فترة زمنية t حيث: $d_t = y_t - MM_t$
- حساب المعاملات الموسمية c_j حيث تمثل j الفصول (متوسط هذه الفروقات d_t)
- حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$ إذا تم اختيار النموذج هذا المتوسط يقترب من الصفر وخلاف ذلك
- حساب التصحيحات $C_j^* = c_j - \bar{C}$
- حساب السلسلة الموسمية المعدلة (بعد إزالة الأثر الموسمي – سلسلة ليس بها أثر موسمي)

$$y_t^* = y_t - C_j^*$$

مثال تطبيقي: لتكن لدينا السلسلة التالية باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة قم بإزالة الأثر الموسمي

الفصل الرابع	الفصل الثالث	الفصل الثاني	الفصل الاول	السنوات
119	71	181	120	**2019**
124	73	190	128	**2020**
133	84	196	140	**2021**
142	96	206	145	**2022**

- رسم البيان لتوضيح شكل السلسلة الزمنية: حسب الشكل نلاحظ أن القيم العليا والدنيا للسلسلة تظهر بشكل متوازي وهذا ما يؤكد على أن للسلسلة شكل تجميعي



- حساب المتوسطات المتحركة الموسمية ثم حساب الفروقات بين القيمة الفعلية وقيمة المتوسط المتحرك

$$d_3 = y_t - y_t^*$$

	2019				2020			
t	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	120	181	71	119	128	190	73	124
MM4	-	-	123,75	125,88	127,25	128,13	130,25	132,50
d	**-**	**-**	**52,75-**	**6,88-**	**0,75**	**61,88**	**57,25-**	**8,50-**
	2021				2022			
t	9	10	11	12	13	14	15	16
Y	140	196	84	133	145,00	206	96	142
MM4	134,63	137,13	138,88	140,75	143,50	146,13	-	-
d	**5,38**	**58,88**	**54,88-**	**7,75-**	**1,50**	**59,88**	**-**	**-**

- حساب المعاملات الموسمية c_j ومتوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

	الفصل الرابع	الفصل الثالث	الفصل الثاني	الفصل الاول	السنوات
	6,88-	-52,75			2019
(0.75+5.38+1.50)/3=2.54	8,50-	-57,25	61,88	0,75	2020
	7,75-	-54,88	58,88	5,38	2021
			59,88	1,50	2022

c_j	**2,54**	**60,21**	**-54,96**	**-7,71**	$\bar{c} = ($2 .54+-60 ,21-54.96-7.71) /4=**0,02**
$\mathbf{C_j^*}$	**2,52**	**60,19**	**-54,98**	**-7,73**	

ملاحظة:

بما أن المتوسط غير مساوي للصفر اذن لا نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية ونقوم بحساب المعاملات الموسمية المصححة بهذه الطريقة:

¬ حساب التصحيحات $\boldsymbol{C_j^*} = c_j - \bar{C}$

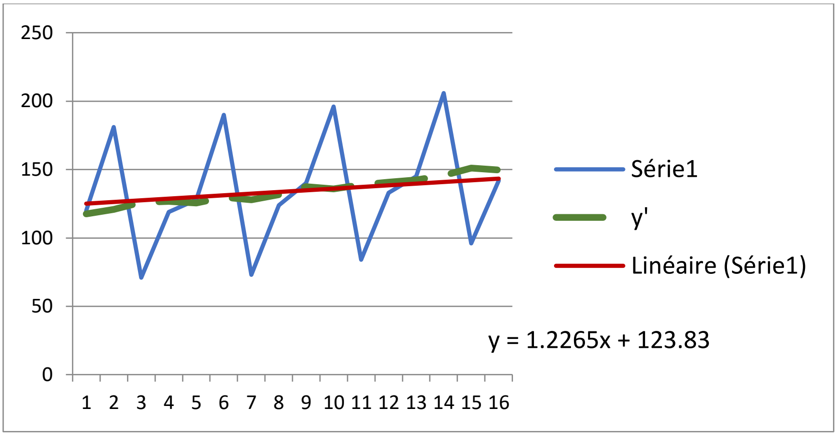
$$\boldsymbol{C_1^*} = 2.54 - 0.02 = 2.52$$
$$\boldsymbol{C_2^*} = 60.21 - 0.02 = 60.19$$
$$\boldsymbol{C_3^*} = -54.96 - 0.02$$
$$= -54.98$$
$$\boldsymbol{C_4^*} = -7.71 - 0.02 = \text{-7.73}$$

¬ حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي) بوجود المعاملات الموسمية المصححة يمكننا الآن إجراء تعديل على السلسلة الزمنية لإزالة الأثر الموسمي وهذا بإجراء الفروقات بين القيم الفعلية للسلسلة الزمنية وقيمة هذه المعاملات الموسمية المصححة

$$y_t^* = y_t - C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 120 - 2.52 = 117.48$$

	2019				2020			
t	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	120	181	71	119	128	190	73	124
y_t^*	**117,48**	**120,81**	**125,98**	**126,73**	**125,48**	**129,81**	**127,98**	**131,73**
	2021				**2022**			
t	9	10	11	12	13	14	15	16
Y	140	196	84	133	145,00	206	96	142
y_t^*	**137,48**	**135,81**	**138,98**	**140,73**	**142,48**	**145,81**	**150,98**	**149,73**

- الشكل البياني بعد إزالة الاثر الموسمي: حسب الشكل نلاحظ أن السلسلة الموسمية المعدلة قيمها تقترب كثيرا من خط الاتجاه وهو ما يؤكد على إزالة الأثر الموسمي



تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول: لدينا سلسلة التوزيع الشهري لمستوى مؤشر جودة الهواء ATMO في بلد وفقًا لفئة المستوى المتوسط خلال السنة

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	22	29	35	28	54	65	59	83	25	31	8	9

- في رسم بياني وضح تطور السلسلة على مدى 12 شهرًا.
- احسب تسلسل المتوسطات المتحركة للطول 3 وارسمه في نفس الشكل السابق، ما هي خاصية المتوسط المتحرك التي أوضحتها للتو؟

التمرين الثاني: لتكن لدينا المعادلات الانحدارية التالية المرتبطة بالزمن (بالسنوات):

$$x_t = 3.t + 200$$

$$y_t = 2.t^2 - 6t + 200$$

- كون سلسلة زمنية من 16 مشاهدة من المعادلة التالية؟
- حساب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على 03 سنوات، 4سنوات؟
- أوجد السلسلة حيث: $Z_t = X_t + Y_t$ ، أحسب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على 03 سنوات ،4سنوات الخاصة بهذه السلسلة؟
- في شكل بياني وضح مختلف المتوسطات لمختلف السلاسل الزمنية؟

التمرين الثالث: نقدم فيما يلي سلسلة زمنية سنوية خاصة بمبيعات منتوج معين لمؤسسة ما،

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	600	660	680	685	690	696	1005	1020	1030	1045	1055	1070

- أحسب المتوسطات المتحركة الخاصة بفترتين، ثلاث فترات، أربع فترات؟
- ما هو الاتجاه الذي تتخذه هذه السلسلة؟
- باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، قم بإجراء تعديل خطي للسلسلة؟
- باستخدام التعديل الخطي تنبؤ بمبيعات المؤسسة لثلاثة أشهر من السنة المقبلة؟

التمرين الرابع: نقدم فيما يلي سلسلة زمنية سنوية خاصة بمشتريات منتوج معين لمؤسسة ما

- أحسب المتوسطات المتحركة الخاصة بأربع فترات؟
- قم بإجراء تعديل خطي للسلسلة؟
- باستخدام التعديل الخطي تنبؤ بمبيعات المؤسسة لثلاثة أشهر من السنة المقبلة؟

السنوات	الفصل الاول	الثاني	الثالث	الرابع
2020	20	28	22	34
2021	19	39	25	44
2022	21	49	33	55
2023	23	60	37	66

التمرين الخامس: لتكن لدينا السلسلة الزمنية الخاصة برقم الأعمال لإحدى المؤسسات التجارية:

الزمن	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
رقم الأعمال y_i	12 0	18 3	73	119	128	184	72	124

- وضح شكل السلسلة في رسم بياني
- أحسب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة مع استنتاج قيمة الفروقات؟
- حساب المعاملات الموسمية؟
- قم بتعديل السلسلة الزمنية؟

التمرين السادس: الجدول التالي يوضح قيم السلسلة

احسب قيم السلسلة الزمنية الخالية من الأثر الموسمي، اعتمادا على معطيات الجدول الخاص بالمعاملات الموسمية (نموذج جمع)

T1	T2	T3	T4
2,552	2,010	-4,822	0,260

X_t	T_1	T_2	T_3	T_4
2016	12	22	10	16
2017	17	23	19	23
1018	40	33	25	31
2019	18	22	19	20

التمرين السابع: الجدول التالي يوضح قيم السلسلة

احسب قيم السلسلة الزمنية الخالية من الأثر الموسمي، اعتمادا على معطيات الجدول الخاص بالمعاملات الموسمية (نموذج جدائي)

X_t	T_1	T_2	T_3	T_4
2020	48	41	60	65
2021	58	52	68	74
2022	60	56	75	75

C_1	C_2	C_3	C_4
0.9609	0.8257	1.088	1.124

-

تنبأ لأربع فترات المقبلة بمعلومية معادلة التقدير التالية: y=2,2622X+46,545

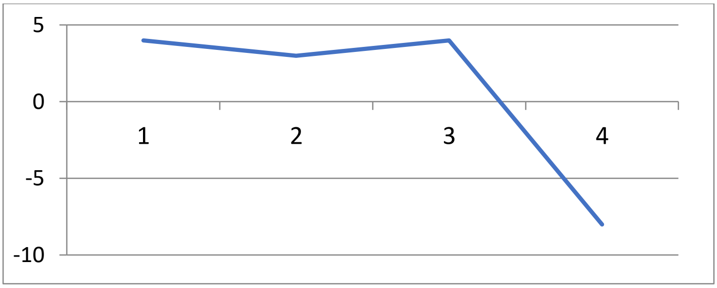
- أرسم الشكل البياني للسلسلة الزمنية بعد إزالة الأثر الموسمي؟

حلول تمارين الفصل الثاني

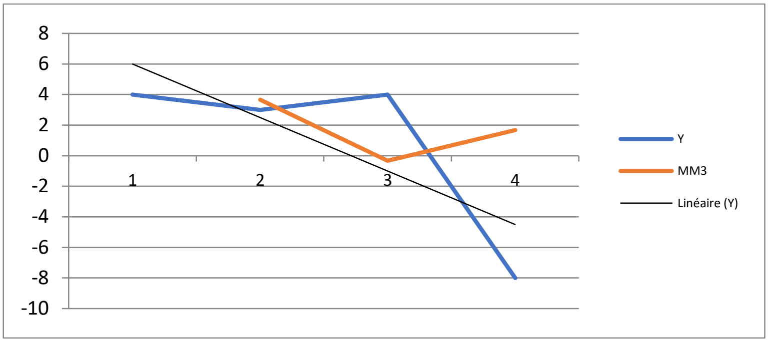
التمرين الأول:

- رسم الشكل مع حساب المتوسطات المتحركة:

t	y	MM 3
1	22	
2	29	28,67
3	35	30,67
4	28	39,00
5	54	49,00
6	65	59,33
7	59	69,00
8	83	55,67
9	25	46,33
10	31	21,33
11	8	16,00
12	9	



المتوسطات المتحركة تجعل السلسلة ملساء أكثر وتعطي شكل بياني أكثر سلاسة وتمنح امكانية تقييم الاتجاه العام ويظهر هذا من خلال الشكل حيث قيم السلسلة تقترب أكثر من خط الاتجاه العام بعد استعمال المتوسطات.



التمرين الثاني:

- تكوين سلسلة زمنية من 16 مشاهدة: بتعويض قيم الزمن في المعادلة نحصل على قيم السلسلة الزمنية:

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	t
248	245	242	239	236	233	230	227	224	221	218	215	212	209	206	203	x
616	560	508	460	416	376	340	308	280	256	236	220	208	200	196	196	y

- حساب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على 03 سنوات، 4سنوات

أ: المتوسطات المتحركة المركزية الخاصة بالسلسلة الأولى:

- حساب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على ثلاثة سنوات (في هذه الحالة لا نرجع إلى المتوسط الحسابي الغير مركزي بل نحسب مباشرة لأننا في حالة الأطول الفردية):

$$\boldsymbol{M_1}=\frac{y_{i-1}+y_i+y_{i+1}}{3}=\frac{203+206+209}{3}=206$$

$$\boldsymbol{M_2}=\frac{206+209+212}{3}=209$$

- حساب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على أربعة سنوات (في هذه الحالة يمكننا الرجوع إلى الطريقة الخاصة بالمتوسط الحسابي الغير مركزي):

$$\boldsymbol{M_1}=\frac{\frac{y_{i-2}}{2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+\frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

$$=\frac{101.5+206+209+212+107.5}{4}=209$$

بطريقة ثانية: نحسب المتوسطات المتحركة الغير المركزية:

$$\boldsymbol{m_1}=\frac{y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+y_{i+2}}{4}$$

$$=\frac{203+206+209+212}{4}=207.5$$

$$\boldsymbol{m_2}=\frac{y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+y_{i+2}}{4}$$

$$=\frac{206+209+212+215}{4}=210.5$$

كخطوة ثانية: نحسب المتوسطات المتحركة المركزية

$$\boldsymbol{M_i}=\frac{m_{i-1}+m_i}{2}=\frac{207.5+210.5}{2}=209$$

ب: حساب المتوسطات المتحركة المركزية الخاصة بالسلسلة الثانية:

حساب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على ثلاثة سنوات (في هذه الحالة لا نرجع إلى المتوسط الحسابي الغير مركزي بل نحسب مباشرة لأننا في حالة الأطول الفردية):

$$\grave{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3} = \frac{196 + 196 + 200}{3} = 197.33$$

$$\grave{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3} = \frac{196 + 200 + 208}{3} = 201.33$$

حساب المتوسطات المتحركة المركزية بالاعتماد على أربعة سنوات:

$$\grave{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\frac{y_{i-2}}{2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

$$= \frac{98 + 196 + 200 + 208 + 110}{4} = 203$$

$$\grave{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\frac{y_{i-2}}{2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

$$= \frac{98 + 200 + 208 + 220 + 118}{4} = 211$$

(في هذه الحالة يمكننا الرجوع إلى الطريقة الخاصة بالمتوسط الحسابي الغير مركزي):

$$\boldsymbol{m_1} = \frac{196+196+200+208}{4} = 200$$

$$\boldsymbol{m_2} = \frac{196 + 200 + 208 + 220}{4} = 206$$

$$\grave{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{m_{i-1} + m_i}{2} = \frac{200 + 206}{2} = 203$$

- إيجاد السلسلة الزمنية $\boldsymbol{Z_t}$ حسب الطريقة التالية:

$$Z_t = X_t + Y_t \Longrightarrow Z_1 = 203 + 196 = 399$$

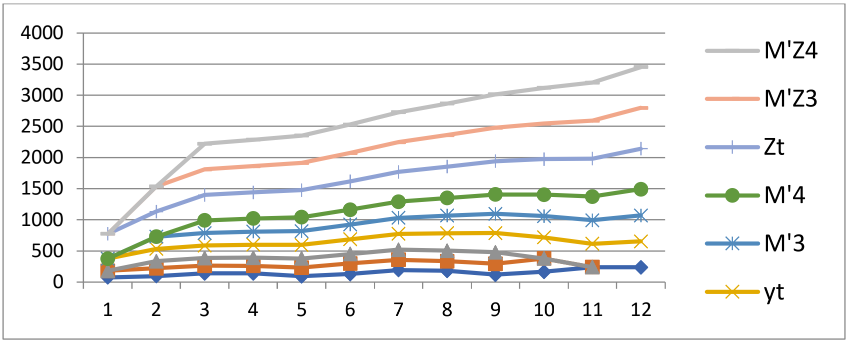
$$\grave{M}_{Z3} = M_3 + \grave{M}_3 \Longrightarrow \grave{M}_{Z3} = 206 + 197{,}33 = 403{,}33$$

$$\grave{\grave{M}}_{Z4} = M_4 + \grave{M}_4 \Longrightarrow \grave{M}_{Z4} = 209 + 203 = 412$$

جدول خاص بجميع المتوسطات الخاصة بكافة السلاسل الزمنية

$\grave{M}_{Z4}$	$\grave{M}_{Z3}$	Z_t	$\grave{M}_4$	$\grave{M}_3$	y_t	M_4	M_3	x_t	الزمن
		399		-	196			203	1
	403,33	402		197,33	196		206	206	2
412	410,33	409	203	201,33	200	209	209	209	3
423	421,33	420	211	209,33	208	212	212	212	4
438	436,33	435	223	221,33	220	215	215	215	5
457	455,33	454	239	237,33	236	218	218	218	6
480	478,33	477	259	257,33	256	221	221	221	7
507	505,33	504	283	281,33	280	224	224	224	8
538	536,33	535	311	309,33	308	227	227	227	9
573	571,33	570	343	341,33	340	230	230	230	10
612	610,33	609	379	377,33	376	233	233	233	11
655	653,33	652	419	417,33	416	236	236	236	12
702	700,33	699	463	461, 33	460	239	239	239	13
753	751,33	750	511	509,33	508	242	242	242	14
	806,33	805		561.33	560		245	245	15
		864			616			248	16

الرسم البياني الخاصة بجميع المتوسطات:



التمرين الثالث:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	600	660	680	685	690	696	1005	1020	1030	1045	1055	1070

- حساب المتوسطات المتحركة المركزية:

حساب المتوسطات المتحركة المركزية من الدرجة الثانية:

$$\boldsymbol{M}_{(2)}=\frac{\frac{y_{i-1}}{2}+y_i+\frac{y_{i+1}}{2}}{2}=\frac{300+660+340}{2}=650$$

$$\boldsymbol{M}_{(2)}=\frac{\frac{y_{i-1}}{2}+y_i+\frac{y_{i+1}}{2}}{2}=\frac{330+680+342.5}{2}$$
$$=676.25$$

حساب المتوسطات المتحركة المركزية من الدرجة الثالثة:

$$\boldsymbol{M}_{(3)}=\frac{y_{i-1}+y_i+y_{i+1}}{3}=\frac{600+660+680}{3}$$
$$=646.66$$

$$\boldsymbol{M}_{(3)}=\frac{660+680+685}{3}=675$$

حساب المتوسطات المتحركة المركزية من الدرجة الرابعة:

$$\boldsymbol{M}_{(4)} = \frac{\frac{y_{i-2}}{2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

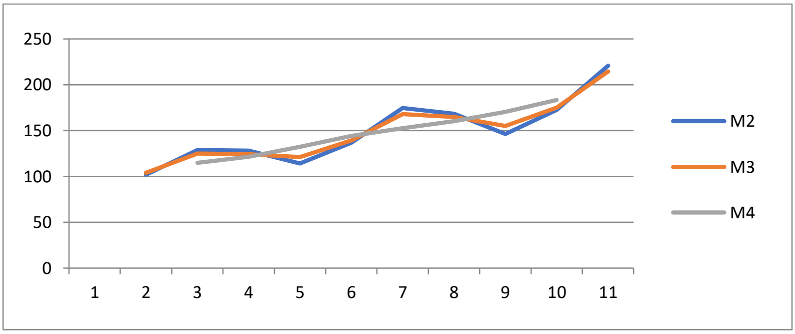
$$= \frac{300 + 660 + 680 + 685 + 345}{4} = 667.5$$

تكوين جدول خاص بجميع المتوسطات:

$\boldsymbol{M_4}$	$\boldsymbol{M_3}$	$\boldsymbol{M_2}$	$\boldsymbol{x_t}$	الزمن
-	-	-	600	1
-	646,667	650	660	2
667,5	675	676,25	680	3
683,25	685	685	685	4
728,375	690,33	690,25	690	5
810,875	797	771,75	696	6
895,25	907	931,5	1005	7
981,375	1018,33	1018,75	1020	8
1031,25	1031,66	1031,25	1030	9
1043,75	1043,33	1043,75	1045	10
-	1056,66	1056,25	1055	11
-	-	-	1070	12

الاتجاه الذي تتخذه هذه السلسلة:

حسب المنحنى فالاتجاه الذي تتخذه هذه السلسلة هو اتجاه خطي إذن يمكننا اللجوء إلى التعديل الخطي.



- استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لإجراء تعديل خطي للسلسلة

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{T} = \frac{78}{12} = 6.5 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{T} = \frac{10236}{12} = 853$$

-

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum(t_i - \bar{y})^2} = \frac{7152}{143} = 50.01$$ -

-

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{t} \Rightarrow \hat{a} = 853 - (50.01)(6.5) = 527.94$$

وبالتالي يصبح النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}\,t \Rightarrow \hat{y}_i = 527.94 + 50.01t_i$$

باستخدام معادلة التقدير نتمم بقية الخطوات في الجدول التالي:

t	Y	$(t_i - \bar{t})$	$(t_i - \bar{t})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$
1	600	-5,5	30,25	-253	1391,5
2	660	-4,5	20,25	-193	868,5
3	680	-3,5	12,25	-173	605,5
4	685	-2,5	6,25	-168	420
5	690	-1,5	2,25	-163	244,5
6	696	-0,5	0,25	-157	78,5
7	1005	0,5	0,25	152	76
8	1020	1,5	2,25	167	250,5
9	1030	2,5	6,25	177	442,5
10	1045	3,5	12,25	192	672
11	1055	4,5	20,25	202	909
12	1070	5,5	30,25	217	1193,5
78	10236	0	143	0	7152

-

- التنبؤ بمبيعات المؤسسة لثلاثة أشهر من السنة المقبلة:

13	$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}\, t \;\Rightarrow \hat{y}_i = 527.94 + 50.01(13)$	*1178.07*
14	$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}\, t \;\Rightarrow \hat{y}_i = 527.94 + 50.01(14)$	*1228.08*
15	$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}\, t \;\Rightarrow \hat{y}_i = 527.94 + 50.01(15)$	*1278.09*

التمرين الرابع:

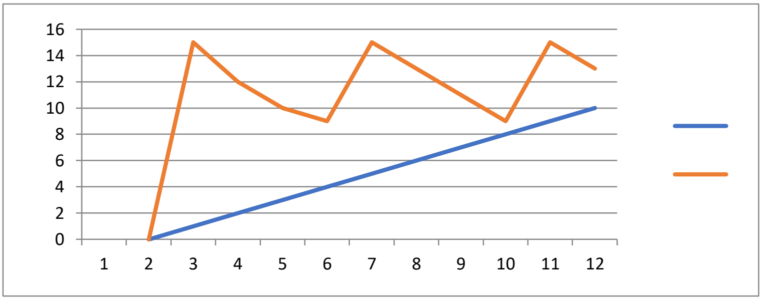
- حساب المتوسطات المتحركة المركزية من الدرجة الرابعة:

$$\boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{4})} = \frac{\frac{y_{i-2}}{2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \frac{y_{i+2}}{2}}{4}$$

$$= \frac{10 + 28 + 22 + 34 + 9.5}{4} = 25{,}875$$

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	الزمن
55	33	49	21	44	25	39	19	34	22	28	20	$\boldsymbol{y_i}$
-	-	38,125	35,75	33,5	32	30,5	28,875	27,125	25,875	-	-	$M\boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{4})}$

- إجراء تعديل خطي للسلسلة:



حسب الرسم نجد أن للسلسلة محل الدراسة شكل جدائي

- حساب النسبة S_t

$$S_3 = y_t \ / \ MM_t = 22/25{,}87 = 0.85$$

$$S_4 = y_t \ / \ MM_t = 34/27{,}12 = 1{,}25$$

الفصول	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
حجم المشتريات y_i	20	28	22	34	19	39	25	44	21	49	33	55
$MM_{(4)}$	-	-	25,87	27,12	28,87	30,5	32	33,5	35,7	38,125	-	-
المعامل الموسمي $S_t = \frac{y_i}{MM_{(4)}} =$	-	-	0,85	1,25	0,66	1,28	0,78	1,31	0,58	1,28	-	-

- حساب المعاملات الموسمية c_j ومتوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

السنوات	الفصل الاول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصل الرابع
2019	-	-	0,85	1,25
2020	0,66	1,28	0,78	1,31
2021	0,58	1,28		
C	**0.62**	**1.28**	**0.815**	**1.28**
$\mathbf{C_j^*}$	**0.62**	**1.28**	**0.815**	**1.28**

$\bar{c} = ($0.62+ 1.28 + 0.815+1.28) /4=0.998 =**1**

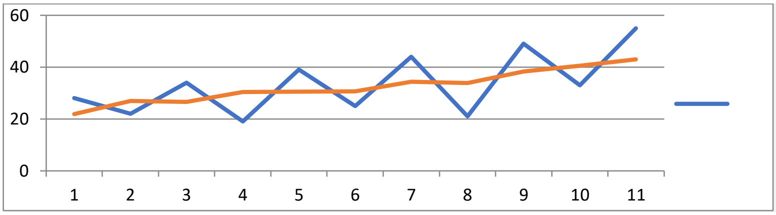
ملاحظة: بما أن المتوسط $\bar{C}$ مساوي للواحد اذن نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية ولا نقوم بحساب المعاملات الموسمية المصححة ليصبح لدينا $\boldsymbol{C_j^* = C}$

- حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي) بوجود المعاملات الموسمية المصححة يمكننا الآن إجراء تعديل على السلسلة الزمنية لإزالة الأثر الموسمي
- وهذا بإجراء القسمة بين القيم الفعلية للسلسلة الزمنية وقيمة هذه المعاملات الموسمية المصححة

$$y_1^* = y_t \;/\;\; C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 20/\mathbf{0.62} = 32.25$$
$$y_2^* = y_t \;/\;\; C_j^* \Leftrightarrow y_t^* = 28/\mathbf{1.28} = 34.35$$

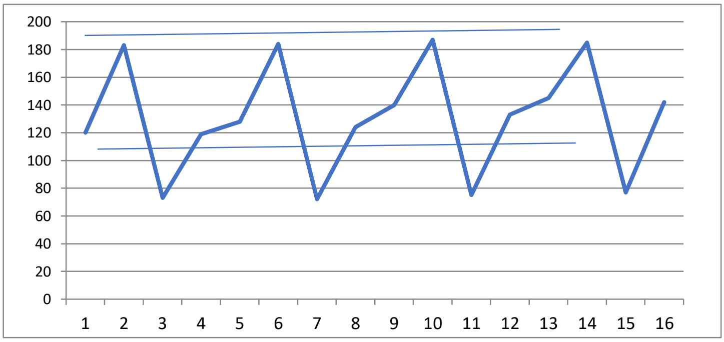
	2019				2020				2021			
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	20	28	22	34	19	39	25	44	21	49	33	55
C_j^*	0.62	1.28	0.815	1.28	0.62	1.28	0.815	1.28	0.62	1.28	0.815	1.28
y_t^*	32.26	21.875	26.99	26.56	30.46	30.47	30.67	34.375	33.87	38.28	40.49	42.97

- الشكل البياني بعد إزالة الاثر الموسمي: حسب الشكل نلاحظ أن السلسلة الموسمية المعدلة قيمها تقترب كثيرا من خط الاتجاه وهو ما يؤكد على إزالة الأثر الموسمي



التمرين الخامس:

- التمثيل البياني: حسب الرسم نلاحظ أن شكل السلسلة تجميعي



الزمن	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
رقم الأعمال y_i	12 0	183	73	119	128	184	72	124
MM_i	-	-	124,7 5	125,8 75	125,8 75	126,3 75	128, 5	130,3 75
$d_i = y_i - MM_i$	-	-	-51,75	-6,875	2,125	57,62 5	- 56,5	-6,375
الزمن	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**

رقم الأعمال y_i	140	187	75	133	145	185	77	142
MM_i	131,125	132,625	134,375	134,75	134,75	136,125		
$d_i = y_i - MM_i$	8,875	54,375	-59,375	-1,75	10,25	48,875		

- حساب المتوسطات المتحركة من الدرجة الرابعة (لأننا ضمن سلسلة فصلية) ثم الفروقات
- المعاملات الموسمية التي تتوافق مع متوسطات الفروق الموسمية لكل فصل كما يلي:

$$C_1 = \frac{1}{3}(d_5 + d_9 + d_{13})$$
$$= \frac{1}{3}(2{,}125 + 8{,}875 + 10{,}25)$$
$$= 7.083$$
$$C_2 = \frac{1}{3}(d_6 + d_{10} + d_{14})$$
$$= \frac{1}{3}(57{,}625 + 54{,}375$$
$$+ 48{,}875) = 53.625$$

$$C_3 = \frac{1}{3}(d_3 + d_7 + d_{11})$$
$$= \frac{1}{3}(-51,75 - 56,5 - 59,375)$$
$$= -55.875$$
$$C_4 = \frac{1}{3}(d_4 + d_8 + d_{12})$$
$$= \frac{1}{3}(-6,875 - 6,375 - 1,75)$$
$$= -5$$

حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

$$\bar{c} = (7.083 + 53.625 - 55.875 - 5)/4 = -0.167$$

ملاحظة: بما أن المتوسط غير مساوي للصفر اذن لا نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية ونقوم بحساب المعاملات الموسمية المصححة بهذه الطريقة:

¬ حساب التصحيحات: $\boldsymbol{C_j^*} = c_j - \bar{C}$

$$\boldsymbol{C_1^*} = 7.083 + 0.167 = 7.25$$
$$\boldsymbol{C_2^*} = 53.625 + 0.167$$
$$= 53.792$$
$$\boldsymbol{C_3^*} = -55.875 + 0.167$$
$$= -55.708$$
$$\boldsymbol{C_4^*} = -5 + 0.167 = -4.833$$

حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي)

بوجود المعاملات الموسمية المصححة يمكننا الآن إجراء تعديل على السلسلة الزمنية

لإزالة الأثر الموسـمي وهذا بإجراء الفروقات بين القيم الفعلية للسـلسـلة الزمنية وقيمة هذه المعاملات الموسمية المصححة

$$y_t^* = y_t - C_j^*$$

الزمن	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	120	183	73	119	128	184	72	124
y_t^*	112.75	129.21	128.71	123.83	120.75	130.21	127.71	128.83
الزمن	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	140	187	75	133	145	185	77	142
y_t^*	132.75	133.208	130.708	137.83	137.75	131.208	132.708	142.83

التمرين السادس: حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

$$\bar{\mathrm{c}} = (2{,}552 + 2{,}010 - 4{,}822 + 0{,}260))/4 = 0$$

ملاحظة: بما أن المتوسط مساوي للصفر اذن نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية:

$$\boldsymbol{C_j^*} = \bar{C}$$

حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي) بوجود المعاملات الموسمية المصححة يمكننا الآن إجراء تعديل على السلسلة الزمنية لإزالة الأثر الموسمي وهذا بإجراء الفروقات بين القيم الفعلية للسلسلة الزمنية وقيمة هذه المعاملات الموسمية المصححة

$$y_t^* = y_t - C_j^*$$

الزمن	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	12	22	10	16	17	23	19	23
y_t^*	9.448	19.99	14.822	15.74	14.448	20.99	23.822	22.74
الزمن	9	10	11	12	13	14	15	16
y_i	40	33	25	31	18	22	19	20
y_t^*	37.448	30.99	29.822	30.74	15.448	19.99	23.822	19.74

التمرين السابع:

- حساب متوسط المعاملات الموسمية $\bar{C}$

$$\bar{c} = (0.9609 + 0.8257 + 1.088 + 1.124)/4 = 1$$

ملاحظة: بما أن المتوسط مساوي للصفر اذن نحتفظ بنفس هذه المعاملات الموسمية:

$$\boldsymbol{C_j^*} = \bar{C}$$

حساب السلسلة الموسمية المعدلة (إزالة الأثر الموسمي = سلسلة ليس بها أثر موسمي) بوجود المعاملات الموسمية المصححة يمكننا الآن إجراء تعديل على السلسلة الزمنية لإزالة الأثر الموسمي وهذا بإجراء الفروقات بين القيم الفعلية للسلسلة الزمنية وقيمة هذه المعاملات الموسمية المصححة

$$y_t^* = y_t - C_j^*$$

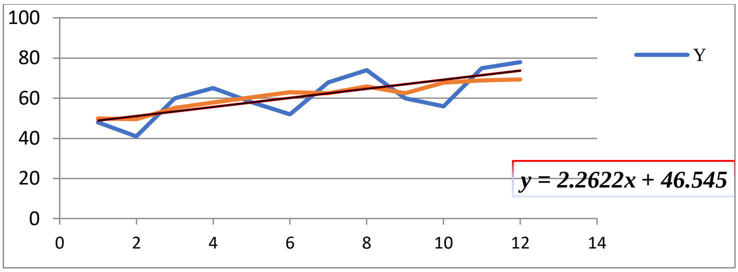
الزمن	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	**48**	**41**	**60**	**65**	**58**	**52**	**68**	**74**

y_t^*	49,952	49,648	55,1 28	57,822	60,359	62,969	62,479	65,828
الزمن	**9**	**10**	**11**	**12**				
y_i	**60**	**56**	**75**	**78**				
y_t^*	62,441	67,813	68,9 11	69,387				

التنبؤ للفترات الأربع المقبلة:

y=2,2622X+46,545	t+1
75,954545	**13**
78,216783	**14**
80,479021	**15**
82,741259	**16**

الرسم البياني:



الفصل الثالث:

اختبارات استقرارية

السلاسل الزمنية

I. دوال الارتباط الذاتي والجزئي:

1. مفهوم دالة الارتباط الذاتي:

تعرف دالة الارتباط الذاتي بأنها الاقتران الذي يقيس قوة الارتباط بين البيانات التي تتكون منها السلسلة الزمنية كما يمكن ان يعرف الارتباط الذاتي لسلسلة زمنية بانه الارتباط بين قيمته في الفترة وقيمته في فترة مزاحة إلى الأمام أو الخلف حيث ترمز r_K الى قيم الارتباط وعلى سبيل المثال(K=1 2 3) لو كان لدينا سلسلة زمنية مكونة من 9 مشاهدات (($X_1, X_2, X_3 \ldots \ldots\ldots X_9$)

فإن:

$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{9-3}(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{(X_1 - \bar{X})(X_4 - \bar{X}) + (X_2 - \bar{X})(X_5 - \bar{X}) + \cdots . + (X_6 - \bar{X})(X_9 - \bar{X})}{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_9 - \bar{X})^2}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^{9} X_t}{9}$$

ومن خصائص دالة الارتباط الذاتي:

- تأتي مقدرات دالة الارتباط الذاتي على شكلين يسمى الأول دالة الارتباط الذاتي، والثانية دالة الارتباط الجزئي
- معامل الارتباط الذاتي عند عدم وجود فجوة زمنية بين المتغيرين $y_t.y_s$ أي عند k) (0 = تساوي الواحد الصحيح1 :
- تنحصر قيمة معامل الارتباط الذاتي بين 1و-1.
- عند معامل الارتباط الذاتي مساوي إلى 1تكون العلاقة الخطية تامة بين المتغيرين $y_t.y_s$

2. تقديردالة الارتباط الذاتي:

يمكن تقدير دالة الارتباط الذاتي بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{(n)}$$

$$r_K = \frac{\sum_{t=1}^{n-K}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

حيث ترمز (rk) غلى قيم الارتباط (..... K=1 ,2,3)

مع العلم أن الخطأ المعياري لكل (Rk) كما يلي:

$$S_{rk} = \frac{\sqrt{1 + 2\sum_{t=1}^{n} r^2}}{\sqrt{n - b - 1}}$$

حيث ترمز ل b إلى بداية أخذ الفروقات على سبيل المثال:

b=2 $\quad y_2 - y_1$

b=3 $\quad y_3 - 2y_2 + y_1$

ونحصل عل احصائية الاختبار $\boldsymbol{t_r}$من حاصل القسمة التالي:

$$\boldsymbol{t_r} = \frac{r_K}{S_{rk}}$$

مثلا: لدينا المعطيات التالية أوجد معاملات الارتباط الذاتي:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	5	6	7	-5	-1	5	10	25	65

الحل: إيجاد المتوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{5+6+7-5-1+5+10+25+65}{9} = 13$$

ملاحظة: لدينا $\boldsymbol{r_0 = 1}$

يعني أن المتغير يرتبط مع نفسه مئة بالمئة

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{9-1}(X_t - 13)(X_{t+1} - 13)}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - 13)^2}$$

$$= \frac{(X_1 - 13)(X_2 - 13) + (X_2 - 13)(X_3 - 13) + \cdots. + (X_8 - 13)(X_9 - 13)}{(X_1 - 13)^2 + (X_2 - 13)^2 + \cdots + (X_9 - 13)^2}$$

$$r_1 = \frac{(5 - 13)(6 - 13) + (6 - 13)(7 - 13) + \cdots. + (25 - 13)(65 - 13)}{(5 - 13)^2 + (6 - 13)^2 + \cdots + (65 - 13)^2}$$

$$\boldsymbol{r_1 = 0.3292}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{9-2}(X_t - 13)(X_{t+2} - 13)}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - 13)^2}$$

$$r_2 = \frac{(X_1 - 13)(X_3 - 13) + (X_2 - 13)(X_4 - 13) + \cdots..(X_7 - 13)(X_9 - 13)}{(X_1 - 13)^2 + (X_2 - 13)^2 + \cdots + (X_9 - 13)^2}$$

$$r_2 = \frac{(5-13)(7-13)+(6-13)(-5-13)+\cdots.+(10-13)(65-13)}{(5-13)^2+(6-13)^2+\cdots+(65-13)^2}$$

$$\boldsymbol{r_2 = 0.053}$$

$$r_3 = \frac{(X_1-13)(X_4-13)+(X_2-13)(X_5-13)+\cdots.+(X_6-13)(X_9-13)}{(X_1-13)^2+(X_2-13)^2+\cdots+(X_9-13)^2}$$

$$r_3 = \frac{(5-13)(-5-13)+(6-13)(-1-13)+\cdots.+(5-13)(65-13)}{3590}$$

$$\boldsymbol{r_3 = -0.067}$$

$$r_4 = \frac{(X_1-13)(X_5-13)+(X_2-13)(X_6-13)+\cdots.+(X_5-13)(X_9-13)}{(X_1-13)^2+(X_2-13)^2+\cdots+(X_9-13)^2}$$

$$r_5 = \frac{(X_1-13)(X_6-13)+(X_2-13)(X_7-13)+\cdots.+(X_4-13)(X_9-13)}{(X_1-13)^2+(X_2-13)^2+\cdots+(X_9-13)^2}$$

$$r_6 = \frac{(X_1-13)(X_7-13)+(X_2-13)(X_8-13)+(X_3-13)(X_9-13)}{(X_1-13)^2+(X_2-13)^2+\cdots+(X_9-13)^2}$$

$$r_7 = \frac{(X_1-13)(X_8-13)+(X_2-13)(X_9-13)}{(X_1-13)^2+(X_2-13)^2+\cdots+(X_9-13)^2}$$

$$r_8 = \frac{(X_1 - 13)(X_9 - 13)}{(X_1 - 13)^2 + (X_2 - 13)^2 + \cdots + (X_9 - 13)^2}$$

t	X_t	$(X_t - \bar{X})$	$(X_{t+1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X})^2$
1	5	-8	-7	56	64
2	6	-7	-6	42	49
3	7	-6	-18	108	36
4	-5	-18	-14	252	324
5	-1	-14	-8	112	196
6	5	-8	-3	24	64
7	10	-3	12	-36	9
8	25	12	52	624	144
9	65	52		-	2704
Σ				1182	3590

من الصفات الرئيسية لدالة الارتباط الذاتي أن ها متساوية على طرفي المتأخرات، القيمة المطلقة لأي نقطة فيها تكون أقل من أو مساوية إلى الواحد الصحيح.

جدول يوضح معاملات الارتباط والتأخرات:

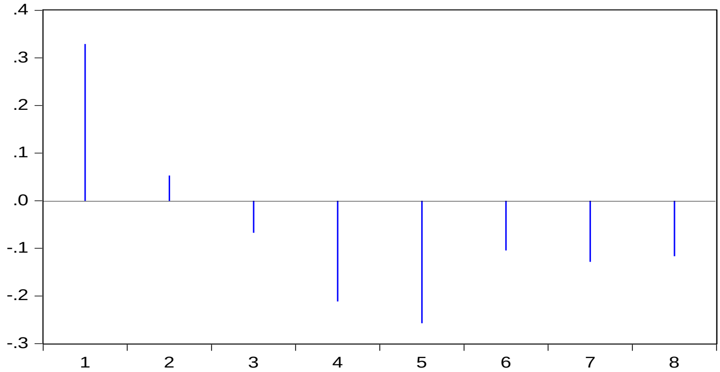
التأخر	معامل الارتباط
1	0.329
2	0.053

نلاحظ من خلال جدول الارتباط بان قيم الدالة تضاءلت بشكل متسارع فانخفضت من قيمة ابتدائية مقدارها 0.329الى قيمة نهائية مقدارها 0.211-) أي ان المشاهدات المتباعدة في السلسلة ترتبط مع بعضها البعض بشكل ضعيف

3	-0.067
4	-0.211
5	-0.257
6	-0.104
7	-0.128
8	-0.116

ملاحظة: نلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي محصورة بين -1 و1

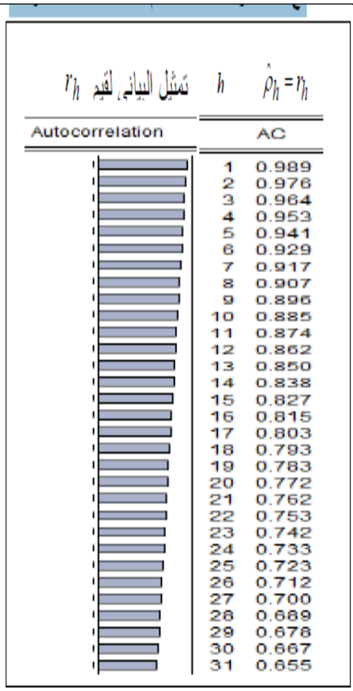
وتسمى هذه الصورة البيانية صورة الارتباط (CORRELOGRAME)



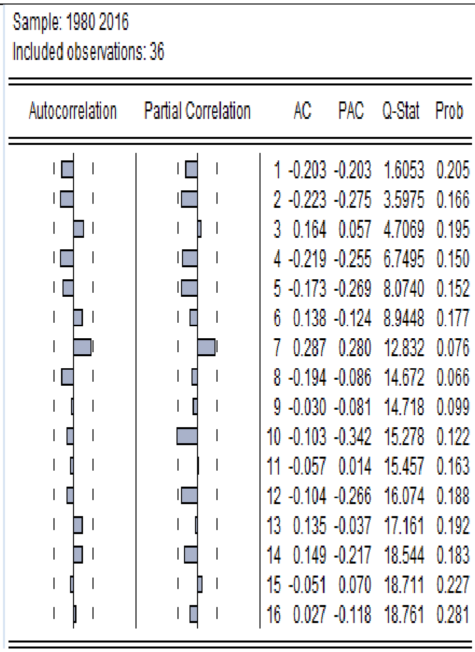
- **تحليل دالة الارتباط الذاتي:**

لقيم دالة الارتباط الذاتي دور كبير في تحليل مركبات السلسلة الزمنية و دراسة مدى استقراريتها، يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي ب(Correlogramme) وتتراوح قيمه بين 1 و -1 ولديه قيمة تأخير نرمز لها ب (h) ، نرمز ل مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي ب .Rh، لما تكون كل معاملات الارتباط تقع داخل هذا المجال نقول ان السلسلة الزمنية لا تحوي مركبة اتجاه عام ولا مركبة فصلية وبالتالي فهي مستقرة

التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي مع وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة	التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي والجزئي



$\hat{\rho}_h = r_h$	
h	AC
1	0.989
2	0.976
3	0.964
4	0.953
5	0.941
6	0.929
7	0.917
8	0.907
9	0.896
10	0.885
11	0.874
12	0.862
13	0.850
14	0.838
15	0.827
16	0.815
17	0.803
18	0.793
19	0.783
20	0.772
21	0.762
22	0.753
23	0.742
24	0.733
25	0.723
26	0.712
27	0.700
28	0.689
29	0.678
30	0.667
31	0.655



Sample: 1980 2016
Included observations: 36

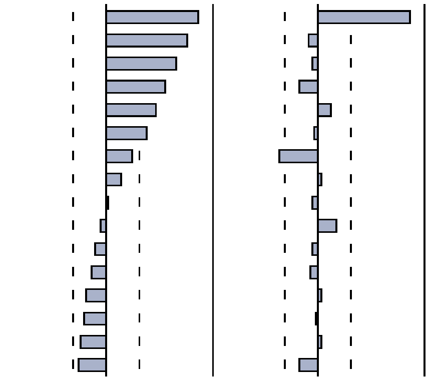
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.203	-0.203	1.6053	0.205
2	-0.223	-0.275	3.5975	0.166
3	0.164	0.057	4.7069	0.195
4	-0.219	-0.255	6.7495	0.150
5	-0.173	-0.269	8.0740	0.152
6	0.138	-0.124	8.9448	0.177
7	0.287	0.280	12.832	0.076
8	-0.194	-0.086	14.672	0.066
9	-0.030	-0.081	14.718	0.099
10	-0.103	-0.342	15.278	0.122
11	-0.057	0.014	15.457	0.163
12	-0.104	-0.266	16.074	0.188
13	0.135	-0.037	17.161	0.192
14	0.149	-0.217	18.544	0.183
15	-0.051	0.070	18.711	0.227
16	0.027	-0.118	18.761	0.281

قيم دالة الارتباط الذاتي تقع خارج مجال الثقة أي أنها ذات معنوية إحصائية تختلف عن الصفر غير أنها تتناقص ببطء مع ارتفاع قيمH فان هذا يوحي ب**وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة وبأن السلسلة غير مستقرة.**

التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي مع وجود المركبة الفصلية ضمن السلسلة المدروسة (بيانات شهرية)

Date: 09/24/22 Time: 13:56
Sample: 1980 2016
Included observations: 37

Autocorrelation Partial Correlation



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.903	0.903	32.694	0.000
2	0.799	-0.092	58.989	0.000
3	0.694	-0.056	79.438	0.000
4	0.567	-0.183	93.520	0.000
5	0.477	0.131	103.78	0.000
6	0.392	-0.049	110.94	0.000
7	0.250	-0.381	113.94	0.000
8	0.133	0.027	114.82	0.000
9	0.018	-0.057	114.84	0.000
10	-0.062	0.184	115.05	0.000
11	-0.109	-0.065	115.70	0.000
12	-0.154	-0.071	117.07	0.000
13	-0.194	0.027	119.33	0.000
14	-0.224	-0.024	122.47	0.000
15	-0.248	0.030	126.52	0.000
16	-0.264	-0.182	131.29	0.000

نلاحظ أن R6..... R1 معنويا تختلف عن الصفر أي أنها تقع خارج مجال الثقة يمكننا القول أن السلسلة تتضمن **المركبة الفصلية**

3. تقدير دالة الارتباط الجزئي طريقة (yule-walker) :

في نفس المثال السابق، أحسب معاملات الارتباط الجزئي

t	X_t	$(X_t - \bar{X})$	$(X_{t+1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X})^2$
1	5	-8	-7	56	64
2	6	-7	-6	42	49
3	7	-6	-18	108	36
4	-5	-18	-14	252	324
5	-1	-14	-8	112	196
6	5	-8	-3	24	64
7	10	-3	12	-36	9

8	*25*	12	52	624	144
9	*65*	52		-	2704
Σ				1182	3590

$$Q_{22} = r_1 = 0.329$$

$$Q_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.329 \\ 0.329 & 0.053 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.329 \\ 0.329 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0.055}{0.892} = 0.062$$

$$Q_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.329 & 0.329 \\ 0.329 & 1 & 0.053 \\ 0.053 & 0.329 & -0.067 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.329 & 0.053 \\ 0.329 & 1 & 0.329 \\ 0.053 & 0.329 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0.10867}{0.79228} = 0.137$$

II. اختبارات جذر الوحدة:

العديد من المتغيرات الاقتصادية والمالية غير مستقرة (سواء في المتوسط او التباين)، فعدم الاستقرارية في المتوسط يمكن تحديده إما عن طريق الرسم البياني بدلالة الزمن، أو عن طريق correlogramme فعندما تحتلف معاملات الارتباط عن الصفر هذا

يشير الى وجود ارتباط قوي بين المشاهدات في السلسلة الواحدة وبالتالي نقول ان السلسلة غير مستقرة ويوجد نوعين:

- عدم استقرارية من النوع DS : (Differency Stationary)عدم استقررية عشوائية، أي التاثير الدائم للصدمة يوضح وجود جذر الوحدة
- عدم استقرارية من النوع TS : (Trend Stationary)عدم استقرارية حتمية ومؤكدة

نماذج .TS (Trend Stationary):

تأخذ الشكل التالي: $X_t = f(t) + U_t$ أو شكل كثير حدود من الدرجة الأولى:

$X_t = \alpha_0 + \alpha_t + U_t$ هو غير مستقر كون وسطه مرتبط بالزمن يمكن جعله مستقرا بتقدير المعالم بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية.

نماذج .DS (Differency Stationary)

في هذا النوع من عدم الاستقرارية، تأثير الصدمة يكون دائم ففي الوقت الذي تخضع فيه السلسلة الزمنية لصدمة القيم المستقبلية للسلسلة تتابع نفس التأثير في هذه الصدمة أي لا ترجع إلى المستوى الاولي، هذه النماذج تأخذ الشكل التالي:

$x_t = x_{t-1} + \beta + u_t$ يمكن جعلها مستقرة باستعمال الفروقات وتأخذ شكلين:

- إذا كانت $\boldsymbol{\beta}$=**0** يسمى النموذج DS بدون مشتقة ويكتب $\boldsymbol{x_t = x_{t-1} + u_t}$
- إذا كانت $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ يسمى النموذج DS بالمشتقة ويكتب $\boldsymbol{x_t = x_{t-1} + \beta + u_t}$

1. **اختبار جدر الوحدة لديكي – فولر البسيط DF:**

يسمح الاختبار بمعرفة ان كانت السلسلة مستقرة أم لا ومعرفة نوع السلسلة الغير مستقرة، هو مبني على نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى

ويعتمد الاختبار على ثلاثة نماذج:

- نموذج الانحدار الذاتي (عدم وجود ثابت أو اتجاه عام $x_t = \emptyset x_{t-1} + u_t$)
- نموذج الانحدار الذاتي مع وجود ثابت: $x_t = \emptyset x_{t-1} + c + u_t$
- نموذج الانحدار الذاتي مع وجود الثابت والاتجاه العام: $x_t = \emptyset x_{t-1} + \beta_t + c + u_t$

فرضيات النموذج

والفرضية المعدومة لهذا الاختبار تنص على أن السلسلة المدروسة تقبل جذر وحدة وبالتالي فهي غير مستقرة. أما الإحصائية المجدولة لهذا الاختبار فلقد قام كل من ديكي وفولر بإنشاء جدول خاص بالاختبار

- $\boldsymbol{H_0 : \emptyset = 1}$
- $\boldsymbol{H_1 : \emptyset < 1}$

والإحصائية المحسوبة لهذا الاختبار هي:

$$\boldsymbol{t_{\widehat{\emptyset}_1} = \frac{\widehat{\emptyset}_1 - 1}{\widehat{\delta}_{\widehat{\emptyset}_1}}}$$

فإذا كانت الإحصائية المحسوبة أكبر من الإحصائية المجدولة نقبل الفرضية المعدومة ونقول إن السلسلة تملك جذر وحدة وبالتالي فهي غير مستقرة.

من عيوب هذا الاختبار هو **اهماله لفرضية ارتباط الأخطاء** لذلك جاء اختبار ديكي فلير الموسع حيث تم تصحيح النموذج السابق بإضافة عدد مناسب من الفروق المبطأة باستعمال طريقة $(^{(OLS)})$ وبإتباع نفس خطوات التقدير التي رأيناها في النموذج الخطي البسيط نستطيع تقدير النموذج الخطي المتعدد باستعمال طريقتي المعادلات الطبيعية وجبر المصفوفات كالآتي:

2. اختبار ديكي – فولر الموسع ADF

ديكي وفولر يقترحان في حالة وجود ارتباط ذاتي للأخطاء ضمن نماذج جذر الوحدة استعمال Δx_{t-j} كمتغيرات مساعدة ضمن نماذج الاختبار يمكنها إصلاح الارتباط الذاتي للأخطاء, ويسمى هذا الاختبار بديكي فولر المطور

ويعتمد الاختبار على ثلاثة نماذج:

- **نموذج الانحدار الذاتي:**

$$\Delta x_t = (\emptyset - 1)x_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \emptyset_j \Delta X_{t-j+1} + u_t$$

نموذج الانحدار الذاتي مع وجود ثابت:

$$\Delta x_t = (\emptyset - 1)x_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \emptyset_j \Delta X_{t-j+1} + C + u_t$$

نموذج الانحدار الذاتي مع وجود الثابت والاتجاه العام:

$$\Delta x_t = (\emptyset - 1)x_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \emptyset_j \Delta X_{t-j+1} + C + bt + u_t$$

$(P - J)$ تمثل قيمة التأخير اللازمة لتصحيح مشكل الارتباط الذاتي للبواقي ضمن النماذج الثلاثة السابقة.

وتحدد قيمة التأخير P على أساس المعيارين: akaike وSchwarz حيث أن:

قيمة إحصائية معيار Akaike: $AIC = n\, In \left[\frac{SCR}{n}\right] + 2K$

قيمة إحصائية معيار Schwarz : $SIC = n\, In \left[\frac{SCR}{n}\right] + K\, In\,(n)$

حيث أن:

n : تمثل حجم عينة الدراسة ،

S : مجموع مربعات البواقي

K: عدد معلمات النموذج

- **النموذج الأول:** بدون ثابت أو اتجاه عام

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BP)
Method: Least Squares
Date: 09/26/22 Time: 23:50
Sample (adjusted): 1983 2016
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.146259	0.111195	-1.315334	0.1980
D(BP(-1))	-0.219603	0.172863	-1.270393	0.2134
D(BP(-2))	-0.218614	0.164980	-1.325098	0.1948

- **النموذج الثاني:** نموذج الانحدار الذاتي مع وجود ثابت

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BP)
Method: Least Squares
Date: 09/26/22 Time: 23:41
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.541287	0.150604	-3.594096	0.0010
C	1.570116	0.529687	2.964235	0.0055

- **النموذج الثالث:** نموذج الانحدار الذاتي مع وجود الثابت والاتجاه العام

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BP)
Method: Least Squares
Date: 09/26/22 Time: 23:51
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.552810	0.154604	-3.575651	0.0011
C	1.333774	0.755117	1.766314	0.0866
@TREND("1980")	0.014489	0.032604	0.444386	0.6597

خطوات الاختبار

- **المرحلة الأولى: تقدير النموذج الثالث**

أ: اختبار معنوية الاتجاه العام

$$x_t = \emptyset x_{t-1} + \beta_t + c + u_t$$

من فرضياته:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

<u>الحالة الأولى:</u> وجود اتجاه عام (الاتجاه معنوي)

-إذا كان $t_\beta > V_c$ نقبل الفرضية البديلة أي $\beta \neq 0$

بمعنى وجود اتجاه عام (الاتجاه معنوي) أي أن السلسلة غير مستقرة وسيتبقى فقط توضيح نوع عدم الاستقرارية نواصل الى اختبار جذر الوحدة في نفس النموذج الثالث

ملاحظة: يتم استعمال الجدول رقم 2

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 \\ H_1 : \emptyset < 1 \end{cases}$$

وجود جذر الوحدة

عدم وجود جذر الوحدة

-إذا كان $\boldsymbol{t_\emptyset > V_c}$: نقبل الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset = 1$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS وفي هذه الحالة يجب اجراء الفروقات لإرجاعها مستقرة

▪إذا كان $t_\emptyset < V_c$:نرفض الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset < 1$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع TS وفي هذه الحالة إيقاف الاجراء

ملاحظة: بما أن قيم الجدول الخاص باختبار جذر الوحدة كلها سالبة يتم في هذه الحالة قلب القاعدة في اتخاذ القرارات لتصبح عندما تكون القيم المحسوبة أكبر من الجدولية نقبل الفرضية العدمية

مثال: لدينا نتائج تقدير سلسلة ميزان المدفوعات مستخدمة بمنهجية ديكي فولر المطور لدراسة الاستقرارية نعمل في البداية على تقدير النموذج 3 و نتيجة التقدير مسجلة في الجدول التالي:

$$x_t = \emptyset x_{t-1} + \beta_t + c + u_t$$

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(TPE)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2 121
Included observations: 120 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TPE(-1)	-0.488648	0.243149	-2.009662	0.0722
C	-173447.2	158231.2	-1.096163	0.2987
@TREND("2007")	66799.11	32260.45	3.070619	0.0652

الخطوة الأولى: نختبر مركبة الاتجاه العام

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

حسب مخرجات الجدول لدينا t_B: *2.79* V_c *3,07* $>$ فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى رفض فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بوجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة.

Tables de la distribution des $t_{\hat{c}}$ et $t_{\hat{b}}$

	Modèle [2]			Modèle [3]					
	Constante c			Constante c			Tendance b		
n	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
100	3,22	2,54	2,17	3,78	3,11	2,73	3,53	2,79	2,38
250	3,19	2,53	2,16	3,74	3,09	2,73	3,49	2,79	2,38
500	3,18	2,52	2,16	3,72	3,08	2,72	3,48	2,78	2,38
∞	3,18	2,52	2,16	3,71	3,08	2,72	3,46	2,78	2,38

في هذه الحالة نقوم بمواصلة الاختبار على نفس النموذج

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

- حسب مخرجات الجدول لدينا $\mathbf{V_c}(3.45) > (\mathbf{2.00})\ \mathbf{t}_{\emptyset}$ نقبل الفرضية البديلة بمعنى $\mathbf{1} \neq \emptyset$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع **TS**

الحالة الثانية: عدم وجود اتجاه عام (الاتجاه غير معنوي)

إذا كان $\boldsymbol{t_\beta}<\boldsymbol{V_c}$ نقبل الفرضية العدمية أي $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$

بمعنى عدم وجود اتجاه عام (الاتجاه غير معنوي) بمعنى نمر للمرحلة الثانية أي اختبار النموذج الثاني (النموذج بوجود الثابت)

ملاحظة: المرور لهذه المرحلة في حالة واحدة فقط وهي قبول الفرضية العدمية والتي تقر عدم وجود الثابت او انه غير معنوي

نختبر معنوية الثابت في النموذج الثاني

$$\begin{cases} H_0 : c = 0 & \text{الثابث غير معنوي} \\ H_1 : c \neq 0 & \text{الثابت معنوي} \end{cases}$$

- إذا كان $\boldsymbol{t_c}$ نقبل الفرضية البديلةأي$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{V_c}>$

بمعنى وجود الثابت (الثابت معنوي) نواصل في نفس النموذج الثاني ونقوم باختبار جذر الوحدة الخاص بالنموذج الثاني.

- في هذه الحالة نقوم بمواصلة الاختبار على نفس النموذج

وجود جذر الوحدة $\quad H_0 : \emptyset = 1$

عدم وجود جذر الوحدة $\quad H_1 : \emptyset < 1$

-إذا كان $t_{\emptyset} > V_c$ نقبل الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset = 1$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS وفي هذه الحالة يجب اجراء الفروقات لإرجاعها مستقرة.

-إذا كان $_{\emptyset} < V_c$ نرفض الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset < 1$ أي أن السلسلة لا تحوي جذر وحدة وبالتالي السلسلة مستقرة

مثال: لدينا نتائج تقدير سلسلة ميزان المدفوعات مستخدمة بمنهجية ديكي فولر المطور لدراسة الاستقرارية نعمل في البداية على تقدير النموذج 3 ونتيجة التقدير مسجلة في الجدول التالي:

$$x_t = \emptyset x_{t-1} + \beta_t + c + u_t$$

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BP)
Method: Least Squares
Date: 09/26/22 Time: 21:04
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.552810	0.154604	-3.575651	0.0011
C	1.333774	0.755117	1.766314	0.0866
@TREND("1980")	0.014489	0.032604	0.444386	0.6597

R-squared	0.279635	Mean dependent var	0.080816
Adjusted R-squared	0.235976	S.D. dependent var	2.292046
S.E. of regression	2.003442	Akaike info criterion	4.307266
Sum squared resid	132.4547	Schwarz criterion	4.439226
Log likelihood	-74.53078	Hannan-Quinn criter.	4.353323
F-statistic	6.405051	Durbin-Watson stat	1.882416
Prob(F-statistic)	0.004463		

الخطوة الأولى: نختبر مركبة الاتجاه العام

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

حسب مخرجات الجدول لدينا:

$$2.79 \quad 0.44 < \boldsymbol{V_c t_B}$$

فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى قبول الفرضية العدمية بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة.

Tables de la distribution des $t_{\hat{c}}$ et $t_{\hat{b}}$

	Modèle [2]			Modèle [3]					
	Constante c			Constante c			Tendance b		
n	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
100	3,22	2,54	2,17	3,78	3,11	2,73	3,53	2,79	2,38
250	3,19	2,53	2,16	3,74	3,09	2,73	3,49	2,79	2,38
500	3,18	2,52	2,16	3,72	3,08	2,72	3,48	2,78	2,38
∞	3,18	2,52	2,16	3,71	3,08	2,72	3,46	2,78	2,38

الخطوة الثانية: نختبر معنوية الثابت في النموذج الثاني

$$\begin{cases} H_0 : c = 0 \\ H_1 : c \neq 0 \end{cases}$$

الثابث غير معنوي

الثابت معنوي

$$2.96 > \boldsymbol{V_c} \; 2.54 \boldsymbol{t_c}$$

حسب مخرجات الجدول لدينا، فاختبار المعنوية الثابت يؤدي بنا

إلى رفض فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة

وبالتالي نقر بمعنوية الثابت ضمن السلسلة المدروسة

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BP)
Method: Least Squares
Date: 09/27/22 Time: 14:30
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.541287	0.150604	-3.594096	0.0010
C	1.570116	0.529687	2.964235	0.0055

الخطوة الثالثة: نبقى في نفس النموذج السابق ونختبر وجود جذرالوحدة

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

$3.59 > V_c\ 2.93 t_{\emptyset}$

حسب مخرجات الجدول لدينا، نلاحظ أن قيم الجدول سالبة إذن قاعدة القرار سوف تقلب فالاختبار يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بوجود جذر الوحدة فالسلسلة غير مستقرة نوع DS نطبق عليها الفروقات من الدرجة الأولى.

الخطوة الاخيرة: نختبر وجود جذرالوحدة للنموذج الأول

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

- إذا كان $\boldsymbol{t_{\emptyset}} > \boldsymbol{V_c}$ نقبل الفرضية العدمية بمعنى $\boldsymbol{\emptyset = 1}$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS وفي هذه الحالة يجب اجراء الفروقات لإرجاعها مستقرة

- إذا كان $\boldsymbol{t}_{\emptyset} < \boldsymbol{V_c}$ نرفض الفرضية العدمية بمعنى $\boldsymbol{\emptyset < 1}$ وبالتالي السلسلة مستقرة

الحالة الثانية: حالة قبول الفرضية العدمية للنموذج الثاني

$H_0 : c = 0$ الثابت غير معنوي

$H_1 : c \neq 0$ الثابت معنوي

إذا كان t_c نقبل الفرضية العدميةأي $<V_c c = 0$ بمعنى عدم وجود الثابت (الثابت غير معنوي) نمر للمرحلة الثالثة أي اختبار النموذج الثالث أي نموذج مع عدم وجود ثابت ولا اتجاه عام.

ملاحظة: المرور لهذه المرحلة في حالة واحدة فقط وهي قبول الفرضية العدمية والتي تقر عدم وجود الثابت او انه غير معنوي

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 11/12/22 Time: 11:03
Sample (adjusted): 1982 2016
Included observations: 35 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z(-1)	-0.156006	0.121820	0.770621	0.2093

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 11/12/22 Time: 11:01
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z(-1)	-0.728452	0.162680	-4.477820	0.0001
C	26.01298	7.128575	2.279113	0.0009

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 11/12/22 Time: 10:59
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z(-1)	-0.801482	0.170100	-4.711819	0.0000
C	17.60312	9.490217	1.854870	0.0726
@TREND("1980")	0.590139	0.445738	0.673961	0.1946

المرحلة الأولى: تقدير النموذج الثالث:

- اختبار معنوية الاتجاه العام:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 & \text{عدم وجود اتجاه عام} \\ H_1 : \beta \neq 0 & \text{وجود اتجاه عام} \end{cases}$$

$$0.67 < V_c\, 2.79 \quad t_B$$

حسب مخرجات الجدول لدينا:

فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة اذن نمر للمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: تقدير النموذج الثاني

- اختبار معنوية الثابت:

$$\begin{cases} H_0 : c = 0 & \text{الثابث غير معنوي} \\ H_1 : c \neq 0 & \text{الثابت معنوي} \end{cases}$$

$$2.27 > V_c\; 2.53 \quad t_C$$

حسب مخرجات الجدول لدينا:

فاختبار المعنوية للثابت يؤدي بنا إلى قبول **فرضية العدم** بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر **بعدم معنوية** الثابت ضمن السلسلة المدروسة اذن نمر للمرحلة الثالثة.

المرحلة الثالثة: تقدير النموذج الأول

- اختبار وجود جذر الوحدة

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

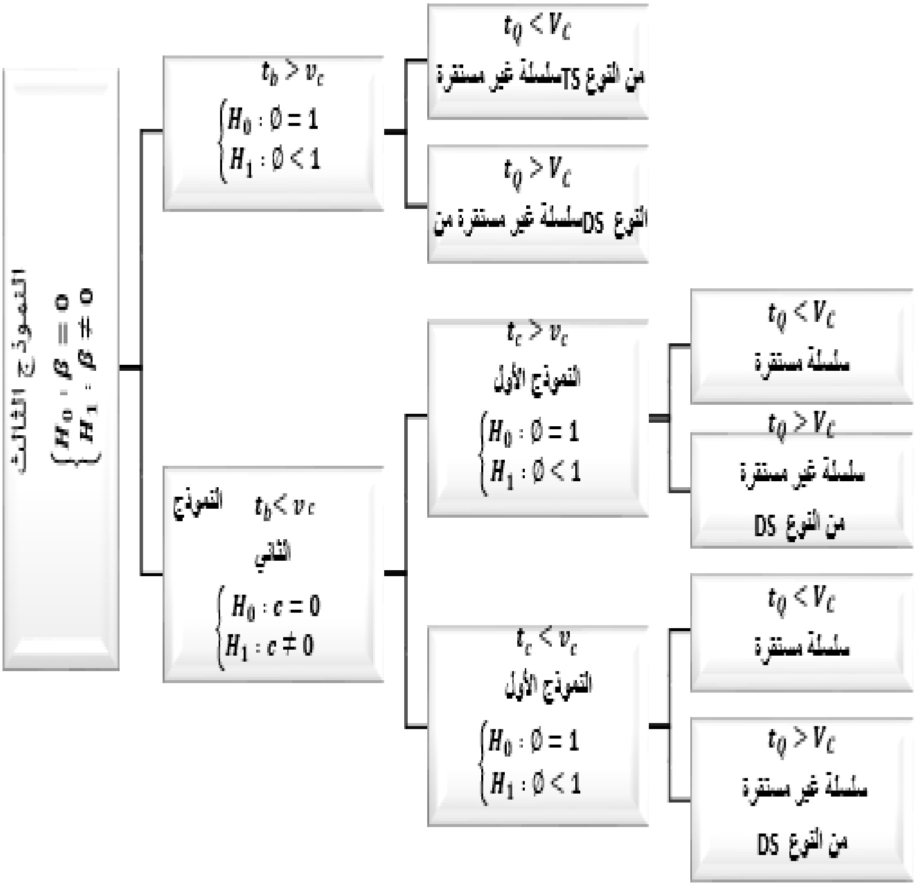
حسب مخرجات الجدول لدينا $t_{\emptyset}$ 1.95 $0.77 < V_c$ فاختبار يؤدي بنا إلى **رفض** **فرضية العدم** بمستوى معنوية 5 بالمئة بمعنى $1 < \emptyset$ وبالتالي السلسلة **مستقرة**.

7. TABLES DE DICKEY-FULLER[1]

Modèle [1] sans tendance et sans terme constant
Modèle [2] sans tendance et avec terme constant
Modèle [3] avec tendance et avec terme constant

Tables de la distribution du t_{ϕ_1}

Nombre observations	Probabilités								
n	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	
25	– 2,66	– 2,26	– 1,95	– 1,60	0,92	1,33	1,70	2,16	Modèle [1]
50	– 2,62	– 2,25	– 1,95	– 1,61	0,91	1,31	1,66	2,08	
100	– 2,60	– 2,4	– 1,95	– 1,61	0,91	1,29	1,64	2,03	
250	– 2,58	– 2,23	– 1,95	– 1,62	0,89	1,29	1,63	2,01	
500	– 2,58	– 2,23	– 1,95	– 1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
∞	– 2,58	– 2,23	– 1,95	– 1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
25	– 3,75	– 3,33	– 3,00	– 2,63	– 0,37	0,00	0,34	0,72	Modèle [2]
50	– 3,58	– 3,22	– 2,93	– 2,60	– 0,40	– 0,03	0,29	0,66	
100	– 3,51	– 3.17	– 2,89	– 2,58	– 0,42	– 0,05	0,26	0,63	
250	– 3,46	– 3,14	– 2,88	– 2,57	– 0,42	– 0,06	0,24	0,62	
500	– 3,44	– 3,13	– 2,87	– 2,57	– 0,43	– 0,07	0,24	0,61	
∞	– 3,43	– 3,12	– 2,86	– 2,57	– 0,44	– 0,07	0,23	0,60	
25	– 4,38	– 3,95	– 3,60	– 3,24	– 1,14	– 0,80	– 0,50	– 0,15	Modèle [3]
50	– 4,15	– 3,80	– 3,50	– 3,18	– 1,19	– 0,87	– 0,58	– 0,24	
100	– 4,04	– 3,73	– 3,45	– 3,15	– 1,22	– 0,90	– 0,62	– 0,28	
250	– 3,99	– 3,69	– 3,43	– 3,13	– 1,23	– 0,92	– 0,64	– 0,31	
500	– 3,98	– 3,68	– 3,42	– 3,13	– 1,24	– 0,93	– 0,65	– 0,32	
∞	– 3,96	– 3,66	– 3,41	– 3,12	– 1,25	– 0,94	– 0,66	– 0,33	



النموذج الثالث
$H_0 : \beta = 0$
$H_1 : \beta \neq 0$
$t_b > v_c$
$H_0 : \emptyset = 1$
$H_1 : \emptyset < 1$
$t_Q < V_C$
من النوع TS سلسلة غير مستقرة
$t_Q > V_C$
سلسلة غير مستقرة من النوع DS
النموذج الثاني
$t_b < v_c$
$H_0 : c = 0$
$H_1 : c \neq 0$
$t_c > v_c$
النموذج الأول
$H_0 : \emptyset = 1$
$H_1 : \emptyset < 1$
$t_Q < V_C$
سلسلة مستقرة
$t_Q > V_C$
سلسلة غير مستقرة
من النوع DS
$t_c < v_c$
النموذج الأول
$H_0 : \emptyset = 1$
$H_1 : \emptyset < 1$
$t_Q < V_C$
سلسلة مستقرة
$t_Q > V_C$
سلسلة غير مستقرة
من النوع DS

3. اختبار PHILIPS ET PERRON

اقترح كل من فيليبس وبيرون (1987، 1988) وفيليبس (1987) اختبارًا آخر للكشف عن عدم استقرارية السلسلة زمنية. هذا الاختبار هو تكيف غير محدد لاختبار ديكي وفولر. الفرضية العدمية للاختبار هي، بالنسبة لاختبار DFوجود جذر واحد. ويرد العرض التفصيلي لهذا الاختبار في معظم الكتب المدرسية عن الاقتصاد القياسي للسلسلة الزمنية (بريسون وبيروت، 1995).

قيمة الاقتطاع:

$$\boldsymbol{I = T^{1/4} = 557^{1/4} = 5}$$

Phillips-Perron Test Equation

Dependent Variable : D(Z)

Method : Least Squares

Date : 10/17/23   Time : 19 :27

Sample (adjusted) : 1981 2016

Included observations : 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z(-1)	-0.801482	0.170100	-4.711819	0.0000
C	17.60312	9.490217	1.854870	0.0726
@TREND(« 1980 »)	0.590139	0.445738	2.923961	0.1946

R-squared	0.402690	Mean dependent var	0.999111
Adjusted R-squared	0.366490	S.D. dependent var	33.01958
S.E. of regression	26.28139	Akaike info criterion	9.455255
Sum squared resid	22793.48	Schwarz criterion	9.587214
Log likelihood	-167.1946	Hannan-Quinn criter.	9.501312
F-statistic	11.12387	Durbin-Watson stat	2.044263
Prob(F-statistic)	0.000203		

المرحلة الأولى:

- **النموذج الثالث:** نموذج الانحدار الذاتي مع وجود الثابت والاتجاه العام

$$x_t = \emptyset x_{t-1} + \beta_t + c + u_t$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

حسب مخرجات الجدول لدينا:

$$2.79 \quad 2.92 > V_c t_B$$

فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى رفض الفرضية العدمية بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة ننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: تقدير النموذج الأول:

- اختبار وجود جذر الوحدة

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

حسب مخرجات الجدول لدينا $t_{\emptyset}$ 3.45 $V_c >$ 4.71 فاختبار يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة بمعنى $\emptyset < 1$ وبالتالي غير مستقرة من النوع DS.

4. اختبار:KPSS

في هذا الاختبار، نقوم بعكس الفرضيات لاختبارات جذر الوحدة. يصبح الفرضية العدمية تنص أن السلسلة المستقرة والفرضية البديلة تنص السلسلة غير المستقرة، الاختبار ويتضمن نموذجين فقط نموذج بالاتجاه العام و الثابث والنموذج الثاني بوجود الثابت.

أ-

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

نقرأ القيم الجدولية من جدول Student

- حالة وجود مركبة الاتجاه العام

الخطوة الاولى: نختبر مركبة الاتجاه العام

$$x_t = \emptyset x_{t-1} + \beta_t + c + u_t$$

$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$ عدم وجود اتجاه عام / وجود اتجاه عام

إذا كان: $t_B > V_c$ نرفض فرضية العدم و نقر بوجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة نواصل في نفس النموذج السابق ونختبر جذر الوحدة لهذا النموذج

الخطوة الثانية: نختبر جذر الوحدة في نفس النموذج السابق.

$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 \\ H_1 : \emptyset < 1 \end{cases}$ وجود جذر الوحدة / عدم وجود جذر الوحدة

إذا كان $LM\ (STAT) > LM(tab)$ نقبل الفرضية البديلة بمعنى $\emptyset < 1$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS

إذا كان $LM\ (STAT) < (tab)$ نقبل الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset = 1$ أي أن السلسلة غير مستقرة من النوع TS

مثال تطبيقي:

Null Hypothesis: TOT is stationary

Exogenous: Constant, Linear Trend

Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.147362
Asymptotic critical values*:	1% level	0.216000

5% level	0.146000
10% level	0.119000

*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)

Residual variance (no correction)	678.0477
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	2099.664

KPSS Test Equation

Dependent Variable: TOT

Method: Least Squares

Date: 06/05/24 Time: 17:56

Sample: 1995 2023

Included observations: 28

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	43.10218	9.909663	4.349510	0.0002
@TREND("1995")	3.304705	0.627415	5.267178	0.0000

الحل:

- **الخطوة الأولى:**

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

حسب مخرجات الجدول لدينا: $t_B \quad 5.26 > V_C \quad 1.96$

فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى **رفض فرضية العدم** بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بوجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة نواصل في نفس النموذج السابق ونختبر جذر الوحدة لهذا النموذج.

الخطوة الثانية:

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

$$LM\ (0.147) > LM(0.146)$$

نقبل الفرضية البديلة بمعنى $\emptyset < 1$ أي وجود مركبة اتجاه عام مع عدم وجود جذر وحدة وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS، هنا يجب تطبيق الفروقات وإعادة اختبار السلسلة الجديدة.

نقوم بتطبيق الاختبار على سلسلة بالفروقات من الدرجة الأولى

Null Hypothesis: D(TOT) is stationary

Exogenous: Constant, Linear Trend

Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		*0.093672*
Asymptotic critical values:*	*1% level*	*0.216000*

	0.14600
5% level	0
	0.11900
10% level	0

*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)

	358.092
Residual variance (no correction)	9
	212.373
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	2

KPSS Test Equation

Dependent Variable: D(TOT)

Method: Least Squares

Date: 06/05/24 Time: 18:03

Sample (adjusted): 1996 2021

Included observations: 26 after adjustments

Variable	Coefficien t	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.644118	7.953809	0.835338	0.4118
@TREND("1995")	- 0.249908	0.515028	-0.485232	0.6319

$$D\ TOT_t = \emptyset TOT_{t-1} + \beta_t + c + u_t$$

$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

حسب مخرجات الجدول لدينا: $\boldsymbol{t_B \quad -0.48 < V_C \quad 1.96}$

فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة ننتقل إلى النموذج الثاني ونختبر جذر الوحدة.

Null Hypothesis: D(TOT) is stationary

Exogenous: Constant

Bandwidth: 3 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		*0.132122*
Asymptotic critical values:*	*1% level*	*0.739000*
	5% level	*0.463000*
	10% level	*0.347000*

**Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)*

Residual variance (no correction)	*361.6059*

HAC corrected variance (Bartlett kernel)	*263.6682*

KPSS Test Equation

Dependent Variable: D(TOT)

Method: Least Squares

Date: 06/05/24 Time: 18:08

Sample (adjusted): 1996 2021

Included observations: 26 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.270354	3.803188	0.859898	0.3980

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 \\ H_1 : \emptyset < 1 \end{cases}$$

وجود جذر الوحدة

عدم وجود جذر الوحدة

$$LM\ (0.13) < LM(0.463)$$

نقبل الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset = 1$ أي عدم وجود مركبة اتجاه عام ووجود جذر وحدة وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS

- حالة عدم وجود مركبة الاتجاه العام:

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

حسب مخرجات الجدول لدينا: t_B $V_c >$ فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة نمر للنموذج الثاني.

لكن في هذه الحالة نختبر فقط جذر الوحدة :

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 \\ H_1 : \emptyset < 1 \end{cases}$$

وجود جذر الوحدة

عدم وجود جذر الوحدة

إذا كان $LM\ (STAT) > LM(tab)$ نقبل الفرضية البديلة بمعنى $\emptyset < 1$ وبالتالي السلسلة غير مستقرة من النوع DS

إذا كان $LM\ (STAT) < (tab)$ نقبل الفرضية العدمية بمعنى $\emptyset = 1$ عدم وجود جذر وحدة فالسلسلة مستقرة

مثال تطبيقي:

Null Hypothesis: BP is stationary
Exogenous: Constant, Linear Trend
Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.241158
Asymptotic critical values*:	1% level	0.216000
	5% level	0.146000
	10% level	0.119000

KPSS Test Equation
Dependent Variable: BP
Method: Least Squares
Sample: 1980 2016
Included observations: 200

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.763798	3.987007	0.191572	0.8492
@TREND("1980")	0.168212	0.190507	0.882974	0.3833

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 & \text{عدم وجود اتجاه عام} \\ H_1 : \beta \neq 0 & \text{وجود اتجاه عام} \end{cases}$$

حسب مخرجات الجدول لدينا: $0.88 < \boldsymbol{V_c}$ 1 .9 $\boldsymbol{t_B}$ 6

فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 5 بالمئة وبالتالي نقر بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة

نمر للنموذج الثاني:

- نختبر جذر الوحدة في النموذج الثاني

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

Null Hypothesis: BP is stationary
Exogenous: Constant
Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.157314
Asymptotic critical values*:	1% level	0.739000
	5% level	0.463000
	10% level	0.347000

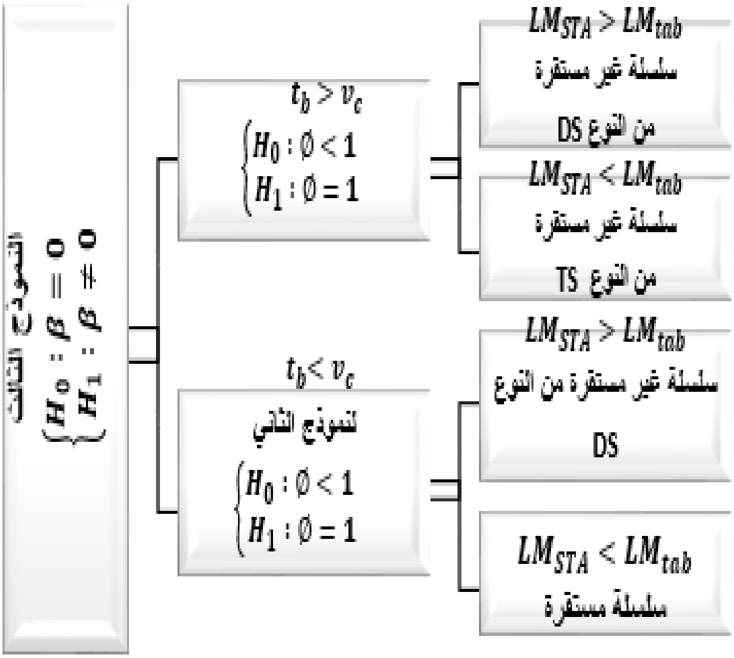
KPSS Test Equation
Dependent Variable: BP
Method: Least Squares
Date: 11/24/22 Time: 17:45
Sample: 1980 2016
Included observations: 37

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.791622	2.027819	1.869803	0.0697

بالمقارنة مع القيم الجدولية

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

إذا كان $LM\ (0.15) < LM(0.46)$ نقبل الفرضية العدمية، بمعنى $\emptyset < 1$ أي أن السلسلة مستقرة.



تمارين الفصل الثالث

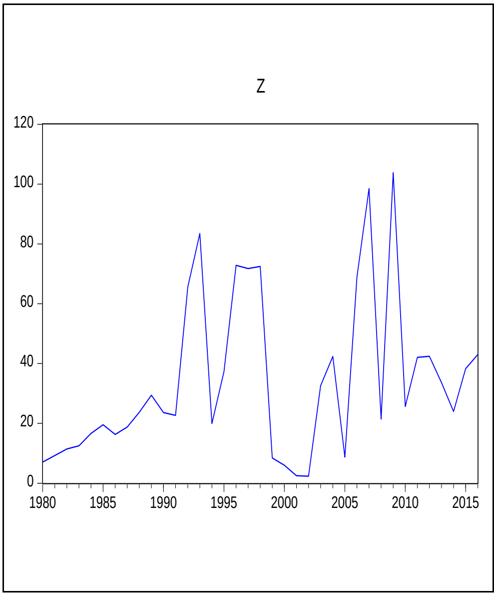
التمرين الاول: لتكن لدينا السلسلة الزمنية التالية:

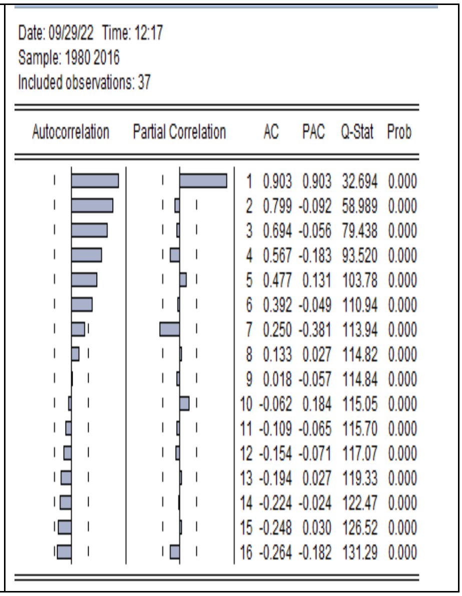
الزمن	1	2	3	4	5
Y_t	15	25	5	15	15

- قدر الارتباط الذاتي للفجوات (K=1,2,3,4 ,5)
- قدر الارتباط الجزئي باستخدام معاملات yule-walker
- أرسم شكل دالة الارتباط الذاتي والجزئي

التمرين الثاني: لدينا في الرسم البياني وCorrelogramme الخاص بسلسلة زمنية خاصة بسعر الصرف الموازي.

- حسب رأيك هل هذه السلسلة مستقرة؟ وضح لماذا





Date: 09/29/22 Time: 12:17
Sample: 1980 2016
Included observations: 37

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.903	0.903	32.694	0.000
		2	0.799	-0.092	58.989	0.000
		3	0.694	-0.056	79.438	0.000
		4	0.567	-0.183	93.520	0.000
		5	0.477	0.131	103.78	0.000
		6	0.392	-0.049	110.94	0.000
		7	0.250	-0.381	113.94	0.000
		8	0.133	0.027	114.82	0.000
		9	0.018	-0.057	114.84	0.000
		10	-0.062	0.184	115.05	0.000
		11	-0.109	-0.065	115.70	0.000
		12	-0.154	-0.071	117.07	0.000
		13	-0.194	0.027	119.33	0.000
		14	-0.224	-0.024	122.47	0.000
		15	-0.248	0.030	126.52	0.000
		16	-0.264	-0.182	131.29	0.000

قمنا بإجراء اختبار ديكي فيلر المطور على السلسلة تحصلنا على النتائج التالية:

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 09/27/22 Time: 10:37
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z(-1)	-0.801482	0.170100	-4.711819	0.0000
C	17.60312	9.490217	1.854870	0.0726
@TREND("1980")	0.590139	0.445738	1.323961	0.1946

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 09/27/22 Time: 10:43
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z(-1)	-0.728452	0.162680	-4.477820	0.0001
C	26.01298	7.128575	3.649113	0.0009

- ما الغرض من الاختبار؟ وما هو الاختبار الذي تم الاستعانة به حسب الشكل؟
- بالاستعانة بجداول ديكي فيلر، بين الخطوات اللازمة للتأكد من استقرارية السلسلة عند مستوى معنوية 10 %؟

التمرين الثالث: حدد نوع الاختبارات الخاصة بالسلاسل في الرسومات التالية مع إبراز درجة الاستقرارية والفرضيات الخاصة بكل اختبار؟ وماهي الخطوات اللازمة؟

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(OIL)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:56
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.096746	0.073514	-1.316029	0.1970
C	4.109783	3.693191	1.112800	0.2736

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(OIL)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:53
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.196215	0.104897	-1.870544	0.0703
C	0.955868	4.369895	0.218739	0.8282
@TREND("1980")	0.389777	0.296185	1.315992	0.1972

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(OIL)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:56
Sample (adjusted): 1981 2016
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.030332	0.043068	-0.704278	0.4859

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(OIL,2)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:52
Sample (adjusted): 1982 2016
Included observations: 35 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(OIL(-1))	-0.963644	0.177679	-5.423518	0.0000
C	0.560349	4.918849	0.113919	0.9100
@TREND("1980")	-0.019275	0.228659	-0.084294	0.9333

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(IMP)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 20:49
Sample (adjusted): 2 210
Included observations: 122 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IMP(-1)	-0.459895	0.094433	-4.870056	0.0000
C	-119.0376	38.61396	-3.082760	0.0025
@TREND("1")	2.552520	0.517001	4.937164	0.0000

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(PIB,2)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:43
Sample (adjusted): 3 220
Included observations: 218 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(PIB(-1))	-1.490854	0.059442	-25.08086	0.0000
C	-3.408296	12.48093	-0.273080	0.7851

KPSS Test Equation
Dependent Variable: D(EXPO,2)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:45
Sample (adjusted): 3 220
Included observations: 196 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	27.18386	158.1078	0.171932	0.8637
@TREND("1")	-0.625495	1.275796	-0.490278	0.6245

KPSS Test Equation
Dependent Variable: D(PIB)
Method: Least Squares
Date: 09/29/22 Time: 21:50
Sample (adjusted): 2 220
Included observations: 219 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.438311	14.21929	-0.171479	0.8640

التمرين الرابع: حدد نوع الاختبارات الخاصة بالسلاسل في الرسومات التالية مع إبراز درجة الاستقرارية والفرضيات الخاصة بكل اختبار؟ وماهي الخطوات اللازمة؟

- النموذج الاول:

Phillips-Perron Test Equation

Dependent Variable : D(EXPOTSERVICE)

Method : Least Squares

Date : 11/24/22 Time : 08 :58

Sample (adjusted) : 2006 2020

Included observations : 510 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
EXPOTSERVICE(-1)	-0.486705	0.200915	-2.422444	0.0308
C	1.57E+09	6.41E+08	**3.454510**	0.0290

Phillips-Perron Test Equation

Dependent Variable : D(EXPOTSERVICE)

Method : Least Squares

Date : 11/24/22 Time : 09 :00

Sample (adjusted) : 2006 2020

Included observations : 510 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
EXPOTSERVICE(-1)	**0.002972**	**0.027737**	**0.107152**	**0.9162**

Phillips-Perron Test Equation

Dependent Variable : D(EXPOTSERVICE)

Method : Least Squares

Date : 11/24/22 Time : 08 :57

Sample (adjusted) : 2006 2020

Included observations : 510 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
			-	
EXPOTSERVICE(-1)	-0.443138	0.231189	1.916778	0.0794
C	1.50E+09	6.81E+08	2.207893	0.0475
@TREND(« 2005 »)	-8642697.	20205676	0.427736	0.6764

- النموذج الثاني:

Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable : D(OIL) Method : Least Squares Sample (adjusted) : 1981 2016 **Included observations : 102 after adjustments**	Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable : D(OIL) Method : Least Squares Date : 11/24/22 Time : 09 :06 Sample (adjusted) : 1981 2016

Included observations : 102 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.030332	0.043068	-0.704278	0.4859

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL (-1)	-0.096746	0.073514	-1.316029	0.1970
C	4.109783	3.693191	1.112800	0.2736

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable : D(OIL)

Method : Least Squares

Date : 11/24/22 Time : 09 :04

Sample (adjusted) : 1981 2016

Included observations **: 102 after adjustments**

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
OIL(-1)	-0.196215	0.104897	-4.870544	0.0703
C	0.955868	4.369895	0.218739	0.8282
@TREND(« 1980 »)	0.389777	0.296185	1.315992	0.1972

- النموذج الثالث:

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable : D(BP)
Method : Least Squares
Sample (adjusted) : 1981 2016
Included observations : 254 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.198841	0.120157	-1.654847	0.1072
C	0.291518	1.491964	3.195392	0.8462

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable : D(BP)
Method : Least Squares
Date : 11/24/22 Time : 09 :30
Sample (adjusted) : 1981 2016
Included observations : 254 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BP(-1)	-0.190348	0.110469	-1.723093	0.0937

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable : D(BP)

Method : Least Squares

Date : 11/24/22 Time : 09 :28

Sample (adjusted) : 1981 2016

Included observations : 254 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
			-	
BP(-1)	-0.178633	0.126065	1.416990	0.1659
C	1.734358	2.871834	0.603920	0.5500
@TREND(« 1980 »)	-0.082898	0.140476	0.590121	0.5591

- النموذج الرابع:

Null Hypothesis : DBP is stationary

Exogenous : Constant

Bandwidth : 3 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.501714
Asymptotic critical values* :	1% level	0.739000
	5% level	0.463000
	10% level	0.347000

KPSS Test Equation

Dependent Variable : DBP

Method : Least Squares

Sample (adjusted) : 1981 2016

Included observations : 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.601667	1.425039	-0.422211	0.6755

Null Hypothesis : DBP is stationary

Exogenous : Constant, Linear Trend

Bandwidth : 5 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.133110
Asymptotic critical values* :	1% level	0.216000
	5% level	0.146000
	10% level	0.119000

KPSS Test Equation

Dependent Variable : DBP

Method : Least Squares

Sample (adjusted) : 1981 2016

Included observations : 220 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.932238	2.910641	0.663853	0.5113
@TREND(« 1980 »)	-0.136968	0.137184	0.998428	0.3251

حلول تمارين الفصل الثالث

حل التمرين الاول:

- **تقدير الارتباط الذاتي للفجوات (K=1,2,3,4 ,5)**

t	X_t	$(X_t - \bar{X})$	$(X_{t+1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X})^2$
1	*15*	0	10	0	0
2	*25*	10	-10	-100	100
3	*5*	-10	0	0	100
4	*15*	0	0	0	0
5	*15*	0			0
$\sum$				-100	200

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{9-1}(X_t - 15)(X_{t+1} - 15)}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - 15)^2} = \frac{-100}{200} = -0.5$$

$$\boldsymbol{r_1 = -0.5}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{9-2}(X_t - 15)(X_{t+2} - 15)}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - 15)^2} = \frac{0}{200} = 0$$

$$\boldsymbol{r_2 = 0}$$

$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{9-2}(X_t - 15)(X_{t+3} - 15)}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - 15)^2} = \frac{0}{200} = 0$$

$$\boldsymbol{r_3 = 0}$$

$$r_4 = \frac{\sum_{t=1}^{9-2}(X_t - 15)(X_{t+4} - 15)}{\sum_{t=1}^{9}(X_t - 15)^2} = \frac{0}{200} = 0$$

$$\boldsymbol{r_3 = 0}$$

- تقدير دالة الارتباط الجزئي طريقة (yule-walker) :

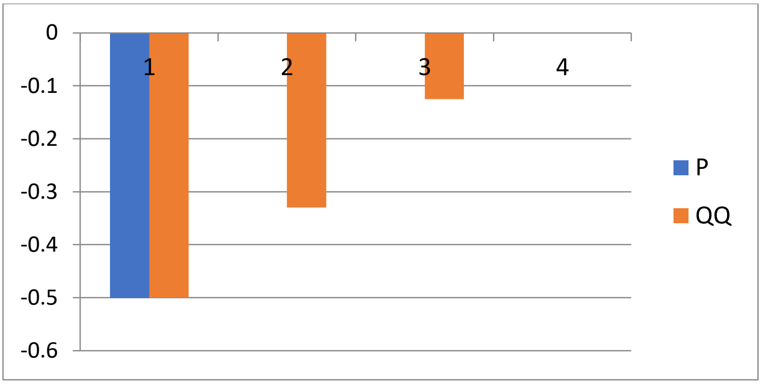
$$Q_{22} = r_1 = -0.5$$

$$Q_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-0.25}{0.75} = -0.33$$

$$Q_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-0.125}{1} = -0.125$$

- **شكل دالة الارتباط الذاتي والجزئي:**



حل التمرين الثاني:

حسب الشكل البياني الذي يوضح تطورات سعر الصرف نلاحظ أنه يحوي مركبة موسمية دورية هذا ما يدل على عدم استقرارية السلسلة الزمنية، ويمكن تأكيد ذلك بالشكل البياني الذي يوضح دالة الارتباط الذاتي والجزئي حيث نلاحظ أن معاملات الارتباط الخاصة بدالة الارتباط الذاتي تقع خارج مجال الثقة بالنسبة لسبعة فترات الاولى ونفس الأمر بالنسبة للفترة الأولى لدالة الارتباط الذاتي.

الغرض من الاختبار: هو دراسة درجة استقرارية السلاسل الزمنية وكذا نوع عدم الاستقرارية في حالة ذلك. الاختبار الذي تم الاستعانة به هو اختبار ديكي – فولر الموسع ADF

- توضيح الخطوات المتبعة:

الخطوة الأولى: نختبر مركبة الاتجاه العام

عدم وجود اتجاه عام

وجود اتجاه عام

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

حسب مخرجات الجدول لدينا $\boldsymbol{t_B = 1.32}$ $< \boldsymbol{V_c} = 2.38$ فاختبار المعنوية لمعامل مركبة الاتجاه العام يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 10 بالمئة وبالتالي نقر بعدم وجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة إذن ننتقل إلى النموذج الثاني وندرس معنوية الثابت

الخطوة الثانية: نختبر معنوية الثابت

$$\begin{cases} H_0 : c = 0 & \text{الثابت غير معنوي} \\ H_1 : c \neq 0 & \text{الثابت معنوي} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{t_c}\ 2.17 \ \boldsymbol{V_c} > 3.64$$

حسب مخرجات الجدول لدينا، فاختبار المعنوية الثابت يؤدي بنا إلى رفض فرضية العدم بمستوى معنوية 10 بالمئة

وبالتالي نقر بمعنوية الثابت ضمن السلسلة المدروسة

الخطوة الثالثة: نبقى في نفس النموذج السابق ونختبر وجود جذرالوحدة

$$\begin{cases} H_0 : \emptyset = 1 & \text{وجود جذر الوحدة} \\ H_1 : \emptyset < 1 & \text{عدم وجود جذر الوحدة} \end{cases}$$

$t_\emptyset$ 2.58 V_c > 4.47 حسب مخرجات الجدول لدينا، نلاحظ أن قيم الجدول سالبة إذن قاعدة القرار سوف تقلب فالاختبار يؤدي بنا إلى قبول فرضية العدم بمستوى معنوية 10 بالمئة وبالتالي نقر بوجود جذر الوحدة فالسلسلة غير مستقرة من نوع DS نطبق عليها الفروقات من الدرجة الأولى لإرجاعها مستقرة.

ملاحظة: التمرين رقم 3 و4 نفس حلول التمرين 1 و2 مع استعمال الخطوات في الجداول أعلاه.

الفصل الرابع:

نماذج التنبؤ في المدى القصير

تختلف نماذج التنبؤ حسب الشكل العام للسلسلة الزمنية، حيث يطبق النموذج الأكثر ملائمة والذي يعطي أحسن النتائج وهذا طبقا لمركبات السلسلة الزمنية:

نوع النموذج	مركبة اتجاه عام	مركبة موسمية
التمهيد الأسي البسيط	لا	لا
نموذج Holt	نعم	لا
نموذج HOLT-WINTER	نعم	نعم

I. التمهيد الآسي:

يقصد بالتمهيد السلوك العام لاتجاه السلاسل الزمنية تعتمد إزالة التذبذبات العشوائية للسلسلة تأتي طرق التمهين الأسي على اشكال متعددة بسيطة ومعقدة إلى حد ما ونجد فيها التمهيد الآسي البسيط والمزدوج

1. طريقة التمهيد الآسي البسيط:

يعتبر من أشهر طرق التمهين الاسي السلسلة زمنية تخلو من الاتجاه والأثر الموسمي ومنها الأكثر تعقيدا لسلسلة زمنية بها اتجاه عام ومركبات موسمية يستخدم بكثرة في السلسلة الزمنية العشوائية التي تذبذباتها تتمحور حول متوسط حسابي ثابث أي سلسلة زمنية مستقرة وتكون مصداقيتها كبيرة في التنبؤات في المدى القصير مثلا البورصة وقطاع النفط.

تعتمد طريقة التمهين الأسي البسيطة على افتراض وجود قيمة ابتدائية (initial value) ننطلق منها وهي قيمة وهي قيمة سابقة مقدرة متنبأ بها وإذا لم تتوفر نعتبر القيمة الأولى من السلسلة بأنها القيمة التي تبنى عليها التنبؤات

تعتمد على الصيغة الرياضية التالية:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(F_t - F_{t-1})$$

حيث:

F_{t+1} القيمة المتنبأ بها

$\boldsymbol{\alpha}$: معامل التوهين (smoothing factor- عادة ما تكون قيمته محصورة بين الصفر والواحد الصحيح حيث كلما اقتربت قيمته من الواحد يكون تعديل السلسلة الزمنية أسرع

$E_t = (F_t - F_{t-1})$ مقدار الخطأ في التنبؤ الذي نعتبره الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة المقدرة لتصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha E_t$$

مثال توضيحي :البيانات التالية خاصة بكمية الاستهلاك على سلعة ما خلال سنوات، المطلوب هو التنبؤ بالطلب للسنة المقبلة، علما أن $\boldsymbol{\alpha = 0.5}$ (طريقة التمهيد الاسي البسيط).

t	1	2	3	4	5
y_t	2700	2900	2670	3000	3400

حساب مختلف التوقعات:

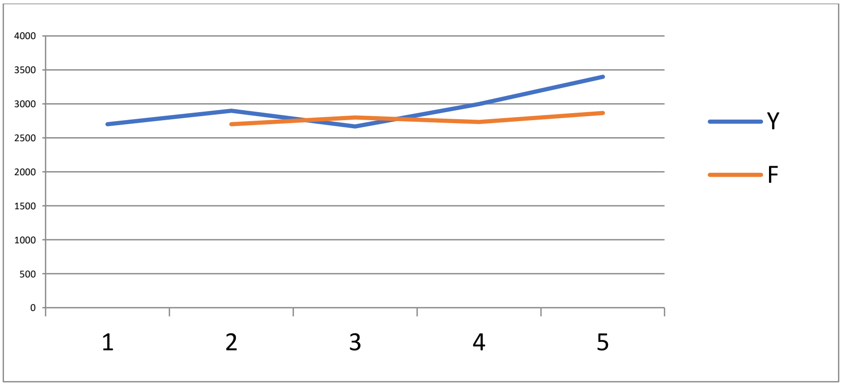
$F_2 = Y_1 = 2700 \Longrightarrow E_2 = 2900 - 2700 = 200$
$F_3 = 2700 + 0{,}5(200) = 2800 \Leftrightarrow E_3 = 2670 - 2800 = -130$
$F_4 = 2800 + 0{,}5\,(-130) = 2735 \quad \Leftrightarrow E_4 = 3000 - 2735 = 265$

$$F_5 = 2735 + 0{,}5\ (265) = 2867{,}5 \quad \Leftrightarrow E_5 = 3400 - 2867{,}5 = 532{,}5$$

يمكن الحصول على الشكل النهائي لمختلف التوقعات والأخطاء

t	y_t	F_t	E_t
1	2700	-	-
2	2900	2700	200
3	2670	2800	-130
4	3000	2735	265
5	3400	2867,5	532,5

الشكل البياني:



ملاحظة: يبقى الإشكال الرئيسي في هذه الطريقة هو اختيار معامل التوهين الاسي ،فإذا كانت التوقعات جامدة نختار المعامل ينتمي إلى المجال:[0.99 0.7] أما إذا كانت التوقعات مرنة فمعامل التوهين ينتمي إلى المجال:[0.01 0.3]

أما في حالة عدم التأكيد على التوقعات طريقة أخرى تعتمد على البيانات حسب المعادلة التالية:

$$\sum_{\left[\frac{T-h}{2}\right]}^{T-1} (X_{T+h} - \widehat{X}_T(h))^2$$

2. **طريقة التمهيد الآسي المزدوجة:**

طريقة التمهيد الآسي البسيطة لا يمكن أن تعطي نتائج تنبؤ موثوق بها وذات مصداقية عندما تكون السلسلة الزمنية طويلة أو تكون المركبة الاتجاهية بارزة على بيانات السلسلة الزمنية (بيانات لها اتجاه تصاعدي أو تنازلي) ، حيث تكون طريقة التمهيد المزدوجة (الرتبة الثانية) هي الأفضل، تتيح طريقة التمهيد الأسي المزدوج معالجة السلاسل باتجاه خطي ولكن بدون موسمية.

$$y_t = a + b\,(t - T) + E_t$$

من اجل كل الفترات نلاحظ أن كل من a وb مرتبطة بالزمن ولتحديد القيم الخاصة بهاذين المعاملين نقوم بتصغير المعادلة التالية:

$$\sum_{j=0}^{T-1} B^j\,(X_T - j(h) - (a - bj))^2$$

أن استعمال طريقة التمين الأسي المزدوجة في التنبؤ تكتب بالطريقة التالية:

$$\hat{y}_t(h) = \hat{a}(T) + \hat{b}\ (T)(h)$$

$$S_1(t) = (1-B)y_{t-1} \textstyle\sum_{j=0}^{t-1} B^j\, X_{t-j}$$

$$S_2(t) = (1-B)y_{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} B^j\, S_1(t-j)$$

$$\begin{cases} \hat{a}\ (T) = \dfrac{1-B}{B}\ (S_1(T) - S_2(T) \\ \quad \hat{b}(T) = 2S_1(T) - S_2(T) \end{cases}$$

إن قيم $\hat{a}\ (T)$ ، $\hat{b}(T)$ تم تقديرها بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لنتحصل على المعادلات التالية:

$$S_1(t) = (1-B)y_t + BS_1(T-1)$$

$$S_2(t) = (1-B)S_2(t) + BS_2(T-1)$$

$$\Rightarrow BS_2(T-1) + (1-B)[BS_1(T-1) + (1-B)y_t]$$
$$\Rightarrow BS_2(T-1) + B(1-B)S_1(T-1) + (1-B)^2 y_t$$
$$a(t) = \hat{a}_{T-1}(1) + (1-B^2)[X_T + \hat{x}_{T-1}]$$

تمرين تطبيقي:

تجدون ضمن الجدول المبيعات الشهرية لمنتوج معين خلال سنة 2020

الاشهر	ج	ف	م	أ	م	ج	ج	أ	س	أ	ن	د
Y	154	153	153	148	149	151	150	154	163	164	167	174

- تنبأ بأسعار المنتجات لشهر جانفي من السنة المقبلة بمعلومية 0,6

$$S_1(t) = (1 - B)y_t + BS_1(T - 1)$$

$$S_1(1) = y_1 = 54,20$$

$$S_1(2) = (1 - B)y_2 + BS_1(1) = 0.6 * 153 + 0.4 * 154$$

$$= 153,6$$

	y	$S1$	$S2$	$\widehat{L}_t$	$\widehat{T}_t$	$\hat{y} = \widehat{L}_t + \widehat{T}_t$
1	154	154	154,00	154,00		154,00
2	153	153,6	153,84	153,36	-0,1608	306,96
3	153	153,36	153,648	153,07	-0,19296	306,43
4	148	151,216	152,6752	149,76	-0,977664	300,97
5	149	150,3296	151,73696	148,92	-0,9429312	299,25
6	151	150,59776	151,28128	149,91	-0,4579584	300,51
7	150	150,35866	150,91223	149,81	-0,3708948	300,16
8	154	151,81519	151,27342	152,36	0,3629912	304,17
9	163	156,28912	153,2797	159,30	2,0163116	315,59
10	164	159,37347	155,71721	163,03	2,4496971	322,40
11	167	162,42408	158,39996	166,45	2,6961643	328,87

12	174	167,05445	161,86175	172,25	3,4791062	339,30
		100,23267	137,21012	63,26	-24,774892	163,49

- **طريقة Brown:**

الطريقة التي اقترحهاBrown جاءت للتغلب على مشكلة التنبؤ بالبيانات التي تأخذ شكل اتجاهات لكن خالية من التذبذبات الموسمية، حيث يكون الأساس المنطقي لهذه الطريقة مشابهًا للتنبؤ بمتوسط متحرك وترتكز الطريقة على المعادلات التالية:

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$
$$T_t = \alpha S_t + (1-\alpha)T_{t-1}$$
$$a_t = 2S_t - T_t$$
$$b_t = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}(S_t - T_t)$$
$$\hat{y}_{t+1} = a_t + b_t$$

حيث

St القيمة التنبؤية الممهدة بالطريقة البسيطة (الدرجة الأولى)

Tt القيمة الاتجاهية التنبؤية الممهدة للمرة الثانية -الدرجة الثانية-

$\boldsymbol{a_t}$ المستوى التنبؤي خلال الفترة t

$\boldsymbol{b_t}$ الاتجاه التنبؤي خلال الفترة t

ملاحظة: نظرا لأن القيمة التنبؤية للفترة t=1 غير متوفرة فإن: $S_1 = T_1 = y_1$

مثال توضيحي :لنأخذ معطيات المثال السابق والخاص بالطلب الشهري على سلعة ما خلال سنة :2020 لتنبؤ بالطلب لشهر جانفي2021 ، علما أن $\boldsymbol{\alpha = 0.4}$ (طريقة brown

الحل :ما يلاحظ على سلسلة الطلب الشهري أنها تأخذ اتجاه عام صاعد عموما، وبالتالي تكون طريقة التمهيد الآسي المزدوجة هي الأفضل والأنسب لعملية التنبؤ، وتتم عملية التقدير بطريقةBrown كما هو مبين في الجدول التالي:

للفترة t+1

$$S_1 = T_1 = y_1 = 152$$
$$a_1 = 2 * 152 - 152 = 152$$
$$b_1 = \frac{0.4}{0.6}(152 - 152) = 0$$

للفترة t+2

$$S_2 = 0.4 * 162 + 0.6 * 152 = 156$$

$$T_2 = 0.4 * 156 + 0.6 * 152 = 153{,}6$$

$$a_2 = 2 * 156 - 153{,}6 = 158{,}40$$

$$b_2 = \frac{0.4}{0.6}(156 - 153{,}6) = 1{,}6$$

$$\hat{y}_2 = 152 + 00 = 152$$

بنفس الطريقة تتم عملية الحساب لبقية الفترات، نجد النتائج مدونة في الجدول الموالي

	y_t	a_t	b_t	S_t	T_t	$\hat{y}_t$
1	152	152		152	152	
2	162	158,40	1,6	156	153,6	152
3	187	177,28	5,92	168,40	159,52	160,00
4	200	193,95	8,61	181,04	168,13	183,20
5	220	213,72	11,40	196,62	179,53	202,56
6	224	224,40	11,22	207,57	190,75	225,12
7	240	238,42	11,92	220,54	202,67	235,62
8	260	256,52	13,46	236,33	216,13	250,34
9	280	276,40	15,07	253,80	231,20	269,99
10	299	296,29	16,27	271,88	247,47	291,46
11	310	310,92	15,86	287,13	263,33	312,56
12	320	322,44	14,78	300,28	278,11	326,78
						337,22

3. طريقة:Holt-Winters

تفترض هذه الطريقة وجود سلسلة زمنية تحتوي اتجاها وموسمية، وتستخدم معادلين الأولى لمستوى التغير أي التمهيد (level) والثانية للاتجاه (trend) ومعاملين للتمهيد يتفاعلان في التنبؤ وتعديله حسبما يطرأ على الاتجاه والأثر الموسمي.

أ: النمذجة غير الموسمية (نموذج Holt)

إن الصيغة العامة بالنموذج التمهيد الاسي المزدوج خاص بالاتجاه العام والموسمية و يمكن أخذها بيعين الاعتبار وكتابتها بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \widehat{L}_t = \dfrac{1-B}{2}\,(\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1} + \dfrac{1+B}{2}\,\hat{a}_{t-1} \\ \hat{T}_t = (1-B^2)X_t + B^2(\hat{X}_{t-1} + \hat{X}_{t-2}) \end{cases}$$

قام Holt-باقتراح صيغة جديدة لكلتا المعلمتين:

$$\begin{cases} \widehat{L}_t\,(T) = \gamma\,(\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1} + \gamma\,\hat{a}_{t-1} \\ \hat{T}_t = (1-\alpha)X_t + \alpha(\hat{X}_{t-1} + \hat{X}_{t-2}) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\widehat{X}_t = \widehat{L}_t + \widehat{T}_t}$$

ب: النموذج الموسمي الجمعي

لتكن لدينا السلسلة الزمنية مكونة من عدة مشاهدات يمكن أن تتكون من عدة معادلات:

$$a(t-T) + b + s_t$$

قام كل من العالمين بإعداد جملة معادلات:

$$\begin{cases} \hat{T}_t = (1-B)\hat{T}_{t-1} + B\,(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}) \\ \hat{L}_t = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-p}) + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \\ \hat{S}_t = \gamma\big(X_t - \hat{L}_{t-1}\big) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-P} \end{cases}$$

لتكن معادلة التنبؤ كما يلي:

$$\hat{F}_{t+1} = L_t + T_t + S_{t-p+1}$$

تقدير معادلة المستوى، الاتجاه والموسمية للفترة الأولى:

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{S}\sum L_i \qquad i = 0,1,2,3 \dots \dots \dots$$

$$\hat{S}_1 = X_1 - \hat{L}_1$$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{S}\sum \frac{(X_{s+i} - X_i)}{s} \qquad i = 0,1,2,3 \dots$$

ج: النموذج الموسمي الجدائي

لتكن لدينا السلسلة الزمنية مكونة من عدة مشاهدات يمكن أن تتكون من عدة معادلات:

$$\hat{F}_{t+1} = [L + b] * s_t$$

قام كل من العالمين بإعداد جملة معادلات:

$$\begin{cases} \hat{T}_t = (1 - B)\,\hat{T}_{t-1} + B\,\left(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}\right) & \text{معادلة الاتجاه العام} \\ \hat{L}_t = \alpha \dfrac{X_t}{\hat{S}_{t-p}} + (1-\alpha)\left(\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}\right) & \text{معادلة المستوى} \\ \hat{S}_t = \gamma \dfrac{X_t}{\hat{L}_t} + (1-\gamma)\hat{S}_{t-p} & \text{معادلة الموسمية} \end{cases}$$

تقدير معادلة المستوى، الاتجاه والموسمية للفترة الأولى:

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{S}\sum L_i \qquad i = 0,1,2,3 \dots \dots \dots$$

$$\hat{S}_1 = {X_t}/{\hat{L}_1}$$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{S}\sum \frac{(X_{s+i} - X_i)}{s} \qquad i = 0,1,2,3 \dots$$

لتكن معادلة التنبؤ كما يلي:

$$\hat{Y}_t = (L_{t-1} + T_{t-1})S_{t-p}$$

II. خوارزمية نموذج BOX-JENKINS

تتمثل في البحث في نماذج ARMA – نماذج خطية مستقرة-(AUTO-REGRESSIVE-MOVING-AVERAGE) من المرجح أن تتكيف بشكل أفضل مع البيانات التجريبية التي تكون السلسلة الزمنية

- تحديد نوع السلسلة العشوائية التي من المحتمل أن تمثل بشكل كاف السلاسل الزمنية داخل فئة نموذج ARMA (اختيار التأخير p,q)
- تقدير معاملات النموذج الذي تم تحديده مسبقا (طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية المشروطة، غير المشروطة، الامكان الأعظم)
- التحقق من صحة النموذج الذي تم تحديده من خلال مجموعة الاختبارات الاحصائية: (اختبار Junk-Box، اختبارJarque Bera، اختبار ARCH ,,,,,,)
- التنبؤ بالسلسلة الزمنية التي تم تقديرها.

الهيكل التنظيمي خوارزمية نموذج BOX-JENKINS

- إن سلاسل ARMA هي سلاسل مستقرة، وقبل الانتقال إلى تطبيق خوارزمية BOX-JENKINS على النموذج من الضرورية تحويلها إلى نماذج مستقرة في حالة احتواء السلسلة الزمنية على مركبات الاتجاه العام أو مركبة فصلية.
- في حالة احتواء السلسلة الزمنية على مركبة اتجاه عام عشوائية، نقوم بتطبيق نماذج ARIMA (P ,d,q) حيث تمثل d الفروقات للسلسلة والتي تجعلها مستقرة، بصفة عامة نطبق نموذج ARIMA (P ,1,q)
- في حالة احتواء السلسلة الزمنية على مركبة موسمية نطبق نموذج SARIMA
- في حالة احتواء السلسلة الزمنية في نفس الوقت على مركبة اتجاه عام ومركبة موسمية نطبق نموذج SARIMA

تحديد نوع النموذج:

-إن تحديد نموذج ARMA لتمثيل السلاسل الزمنية يتمثل في اختيار عدد التأخرات p,q

-إن تحديد النموذج يتمثل في الإجابة على الاسئلة التالية:

- ما نوع النموذج الذي نحن في إطار دراسته أهو نموذج الانحدار الذاتي، أو نموذج المتوسطات المتحركة، أو نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة
- السلسلة تحوي مركبات موسمية، أو اتجاه عام
- ما درجة كثير الحدود للسلسلة محل الدراسة.

- لتحديد قيمة التأخرات p ,q لنموذج(p ,q) ARMA قام كل من العالمين BOX-JENKINS باقتراح طريقة تستند إلى استخدام دوال الارتباط الذاتي (AC) والارتباط الجزئي (PAC)،هذه الدوال التي تهدف إلى دراسة تطور معاملات الارتباط الذاتي

ومعاملات الارتباط الجزئي حسب التأخيرات ومبدأها الرئيسي هي المقارنة بين نماذج الارتباط الذاتي والجزئي النظرية بتلك المقدرة في عينة من السلاسل الزمنية. ولكي يكون النموذج المقدر مقبولا يجب أن تتوفر فيه ثلاث خصائص رئيسية:

- احتواء النموذج على أصغر المعايير (AIC-SIC-HQIC)
- اختبار معنوية المعاملات المقدرة
- اختبارات تحليل الأخطاء العشوائية:(التوزيع الطبيعي، الارتباط الذاتي بين الأخطاء، ثبات التباين)

III. النماذج الخطية: نماذج السلاسل الزمنية العشوائية المستقرة

السلاسل الخطية هي حالة خاصة من السلاسل المستقرة وتتميز هذه السلاسل بالقدرة على تمثيل نفسها كمزيج خطي من المتغيرات العشوائية. ستدرس أنواع العمليات الخطية التالية: السلاسل عشوائية بحتة، نماذج الانحدار الذاتي، المتوسطات المتحركة ونماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة أولاً، سنحاول تعريف هذه الانواع من النماذج، وبعد ذلك تحليلها، سنقدمها باستخدام المعادلات التفاضلية.

- **التشويش الابيض:** سلسلة التشويش الأبيض يمكن التعبير عليها كالتالي:

• حد الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي. $u_i \simeq (0.\delta^2)$

• القيمة المتوسطة لحد الخطأ العشوائي تساوي الصفر. $E(u_i = 0)$

• أن يكون تباين حد الخطأ لكل قيم المتغير المستقل ثابتا: $v(\quad_i) = \delta^2)$

• عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء بين البواقي: أي أن التباين المشترك بين البواقي يساوي الصفر $COV(u_i.u_j)$ =0

• عدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي، اي التباين المشترك بينهما يساوي الصفر0= $COV(x_i.u_i)$

1. **نموذج الانحدار الذاتي:**

- **نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR 1 :**

يأخذ نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى شكل معادلة انحدار لقيمة السلسلة yt كدالة في قيمة لسلسلة $yt-1$ ويمكن كتابتها في الشكل التالي:

$$\mathrm{X_t = \emptyset_1\ X_{t-1} + \varepsilon_t}$$

ξt متغير عشوائي تباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$

- **معامل التأخير:** يرمز له L ويعطى شكله كالتالي:

$$L^j X_t = X_{t-1}$$

يقوم بتحويل المتغير من قيمته السابقة، بالشكل التالي: $\emptyset L$ حيث

$$\emptyset L = 1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \cdots \emptyset_p L^p$$

$\emptyset L$ يسمى بمتعدد الحدود للتأخير

بتطبيقها على سلسلة زمنية تصبح:

$$\emptyset L X_t = X_t - \emptyset_1 X_{t-1} - \emptyset_2 X_{t-2} - \cdots \emptyset_p X_{t-p}$$

$$\mathrm{X_t - \emptyset_1 X_{t-1} - \emptyset_2 X_{t-2} - \cdots \emptyset_p X_{t-p} = \varepsilon_t}$$

حيث $\emptyset_P$ $\emptyset_2$ ،$\emptyset_1$ أعداد حقيقية تعبر عن معاملات التأخير و t حد الخطأ العشوائي $\varepsilon_t \sim (0, \sigma_t^2)$

$$\mathrm{\emptyset L = 1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \cdots \emptyset_p L^p}$$

يسمح لنا بكتابة المعادلة التالية:

$$(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \cdots \emptyset_p L^p) X_t = \varepsilon_t$$

$$\emptyset(L) X_t = \varepsilon_t$$

استقرارية النموذج: فاستعمال معامل التأخير:

$$(1-\emptyset_1 \mathrm{L})\mathrm{X}_t = \varepsilon_t \Rightarrow \mathrm{X}_t = \emptyset_1 \mathrm{X}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\boldsymbol{\emptyset_1} = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{X}_t = \mathrm{X}_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \mathrm{X}_t = \mathrm{L}\,\mathrm{X}_t + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1-L)\mathrm{X}_t = \varepsilon_t$$

إن وجود جذر الوحدة $1 - L = 0 \Rightarrow L = 1$ يدل على أن السلسلة الزمنية غير مستقرة. ولأجل جعلها مستقرة نطبق عليها الفروقات من الدرجة الأولى.

$$|\boldsymbol{L}| = \left|\frac{\mathbf{1}}{\emptyset_1}\right| > \mathbf{1}$$

وبالتالي نقول انه مستقر اذا كان: $|\emptyset_1| < \mathbf{1}$ ولتحليل سلوك السلسلة AR(1) سيتم افتراض أن العملية تبدأ في البداية الفترة -N.وستكون التبديلات المتعاقبة كما يلي:

$$+\boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{\emptyset_1}[\boldsymbol{\emptyset_2 y_{t-2}} + \boldsymbol{\xi_{t-1}}] + \boldsymbol{\xi_t} = \ldots\ldots = \sum_{j=0}^{t+N-1} \boldsymbol{\emptyset_1^j \xi_{t-j}}$$

$$\boldsymbol{\emptyset_1^{t+N} Y_{-N}}$$

- إذا كانت السلسلة مستقرة، أي إذا: $|\emptyset_1| < \mathbf{1}$، فإننا نتحقق من ذلك بالمعادلة التالية:

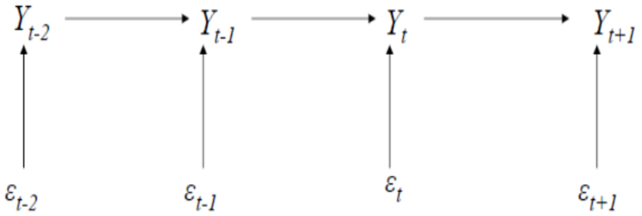
$$\boldsymbol{\gamma_0} = \frac{\boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2}}{1-\emptyset_1^2}$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج**

$$\boldsymbol{P(k)} = \boldsymbol{\phi^k}$$

ملاحظة: يؤثر المتغير العشوائي على قيم Yi المقابلة لنفس الفترة أو لفترات لاحقة، ولكن ليس للفترات السابقة. ومن النتائج الهامة لذلك ما يلي: *E[ƐtYt-τ]=0*

τ>0



مثال توضيحي: لتكن السلسلة الزمنية y_tوالتي تتبع لنموذج التالي

$$y_t = 0.4_1 y_{t-1}:$$

– أوجد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية؟

– هل هو قابل للقلب (للعكس)

– احسب التسلسل: $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$

– أحسب معاملات الارتباط التالية: R_1, R_2 ، R_3

الحل: دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج

$$P(k) = \phi^k = 0.4^k$$

- **دالة الارتباط الذاتي لنموذج**

- $P(k) = \phi^k = 0.4^k$
- $k = 1 \Rightarrow\ P(1) = 0.4^1 = 0.04$
- $k = 2 \Rightarrow\ P(2) = 0.4^2 = 0.16$
- $k = 3 \Rightarrow\ P(3) = 0.4^3 = 0.06$

ما يلاحظ على الشكل أن الارتباط يتناقص بشكل سريع ليقترب من الصفر كلما ا زدت الفجوة K وهو ما يدل على إستقرارية هذه السلسلة.

نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(2):

تسمى هذه العمليات أيضًا نماذج Yule، وشكلها العام هو

$$y_t = \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \xi_t$$

وباستعمال معامل التخلف يصبح:

$$(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2) y_t = \xi_t$$

حيث جذر كثير الحدود الخاص به يكتب على الشكل التالي:

$$(1 - \emptyset_1 \mathrm{z} - \emptyset_2 \quad {}^2) \mathrm{y_t} = \Phi(\mathrm{z})$$

لكي تكون السلسلة السابقة مستقرة، يجب أن تكون جذور المعادلة:

$$(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2) = 0$$

-شروط استقرارية نموذج AR(2)

$$\begin{cases} \emptyset_2 + \emptyset_1 < 1 \\ \emptyset_2 - \emptyset_1 < 1 \\ |\emptyset_2| < 1 \end{cases}$$

دالة الارتباط الذاتي والجزئي لنموذج AR(2)

$$\psi = \begin{cases} \rho(1) & h = 1 \\ \rho(2) = \emptyset_2 + \dfrac{\emptyset_1^2}{1 - \emptyset_2} & \\ \rho(h) = \emptyset_1 \rho(h-1) + \emptyset_2 \rho(h-2) & h \geq 2 \end{cases}$$

حسب معادلات YULE WALKER)دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(2)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho(0) = 1} \\ \boldsymbol{\rho(1) = \dfrac{\emptyset_1}{1 - \emptyset_2}} \\ \boldsymbol{\rho(2) = \emptyset_2 + \dfrac{\emptyset_1^2}{1 - \emptyset_2}} \\ \boldsymbol{\rho(h) = \emptyset_1 \rho(h-1) + \emptyset_2 \rho(h-2) \qquad h \geq 2} \end{cases}$$

مثال توضيحي: ليكن لدينا النموذجين التاليين:

$$y_t = -0.2\, y_{t-1} + 0.6 y_{t-2} + \xi_t$$
$$y_t = 1.2\, y_{t-1} - 0.3\, y_{t-2} + \xi_t$$

- اختبر إستقرارية النموذجين.
- أحسب معاملات الارتباط الذاتي للنموذجين

الحل:

- إستقرارية النموذجين:

- **النموذج الاول:**

الطريقة الاولى:

$$\begin{cases} \emptyset_1 + \emptyset_2 = -0.2 + 0.6 = 0.4 < 1 \\ \emptyset_2 - \emptyset_1 = 0.6 - 0.2 = 0.4 < 1 \\ |\emptyset_2| = |0.6| < 1 \end{cases}$$

الطريقة الثانية:

$$y_t = -0.2\, y_{t-1} + 0.6 y_{t-2} + \xi_t$$

$$\Rightarrow y_t + 0.2\, y_{t-1} - 0.6 y_{t-2} = \xi_t$$
$$\Rightarrow (1 + 0.2\mathrm{L} - 0.6L^2) y_t = \xi_t$$
$$1 + 0.2\mathrm{L} - 0.6L^2 = 0$$
=1.56 $\Delta = (0.2)^2 - 4(1)(-0.6) = 2.44 \Rightarrow \sqrt{\Delta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \acute{\mathrm{L}}_1 = 1.44 > 1 \\ \acute{\mathrm{L}}_2 = -1.13 < -1 \end{cases}$$

ومنه السلسلة مستقرة

- **النموذج الثاني:**

$$\boldsymbol{y_t = 1.2\, y_{t-1} - 0.3\, y_{t-2} + \xi_t}$$

الطريقة الاولى:

$$\begin{cases} \emptyset_1 + \emptyset_2 = 1.2 - 0.3 = 0.9 < 1 \\ \emptyset_2 - \emptyset_1 < 1 = -0.3 - 1.2 = -1.5 < 1 \\ |\emptyset_2| = |-0.3| < 1 \end{cases}$$

الشروط محققة وبالتالي النموذج مستقر

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذجين:**

$$P(0) = 1$$
$$P(1) = \frac{-0.2}{1 - 0.6} =$$
$$P(2) = 0.6 + \frac{(-0.2)^2}{1 - 0.6}$$

نماذج الانحدار الذاتي من الدرجة AR(p). p

هي عبارة عن انحدار المتغير على ماضيه أي انحدار القيمة الحالية على القيم السابقة ويأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y_t = \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \emptyset_3 y_{t-3} + \cdots + \xi_t}$$

هذا النموذج قد يكون مستقر وقد لا يكون كذلك، وتعتمد استقراريته على المعلمات: $\emptyset_2$،$\emptyset_1$.المعاملات Φ i مشابهة جدًا لمعاملات الانحدار لنماذج الانحدار الخطي المتعدد، حيث يرجع تسمية الانحدار الذاتي إلى انحدار قيمة المتغير Yt على القيم السابقة له ، تم تقديم عمليات إعادة الانحدار الذاتي لأول مرة بواسطة Yule (1927).

-دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(p)

$$\mathrm{P}(k) = y_t = \emptyset_1 P(k\_1) + \emptyset_2 P(k\_2) + \emptyset_3 P(k\_3) + \cdots +$$

دالة الارتباط الذاتي تتناقص كلما ا زدت الفجوة الزمنية وتقترب من الصفر أو تكون عبارة عن ترددات تتناقص وتقترب من الصفر، إلا أن هذه الدالة تكون غير كافية في اختبار إستقرارية النموذج.

2. نموذج المتوسطات المتحركة:

هذا النموذج يرتكز على العمليات التاريخية الحد العشوائي في تحليل السلسلة بدلا من القيم التاريخية للسلسلة نفسها وهو ما جعل البعض يعتمد هذا النموذج في مجالات إدارة الجودة وقياس نسب التلوث وحالات الحروب والاضطرابات العمالية وغيرها، أين يكون للعامل العشوائي دور رئيسي في اتخاذ القرار

إن سلسلة المتوسطات المتحركة من الرتبةq ، تكتب بالشكل MA q تكتب الصيغة العامة لنموذج المتوسطات المتحركة في مجال تحليل السلاسل الزمنية كالتالي:

$$X_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} \dots \dots .. - \theta_q \xi_{t-q}$$

حيث $\boldsymbol{\theta_P}$ $\boldsymbol{\theta_2}$ ، $\boldsymbol{\theta_1}$ أعداد حقيقية تعبر عن معاملات التأخير و t حد الخطأ العشوائي $\varepsilon_t \sim (0, \sigma_t^2)$

إن إدراج معامل التأخير يسمح لنا بكتابة العلاقة كالتالي:

$$X_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} \dots \dots .. - \theta_q \xi_{t-q}$$

$$X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 \dots \dots .. - \theta_q L^q) \xi_t$$

باعتبار

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 \dots \dots .. - \theta_q L^q$$

وبالتالي فسلسلة $MA(q)$ يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$X_t = \theta(L) \boldsymbol{\xi_t}$$

- **نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى:**(1) MA : يأخذ الصورة التالية:

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1}}$$

دالة الارتباط الذاتي للنموذج: دالة الارتباط الذاتي كما هو معلوم تساوي قيمة التغاير إلى تباين النموذج، ويمكن كتابة دالة الارتباط لهذا النموذج كالتالي:

$$P(k) = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & K = 1 \\ 0 & K = 2.3 \end{cases}$$

دالة الارتباط الذاتي لهذا النموذج تنقطع بعد الفجوة الزمنية الأولى وهو ما يؤكد ترابط قيم السلسلة التي تبعد عن بعضها البعض بفجوة زمنية واحدة

مثال توضيحي: لتكن لدينا السلسلة الزمنية التالية

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - 0.6 \xi_{t-1}}$$

- أحسب معاملات الارتباط الذاتي والارتباط الجزئي k = 1, 2, 3,4
- أرسم دالتي الارتباط الذاتي والجزئي

الحل:

- معامل الارتباط الذاتي:

$$K = 1 \Rightarrow P(k) = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = -\frac{-0.6}{1+0.6^2} = 0.44$$

- نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية MA (2):

يعتبر نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية من أكثر النماذج استخداما، خاصة في تقدير المؤشرات الاقتصادية والمالية بعد حدوث الأزمات أو هزات فجائية لم تكن متوقعة تمتد أثارها لوحدتين زمنيتين، وتكتب الصيغة العامة لهذا النموذج كالتالي:

$$y_t = \xi_t - \theta_1\xi_{t-1} - \theta_2\xi_{t-2}$$

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج**

$$P(K)\begin{cases}\dfrac{\theta_1(\theta_2-1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & ;K=1\\ \dfrac{-\emptyset_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & ;K=2\\ 0 & ;K=3{,}4\end{cases}$$

الملاحظ على دالة الارتباط الذاتي للنموذج أنها تنقطع بعد الفجوة الزمنية الثانية، وهو ما يؤكد ترابط قيم السلسلة التي تبعد عن بعضها البعض بوحدتين زمنيين، أما القيم التي تبعد عن بعضها بأكثر من فجوتين فهي **غير مترابطة**.

مثال توضيحي: لتكن لدينا السلسلة التالية

$$y_t = \xi_t - 0.2\,\xi_{t-1} + 0.4\xi_{t-2}$$

- أحسب الارتباط الذاتي $P(1)$، $P(2)$
- أرسم دالة الارتباط الذاتي للنموذج

الحل :

$$P(1) = \frac{-0.2(0.4-1)}{(1+0.04+0.16)} = 0.1$$

$$P(2) = \frac{-0.4}{(1+0.04+0.16)} = -0.33$$

نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة MA(q) q

النموذج العام للمتوسطات المتحركة يكون من رتبة محددة وهيq يكتب على النحو التالي:

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - \theta_1\xi_{t-1} - \theta_2\xi_{t-2} \dots \dots .. - \theta_q\xi_{t-q}}$$

- **دالة الارتباط الذاتي للنموذج:**

$$\begin{cases} p(k) = \dfrac{-\theta_k \sum_{i=1}^{q-K} \theta_i\theta_{i+k}}{1+\sum_{i=1}^{q}\theta_i^2} & k \geq q \\ p(k) = 0 & ;\ k < q \end{cases}$$

4. نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركةARMA

يأخذ النموذج المبسط الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - \theta\xi_{t-1} + \emptyset y_{t-1}}$$

هذه النماذج هي مزيج من نماذج AR (P) و MA (P) لكن الأخطاء به مرتبطة في وحدة الزمن الأمر الذي يسمح بكتابة السلسلة بإدراج معامل التأخير كما يلي:

$$\emptyset L y_t = \theta(L)\xi_t$$

حيث:

$$\emptyset L y_t = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots \theta_p {L^P}_t$$

السلسلة الزمنية المدروسة المعادلة للنموذج المختلط تتخذ الاشكال التالية:

ARMA (00)	السلسلة تشويش ابيض
ARMA(P.0)	النموذج هو AR (P)
ARMA(0.q)	النموذج هو MA (P)

يأخذ النموذج المبسط الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - \theta\xi_{t-1} + \emptyset y_{t-1}}$$

- **دالة الارتباط الذاتي**

$$P(K)\begin{cases} \dfrac{(\emptyset-\theta)(1-\emptyset\theta)}{(1+\theta^2-2\theta\emptyset)} & k=1 \\ \emptyset^{k-1}\,P(1) \quad k = 2;3\ldots \end{cases}$$

مثال توضيحي: لتكن لدينا الدالة التالية

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - 0.3\xi_{t-1} + 0.8y_{t-1}}$$

أوجد دالة الارتباط الذاتي للنموذج عند الفجوات الزمنية **k=1.2.3**

الحل:

$$P(1) = \frac{(0.8-0.3)\big(1-(0.3)(0.8)\big)}{\left(1+0.3^2-2*0.8*0.3\right)} = 0.62$$

$$P(2) = \emptyset P(1) = 0.8 *\ 0.62 = 0.49$$

$$P(3) = \emptyset P(2) = 0.8 *\ 0.49 = 0.39$$

$$P(4) = \emptyset P(3) = 0.8\ 0.39 = 0.31$$

ما يلاحظ أن الدالة تتناقص كلما زادت الفجوة الزمنية، وهو ما يعبر عن إستقراريتها.

5. **نماذج ARIMA (Aoto-Regressive Integrated Moving Average)**

هي فئة من النماذج الاحصائية لتحليل السلاسل الزمنية والتنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة اعتمادا على القيم السابقة لها وتتضمن هذه الفئة AR+I+MA (p

I,q) ، إن تطبيق الفروقات على نماذج ARMA يجعلنا نتحصل على سلسلة متكاملة من درجة الفروقات مثلا I=1 أو d=1 فخوارزمية بوكس-جينكز تقوم على تحديد درجة التكامل الخاصة بنموذج ARIMA

ومعادلته كالتالي:

$$\nabla y_t = C + \emptyset_A \nabla Y_{t-1} + \cdots .. + \emptyset_p \nabla Y_{t-p} + \xi_t + \theta_1 \xi_{t-1} + \cdots \ldots .. + \theta_P \xi_{t-P}$$

AR :ARIMA (p ,0 ,0)

MA :ARIMA (0 ,q ,0)

ARMA : ARIMA (p ,0 ,q)

ARIMA : ARIMA (p ,I ,q)

6. نماذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين:

يستخدم هذا النموذج في تحليل ونمذجة التذبذب في السلسلة الزمنية، من أجل توظيفها في التنبؤ بالتذبذبات المستقبلية ويوظفه خبراء التمويل في التنبؤ بالمخاطر الممكنة في عمليات البيع والشراء للأدوات التمويلية في سوق الأسهم والسندات بواسطته يمكن استكشاف مواسم التذبذبات العالية والمنخفضة ومن أمثلة السلاسل الزمنية نجد اسعار الطاقة بين المواسم، فترات ارتفاع وانخفاض أسعار الفائدة الناتجة عن توقعات معينة لقوة عملة ما كالدولار

على الرغم من وجود التذبذبات في البيانات الاقتصادية، إلا أنه كان يأخذ بعين الاعتبار إلى الاستقرار في متوسطها فهذا النموذج يأخذ بعين الاعتبار الفترات اللاحقة لتجمع التذبذبات في السلاسل الزمنية.

يقوم هذا النموذج على حساب قيمة البواقي $[e_t]$والتي تمثل الفرق بين القيم الفعلية والقيم المقدرة، فإذا تذبذبت سلسلة البواقي فإن نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين يكون مناسبا للسلسلة محل الدراسة.

الصيغة الرياضية للنموذج تكتب بالشكل التالي:

$$VAR\ [e_t] = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2$$

فتباين الخطأ$[\quad_t]$ في الفترة (t) هو دالة خطية في تباين الخطأ في الفترة السابقة لذلك فإن تباين الخطأ في فترة ما مرتبط بارتفاع أو انخفاض تباين الخطأ في الفترات السابقة له لذلك يمكن كتابة:

نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين من الدرجة الاولى بالصيغة الرياضية التالية:

$$ARCH\ [1] = e_t = w_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2} + \in_t$$

نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين من الدرجة الثانية بالصيغة الرياضية التالية:

$$ARCH\ [2] = e_t = w_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2} + \in_t$$

ما يمكن ملاحظته هو أن قيم الجذر التربيعي مرتبطة بانخفاض وارتفاع تذبذبات تباين حد الخطأ العشوائي.

$$ARCH\ [1] = e_t = w_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2} + \in_t \Leftrightarrow e_t^2 = \alpha_0 w_t^2 + \alpha_1 w_t^2 e_{t-1}^2$$

بعد حساب دوال الارتباط الذاتي الكلي والجزئي ل $\boldsymbol{e_t^2}$ تحليل شكل الدالة الخاصة بها، يمكننا تحديد عدد التأخرات في الدالة

ولتقدير النموذج نتبع الخطوات التالية.

- تقدير معادلة الانحدار الخطي من الدرجة الأولى
- حساب البواقي الناتجة عن التقدير والتي تمثل الفرق بين القيم الفعلية والقيم المقدرة
- في حالة عدم استقرارية البواقي، نلجأ إلى تربيع البواقي ثم حساب معاملات الارتباط الذاتي الكلي والجزئي
- بناءا على صورة الارتباط الذاتي يمكن استنتاج معادلة الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين حيث يمكن التأكد من خلال المعادلة أن السلسلة الزمنية في الفترة الحالية تعتمد على نفسها في الفترة السابقة.

تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول: لتكن لدينا سلسلة مبيعات شهرية خاصة بمنتوج القمح لسنة 2021، تنبأ بمبيعات أشهر السنة المقبلة (نموذج جمع) باستخدام نموذج أولت وينتر، بمعلومية المعاملات $\gamma = 0,3$ $\beta = 0,2$ $\alpha = 0,1$

	2021											
الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات	99 500	100 20	119000	118300	124000	129000	117000	113000	112000	117000	106000	111000
	2022											
الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات	106000	114000	136000	128000	134000	138000	137000	141000	131000	126000	122000	124000

التمرين الثاني: لتكن لدينا سلسلة مبيعات شهرية خاصة بمنتوج معين لسنة 2021، تنبأ بمبيعات أشهر السنة المقبلة (نموذج جدائي) باستخدام نموذج أولت وينتر، بمعلومية المعاملات $\gamma = 0,3$ $\beta = 0,2$ $\alpha = 0,1$

	2021											
الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات	20000	28000	22000	34000	19000	39000	25000	44000	21000	49000	33000	55000
	2022											
الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المبيعات	21000	29000	23000	35000	20000	40000	26000	45000	22000	50000	34000	560

التمرين الثالث: لتكن لديك السلاسل التالية:

$$y_t = 0.8\, y_{t-1} + \xi_t$$
$$y_t = \xi_t - 0.9\xi_{t-1}$$
$$y_t = 0.6y_{t-1} + 0.3y_{t-2} + \xi_t$$
$$y_t = \xi_t - 0.4\xi_{t-1} + 1.2\,\xi_{t-2}$$
$$y_t = \xi_t - 0.8\xi_{t-1} + 0.9y_{t-1}$$

عبر عن هذه السلاسل بنموذج: ARMA(p.q) ؟

أوجد دوال الارتباط الذاتي الخاص بكل سلسلة؟ هل هذه النماذج مستقرة؟ برر إجابتك.

أرسم دالة الارتباط الذاتي الخاصة بالنموذج الأخير عند الفجوات الزمنية k=1.2.3

التمرين الرابع: باقتراح معاملات دالة الارتباط الذاتي التالية:

P(5)=0.17 P(1)=0.70 P(2)= 0.49 P(3)=0.34 P(4)=0.24

- لأي سلسلة AR(P) يمكن أن تستمد هذه المعاملات؟

التمرين الخامس: في نموذج AR(2) وبمعلومية:

$\emptyset_1 = 0.7$ و P(1)=0.90 هل بالإمكان استخراج قيمة $\emptyset_2$ ؟

$\emptyset_1 = 0.8$ و P(2)=0.60 هل بالإمكان استخراج قيمة $\emptyset_2$ ؟

التمرين السادس: ليكن لدينا النموذج التالي:

$$(1 - 0.6L)(1 - L)y_t = (1 - 0.3L)\xi_t$$

حيث $\xi_t \approx (0,1)$ ، و L عامل التأخير

- لأي نموذج ARMA يمكن تصنيف هذه السلسلة؟ برر إجابتك
- هل هذا النموذج مستقر؟ هل هو قابل للقلب، برر إجابتك

- في حالة ما لم يكن النموذج مستقر، كيف يمكن إرجاعها مستقرة، برر إجابتك؟
- أحسب التوقع وتباين السلسلة الجديدة؟

التمرين السابع: ليكن لدينا النموذج التالي :

$$\boldsymbol{y_t = -4 + t + x_t}$$

حيث $\boldsymbol{x_t}$ سلسلة مستقرة متوسطها $\boldsymbol{4} = (\boldsymbol{x_t}) \in$

أحسب المتوسط الحسابي للسلسلة t ،هل هذه السلسلة مستقرة؟ برر إجابتك

حلول تمارين الفصل الرابع:

حل التمرين الأول:

تقدير معادلة المستوى، الاتجاه والموسمية للفترة الأولى:

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{S}\sum L_i = \frac{\sum(99\,500{,}00 + \cdots . + \cdots . + 111000)}{12}$$
$$= 113\,833{,}54$$

$$\hat{S}_1 = X_1 - \hat{L}_1 = 99\,500{,}00 - 113\,833{,}54 \;\; = -14\,333{,}54$$

$$\hat{T}_t$$
$$= \frac{1}{S}\sum \frac{(X_{s+i} \;\; - X_i\;)}{s}$$
$$= \frac{1}{12}\sum \frac{(106000 - 99\,500) + (114000 - 100\,202{,}50) + (\ldots.)}{12}$$
$$= 1187{,}48$$

تقدير باقي القيم باستخدام جملة معادلات:

$$\hat{L}_{13} = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-p}) + (1-\alpha)(\,\hat{L}_{t-1} + \;\hat{T}_{t-1})$$
$$\Rightarrow 0{,}1 * (106000 + 14\,333{,}54) + (1 - 0{,}1) * (113\,833{,}54 + 1187{,}48) = 115552{,}276$$

$$\hat{T}_{13} = (1-B)\hat{T}_{t-1} + B\left(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0{,}2 * (115552{,}276 - 113\,833{,}54) + (1-0{,}2) * (1187{,}48)$$
$$= 1293{,}73299$$

$$\hat{S}_{13} = \gamma\left(X_t - \hat{L}_{t-1}\right) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-P}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}3 * (106000 - 115552{,}276) + (1-0{,}3) * (-14\,333{,}54)$$
$$= -12899{,}162$$

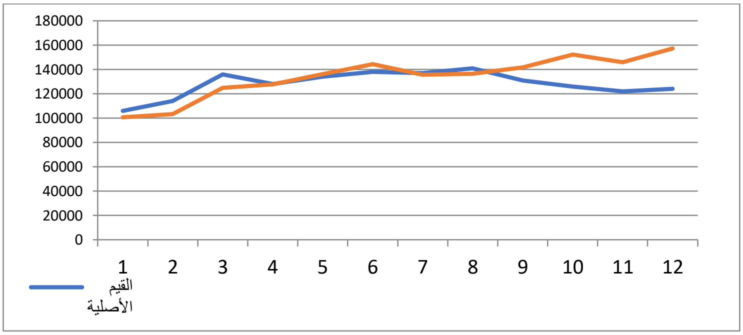
معادلة التنبؤ كما يلي:

$$\hat{F}_{t+1} = L_t + T_t + S_{t-p+1} \Rightarrow \hat{F}_{t+1}$$
$$= 113\,833{,}54 + 1187{,}48 - 14\,333{,}54$$
$$= 100\,687{,}48$$

الفترات	المبيعات	المستوى	الاتجاه	الموسمية	التنبؤ
1	99 500,00	113 833,54	1 187,48	-14 333,54	
2	100 202,50	113 833,54	1 187,48	-13 631,04	
3	119000	113 833,54	1 187,48	5 166,46	
4	118300	113 833,54	1 187,48	4 466,46	
5	124000	113 833,54	1 187,48	10 166,46	
6	129000	113 833,54	1 187,48	15 166,46	
7	117000	113 833,54	1 187,48	3 166,46	
8	113000	113 833,54	1 187,48	-833,54	
9	112000	113 833,54	1 187,48	-1 833,54	
10	117000	113 833,54	1 187,48	3 166,46	
11	106000	113 833,54	1 187,48	-7 833,54	
12	111000	113 833,54	1 187,48	-2 833,54	
13	106000	115552,276	1293,73299	-12899,162	100 687,48
14	114000	117924,512	1768,18024	-10719,083	103 214,97
15	136000	120806,777	2344,63327	8174,4876	124 859,15
16	128000	123189,624	2821,20254	4569,63369	127 617,87

17	134000	125793,098	3341,89735	9578,59147	136 177,28
18	138000	128504,85	3884,24775	13465,0659	144 301,45
19	137000	132533,542	4689,98618	3556,45823	135 555,56
20	141000	137684,53	5720,18369	411,161966	136 389,99
21	131000	142347,596	6652,797	-4687,758	141 571,17
22	126000	146383,708	7460,01937	-3898,5915	152 166,85
23	122000	151442,709	8471,81953	-14316,292	146 010,19
24	124000	156606,43	9504,5637	-11765,408	157 080,99

الرسم البياني:



حل التمرين الثاني:

- تقدير معادلة المستوى، الاتجاه والموسمية للفترة الأولى:

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{S}\sum L_i = \frac{\sum(20\,000 + \cdots . + \cdots . +55000)}{12}$$
$$= 32\,416,67$$

$$\hat{S}_1 = {X_t}/{\hat{L}_1} = 20\,000,00/32\,416,67 = 0,62$$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{S}\sum\frac{(X_{s+i} \ - X_i\ )}{s} = \frac{1}{12}\sum\frac{(21000 - 20\,000) + (29000 - 28\,000) + (\ldots.)}{12} = 114{,}083333$$

تقدير باقي القيم باستخدام جملة معادلات:

$$\begin{cases} \hat{T}_t \ = (1-B)\,\hat{T}_{t-1} + B\,\left(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}\right) & \text{معادلة الاتجاه العام} \\ \hat{L}_t = \alpha\,\dfrac{X_t}{\hat{S}_{t-p}} + (1-\alpha)\left(\,\hat{L}_{t-1} + \ \hat{T}_{t-1}\right) & \text{معادلة المستوى} \\ \hat{S}_t = \gamma\,\dfrac{X_t}{\hat{L}_t} + (1-\gamma)\hat{S}_{t-p} & \text{معادلة الموسمية} \end{cases}$$

$$\hat{L}_{13} = \alpha\,\frac{X_{13}}{\hat{S}_{t-p}} + (1-\alpha)\left(\,\hat{L}_{t-1} + \ \hat{T}_{t-1}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}1 * \frac{20\,000}{0{,}62} + (1-0{,}1)(32\,416{,}67 + \ 83{,}33) = 32653{,}75$$

$$\hat{T}_t \ = (1-B)\,\hat{T}_{t-1} + B\,\left(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0{,}2 * (32653{,}75 - 32\,416{,}67) + (1-0{,}2) * (83{,}33) = \ 1293{,}73299$$

$$\hat{S}_{13} = \gamma \frac{X_t}{\hat{L}_t} + (1-\gamma)\hat{S}_{t-p}$$

$$\Leftrightarrow 0,3 * \left(\frac{B15}{C15}\right) + (1-0,3) * E3$$

$$\Leftrightarrow 0,3 * \left(\frac{21000}{32653,75}\right) + (1-0,3) * (0,62)$$

$$= 0,62481004$$

معادلة التنبؤ كما يلي:

$$\hat{F}_{t+1} = (L_{t-1} + T_{t-1})S_{t-p} \Rightarrow \hat{F}_{13}$$

$$= (32\,416,67 + 114,083333)(0,62)$$

$$= 20\,051,41$$

الفترات	المبيعات	المستوى	الاتجاه	الموسمية	التنبؤ
1	20 000	32 416,67	83,33	0,62	
2	28 000	32 416,67	83,33	0,86	
3	22000	32 416,67	83,33	0,68	
4	34000	32 416,67	83,33	1,05	
5	19000	32 416,67	83,33	0,59	
6	39000	32 416,67	83,33	1,20	
7	25000	32 416,67	83,33	0,77	
8	44000	32 416,67	83,33	1,36	

9	21000	32 416,67	83,33	0,65	
10	49000	32 416,67	83,33	1,51	
11	33000	32 416,67	83,33	1,02	
12	55000	32 416,67	83,33	1,70	
13	21000	32653,75	114,083333	0,62481004	20 051,41
14	29000	32848,4905	153,031429	0,8694796	28 303,32
15	23000	33090,3849	201,410306	0,68358405	22 396,92
16	35000	33299,6255	243,258425	1,04950909	34 917,87
17	20000	33600,8762	303,508573	0,58884955	19 660,10
18	40000	33838,7326	351,079857	1,19678259	40 789,85
19	26000	34142,1646	411,766245	0,76830228	26 367,46
20	45000	34413,8786	466,10906	1,34241213	46 900,97
21	22000	34788,0207	540,937468	0,64319092	22 595,78
22	50000	35103,8855	604,110424	1,48540081	53 402,13
23	34000	35477,0953	678,75239	1,00010585	36 350,56
24	56000	35840,869	751,507126	1,6563993	61 344,11

حل التمرين الثالث:

التعبير عن هذه السلاسل بنموذج:**ARMA(p.q)**

$$y_t = 0.8\, y_{t-1} + \xi_t \;\Rrightarrow ARMA(1\,,) \Rrightarrow AR(1)$$
$$y_t = \xi_t - 0.9\xi_{t-1} \Rrightarrow ARMA\;(0\,,1) \Rrightarrow MA(1)$$
$$y_t = \xi_t - 0.4\xi_{t-1} + 1.2\;\xi_{t-2} \;\Rrightarrow ARMA\;(0\,,2)$$
$$y_t = \xi_t - 0.8\xi_{t-1} + 0.9y_{t-1} \;\Rrightarrow ARMA\;(1\,,1)$$

استقرارية النماذج

$$\boldsymbol{y_t = 0.8\, y_{t-1} + \xi_t}$$

بتطبيق القانون:

$$\rho(k) = 0.8 \Rightarrow \rho(1) = 0.8^1 = 0.8$$
$$\rho(2) = 0.8^2 = 0.64$$
$$\rho(3) = 0.8^3 = 0.51$$

ما يلاحظ أن الارتباط يتناقص كلما زادت الفجوة ليقترب من الصفر وهذا ما يدل على أن السلسلة مستقرة

$$y_t = \xi_t - 0.9\xi_{t-1} \Rightarrow ARMA\ (0\ ,1) \Rightarrow MA(1)$$

$$P(k) = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{1+\ \theta_1^2} & K = 1 \\ 0 & K = 2.3 \end{cases} \Rightarrow P(k)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(-0.9)}{1+\ (-0.9)^2} = 0.4972 & K = 1 \\ 0 & K = 2.3 \end{cases}$$

دالة الارتباط تتناقص حيث نلاحظ أنه ابتداء من الفترة الثانية أصبحت مساوية للصفر وهذا ما يدل على أن السلسلة مستقرة

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - 0.4\xi_{t-1} + 1.2\, \xi_{t-2} \Rightarrow ARMA\ (0\ ,2}$$

$$P(K)\begin{cases}\dfrac{(0.4)(1.2-1)}{(1+(-0.4)^2+(1.2)^2)} = -0.03 & ;K=1\\ \dfrac{-1.2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} = -0.46 & ;K=2\\ 0 & ;K=3,4\ldots\end{cases}$$

$$\boldsymbol{y_t = \xi_t - 0.8\xi_{t-1} + 0.9y_{t-1} \Rrightarrow ARMA\ (1\ ,1)}$$

$$P(K)\begin{cases}\dfrac{((0.9)-(-0.8)(1-(0.9*(-0.8))}{(1+(0.8)^2-2(0.9*(-0.8))} = 0.94 & k=1\\ (0.9)*(0.94) = 0.84 & k=2\\ (0.9)*(0.84) = 0.75 & k=3\end{cases}$$

الدالة تتناقص كلما زادت الفجوة

حل التمرين الرابع:

نقترح أنها :AR(1)

$P(1) = (-0.7)$

$P(2) = (-0.7)^2 = 0.49$

$P(3) = (-0.7)^3 = 0.34$

$P(4) = (-0.7)^4 = 0.24$

$P(5) = (-0.7)^5 = 0.17$

ومنه السلسلة من النوع AR(1)

حل التمرين الخامس:

$$\boldsymbol{\rho}(1) = \frac{\emptyset_1}{1-\emptyset_2} \Rrightarrow 0.9 = \frac{0.7}{1-\emptyset_2} \Rightarrow 0.9*(1-\emptyset_2) = 0.7$$

$$\Rightarrow 0.9 - 0.9\emptyset_2 = 0.7$$

$$\Rightarrow 0.2 = 0.9\emptyset_2 \ \Rrightarrow \emptyset_2 = 0.22$$

- $\rho(2) = \emptyset_2 + \frac{\emptyset_1^2}{1-\emptyset_2} \Rightarrow 0.6 = \emptyset_2 + \frac{0.8^2}{1-\emptyset_2}$

$$\Rightarrow 0.6 = \emptyset_2 + \frac{0.8^2}{1-\emptyset_2}$$

بالنشر والتحليل نحصل على المعادلة التالية:

$$\emptyset_2{}^2 - 0.7\emptyset_2 - 0.04 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية نحصل على القيمتين:

$$\acute{\acute{\emptyset}}_2 = 0.635\acute{\emptyset}_2 = 0.065$$

حل التمرين السادس:

- تصنيف السلسلة:

$$(1-0.6L)(1-L)y_t = (1-0.3L)\xi_t$$
$$\Rrightarrow (1-L-0.6L+L^2)\ y_t = \xi_t - 0.3L\xi_t$$
$$\Rrightarrow y_t - 1.6Ly_t + 0.6L^2y_t = \xi_t - 0.3\xi_{t-1}$$
$$\Rrightarrow y_t - 1.6y_{t-1} + 0.6y_{t-2} = \xi_t - 0.3\xi_{t-1}$$
$$\Rrightarrow y_t = 1.6y_{t-1} - 0.6y_{t-2} + \xi_t - 0.3\xi_{t-1}$$

السلسلة من نوع ARMA(2.1)

هل هذا النموذج مستقر؟ هل هو قابل للقلب، برر إجابتك

$$(1-0.6L)(1-L) = \theta(L)$$
$$\Rrightarrow \theta(L) = (1-0.6L)(1-L) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-0.6L=0 \\ 1-L=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} L = {}^{1}/_{0.6} = 1.66 > 1 \\ L = 1 \end{cases}$$

السلسلة تحوي جذر وحدة وبالتالي غير مستقرة:

$$\emptyset(L) = 1 - 0.3L$$

$$\emptyset(x) = 1 - 0.3x = 0$$

$$\Rightarrow x = {}^{1}/_{0.3} = 3.33 > 1$$

النموذج قابل للقلب

- **إرجاع السلسلة مستقرة**

$$(1-0.6L)(1-L)y_t = (1-0.3L)\xi_t$$

$$Z_t = (1-0.6L)(1-L)y_t$$

$$Z_t = (1-0.3L)\xi_t \Rightarrow Z_t = \xi_t - 0.3\,L\xi_t \Rightarrow Z_t = \xi_t - 0.3\,\xi_{t-1}$$

$\boldsymbol{Z_t \sim MA(1)}$	$\boldsymbol{y_t \sim ARIMA(0.2.1)}$

- **حساب التوقع والتباين**

$$\neg \in (Z_t) = 0$$

$$\neg V(Z_t) = \gamma(\boldsymbol{\xi_t - 0.3\,\xi_{t-1}})$$

$$\Rightarrow V(Z_t) = \in \left({\xi_t}^2\right) + (0.3)^2 \in \left({\xi_{t-1}}^2\right) - 2(0.2) \in (\xi_t, \xi_{t-1})$$

- حسب قانون التباين:

$$v(x) = \in \{[(X - \in (X)]^2\}$$

$$\boldsymbol{V(Z_t) = \gamma(\xi_t - 0.3\ \xi_{t-1}) = \in [(\xi_t - 0.3\ \xi_{t-1})^2] =}$$

لدينا:

$$(\xi_t - 0.3\ \xi_{t-1}) = 0 \Rightarrow 2(0.2) \in (\xi_t, \xi_{t-1}) = 0$$

$$\in \left(\xi_t{}^2\right) = 1 \qquad (0.3)^2 \in \left(\xi_{t-1}{}^2\right) = (0.3)^2 *$$

$$1 = 0.09$$

$$\boldsymbol{V(Z_t) = 1 + 0.09 = 1.09}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(Z_t) = 1.09}}$$

لدينا:

$$(1 - 0.6L)(1 - L)y_t = (1 - 0.3L)\xi_t$$

لنعتبر:

$$(1 - L)y_t = X_t$$

$$(1 - 0.6L)X_t = \xi_t - 0.3\ \xi_{t-1}$$

$$\Rightarrow X_t - 0.6X_{t-1} = \xi_t - 0.3\ \xi_{t-1}$$

$$\Rightarrow X_t = 0.6X_{t-1} + \xi_t - 0.3\ \xi_{t-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{X_t = 0.6X_{t-1} + \xi_t - 0.3\ \xi_{t-}}}$$

$\boldsymbol{X_t} \backsim \boldsymbol{ARMA(1.1)}$	$\boldsymbol{y_t} \backsim \boldsymbol{ARIMA(1.1.1)}$

- **حساب التوقع والتباين**

$$X_t = 0.6X_{t-1} + \xi_t - 0.3\,\xi_{t-1}$$
$$\in (X_t) = 0.6 \in (X_{t-1}) + \in (\xi_t) - 0.3 \in (\xi_{t-1})$$

$$\in (\xi_t) = 0 \qquad 0.3 \in (\xi_{t-1}) = 0$$
$$\Rrightarrow \in (X_t) = 0.6 \in (X_{t-1})$$
$$\Rrightarrow \hat{\mu} = 0.6\hat{\mu} \Rrightarrow \hat{\mu} - 0.6\hat{\mu} = 0 \quad \Rrightarrow 1.4\,\hat{\mu} = 0 \Rrightarrow \hat{\mu} = 0$$

$$\boxed{\in (\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{0}}$$

التباين:

$$V(X_t) = v(0.6X_{t-1} + \xi_t - 0.3\,\xi_{t-1})$$
$$\Rrightarrow V(X_t) = v(0.6X_{t-1} + \xi_t - 0.3\,\xi_{t-1})$$
$$\Rrightarrow \in (X_t^2) = \in [(0.6X_{t-1} + \xi_t - 0.3\,\xi_{t-1})^2]$$
$$\Rrightarrow \in (X_t^2) = (0.6)^2 \in (X_{t-1}) + \in (\xi_t) + (0.3)^2 \in (\xi_{t-1}) + 2 * 0.6 \in (X_{t-1}.\xi_t) + 2 * 0.6(-0.3) \in (X_{t-1}.\xi_{t-1}) + 2(-0.3) \in (\xi_t.\xi_{t-1})$$

لدينا:

$$2(-0.2) \in (\xi_t.\xi_{t-1}) = 0$$

$$V(X_t) = 0.36 * \sigma^2 + 1 + 0.09 + 1.2$$
$$\in (X_{t-1}.\xi_t) + 1.2 * (-0.3) \in (X_{t-1}\,.\xi_{t-1})$$

$$\in (X_{t-1}.\xi_t) = 0$$
$$\in (X_{t-1}\,.\xi_{t-1}) = \in \left(0.6X_{t-2} + \ \xi_{t-1} - 0.3\,\xi_{t-2\,,}\,\xi_{t-1}\right)$$
$$0.6 \in (X_{t-2}\ \ ,\xi_{t-1}) + \in (\xi_{t-1}\ \ ,\xi_{t-1}) - 0.3$$
$$\in (\xi_{t-2}\ \ ,\xi_{t-1})$$

$\in (X_{t-2}\ \ ,\xi_{t-1}) = 0$	$\in (\xi_{t-2}\ \ ,\xi_{t-1}) = 0$	$\in (\xi_{t-1}\ \ ,\xi_{t-1}) = 1$

ومنه

$$V(X_t) = 0.36 * \sigma^2 + 1 + 0.09 + 1.2$$
$$\in (X_{t-1}.\xi_t) + 1.2 * (-0.3) \in (X_{t-1}\,.\xi_{t-1})$$
$$\Rightarrow \sigma^2 = 0.36 * \sigma^2 + 1 + 0.09 + 1.2 \ \Rightarrow \sigma^2 - 0.36 * \sigma^2$$
$$= 1.09 + 1.2$$

$$\Rightarrow 0.64 * \sigma^2 = 2.29 \ \Rightarrow \ \sigma^2 = \frac{2.29}{0.64} = 3.58$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2 = 3.58}}$$

حل التمرين السابع:

المتوسط الحسابي للسلسلة y_t

$$\in (y_t) = \in (-4 + t + x_t) \Rrightarrow \in (-4) + \in (t) + \in (x_t)$$

$$\Rrightarrow -4 + 4 + t$$

$$\boxed{\in (y_t) = t}$$

بما أن المتوسط مرتبط بالزمن فإن السلسلة غير مستقرة.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية:

1. السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، الجزء الثاني ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،1995
2. تومي صالح(1999): مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
3. عدنان الصنوي، محاضرات في الاقتصاد القياسي، جامعة صنعاء
4. نعمة الله نجيب ابراهيم، مقدمة في مباديء الاقتصاد القياسي، مؤسسة شباب الجامعة الإسكندرية، مصر
5. المرسي السيد الحجازي، عبد القادر محمد عطية، مقدمة في الاقتصاد القياسي : المبادئ والتطبيقات، الرياض : النشر العلمي والمطابع
6. مولود حشمان، السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى، يناير 2010، ديوان المطبوعات الجامعية
7. عائشة بن عطا الله، تحليل السلاسل الزمنية في اختبار نموذج قيادة الصادرات للنمو الاقتصادي، 2020، دار الايام للنشر والتوزيع
8. والتر فاندل، السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس - جنكنز ،1992 ،دار المريخ للنشر

المراجع باللغة الاجنبية

1. *Bourbonnais, R., et Terraza . M (1998): "Analyse des Séries Temporelles en économie".PUF. Paris.*
2. *Bourbonnais, R., (2004): "Econométrie", Dunod, 5em Edition, Paris.*

3. *Box, G. E. P. and Jenkins, G.M., "Time Series Analysis, Forecasting and Control", Sanfransiscow, Holden-Day*
4. *Brockwell Peter. J. , Davis Richard. A. ,second edition(1991) Time Series : Theory and Methods. Springer.*
5. *Christian Labrousse; " Introduction à l'économétrie "; 1°ed, Dunod, Paris- 1985*
6. *Gérald .Baillargeon ; " Probabilités statistique et techniques des régression" ; SMG*
7. *Gabrielle vangrevelinghe,Econometrie,Herman ,paris,1973*
8. *Gardner Everette.S Jr. Exponential Smoothing : The State of the Art part II. Journal of Forcasting, 1985. Bauer College of Business 334 Melcher Hall ,University of Houston*
9. *G. Ammar. Classical foundations of algorithms for solving positive definite Toeplitz equations CALCOLO (1996), volume 33, issue 1-2, pp 99–113*
10. *Khaled khaldi, Methode statistique et probabilite,edition casbah,Alger,2000*
11. *Jonathan D . Cryer, Kung.-Sik. Chan. Time Series Analysis – With Applications in R ,second édition (bib. étu. 519.5 CRY)*
12. *Sandrin lardic et valerie migon,economertiedes series temporelles macro economique et financieres, economica, parix, 2002*

13. *Vandaele, W, "Applied Time Series and Box-Jenkins Models", John Wiley & Sons ,1983*

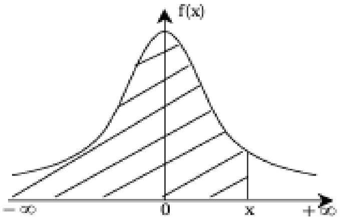
14. *Yves. Aragon. Séries temporelles avec R ,Mars 2016(bibliothèque d'étude 519.5 ARA)*

الملاحق

الملاحق

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{u^2}{2}} du$$

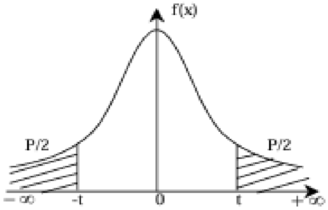
X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

Loi de Student

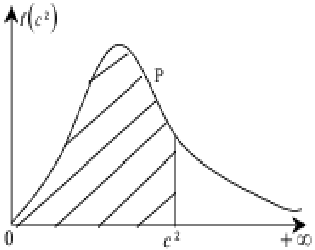
Valeurs de t ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue.



n \P	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	1%
1	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	63,6559
2	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	9,9250
3	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	5,8408
4	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	4,6041
5	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	4,0321
6	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,7074
7	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	3,4995
8	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	3,3554
9	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	3,2498
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	3,1693
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	3,1058
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	3,0545
13	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	3,0123
14	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,9768
15	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,9467
16	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,9208
17	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,8982
18	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,8784
19	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,8609
20	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,8453
21	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,8314
22	0,1271	0,2564	0,3904	0,5321	0,6858	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,8188
23	0,1271	0,2563	0,3902	0,5317	0,6853	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,8073
24	0,1270	0,2562	0,3900	0,5314	0,6848	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,7970
25	0,1269	0,2561	0,3898	0,5312	0,6844	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,7874
26	0,1269	0,2560	0,3896	0,5309	0,6840	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,7787
27	0,1268	0,2559	0,3894	0,5306	0,6837	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,7707
28	0,1268	0,2558	0,3893	0,5304	0,6834	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,7633
29	0,1268	0,2557	0,3892	0,5302	0,6830	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,7564
30	0,1267	0,2556	0,3890	0,5300	0,6828	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,7500
40	0,1265	0,2550	0,3881	0,5286	0,6807	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,7045
50	0,1263	0,2547	0,3875	0,5278	0,6794	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,6778
60	0,1262	0,2545	0,3872	0,5272	0,6786	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,6603
80	0,1261	0,2542	0,3867	0,5265	0,6776	0,8461	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,6387
100	0,1260	0,2540	0,3864	0,5261	0,6770	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,6259
120	0,1259	0,2539	0,3862	0,5258	0,6765	0,8446	1,0409	1,2886	1,6576	1,9799	2,6174
200	0,1258	0,2537	0,3859	0,5252	0,6757	0,8434	1,0391	1,2858	1,6525	1,9719	2,6006
□	0,1257	0,2533	0,3853	0,5244	0,6745	0,8416	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,5758

Loi du c^{2}

Valeur de c^{2} ayant la probabilité P d'être dépassée.



ddl/P	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%	10,0%	50,0%	90,0%	95,0%	97,5%	99,0%	99,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	30,336	41,422	44,985	48,232	52,191	55,002
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	31,336	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	32,336	43,745	47,400	50,725	54,775	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	33,336	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	34,336	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275

Lorsque $n > 30$ on peut admettre que la quantité $\sqrt{2c^{2}} - \sqrt{2n-1}$ suit une loi normale centrée réduite.