

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Études
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Biomathématique

Thème

Étude et analyse d'un modèle mathématique de la pêche

Présenté Par :

Mlle SIDI YAKOUB Wafaa

Devant le jury composé de :

Dr. BENNAFLA Djamila	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BENKHEDDA Hanane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr. MAMMAR Imane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant
Dr. RAHOU Wafaa		UAT.B.B (Ain Temouchent)	Co-encadrant

Année Universitaire 2025/2026

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le Tout-Puissant de m'avoir donné la force et le courage durant toutes mes années d'études et durant la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrante Dr. Imane MAMMAR pour l'accompagnement exceptionnel, la patience et la qualité des conseils qu'elle m'a donnés tout au long de ce travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à Dr. Wafaa RAHOU pour ses conseils et pour l'aide qu'elle m'a apportés durant la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également à Dr. Djamila BENNAFLA la présidente du jury, qui m'a fait l'honneur d'avoir acceptée la présidence de cette soutenance.

Mes remerciements vont aussi à l'examinatrice Dr. Hanane BENKHEDDA, d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie chaleureusement ma famille et mes proches pour leur soutien, leurs encouragements et leur présence tout au long de ce parcours.

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes très chers parents,
pour leur amour, leurs efforts et leurs sacrifices durant toute ma vie, pour leur soutien indéfectible, ainsi que pour leurs encouragements et toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant mes études.

A mes chères sœurs et mon cher frère,
pour leur soutien et leurs encouragements permanents.

A mes cousines,
pour leur amitié sincère, leur affection, leur présence et les beaux moments partagés ensemble, ainsi que pour leur soutien durant les moments les plus difficiles de ce parcours.

A mes tantes,
pour leur soutien et leurs prières.

A toute ma famille.

A toutes les personnes qui m'ont soutenue de près ou de loin.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des modèles bioéconomiques appliqués aux pêcheries. On analyse un modèle de pêche multi-sites avec un prix variable ainsi qu'un modèle intégrant des zones marines protégées. L'étude repose sur la réduction des systèmes, l'analyse des points d'équilibre et leur stabilité.

Mots-clés : Modèles bioéconomiques, pêcheries multi-sites, prix variable, méthode d'agrégation, stabilité, zones marines protégées.

Abstract

This work focuses on the study of bioeconomic models applied to fisheries. We analyze a multi-site fishery model with variable price as well as a model integrating marine protected areas. The study is based on system reduction, equilibrium analysis and their stability.

Keywords : Bioeconomic models, multi-site fishery, variable price, aggregation method, stability, marine protected areas.

Table des matières

Introduction	8
1 Préliminaires	11
1.1 Equations différentielles ordinaires	11
1.2 Point d'équilibre d'un système	11
1.3 Stabilité d'un système linéaire	12
1.4 Stabilité et linéarisation d'un système non linéaire	13
1.5 Inégalités différentielles	16
1.6 Le Modèle Logistique et la Fonction de Schaefer	17
2 Modèle Bioéconomique d'une pêcherie multi-sites	20
2.1 Modèle de pêche multi-sites :	20
2.1.1 Equilibre rapide :	22
2.2 Le Modèle Agrégé	24
2.2.1 Les Points d'équilibre	26
2.2.2 La Stabilité des points d'équilibre	26
2.3 Effet du nombre de DCP sur la capture dans une pêcherie durable	29
2.4 Conclusion	31
3 Modèle de la pêche intégrant des zones marines protégées	33
3.1 Présentation du modèle	33
3.1.1 Quelques résultats de base	34
3.1.2 Les Points d'équilibre	36
3.1.3 La Stabilité des points d'équilibre	37
3.2 Effet de la taille d'une zone marine protégée sur la dynamique d'une pê- cherie à prix variable	42

3.3 Conclusion	47
Conclusion	49
Bibliographie	50

Table des figures

1	<i>Exemple d'un modèle de pêche associée à un digraphe fortement connexe.</i>	9
1.1	Classification des portraits de phase du système $\dot{x} = Ax$ selon les valeurs de $\det A$ et $\text{Tr} A$.	16
1.2	Représentation du modèle de croissance logistique pour une capacité de charge $K = 100$.	18
2.1	Plan de phase du modèle agrégé	27
2.2	Comparaison entre le modèle agrégé et le modèle complet pour $\varepsilon = 1$	28
2.3	Comparaison entre le modèle agrégé et le modèle complet pour $\varepsilon = 0.1$	29
2.4	Graphe de la capture à l'équilibre Y^* en fonction du nombre de DCP	30
3.1	Dynamique du stock de poissons et de l'effort de pêche et du prix	38
3.2	Dynamique du stock de poissons et de l'effort de pêche	42
3.3	Bistabilité avec convergence soit vers CE ou (n^+, E^*)	42
3.4	Illustrations graphiques de l'effet des ZMP sur la dynamique du stock	47
3.5	Illustrations graphiques de la capture à l'équilibre et du rendement maximal soutenable	47

Introduction générale

Un modèle mathématique est une représentation simplifiée d'un phénomène réel qu'il soit physique, biologique ou économique, permettant de mieux comprendre son évolution et de prévoir son comportement. Dans le domaine des sciences de la vie, ces modèles sont devenus des outils essentiels pour analyser des systèmes complexes où plusieurs facteurs interagissent au cours du temps.

Les modèles bioéconomiques ont été développés depuis plusieurs années pour décrire les interactions entre la dynamique biologique des poissons et l'activité économique de la pêche. Leur particularité est de prendre en compte à la fois la croissance du stock de poissons et l'effort de pêche exercé par les pêcheurs. En général, la biomasse des poissons est modélisée par une croissance logistique, tandis que la capture est décrite par une fonction de type Schaefer proportionnelle à la biomasse et à l'effort de pêche.

Au cours des dernières années, plusieurs travaux ont contribué au développement des modèles bioéconomiques appliqués aux pêcheries. Les travaux fondateurs de [6] et [20] ont introduit les premières approches reliant la dynamique biologique des ressources halieutiques aux mécanismes économiques de l'exploitation. Par la suite, différents auteurs ont enrichi ces modèles en intégrant la dynamique de l'effort de pêche ainsi que les interactions entre l'offre, la demande et le prix du poissons. Ces modèles constituent aujourd'hui des outils importants pour l'étude et la gestion durable des ressources renouvelables.

Dans ce cadre, l'évolution de la ressource est généralement décrite par une équation différentielle alors que l'effort de pêche dépend de la rentabilité de l'activité. Lorsque les revenus issus des captures dépassent les coûts, l'effort augmente et inversement, il diminue lorsque l'activité devient moins rentable. Dans plusieurs modèles, le prix du poissons est supposé constant ce qui ne permet pas de représenter fidèlement les mécanismes du marché.

En réalité le prix du poissons dépend de l'offre et de la demande. Pour mieux représenter cette dynamique, certains modèles introduisent une équation supplémentaire décrivant l'évolution du prix. L'utilisation de fonctions de demande non linéaires, notamment inversement proportionnelles au prix permet de modéliser des situations où la demande reste positive même lorsque le prix devient très élevé. Cette approche est particulièrement adap-

tée aux situation de surexploitation dans lesquelles la raréfaction de la ressource entraîne une augmentation importante du prix.

Un autre aspect essentiel dans la modélisation des pêcheries est la prise en compte de la dimension spatiale. En effet, les ressources halieutiques sont souvent réparties sur plusieurs sites interconnectés, tels que les dispositifs de concentration de poissons (DCP). La structure spatiale des pêcheries peut être représentée sous forme de réseaux de sites interconnectés. Chaque site correspond à une zone de pêche ou à un dispositif de concentration de poissons et les échanges entre sites traduisent les déplacements des poissons ou des bateaux. La Fig. [1] illustre un exemple de pêcherie multi-sites modélisée sous forme de graphe orienté où les coefficients de transfert décrivent les flux entre les différentes zones [3]. Cette représentation permet de mieux comprendre l'influence de la connectivité entre les sites sur la dynamique globale de la pêcherie.

Ainsi, l'étude de modèles bioéconomiques intégrant ces différents aspects constitue un outil pertinent pour analyser les mécanismes régissant les pêcheries et pour identifier les conditions permettant d'assurer une exploitation durable des ressources halieutiques.

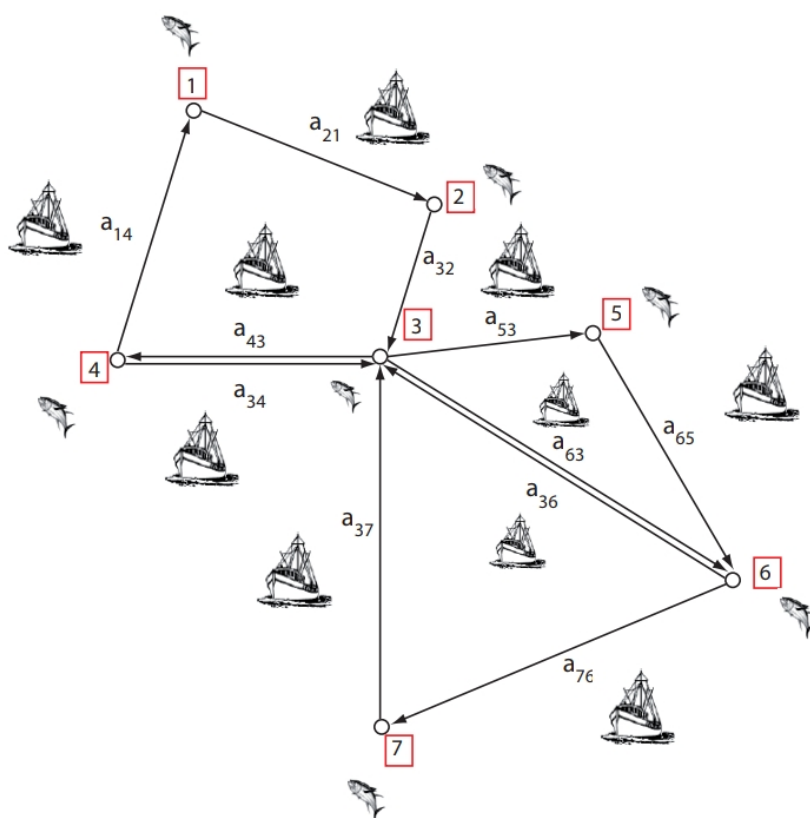


FIGURE 1 – Exemple d'un modèle de pêcherie associé à un digraphe fortement connexe.

Ce mémoire est composé de trois chapitres

Le premier chapitre rappelle quelques définitions et théorèmes nécessaires sur les équations différentielles, la stabilité et la linéarisation.

Le deuxième chapitre porte sur l'étude d'un modèle bioéconomique d'une pêcherie multi-sites avec un prix variable. On utilise la méthode d'agrégation pour réduire le système, on étudie les points d'équilibre et leur stabilité et on détermine le nombre optimal de sites qui maximise la capture durable.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un modèle de pêcherie intégrant des zones marines protégées. On analyse l'effet de la taille de cette zone sur la dynamique du stock et de l'effort de pêche et on détermine les conditions permettant d'éviter l'extinction des poissons tout en atteignant la capture maximale à l'équilibre.

On termine ce mémoire par une conclusion générale et une bibliographie.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques notions et résultats de base qu'on va utiliser tout au long de ce travail.

1.1 Equations différentielles ordinaires

Définition 1.1.1. [1] Soit t une variable réelle et $x(t)$ une fonction dérivable en t . Une équation différentielle du premier ordre est dite non autonome si elle est de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

où, f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Dans le cas contraire, l'équation devient autonome et elle est de la forme :

$$\dot{x} = f(x).$$

Définition 1.1.2. [5] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe C^1 , si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ existent et sont continues.

1.2 Point d'équilibre d'un système

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où f est une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.1. [8] *un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système (1.1) si $f(t, x^*) = 0$, pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.2.2. [8] *Le point d'équilibre x^* est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :*

$$\|x_0 - x^*\| \leq \eta \implies \|x(t) - x^*\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Dans le cas contraire, il est dit instable.

Définition 1.2.3. [8] *Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable, s'il est stable et pour une condition initiale donnée, on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition 1.2.4. [8] *Le point d'équilibre x^* est dit globalement asymptotiquement stable s'il est asymptotiquement stable et pour tout condition initiale x_0 , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition 1.2.5. [13] *Un portrait de phase d'un système dynamique de dimension deux est l'ensemble des trajectoires qui représentent les solutions, ces derniers permet de visualiser le comportement qualitatif du système.*

1.3 Stabilité d'un système linéaire

Soit le système linéaire défini par l'équation suivante :

$$\dot{x} = Ax,$$

où x est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ et A est une matrice carrée.

Définition 1.3.1. [5] *Un scalaire λ est appelé valeur propre de A s'il existe une solution non nulle $x \neq 0$ vérifiant*

$$Ax = \lambda x.$$

Théorème 1.3.1. [15]

- *Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives alors l'équilibre est asymptotiquement stable.*
- *Si il existe au moins une valeur propre de A avec une partie réelle positive alors l'équilibre est instable.*

- Si certaines valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles nulles et que toutes les autres ont des parties réelles strictement négatives, alors
 - l'équilibre est stable si les valeurs propres de partie réelle nulle sont simples.
 - l'équilibre est instable si au moins une valeur propre de partie réelle nulle est multiple.

1.4 Stabilité et linéarisation d'un système non linéaire

Considérons le système suivant [21] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

où f et g sont deux fonctions de C^1 , et soit (x^*, y^*) un point d'équilibre, vérifiant

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0, \\ g(x^*, y^*) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Posons le changement de variable

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*.$$

En dérivant u et v , et en utilisant le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \sigma(u^2, v^2, uv) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \sigma(u^2, v^2, uv), \end{aligned} \quad (\text{puisque } f(x^*, y^*) = 0)$$

De même, on aura :

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + \sigma(u^2, v^2, uv),$$

avec $\lim [\sigma(u^2, v^2, uv)] \rightarrow 0$.

Donc le système est équivalent à la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

représente la matrice jacobienne au point d'équilibre (x^*, y^*) .

Proposition 1.4.1. [1] *Toute matrice A de dimension deux (avec $\det(A) \neq 0$) peut se mettre sous l'une des formes réelles de Jordan suivantes :*

$$J = P^{-1}AP,$$

où P est une matrice de changement de base inversible. Selon le signe du discriminant

$$\Delta = (\text{tr} A)^2 - 4 \det A,$$

on distingue les cas suivants :

- Si $\Delta > 0$, la matrice est diagonalisable et admet deux valeurs propres réelles distinctes (λ_1, λ_2) .
- Si $\Delta = 0$, la matrice admet une valeur propre réelle double λ_0 et peut être diagonalisable ou mise sous forme triangulaire.
- Si $\Delta < 0$, la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et donc elle possède deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Proposition 1.4.2. [1] *Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre du système (1.3), et A la matrice jacobienne associée au système au point (x^*, y^*) qui est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres racines de l'équation caractéristique associée à la matrice A , alors on a

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A = 0,$$

où : $\text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Nature des points d'équilibres :

La nature du point d'équilibre dépend du signe du discriminant

$$\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A,$$

donc on distingue les cas suivants :

1. Pour $\Delta > 0$

Dans ce cas, la matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 . Sa forme de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- *Si $\det A > 0$ et $\operatorname{tr} A < 0$, les valeurs propres sont négatives, alors le point d'équilibre est un nœud stable.*
- *Si $\det A > 0$ et $\operatorname{tr} A > 0$, les valeurs propres sont positives, alors le point d'équilibre est un nœud instable.*
- *Si $\det A < 0$, les valeurs propres sont de signes opposées, alors le point d'équilibre est un point selle.*

2. Pour $\Delta = 0$

Dans ce cas, la matrice A admet une valeur propre double λ_0 . Sa forme de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

- *Si $\det A > 0$ et $\operatorname{tr} A > 0$, alors le point d'équilibre est un nœud instable dégénéré.*
- *Si $\det A > 0$ et $\operatorname{tr} A < 0$, alors le point d'équilibre est un nœud stable dégénéré.*

3. Pour $\Delta < 0$

Dans ce cas, les valeurs propres sont complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \text{avec} \quad \beta \neq 0.$$

La forme de Jordan est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- *Si $\operatorname{tr} A > 0$, alors le point d'équilibre est un foyer instable.*
- *Si $\operatorname{tr} A < 0$, alors le point d'équilibre est un foyer stable.*
- *Si $\operatorname{tr} A = 0$ et $\det A > 0$, alors le point d'équilibre est un centre.*

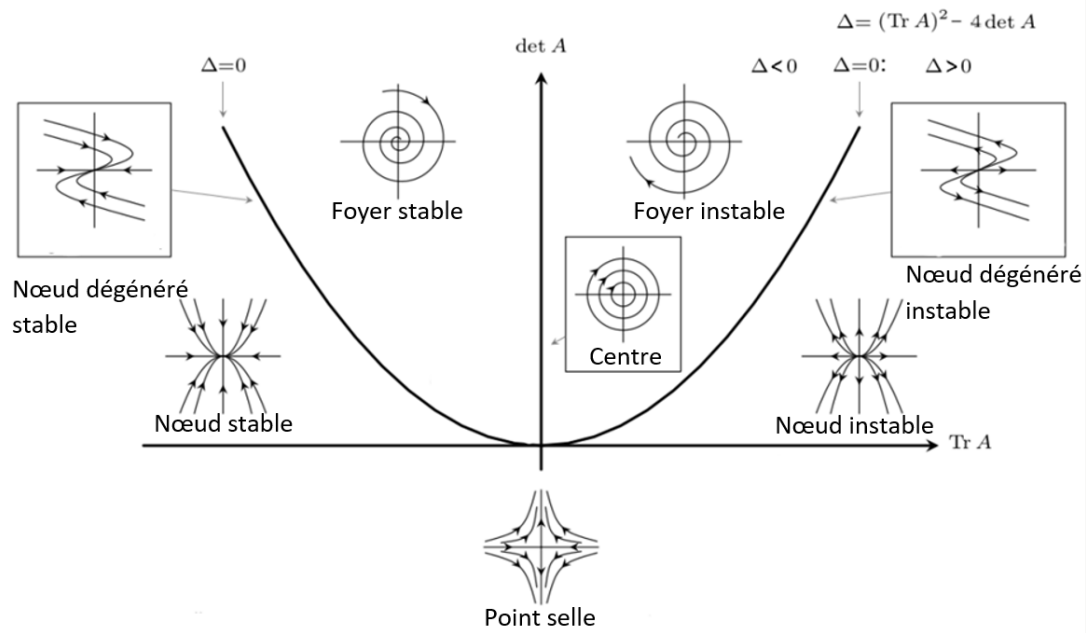


FIGURE 1.1 – Classification des portraits de phase du système $\dot{x} = Ax$ selon les valeurs de $\det A$ et $\text{Tr } A$.

Définition 1.4.1. [12] *Les systèmes non linéaires peuvent présenter plusieurs attracteurs coexistants. Un système possédant deux équilibres stables séparés par un équilibre instable est appelé **bistable**. Plus généralement, lorsqu'un système admet plus de deux attracteurs stables coexistants, il est qualifié de multistable. Dans un tel système l'évolution de la trajectoire dépend des conditions initiales lesquelles déterminent l'attracteur vers lequel le système converge.*

1.5 Inégalités différentielles

Lemme 1.5.1. [4] *Soit σ une fonction différentiable satisfaisant l'inégalité différentielle suivante :*

$$\sigma'(x) \leq K\sigma(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.5)$$

où K est une constante. Alors on a :

$$\sigma(x) \leq \sigma(a)e^{K(x-a)}, \quad \text{pour } a \leq x \leq b.$$

Preuve.

En multipliant les deux côtés de (1.5) par e^{-Kx} , on obtient :

$$0 \geq e^{-Kx}[\sigma'(x) - K\sigma(x)] = \frac{d}{dx}\{\sigma(x)e^{-Kx}\}.$$

La fonction $\sigma(x)e^{-Kx}$ possède donc une dérivée négative ou nulle, de plus elle est décroissante pour $a \leq x \leq b$. Par conséquent, $\sigma(x)e^{-Kx} \leq \sigma(a)e^{-Ka}$.

Définition 1.5.1. *Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite bornée si et seulement si*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in E : |f(x)| \leq \alpha.$$

Définition 1.5.2. [7] *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact s'il est fermé et borné.*

Définition 1.5.3. [8] *Un ensemble Ω est dit invariant pour le système (1.1) si pour tout x_0 dans Ω , la solution $x(t, x_0)$ est dans Ω pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.5.4. [8] *Un point $p \in \mathbb{R}^n$ est dit point limite de (1.1) s'il existe une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ de termes positifs tels que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, x_0) = p_n.$$

Lemme 1.5.2. [8] *Si la solution $x(t, x_0)$ est bornée pour tout $t \geq 0$, alors l'ensemble des points limites noté par Ω^+ est non vide, compact et invariant.*

Définition 1.5.5. [1] *Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée, au moins d'un côté.*

Définition 1.5.6. [1] *Un ensemble attractif est une partie fermée de l'espace des phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires issues d'un voisinage.*

Définition 1.5.7. [1] *Soit p_0 un point du domaine de définition du système (1.3). On appelle ω -limite de p_0 , l'ensemble suivant :*

$$\omega(p_0) = \bigcup_{t \geq 0} \overline{\{x(s, p_0), y(s, p_0), s \geq t\}}.$$

On peut montrer qu'un point (x, y) appartient à $\omega(p_0)$ s'il existe une suite t_i , $i \in \mathbb{N}$ qui tend vers $+\infty$, telle que $(x(t_i, p_0), y(t_i, p_0))$ tend vers (x, y) quand i tend vers $+\infty$.

1.6 Le Modèle Logistique et la Fonction de Schaefer

Définition 1.6.1. [22] *La croissance logistique décrit la dynamique d'une population dont le taux de croissance diminue à mesure que la densité augmente. Elle est modélisée par l'équation différentielle de Verhulst :*

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right),$$

où N est la taille de la population à l'instant t , $r > 0$ le taux de croissance et $k > 0$ la capacité de charge du milieu.

L'étude du modèle logistique repose sur l'analyse de la fonction

$$f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right),$$

où $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, les points d'équilibre de cette fonction sont $N_0 = 0$ et $N_1 = k$.

Par dérivation, on a $f'(N) = r \left(1 - \frac{2N}{k}\right)$.

- Au point N_0 , on obtient

$$f(N_0) = r > 0,$$

donc le point $N_0 = 0$ est instable.

- Au point N_1 , on obtient

$$f(N_1) = -r < 0,$$

donc le point $N_1 = k$ est stable.

Pour toute condition initiale positive on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k.$$

La figure 1.6.1 montre que la capacité limite correspond à l'équilibre stable de l'équation et est donc la limite des trajectoires. Elle correspond à l'effectif d'équilibre qui peut survivre dans ce milieu limité en ressources.

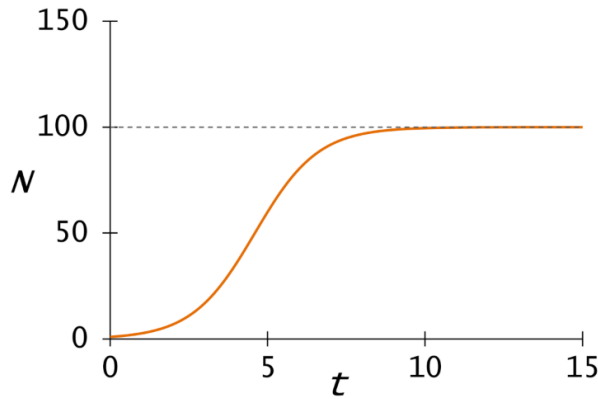


FIGURE 1.2 – Représentation du modèle de croissance logistique pour une capacité de charge $K = 100$.

Définition 1.6.2. [19] Dans les modèles bioéconomiques des pêcheries, la fonction de capture de type Schaefer suppose que la quantité de poissons capturée est proportionnelle à la biomasse disponible et à l'effort de pêche. Elle s'écrit sous la forme

$$Y = qEn,$$

où Y est la capture, q le coefficient de capturabilité, E l'effort de pêche et n la biomasse du stock.

Définition 1.6.3. [10] *Holling de type II est une fonction non linéaire, généralement modélisée par*

$$H(x) = \frac{ax}{1 + ahx},$$

où x est la densité de la ressource, a le taux d'attaque, h le temps de manipulation.

Les outils mathématiques présentées dans ce chapitre établissent le cadre théorique nécessaire à l'étude des modèles bioéconomiques abordés dans ce travail. Le chapitre suivant est consacré à la modélisation d'une pêcherie multi-sites à prix variable, à sa réduction par la méthode d'agrégation des variables, puis à l'étude qualitative de sa dynamique à travers l'analyse des points d'équilibre et de leur stabilité.

Modèle Bioéconomique d'une pêcherie multi-sites

Dans ce chapitre, on va présenter un modèle mathématique d'une pêcherie répartie sur plusieurs sites avec un prix variable. Le modèle prend en compte l'évolution dans le temps de la ressource, les mouvements des poissons et des bateaux entre les différents sites, l'effort de pêche et le prix qui varie en fonction de l'offre et de la demande. On suppose que les mouvements des bateaux et de la ressource, ainsi que la variation du prix, se produisent à une échelle de temps rapide. Ce chapitre est basé sur les travaux présentés dans l'article de Sidy et al. [14].

2.1 Modèle de pêche multi-sites :

On présente un modèle bioéconomique multi-sites décrivant la dynamique de la biomasse des poissons et de l'effort de pêche. Ce modèle prend en compte la répartition du stock entre plusieurs sites, ainsi que les déplacements des poissons et des bateaux. Il intègre également un prix variable dépendant de la demande du marché. On introduit ci-dessous le système associé au modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_s}{d\tau} = \sum_{i=1}^L m_{si}n_i - \sum_{i=1}^L m_{is}n_s + \varepsilon r_s n_s \left(1 - \frac{n_s}{k_s}\right), \\ \frac{dn_i}{d\tau} = m_{is}n_s - m_{si}n_i + \varepsilon \left(r_i n_i \left(1 - \frac{n_i}{k_i}\right) - q n_i E_i\right), \\ \frac{dE_i}{d\tau} = \beta_{i,i-1}E_{i-1} + \beta_{i,i+1}E_{i+1} - (\beta_{i-1,i} + \beta_{i+1,i})E_i + \varepsilon(-c + p q n_i E_i), \\ \frac{dp}{d\tau} = \phi \left(D(p) - q \sum_{i=1}^L n_i E_i\right). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Le modèle (2.1) décrit l'évolution de la biomasse d'une pêcherie en fonction de l'effort de pêche et des dispositifs de concentration de poissons (DCP). Chaque paramètre possède

une interprétation biologique ou économique :

n_s : la biomasse du poisson dans la mer ouverte (stock libre).

n_i : la biomasse du poisson sur le site i .

E_i : effort de pêche sur le site i .

$D(p)$: fonction de demande du marché non linéaire

$$D(p) = \frac{A}{p},$$

où p représente le prix du poisson et A la constante de la demande.

k : capacité de charge totale du stock de poisson.

k_s : capacité de charge du stock libre (avec $k_s = \alpha k$).

α : proportion du stock total qui reste libre ($0 < \alpha < 1$).

k_i : capacité de charge du stock sur le site i avec $i \in [1, L]$ et L est le nombre total de sites

$$\sum_{i=1}^L k_i = (1 - \alpha)k.$$

r_s : taux de croissance du stock libre.

r_i : taux de croissance du stock sur le site i .

ε : représente la rapidité avec laquelle le système réagit aux variations ($\varepsilon < 1$).

m_0 : constante de migration (taux de base quand la capacité de charge = 1).

m_{is}, m_{si} : taux de migration des poissons entre site i et stock libre avec :

$$m_{is} = \frac{m_0}{k_s} \quad ; \quad m_{si} = \frac{m_0}{k_i}.$$

$\beta_{i,i+1}$: taux de déplacement des bateaux entre sites voisins ($\beta_{i,i+1} = \beta_{i+1,i}$ pour $i \in [1, L - 1]$).

q : coefficient de capturabilité du poisson.

c : coût unitaire de l'effort de pêche (salaires, taxes...).

ϕ : constante positive.

On considère la côte comme une chaîne linéaire composée de plusieurs sites artificiels (Dispositifs de concentration des poissons (DCP) ou habitats artificiels (HA)), avec des poissons qui se déplacent entre ces sites et un stock libre non attaché aux sites. Le système est supposé être caractérisé par une capacité de charge globale constante, répartie entre le stock libre et les différents sites selon une proportion fixe.

On suppose que les déplacements des poissons et des bateaux se produisent à une échelle de temps rapide, tandis que la croissance des poissons et la dynamique de la pêche évoluent à une échelle de temps lente. Les poissons se déplacent entre les sites et le stock libre, alors que les bateaux se déplacent entre les sites voisins. Les taux de migration

dépendent des caractéristiques des zones, les poissons ont davantage tendance à rester sur les sites offrant une grande capacité d'accueil, c'est-à-dire sur les sites où la ressource est abondante.

Le modèle intègre également une dimension économique en considérant un prix non constant, dépendant de la ressource et de l'effort de pêche, et évoluant également à une échelle rapide.

Les différents sites sont associés aux différents dispositifs (DCP), des captures importantes dans les régions tropicales du monde sont réalisées autour de ces dispositifs (DCP) (Fonteneau et al. [9]). Dans notre modèle les bateaux de pêche capturent les poissons uniquement autour des DCP et non en haute mer. Le modèle prend en compte le déplacement des poissons de haute mer vers les DCP et inversement, ainsi que les déplacements des bateaux d'un DCP à un autre afin de capturer les poissons. On s'intéresse ici aux grands poissons pélagiques à déplacement rapide, comme le thon, capable d'être attiré par un DCP pendant une période relativement courte de deux à trois jours avant de retourner en haute mer (Moreno et al. [16]). Il est aussi évident que les bateaux de pêche se déplacent fréquemment d'un DCP à un autre afin de capturer les poissons. Par conséquent, il est pertinent de supposer l'existence de deux échelles de temps :

- une échelle rapide correspondante aux mouvements des poissons et des bateaux.
- une échelle lente correspondante à la croissance des poissons, à la capture, à l'effort de pêche et à l'investissement de la flotte.

2.1.1 Equilibre rapide :

Comme les déplacements des poissons et des bateaux se produisent plus rapidement que la croissance du stock et la dynamique globale de la pêcherie, nous considérons d'abord le système rapide. Pour cela, on pose $\varepsilon = 0$, cette hypothèse signifie que les migrations et les déplacements s'ajustent instantanément, alors que la croissance du stock et l'effort de pêche évoluent sur une échelle de temps plus longue.

On définit les variables globales comme suit :

$$n(t) = \sum_{i=1}^L n_i(t) + n_s(t) \quad \text{et} \quad E(t) = \sum_{i=1}^L E_i(t),$$

où, n est la biomasse totale de poissons et E l'effort de pêche global. Le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dn_s}{d\tau} = \sum_{i=1}^L m_{si}n_i - \sum_{i=1}^L m_{is}n_s, \\ \frac{dn_i}{d\tau} = m_{is}n_s - m_{si}n_i, \\ \frac{dE_i}{d\tau} = \beta_{i,i-1}E_{i-1} + \beta_{i,i+1}E_{i+1} - (\beta_{i-1,i} + \beta_{i+1,i})E_i, \\ \frac{dp}{d\tau} = \phi \left(D(p) - q \sum_{i=1}^L n_i E_i \right). \end{cases} \quad (2.2)$$

Afin de déterminer les points d'équilibre du système (2.2), on annule les dérivées. Donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^L m_{si} n_i^* - \sum_{i=1}^L m_{is} n_s^* = 0, \\ m_{is} n_s^* - m_{si} n_i^* = 0, \\ \beta_{i,i-1} E_{i-1} + \beta_{i,i+1} E_{i+1} - (\beta_{i-1,i} + \beta_{i+1,i}) E_i = 0, \\ D(p) - q \sum_{i=1}^L n_i^* E_i^* = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

En remplaçant $m_{is} = \frac{m_0}{k_s}$ et $m_{si} = \frac{m_0}{k_i}$, dans (2.3), on obtient

$$n_i^* = \frac{k_i}{k_s} n_s^*.$$

Puisque $n(t) = \sum_{i=1}^L n_i(t) + n_s(t)$, alors

$$\begin{aligned} n = \sum_{i=1}^L n_i^* + n_s^* &\implies n = \sum_{i=1}^L \frac{k_i}{k_s} n_s^* + n_s^* \\ &\implies n = \frac{n_s^*}{k_s} \left(\sum_{i=1}^L k_i + k_s \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$n_i^* = \frac{k_i n}{k} \quad \text{et} \quad n_s^* = \frac{k_s n}{k}.$$

Les taux de déplacement des bateaux étant supposés symétriques, c'est à dire $\beta_{i,i+1} = \beta_{i+1,i}$, donnent

$$\begin{aligned} \beta_{i,i+1} E_{i+1} = \beta_{i+1,i} E_i &\implies E_{i+1} = E_i, \\ \beta_{i,i-1} E_{i-1} = \beta_{i-1,i} E_i &\implies E_{i-1} = E_i. \end{aligned}$$

Pour montrer que tous les efforts sont égaux, on va utiliser le raisonnement par récurrence. Notons $(P_i) : E_{i+1} = E_i$ et $E_{i-1} = E_i, \forall i \in [1, L]$.

Initialisation : Pour $i = 1$, on obtient $E_2 = E_1$ et pour $i = 2$, on aura $E_3 = E_2$.

Donc, les propriétés P_1 et P_2 sont vérifiées.

Hérédité : Soit $K \in \{1, \dots, L-2\}$, tel que les propriétés (P_K) et (P_{K+1}) soient vérifiées, c'est-à-dire

$$E_{K+1} = E_K \quad \text{et} \quad E_{K+2} = E_{K+1}.$$

le but est de montrer que (P_{K+1}) et (P_{K+2}) sont vraies. En substituant, on obtient que $E_{K+2} = E_{K+1}$ et $E_{K+2} = E_{K+3}$.

Donc, (P_{K+1}) et (P_{K+2}) sont vraies, ce qui implique que, (P_i) et (P_{i+1}) sont vraies $\forall i \in [1, L]$.

En posant $E_{i+1} = E_i$ et $E_{i-1} = E_i$, on aura $E_i = E_{i+1} = E_{i+2}$, ce qui signifie que la propriété (P_i) est vraie $\forall i \in \{1, \dots, L-1\}$.

D'après le résultat obtenu, on déduit que

$$E_1^* = E_i^*,$$

On a $E(t) = \sum_{i=1}^L E_i(t)$, en remplaçant, on obtient

$$E = \sum_{i=1}^L E_i^* \implies E_i^* = \frac{E}{L}.$$

D'après (2.2), on aura

$$\begin{aligned} D(p) &= q \sum_{i=1}^L \frac{k_i n E}{k L}, \\ &= \frac{q(1-\alpha)nE}{L}, \\ &= QnE, \quad \text{avec : } Q = \frac{q(1-\alpha)}{L}. \end{aligned}$$

Mais à l'équilibre rapide $D(p) = \frac{A}{p}$, ce qui donne

$$p^* = \frac{A}{QnE}. \quad (2.4)$$

2.2 Le Modèle Agrégé

Le modèle agrégé se construit à partir des équilibres rapides et stables des poissons et des bateaux introduits dans le système complet (2.1).

En remplaçant par les équilibres rapides déterminés en (2.1), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dn_s}{d\tau} = \varepsilon r_s n_s^* \left(1 - \frac{n_s^*}{k_s}\right), \\ \frac{dn_i}{d\tau} = \varepsilon \left(r_1 n_i^* \left(1 - \frac{n_i^*}{k_i}\right) - q n_i^* E_i^* \right), \\ \frac{dE_i}{d\tau} = \varepsilon (p^* q n_i^* E_i^* - c E_i^*). \end{cases}$$

Puisque

$$n = \sum_{i=1}^L n_i + n_s, \text{ alors } \frac{dn}{d\tau} = \sum_{i=1}^L \frac{dn_i}{d\tau} + \frac{dn_s}{d\tau}.$$

En effectuant un changement d'échelle défini par $t = \varepsilon\tau$, la dynamique du stock total de poissons devient :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \sum_{i=1}^L \left(r_1 n_i^* \left(1 - \frac{n_i^*}{k_i} \right) - q n_i^* E_i^* \right) + r_s n_s^* \left(1 - \frac{n_s^*}{k_s} \right) \\ &= r_1 \sum_{i=1}^L \frac{k_i n}{k} \left(1 - \frac{n}{k} \right) - q \sum_{i=1}^L \frac{k_i n E}{k L} + r_s \frac{k_s n}{k} \left(1 - \frac{n}{k} \right) \quad \text{avec : } \sum_{i=1}^L k_i = (1 - \alpha) \text{ et } k_s = \alpha k. \\ &= n \left(1 - \frac{n}{k} \right) (\alpha r_s + (1 - \alpha) r_1) - \frac{q(1 - \alpha) n E}{L}. \end{aligned}$$

On pose :

$$r = \alpha r_s + (1 - \alpha) r_1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{q(1 - \alpha)}{L},$$

alors l'équation du stock total de poissons se réduit en :

$$\frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k} \right) - Q n E.$$

L'équation de l'effort de pêche total est :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^L \frac{dE_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^L (p^* q n_i^* E_i^* - c E_i^*) \\ &= \frac{p^* q (1 - \alpha) n E}{L} - c E \\ &= (p^* Q n - c) E. \end{aligned}$$

Le système (2.1) devient donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k} \right) - Q n E, \\ \frac{dE}{dt} = (p^* Q n - c) E, \\ D(p) = Q n E. \end{cases} \quad (2.5)$$

En substituant le prix d'équilibre $p^* = \frac{A}{Q n E}$ dans le système (2.5), on obtient **le modèle agrégé** suivant :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k} \right) - Q n E, \\ \frac{dE}{dt} = A - c E. \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.1 Les Points d'équilibre

Considérons le modèle agrégé (2.6) :

$$\begin{cases} \dot{n} = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - QnE, \\ \dot{E} = A - cE, \end{cases}$$

où $\dot{n} = \frac{dn}{dt}$ et $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$. Cherchons maintenant les points d'équilibre, posons

$$\begin{cases} \dot{n} = 0, \\ \dot{E} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - QnE = 0, \\ A - cE = 0. \end{cases}$$

- Si $\frac{QA}{rc} < 1$, le système admet deux points d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c}\right)$ et $\left(k \left(1 - \frac{QA}{rc}\right), \frac{A}{c}\right)$.
- Si $\frac{QA}{rc} > 1$, le système admet un seul point d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c}\right)$ car la valeur négative n'a aucune signification biologique.

2.2.2 La Stabilité des points d'équilibre

On va étudier la stabilité des points d'équilibre par la méthode de la matrice jacobienne.

Considérons la matrice jacobienne associée à ce système :

$$J_{(n,E)} = \begin{pmatrix} r - \frac{2rn}{k} - QE & -Qn \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne au point $\left(0, \frac{A}{c}\right)$ est donnée par :

$$J_{\left(0, \frac{A}{c}\right)} = \begin{pmatrix} r - \frac{QA}{c} & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

La trace et le déterminant de la matrice sont :

$$\begin{cases} \text{tr} J = r - \frac{QA}{c} - c, \\ \det J = -c \left(r - \frac{QA}{c}\right). \end{cases}$$

- Si $\frac{QA}{c} > r$, alors $\text{tr} J < 0$ et $\det J > 0$, le point d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c}\right)$ est stable.
- Si $\frac{QA}{c} < r$, alors : $\det J < 0$, le point d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c}\right)$ est instable (point selle).

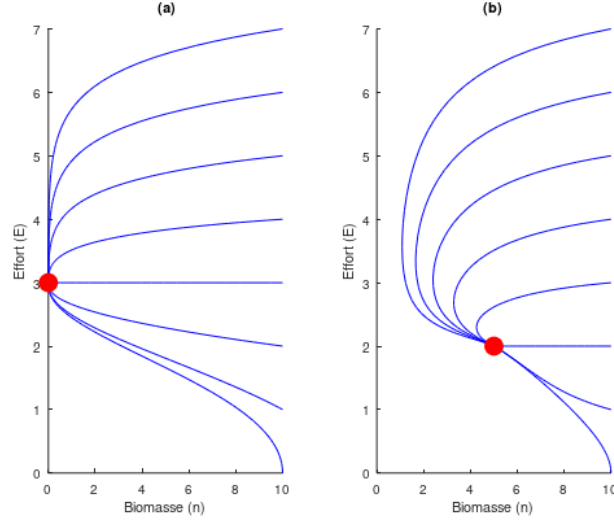


FIGURE 2.1 – Plan de phase pour les deux cas. Le premier cas correspond à une situation de surexploitation conduisant à l'extinction du stock halieutique (a). deuxième cas correspond à un équilibre stable et durable de la pêche (b). Le point rouge représente le point d'équilibre stable. Le cas (a) est obtenu pour : $m_0 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $k_1 = k_2 = 1.8$, $k_s = 0.4$, $r_s = r_1 = 0.4$, $q = \frac{20}{9}$, $\beta_{12} = \beta_{21} = 1$, $\alpha = 0.1$, $L = 2$, $c = 1$ et $A = 1.2$. Le cas (b) est obtenu pour : $m_0 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $k_1 = k_2 = 1.8$, $k_s = 0.4$, $r_s = r_1 = 4$, $q = \frac{20}{9}$, $\beta_{12} = \beta_{21} = 1$, $\alpha = 0.1$, $L = 2$, $c = 1$ et $A = 2$.

La matrice jacobienne au point $\left(k \left(1 - \frac{QA}{rc}\right), \frac{A}{c}\right)$ est donnée par :

$$J_{(n^*, E^*)} = \begin{pmatrix} -r + \frac{QA}{c} & -Qk \left(1 - \frac{QA}{rc}\right) \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

La trace et le déterminant de la matrice sont :

$$\begin{cases} trJ = -r + \frac{QA}{c} - c, \\ detJ = -c \left(-r + \frac{QA}{c}\right). \end{cases}$$

- Si $\frac{QA}{c} > r$, alors $detJ < 0$, le point d'équilibre $\left(k \left(1 - \frac{QA}{rc}\right), \frac{A}{c}\right)$ est instable (point selle).
- Si $\frac{QA}{c} < r$, alors : $trJ < 0$ et $detJ > 0$, le point d'équilibre $\left(k \left(1 - \frac{QA}{rc}\right), \frac{A}{c}\right)$ est stable.

La Figure [2.1] présente deux situations :

- (a) correspond au cas d'une surexploitation qui conduit à l'extinction du stock des poissons. Lorsque l'extinction se produit l'effort de pêche ne tend pas vers zéro

mais vers la valeur $\frac{A}{c}$. Cela signifie que la flotte de pêche continue à exploiter le stock jusqu'à la disparition complète de l'espèce, en maintenant un effort de pêche important même lorsque la biomasse des poissons devient très faible. En effet, l'équation (2.4) montre qu'à l'équilibre rapide, le prix est inversement proportionnel à la densité des poissons. Ainsi, lorsque l'espèce est proche de l'extinction le prix par unité de biomasse devient très élevé. Par conséquent, la flotte continue à pêcher car même si les captures sont faibles, les revenus restent intéressants grâce au prix élevé du poisson.

- (b) représente un second cas correspondant à une pêcherie durable. Dans ce cas il existe un équilibre positif qui est globalement asymptotiquement stable. A long terme, la densité des poissons ainsi que l'effort de pêche convergent vers des valeurs strictement positive.

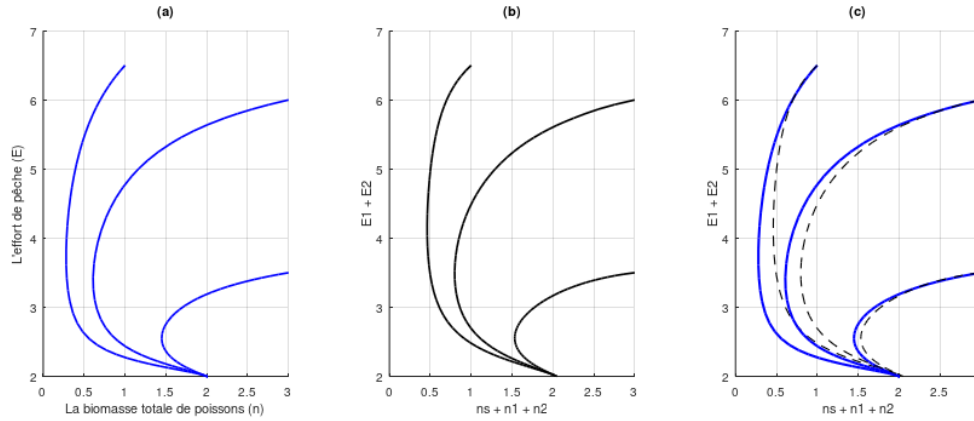


FIGURE 2.2 – Comparaison entre le modèle agrégé (en bleu) et le modèle complet (en noir) dans le cas où $\frac{QA}{c} < r$, lorsque $m_0 = 1$, $\varepsilon = 1$, $k_1 = k_2 = 1.8$, $k_s = 0.4$, $r_s = r_1 = 4$, $q = \frac{20}{9}$, $\beta_{12} = \beta_{21} = 1$, $\alpha = 0.1$, $L = 2$, $c = 1$, $A = 2$ et $\phi = 1$. Avec des valeurs initiales $(n_s(0) = 0.3, n_1(0) = 0.1, n_2(0) = 0.6, E_1(0) = 2, E_2(0) = 4.5)$, $(n_s(0) = 1, n_1(0) = 1, n_2(0) = 1, E_1(0) = 1, E_2(0) = 2.5)$ et $(n_s(0) = 1, n_1(0) = 1, n_2(0) = 1, E_1(0) = 3.5, E_2(0) = 2.5)$.

La Figure [2.2] présente une comparaison des solutions du modèle complet (2.1) pour $L = 2$ et du modèle agrégé (2.6) lorsque $\varepsilon = 1$.

- (a) représente la simulation du modèle agrégé dans le cas de deux DCP.
- (b) correspond à la simulation du modèle complet avec les mêmes conditions initiales.
- (c) montre une superposition des deux solutions. Ces solutions présentent une divergence.

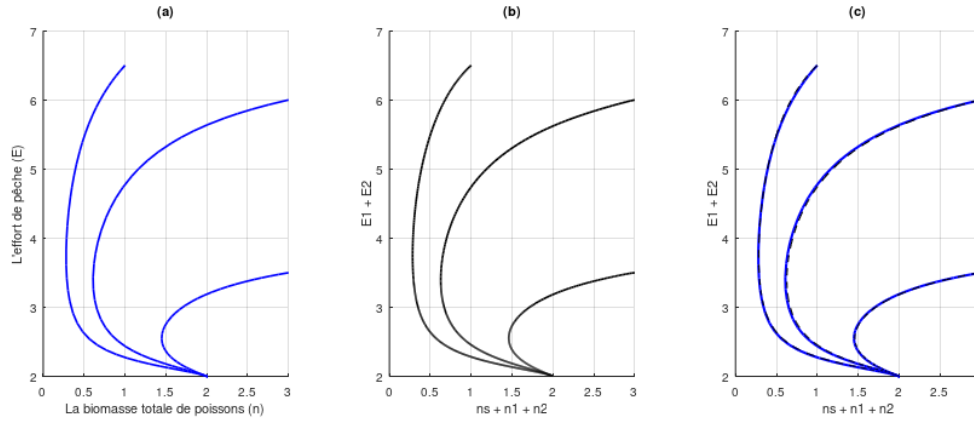


FIGURE 2.3 – Comparaison entre le modèle agrégé (en bleu) et le modèle complet (en noir) dans le cas où $\frac{QA}{c} < r$, lorsque $m_0 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $k_1 = k_2 = 1.8$, $k_s = 0.4$, $r_s = r_1 = 4$, $q = \frac{20}{9}$, $\beta_{12} = \beta_{21} = 1$, $\alpha = 0.1$, $L = 2$, $c = 1$, $A = 2$ et $\phi = 1$. Avec des valeurs initiales $(n_s(0) = 0.3, n_1(0) = 0.1, n_2(0) = 0.6, E_1(0) = 2, E_2(0) = 4.5)$, $(n_s(0) = 1, n_1(0) = 1, n_2(0) = 1, E_1(0) = 1, E_2(0) = 2.5)$ et $(n_s(0) = 1, n_1(0) = 1, n_2(0) = 1, E_1(0) = 3.5, E_2(0) = 2.5)$.

La Figure [2.3] présente les mêmes résultats pour $\varepsilon = 0.1$. On remarque que dans ce cas il est impossible de distinguer les solutions lors de leur superposition. Cette Figure illustre le résultat standard selon lequel la méthode d'agrégation peut être utilisée en pratique dès que l'ordre de grandeur de ε est d'environ 0.1.

2.3 Effet du nombre de DCP sur la capture dans une pêcherie durable

On s'intéresse maintenant à étudier les captures totales dans le second cas celui d'une pêcherie durable, en se concentrant plus particulièrement sur l'effet du nombre de sites de pêche.

Pour $L > \frac{Aq(1-\alpha)}{cr} = L_{min}$,

le système admet un unique équilibre positif et stable (n^*, E^*) où :

$$n^* = k \left(1 - \frac{QA}{cr} \right),$$

$$E^* = \frac{A}{c}.$$

La capture à l'équilibre est donnée par :

$$Y^* = Qn^*E^*. \quad (2.7)$$

On remplace n^* et E^* dans (2.7), on obtient

$$Y^* = \frac{kAq(1-\alpha)}{cL} \left(1 - \frac{Aq(1-\alpha)}{crL} \right).$$

Ainsi, on a

$$\frac{dY^*}{dL} = \frac{kAq(1-\alpha)}{cL^2} \left(1 - \frac{2Aq(1-\alpha)}{crL} \right).$$

Alors,

$$\frac{dY^*}{dL} = 0 \Rightarrow \frac{kAq(1-\alpha)}{cL^2} \left(1 - \frac{2Aq(1-\alpha)}{crL} \right) = 0,$$

Comme

$$\frac{kAq(1-\alpha)}{cL^2} > 0$$

l'égalité $\frac{dY^*}{dL} = 0$ est équivalente à :

$$1 - \frac{2Aq(1-\alpha)}{crL} = 0,$$

Donc,

$$L = L_{opt} = \frac{2Aq(1-\alpha)}{cr} = 2L_{min}.$$

Ainsi, Y^* a un maximum pour $L = L_{opt} = 2L_{min}$, comme dans l'exemple de la Figure [2.4].

Lorsque $L = L_{opt}$, on a $n^* = \frac{k}{2}$ et $Y^* = \frac{rk}{4}$, où Y^* est la production maximale équilibrée de la pêche (MSY).

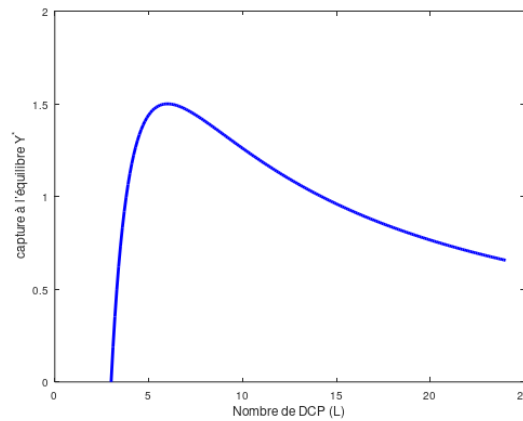


FIGURE 2.4 – Graphe de la capture à l'équilibre Y^* en fonction du nombre de DCP. Pour $q=6$, $A=1.5$, $\alpha=0.5$, $r=3$, $c=0.5$ et $k=2$. La capture est maximale si $L_{opt}=6$ et la capture maximale est $Y^*=1.5$. Le point d'équilibre est donné par : $n^*=1$ et $E^*=3$.

2.4 Conclusion

La méthode d'agrégation des variables a permis de réduire le modèle à deux variables globales n et E . Cette approche a été appliquée à une pêcherie multi-sites avec une fonction de demande non linéaire.

L'étude du modèle agrégé montre que deux cas principaux peuvent se présenter :

- si $L < L_{min}$, le seul point d'équilibre stable pour la pêcherie est $\left(0, \frac{A}{c}\right)$, correspondant à l'extinction du stock de poissons.
- si $L > L_{min}$, l'équilibre stable est donné par (n^*, E^*) avec :

$$n^* = k \left(1 - \frac{Aq(1 - \alpha)}{crL}\right) \quad \text{et} \quad E^* = \frac{A}{c}.$$

L'étude des captures autour de cet équilibre montre l'existence d'un nombre optimal de sites, $L_{opt} = 2L_{min}$ pour lequel la capture est maximale, conformément aux résultats obtenus dans des travaux antérieurs (Moussaoui et al. [18]). La valeur de cette capture maximale correspond au rendement maximal durable (MSY), égal à $\frac{kr}{4}$, et elle est atteinte pour une biomasse $n^* = \frac{k}{2}$.

Un résultat notable de cette contribution est de mettre en évidence l'importance du choix de la fonction de demande, qu'elle soit linéaire ou non linéaire. En effet, dans l'article de Auger et al. [2], la fonction de demande était supposée linéaire. Sous cette hypothèse, et pour certaines valeurs des paramètres, le modèle présente un phénomène de multi-stabilité, caractérisé par la coexistence de deux équilibres positifs stables, séparés par un troisième équilibre instable. Selon les conditions initiales, les trajectoires convergent soit vers le premier équilibre stable, interprété comme une situation de surexploitation (la densité de poissons étant très faible à l'équilibre), soit vers le second équilibre stable, correspondant à une pêcherie durable avec un stock de poissons éloigné de l'extinction. Dans le modèle présent, une fonction de demande non linéaire, inversement proportionnelle au prix, a été utilisée. L'analyse montre que, sous cette hypothèse, il n'existe pas de multi-stabilité. Il ne peut exister qu'un seul équilibre positif, qui peut être stable (La Fig. [2.1](b)). Un autre cas intéressant a été mis en évidence, correspondant à l'extinction du stock des poissons. À l'équilibre, l'effort de pêche ne tend pas vers zéro comme c'est généralement le cas, mais vers la valeur $\frac{A}{c}$. Cela signifie que la flotte de pêche continue d'exploiter le stock jusqu'à son extinction complète.

Le modèle prédit qu'avec cette fonction de demande non linéaire, la flotte de pêche se maintient à un niveau élevé même lorsque le stock devient proche de zéro. Ce résultat découle du choix d'une fonction de demande non linéaire conduisant à l'équation (2.4), dans laquelle le prix est inversement proportionnel à la densité de poissons. Ainsi, lorsque

l'espèce se rapproche de l'extinction le prix augmente fortement. Cela explique pourquoi la flotte poursuit l'exploitation jusqu'à l'extinction : même si les captures diminuent à mesure que la trajectoire s'approche de l'équilibre, le revenu reste élevé car le prix d'une ressource rare est très élevé.

Modèle de la pêche intégrant des zones marines protégées

Dans ce chapitre, on va étudier un modèle de pêche à prix variable, son évolution plus rapide que le reste du système permet de considérer comme un système lent-rapide sur deux échelles de temps, conduisant à un modèle réduit de dimension deux. On va évaluer les effets des zones marines protégées (ZMP) sur le stock et la pêche. Ce chapitre est basé sur les travaux présentés dans l'article de Ghouali et al. [11].

3.1 Présentation du modèle

On développe un modèle de pêche côtière en considérant la zone étudiée comme un site unique. Ce modèle décrit l'évolution temporelle de la pêche en tenant compte à la fois la dynamique biologique du stock de poissons, l'effort de pêche ainsi que des mécanismes économiques liés à la formation du prix sur le marché.

$$\begin{cases} \frac{dn}{d\tau} = \varepsilon \left(rn \left(1 - \frac{n}{k} \right) - \frac{qnE}{s(n+D)} \right), \\ \frac{dE}{d\tau} = \varepsilon \left(-cE + \frac{p qnE}{s(n+D)} \right), \\ \frac{dp}{d\tau} = \left(P(p) - \frac{qnE}{s(n+D)} \right), \\ n(0) > 0, \quad E(0) > 0, \quad p(0) > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Le modèle (3.1) décrit l'évolution de la population des poissons et de l'activité de pêche. La population suit une croissance logistique en l'absence de pêche, la capture est limitée par la capacité des bateaux et modélisée par une fonction de type Holling II. L'effort de pêche évolue dynamiquement et le prix du poisson varie selon l'offre et la demande, ce qui relie la dynamique biologique aux aspects économiques de la pêche.

L'interprétation biologique des paramètres du modèle ;

n : la biomasse des poissons.

E : l'effort de pêche.

p : Le prix du poisson.

ε : représente la rapidité avec laquelle le système réagit aux variations.

r : taux de croissance intrinsèque de la population.

k : capacité de charge.

q : coefficient de capturabilité.

D : niveau de demi-saturation (Holling II).

s : surface de la zone étudiée (supposée égale à 1).

c : coût constant par unité d'effort.

A : constante de la demande.

Le modèle (3.1) peut être réduit à deux équations en supposant que les dynamiques rapides atteignent instantanément leur équilibre ($\varepsilon = 0$), et en passant au temps lent $t = \varepsilon\tau$. Alors :

$$\frac{dp}{dt} = 0 \implies P(p) - \frac{qn}{n+D} \frac{E}{s} = 0 \quad \text{avec} \quad P(p) = \frac{A}{p}.$$

On déduit que le prix d'équilibre du système rapide est

$$p^* = \frac{A(n+D)}{qnE}, \quad (3.2)$$

en remplaçant p^* dans le système (3.1), on obtient un système composé de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{qnE}{n+D}, \\ \frac{dE}{dt} = -cE + A, \\ n(0) > 0, \quad E(0) > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1.1 Quelques résultats de base

Pour toute condition initiale dans l'octant positif, le système (3.3) admet une solution unique.

- Lorsque $n = 0$, nous avons $\frac{dn}{dt} = 0$, ainsi $n(t) > 0$ pour tout $t > 0$ si $n(0) > 0$.
- Lorsque $E = 0$, nous avons $\frac{dE}{dt} = A > 0$. Alors $E(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Nous déduisons donc que les solutions du système (3.3) sont positives pour tout $t > 0$.

Proposition 3.1.1.

Toute solution du système (3.3) pour laquelle la condition initiale appartient à l'intérieur de l'octant positif est bornée.

Preuve.

Soit $Y(t) = Y(n(t), E(t)) = n(t) + E(t)$, il est évident que si

$Y(0, 0) = 0$ alors on a $Y(n(t), E(t)) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, et que $Y(t) \rightarrow \infty$ lorsque $n(t) \rightarrow \infty$ et $E(t) \rightarrow \infty$.

En dérivant $Y(t)$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \frac{dn}{dt} + \frac{dE}{dt} \\ &= rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{qnE}{n+D} - cE + A \\ &\leq rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - cE + A \\ &\leq rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - c(n + E) + cn + A, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dY}{dt} + cY \leq rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) + cn + A.$$

Posons $f(n) = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) + cn$, cette fonction admet un maximum au point $n = \frac{k(r+c)}{2r}$

ce qui nous donne la valeur maximale suivante $f_{\max}(n) = \frac{k(r+c)^2}{4r}$,

en remplaçant la fonction par sa borne supérieure, l'expression se réduit à l'inégalité suivante

$$\frac{dY}{dt} + cY \leq \mu, \quad \text{où} \quad \mu = \frac{k(r+c)^2}{4r} + A.$$

En appliquant le théorème de comparaison sur les inégalités, on obtient pour tout $t \geq 0$

$$0 < Y(t) \leq Y(0)e^{-ct} + \frac{\mu}{c}(1 - e^{-ct}),$$

lorsque $t \rightarrow \infty$, l'inégalité devient

$$Y \leq \frac{\mu}{c},$$

ce qui implique que l'ensemble compact :

$$\Omega = \left\{ (n, E) \in \mathbb{R}_+^2 : n(t) + E(t) \leq \frac{\mu}{c} \right\},$$

est attractif pour toute solution positive du système (3.3).

3.1.2 Les Points d'équilibre

Considérons le système (3.3)

$$\begin{cases} \dot{n} = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{qnE}{n+D}, \\ \dot{E} = -cE + A, \end{cases}$$

où $\dot{n} = \frac{dn}{dt}$ et $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$.

Cherchons les points d'équilibre, posons

$$\begin{cases} \dot{n} = 0, \\ \dot{E} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{qnE}{n+D} = 0, \\ -cE + A = 0, \end{cases} \quad (1)$$

de l'équation (2), on trouve que $E^* = \frac{A}{c}$, en remplaçant cette valeur dans l'équation (1) on obtient l'équation suivant

$$r \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{qA}{c(n+D)} = 0,$$

en multipliant cette dernière par $(n+D)$, on obtient le polynôme noté par $F(n)$

$$F(n) = \frac{r}{k}n^2 - \frac{r}{k}(k-D)n + \left(\frac{qA}{c} - rD\right).$$

La détermination des points d'équilibre du système (3.3) revient à l'étude des racines du polynôme $F(n)$ sur l'intervalle $(0, k)$, sachant que $F(k) = \frac{qA}{c} > 0$, et donc on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\frac{r}{k}(k-D)\right]^2 - 4\left(\frac{r}{k}\right)\left(\frac{qA}{c} - rD\right) \\ \Delta &= \frac{r^2}{k^2} \left[(k-D)^2 - 4\frac{kqA}{rc} + 4kD \right] \\ \Delta &= \frac{r^2}{k^2} \left[(k+D)^2 - 4\frac{kqA}{rc} \right]. \end{aligned}$$

- Si $\left(\frac{qA}{c} - rD\right) < 0$, alors il existe un unique point d'équilibre positif (n^*, E^*) avec :

$$n^* = \frac{k-D}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(k-D)^2 - 4\frac{k}{r} \left(\frac{qA}{c} - rD\right)}. \quad (3.4)$$

- Si $\left(\frac{qA}{c} - rD\right) > 0$ et $(k+D)^2 > 4\frac{kqA}{rc}$, alors il existe deux points d'équilibre

positifs (n^+, E^*) et (n^-, E^*) avec :

$$n^+ = \frac{k-D}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(k-D)^2 - 4 \frac{k}{r} \left(\frac{qA}{c} - rD \right)},$$

et

$$n^- = \frac{k-D}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(k-D)^2 - 4 \frac{k}{r} \left(\frac{qA}{c} - rD \right)},$$

avec

$$0 < n^- < \frac{(k-D)}{2} < n^+ < n^* < k.$$

3.1.3 La Stabilité des points d'équilibre

Soit la matrice jacobienne associée à ce système :

$$J_{(n,E)} = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2n}{k} \right) - \frac{qED}{(n+D)^2} & -\frac{qn}{n+D} \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne au point $\left(0, \frac{A}{c} \right)$ est donnée par :

$$J_{\left(0, \frac{A}{c} \right)} = \begin{pmatrix} r - \frac{qA}{cD} & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

La trace et le déterminant de la matrice sont

$$\begin{cases} tr J = r - \frac{qA}{cD} - c, \\ det J = -c \left(r - \frac{qA}{cD} \right). \end{cases}$$

- Si $\left(\frac{qA}{c} - rD \right) > 0$, alors $tr J < 0$ et $det J > 0$, le point d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c} \right)$ est stable.
- Si $\left(\frac{qA}{c} - rD \right) < 0$, alors $det J < 0$, le point d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c} \right)$ est instable (point selle).

On remarque que $F(0) = \left(\frac{qA}{c} - rD \right)$. Par conséquent le signe de $F(0)$ permet de caractériser la stabilité du point d'équilibre $\left(0, \frac{A}{c} \right)$.

Remarque 3.1.1. Lorsque $F(0) > 0$, cela signifie que pour un coût suffisamment faible, la biomasse de poissons ne peut pas se maintenir, ce qui correspond à un cas de surexploitation. La Fig. [3.1](a) illustre ce phénomène d'effondrement de la ressource halieutique dû à la surpêche.

À l'extinction, l'effort de pêche ne tend pas vers zéro mais vers $\frac{A}{c}$. Cela signifie que la flottille continue d'exploiter le stock de poissons jusqu'à sa disparition complète, tout en maintenant un effort de pêche élevé même lorsque la biomasse devient presque nulle. De plus, l'équation (3.2) indique qu'à l'équilibre le prix du poisson est inversement proportionnel à la biomasse. Ainsi, lorsque la biomasse est très faible le prix unitaire augmente fortement (voir Fig. [3.1]). Par conséquent, la flottille continue à pêcher. En effet, malgré la faiblesse des captures les revenus restent élevés en raison de l'augmentation du prix.

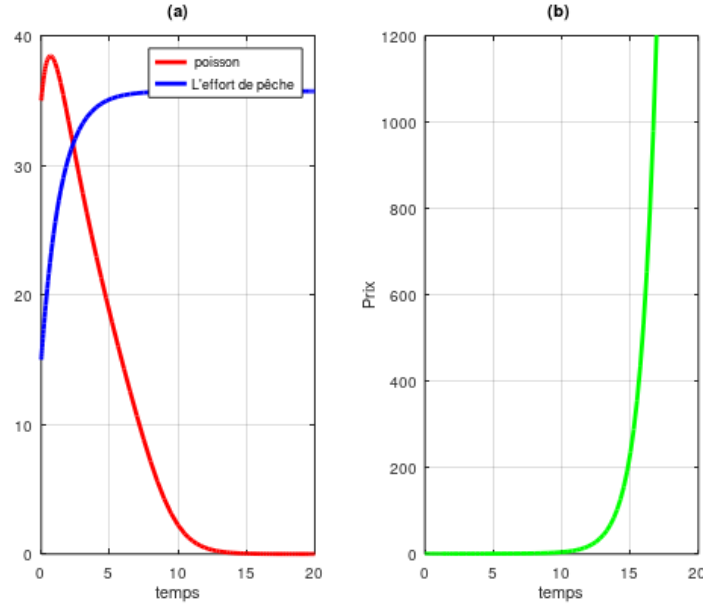


FIGURE 3.1 – Dynamique du stock de poissons et de l'effort de pêche et du prix. Cas d'un équilibre de capture stable obtenu pour les valeurs des paramètres $r = 2$, $k = 60$, $q = 2$, $D = 25$, $c = 0.7$, $A = 25$, $B(0) = 35$, $E(0) = 15$. Variation au cours du temps de la biomasse de poissons (en rouge) et de l'effort de pêche (en bleu). Le stock de poissons disparaît lorsque l'effort de pêche est devient élevé. (b) Prix en fonction du temps.

La matrice jacobienne au point (n^*, E^*) est donnée par :

$$J_{(n^*, E^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{rn^*}{k} \left(\frac{2n^* - (k - D)}{(n^* + D)} \right) & -\frac{qn^*}{n^* + D} \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Sachant que la première valeur propre $\lambda_1 = -c$ est strictement négative et la seconde est donnée par $\lambda_2 = -\frac{rn^*}{k} \left(\frac{2n^* - (k - D)}{(n^* + D)} \right)$.

Proposition 3.1.2.

1. Si $F(0) < 0$, le point d'équilibre (n^*, E^*) est unique et localement asymptotiquement stable.

2. Si $F(0) > 0$, le système (3.3) admet deux points d'équilibre distincts (n^-, E^*) qui est instable et (n^+, E^*) qui est localement asymptotiquement stable.

Preuve.

1. Si $F(0) < 0$, l'unique point d'équilibre est (n^*, E^*) .

Pour sa nature, on a

$$n^* > \frac{k - D}{2},$$

donc

$$2n^* - (k - D) > 0.$$

Comme $n^* > 0$, $k > 0$ et $(n^* + D) > 0$, on obtient

$$\lambda_1 = -c < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 < 0,$$

les deux valeurs propres étant négatives, l'équilibre (n^*, E^*) est un nœud stable.

2. Si $F(0) > 0$, il existe deux équilibres (n^-, E^*) et (n^+, E^*) , vérifiant

$$n^- < \frac{(k - D)}{2} < n^+.$$

- Au point d'équilibre (n^-, E^*) , on aura

$$J_{(n^-, E^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{rn^-}{k} \left(\frac{2n^- - (k - D)}{(n^- + D)} \right) & -\frac{qn^-}{n^- + D} \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Comme $n^- < \frac{(k - D)}{2}$, on a

$$2n^- - (k - D) < 0 \quad \implies \lambda_2 > 0,$$

$$\text{et} \quad \lambda_1 = -c < 0,$$

dans ce cas les valeurs propres sont de signes opposés, alors le point d'équilibre (n^-, E^*) est instable (point selle).

- Au point d'équilibre (n^+, E^*) , on a

$$J_{(n^+, E^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{rn^+}{k} \left(\frac{2n^+ - (k - D)}{(n^+ + D)} \right) & -\frac{qn^+}{n^+ + D} \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Comme $n^+ > \frac{(k-D)}{2}$, on a

$$2n^+ - (k - D) > 0, \implies \lambda_2 < 0$$

$$\text{et } \lambda_1 = -c < 0,$$

dans ce cas les valeurs propres sont négatives, ce qui implique que le point d'équilibre (n^+, E^*) est nœud stable.

Remarque 3.1.2. Lorsque le point d'équilibre (n^*, E^*) est localement asymptotiquement stable, les deux autres équilibres positifs (n^-, E^*) et (n^+, E^*) n'existent pas.

Le théorème suivant permet de réduire l'analyse de la stabilité globale à celle d'un système de dimension plus petite.

Théorème 3.1.1. [23] Considérons le système de classe C^1 suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \\ \dot{y} = g(x, y), & \text{avec un point d'équilibre } (x^*, y^*), \\ f(x^*) = 0, & g(x^*, y^*) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Si x^* est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}^n$ pour le système $\dot{x} = f(x)$, et si y^* est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}^m$ pour le système $\dot{y} = g(x, y)$, alors le point (x^*, y^*) est (localement) asymptotiquement stable pour le système (3.5). De plus, si toutes les trajectoires du (3.5) sont bornées pour tout $t \geq 0$, alors (x^*, y^*) est globalement asymptotiquement stable pour le système (3.5).

Par la suite, on va utiliser le théorème précédent afin de montrer que le point d'équilibre (n^*, E^*) est globalement asymptotiquement stable lorsque $F(0) < 0$.

Preuve.

L'équation vérifiée par l'effort de pêche est

$$\dot{E} = -cE + A, \quad (3.6)$$

son unique point d'équilibre est donné par $E^* = \frac{A}{c}$.

La solution générale de cette équation s'écrit $E(t) = E^* + (E(0) - E^*)e^{-ct}$, comme $c > 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = E^*,$$

ce qui montre que E^* est globalement asymptotiquement stable.

Par application du Théorème 3.1.1, l'étude de la stabilité globale de (n^*, E^*) se réduit à l'étude de la stabilité de n^* pour l'équation

$$\dot{n} = G(n),$$

où $G(n) = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{qnE^*}{n+D}$.

Comme $\left(\frac{qA}{c} - rD\right) < 0$, alors selon (3.4), on a $n^* + D > k$, ce qui implique que

$$G'(n^*) = n^* \left[-\frac{r}{k} + \frac{qA}{c} \frac{1}{(n^* + D)^2} \right] < \frac{n^*}{k} \left(-r + \frac{qA}{ck} \right) < \frac{n^*}{k} \left(-r + \frac{qA}{cD} \right) < 0.$$

Ainsi, n^* est globalement asymptotiquement stable. Comme toutes les trajectoires du système sont bornées, le Théorème 3.1.1 permet de conclure que l'équilibre (n^*, E^*) est globalement asymptotiquement stable.

Les Fig. [3.2](a) et (b) montrent un cas de pêche durable lorsque $F(0) < 0$. L'unique équilibre positif (94.6, 15) est globalement asymptotiquement stable. La biomasse de poissons ainsi que l'effort de pêche convergent vers des valeurs strictement positives.

Lorsque $F(0) > 0$ deux situations sont possibles : soit l'extinction du stock exploité, soit la convergence vers l'équilibre (n^+, E^*) (voir Fig. [3.3]). Dans ce cas, le système admet trois équilibres :

- un équilibre catastrophique stable (0, 16.7).
- un équilibre instable (9, 16.7).
- un équilibre de pêche durable stable (17, 16.7).

La dynamique de la pêche doit toujours être analysée dans le bassin d'attraction de l'équilibre de pêche durable, c'est-à-dire à droite de la séparatrice entre les deux équilibres stables. Ainsi, afin d'éviter l'extinction de la population de poissons, sa densité doit toujours être maintenue au-dessus d'un seuil critique, c'est-à-dire supérieure à une valeur d'environ 9.

À travers cette étude, nous avons montré que selon les valeurs des paramètres, il existe un risque de surexploitation conduisant à l'épuisement de la ressource et mettant les stocks de poissons en danger d'extinction.

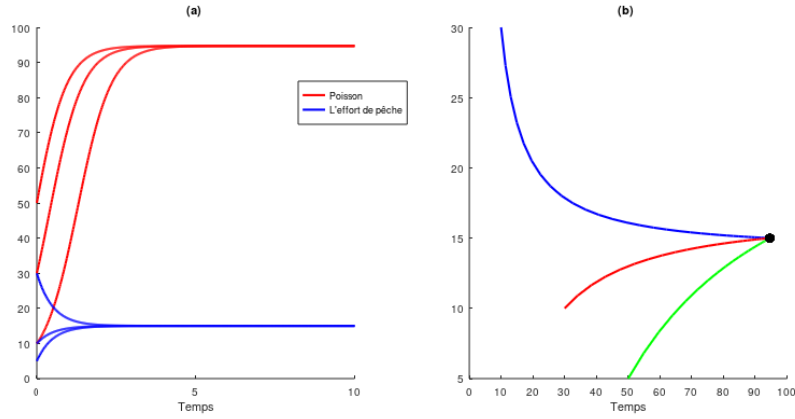


FIGURE 3.2 – Dynamique du stock de poissons et de l'effort de pêche. (a) Considérons les paramètres : $r = 2.1$, $k = 100$, $q = 1$, $D = 40$, $c = 2$, $A = 30$, nous observons une convergence vers l'unique équilibre positif (n^*, E^*) . Le portrait de phase correspondant est présenté en (b).

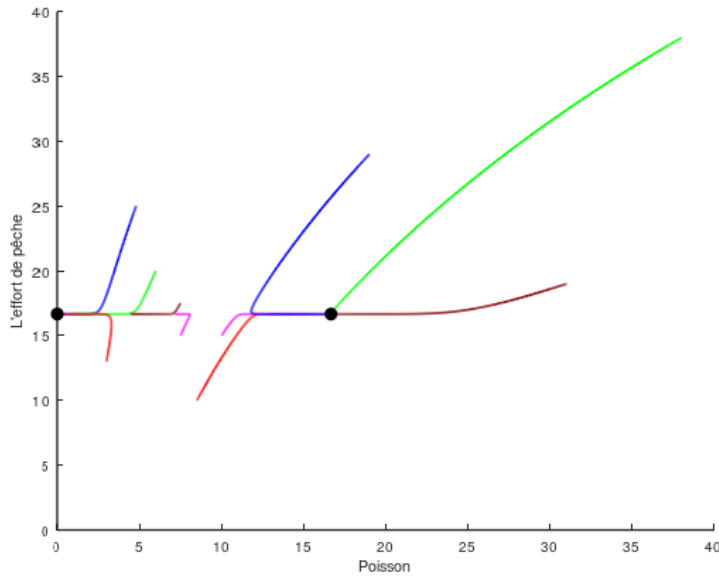


FIGURE 3.3 – Bistabilité avec convergence soit vers CE ou (n^+, E^*) Considérons les paramètres : $r = 0.6$, $k = 50$, $q = 1$, $D = 25$.

3.2 Effet de la taille d'une zone marine protégée sur la dynamique d'une pêcherie à prix variable

Considérons une situation dans laquelle le stock halieutique est fortement dégradé à la suite d'une surexploitation. Dans ce cas l'équilibre (CE) $\left(0, \frac{A}{c}\right)$ dit « catastrophique » est stable et sous certaines conditions toutes les trajectoires issues de conditions initiales données (voir 3.1) convergent vers cet équilibre. On observe alors la biomasse tendant vers

zéro, l'effort de pêche qui demeure élevé, ainsi qu'un prix qui ne cesse d'augmenter.

Afin d'éviter ce phénomène, il est nécessaire de contrôler le système de manière à rendre cet équilibre instable. Une première possibilité consiste à augmenter le coût c de l'effort de pêche, par exemple à travers l'instauration de taxes, ce qui revient à imposer la condition

$$c > \frac{Aq}{rD}.$$

Cependant, une telle mesure peut être difficilement acceptable d'un point de vue socio-économique. Une alternative consiste à introduire une zone marine protégée (ZMP), permettant la reconstitution du stock de poissons. Dans ce cadre, l'écosystème est divisé en deux zones : une zone exploitée et une zone protégée reliées par la migration des poissons. Les mouvements entre ces deux zones sont supposés rapides en comparaison avec les dynamiques locales. Par conséquent, à l'équilibre rapide la biomasse totale se répartit selon des proportions constantes entre les deux zones.

On suppose en outre que les taux de déplacement des poissons sont inversement proportionnels à la capacité de charge du site quitté, c'est-à-dire m est une constante positive et k_i la capacité de charge de la zone i avec $m_i = \frac{m}{k_i}$. Ainsi, les poissons ont tendance à rester dans les zones offrant une plus grande disponibilité en ressources. Cette hypothèse correspond au principe de distribution libre idéale (IFD).

Sur la base de ces hypothèses, le modèle en présence d'une zone marine protégée est décrit par le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} = \frac{mn_2}{k_2} - \frac{mn_1}{k_1} + \varepsilon \left(rn_1 \left(1 - \frac{n_1}{k_1} \right) \right), \\ \frac{dn_2}{d\tau} = \frac{mn_1}{k_1} - \frac{mn_2}{k_2} + \varepsilon \left(rn_2 \left(1 - \frac{n_2}{k_2} \right) - \frac{qn_2E}{(n_2 + D)(1 - s)} \right), \\ \frac{dE}{d\tau} = \varepsilon \left(-cE + \frac{pqn_2E}{(n_2 + D)(1 - s)} \right), \\ \frac{dp}{d\tau} = \frac{A}{p} - \frac{qn_2E}{(n_2 + D)(1 - s)}, \\ n_1(0) > 0, \quad n_2(0) > 0, \quad E(0) > 0, \quad p(0) > 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

où

s : représente la surface de la zone protégée.

$1 - s$: correspond à la surface de la zone de pêche.

On suppose que les mouvements des poissons entre les deux zones sont beaucoup plus rapides que les autres dynamiques du système

Ainsi, pour déterminer l'équilibre rapide, on considère le système rapide obtenu en posant

$\varepsilon = 0$ dans le système complet, ce dernier devient sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn_1}{d\tau} = \frac{mn_2}{k_2} - \frac{mn_1}{k_1}, \\ \frac{dn_2}{d\tau} = \frac{mn_1}{k_1} - \frac{mn_2}{k_2}, \\ \frac{dE}{d\tau} = -cE + \frac{p \, qn_2 E}{(n_2 + D)(1 - s)}, \\ \frac{dp}{d\tau} = \frac{A}{p} - \frac{qn_2 E}{(n_2 + D)(1 - s)}, \\ n_1(0) > 0, \quad n_2(0) > 0, \quad E(0) > 0, \quad p(0) > 0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

A partir de

$$\frac{dn_1}{d\tau} = 0,$$

on obtient

$$\frac{mn_2}{k_2} - \frac{mn_1}{k_1} = 0,$$

ce qui donne

$$n_2 = \frac{k_2 n_1}{k_1}.$$

La biomasse totale et la capacité de charge totale sont données respectivement par :

$$n = n_1 + n_2, \quad k = k_1 + k_2,$$

ce qui nous donne que

$$n_1^* = \frac{k_1 n}{k} \quad \text{et} \quad n_2^* = \frac{k_2 n}{k}.$$

Si on pose $u = \frac{k_1}{k}$, alors on obtient

$$n_1^* = un,$$

$$n_2^* = (1 - u)n.$$

La condition d'équilibre associée à la troisième équation du système rapide est obtenue en posant

$$\frac{dp}{d\tau} = 0.$$

ce qui implique que

$$\frac{A}{p} - \frac{qn_2 E}{(n_2 + D)(1 - s)} = 0,$$

d'où

$$p^* = \frac{A(1 - s) \left(n + \frac{D}{1 - u} \right)}{qnE}.$$

En remplaçant les équilibres rapide dans le système complet (3.8), on obtient un modèle réduit décrivant l'évolution de la biomasse totale du stock et de l'effort de pêche qui est

donné par :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \frac{QnE}{n+L}, \\ \frac{dE}{dt} = -cE + A, \\ n(0) > 0, \quad E(0) > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

avec $Q = \frac{q}{1-s}$ et $L = \frac{D}{1-u}$.

On remarque que le système obtenu est identique à celui étudié dans le chapitre précédent. Par conséquent, il admet un équilibre catastrophique donné par $\left(0, \frac{A}{c}\right)$. L'étude de la stabilité montre que cet équilibre est instable lorsque l'inégalité suivante est vérifiée

$$r - \frac{QA}{cL} > 0,$$

ce qui entraîne que

$$\frac{1-u}{1-s} < \frac{rcD}{Aq}. \quad (3.10)$$

Comme $\frac{Aq}{c} > rD$, on obtient que $u > s$. L'inégalité (3.10) montre qu'il est possible d'éviter l'équilibre catastrophique en choisissant correctement la taille et la capacité de charge de la zone marine protégée (ZMP). Lorsque la condition (3.10) est vérifiée le système (3.9) admet un unique équilibre positif stable (n^*, E^*) , où

$$n^* = \frac{k-L}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(k-L)^2 - 4 \frac{k}{r} \left(\frac{QA}{c} - rL \right)}, \quad (3.11)$$

$$E^* = \frac{A}{c}.$$

Par conséquent, la capture totale de la pêche à l'équilibre s'exprime par

$$Y^* = \frac{Qn^*E^*}{n^*+L} = rn^* \left(1 - \frac{n^*}{k}\right). \quad (3.12)$$

La dérivation de Y^* par rapport à la biomasse n^* conduit à l'expression suivante :

$$\frac{dY^*}{dn^*} = r \left(1 - \frac{2n^*}{k}\right),$$

en annulant cette dérivée, on obtient

$$1 - \frac{2n^*}{k} = 0,$$

d'où

$$n^* = \frac{k}{2}.$$

En remplaçant cette valeur dans l'expression de Y^* , on aura

$$Y^* = r \frac{k}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{rk}{4},$$

cette valeur correspond au rendement maximal durable (MSY).

Afin de déterminer la condition permettant d'atteindre le rendement maximal durable, on remplace $n^* = \frac{k}{2}$ dans (3.11), on obtient alors

$$\frac{k}{2} = \frac{k-L}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(k-L)^2 - 4 \frac{k}{r} \left(\frac{QA}{c} - rL \right)}.$$

En remplaçant Q et L par leurs expressions, on trouve

$$k + \frac{2D}{1-u} = \frac{4Aq}{rc(1-s)},$$

finalemt, on aura l'égalité suivante :

$$1-s = \frac{4Aq}{rc} \frac{1-u}{(1-u)k + 2D}. \quad (3.13)$$

Les paramètres s et u doivent satisfaire simultanément les condition (3.10) et (3.13) pour que la capture a l'équilibre atteigne sa valeur maximale.

Afin d'illustrer ces résultats, nous présentons deux exemples dans le cas où l'équilibre catastrophique est présent. La Fig. [3.4](a) montre le cas sans mise en place d'une zone marine protégée (ZMP), où l'on observe une diminution du stock de poissons.

La Fig. [3.4](b) présente le cas avec l'instauration d'une ZMP après un instant t . Dans ce cas, le stock se reconstitue progressivement et tend vers un état stable du système, ce qui met en évidence l'effet positif de la ZMP.

La Fig. [3.5](c) montre que la capture totale à l'équilibre atteint un maximum pour $n^* = \frac{k}{2}$, ce qui correspond au rendement maximal soutenable (MSY), conformément à l'expression (3.12). La Fig. [3.5](d) illustre la courbe des maxima locaux correspondant aux valeurs de s et u données par l'expression (3.13).

Cependant, en raison de certaines contraintes environnementales, il peut être difficile de trouver des valeurs de s et u vérifiant simultanément les conditions (3.10) et (3.13). Par exemple, dans le cas d'une distribution homogène de la densité de poissons toute zone candidate vérifie $s = u$, ce qui empêche la vérification de la condition (3.10).

Ainsi, il est nécessaire de choisir une ZMP telle que $s < u$, c'est-à-dire une zone où la

densité de poissons est supérieure à la moyenne. Les zones contenant des récifs naturels peuvent constituer de bons candidat. À défaut, la mise en place de récifs artificiels peut être envisagée afin d'attirer les poissons et d'améliorer la productivité de la ZMP.

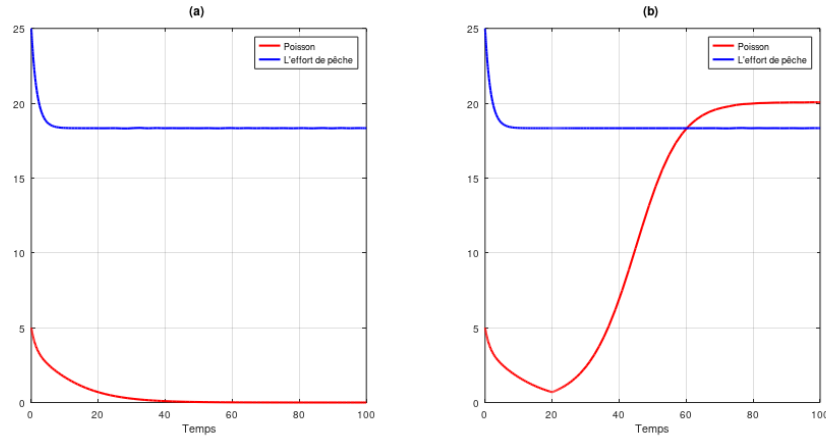


FIGURE 3.4 – Illustrations graphiques des résultats. (a) Cas d'un CE stable pour les valeurs $r = 0.6$, $k = 50$, $q = 1$, $D = 26$, $c = 0.6$, $A = 11$, avec les conditions initiale $n(0) = 5$, $E(0) = 25$. (b) Installation d'une ZMP après un temps $t = 20$, avec $u = 0.6$ et $s = 0.4$, on observe que la ZMP déstabilise l'équilibre catastrophique et conduit le système vers son état stable.

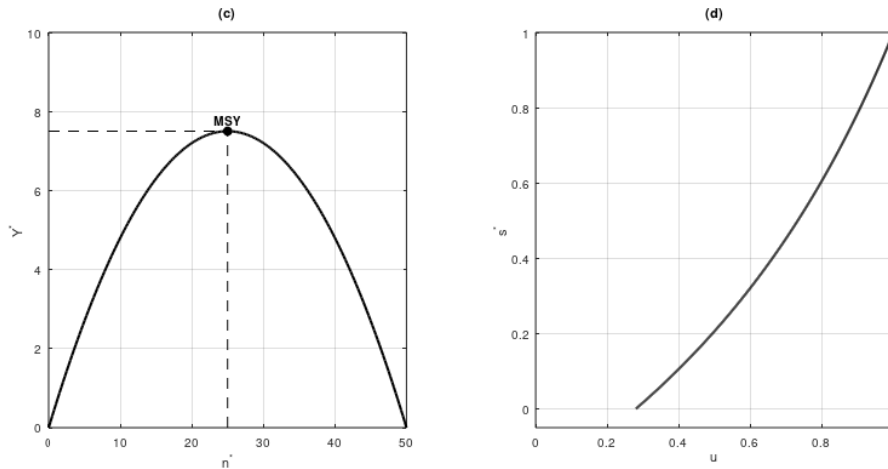


FIGURE 3.5 – Illustrations graphiques des résultats. (c) Captures à l'équilibre pour $r = 0.6$, $k = 50$, $q = 1$, $D = 26$, $c = 0.6$, $A = 11$, avec les conditions initiale $n(0) = 5$, $E(0) = 25$. (d) Courbe des valeurs maximales pour les mêmes paramètres que dans la Fig. [3.4](c)

3.3 Conclusion

On a analysé un modèle de pêche avec une fonction de demande non linéaire $\frac{A}{p}$ et une fonction de capture de type Holling. En général, une fonction de Holling engendre des solutions périodiques telles que des cycles limites. C'était le cas du modèle de pêche avec une demande linéaire $P(p) = A - \alpha p$ étudié par Moussaoui et Auger [17], dans

ce modèle, avec une demande non linéaire, ce n'est pas le cas et les ω -limites sont des équilibres.

Dans la seconde étape, on a étudié l'effet d'une zone marine protégée (ZMP).

En effet, une fonction de demande non linéaire conduit à l'apparition d'un équilibre catastrophique. À cet équilibre, l'effort de pêche ne tend pas vers zéro comme dans les cas classiques, mais vers $\frac{A}{c}$, ce qui implique que la flotte continue d'exploiter le stock jusqu'à son épuisement total. Le modèle montre également que le prix reste élevé lorsque le stock est proche de zéro.

Il devient alors essentiel de déterminer des conditions permettant d'éviter un tel équilibre. L'analyse détermine la surface et la capacité de charge optimales des ZMP, afin de prévenir l'extinction du stock et de maximiser la capture à l'équilibre.

On a ensuite considéré un modèle à deux zones, comprenant une zone de pêche et une ZMP, avec un prix à variation rapide et une migration rapide des poissons. Après réduction, on obtient le même modèle agrégé que dans le cas sans réserve, à la différence que le coefficient de capturabilité devient $Q = \frac{q}{1-s}$ et le coefficient de demi-saturation devient $L = \frac{D}{1-u}$.

À partir de ce modèle, on met en évidence l'effet des ZMP sur un stock de pêche dégradé. Le modèle permet ainsi d'analyser l'existence d'une surface et d'une capacité de charge optimales de la ZMP afin de maximiser la capture à l'équilibre.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle bioéconomique appliqué aux pêcheries avec prix variable et fonction de demande à travers deux modèles distincts.

1. Dans le deuxième chapitre, nous avons analysé un modèle multi-sites avec migration rapide des poissons et des bateaux. En appliquant la méthode d'agrégation nous avons réduit le système à deux équations globales. L'étude a montré que :

- Si $L < L_{min}$, un équilibre stable correspond à l'extinction du stock avec un effort de pêche persistant non nul.
- Si $L > L_{min}$, un équilibre positif et durable existe et la capture maximale est obtenue pour $L_{opt} = 2L_{min}$ valeur qui correspond au rendement maximal durable (MSY).

2. Dans le troisième chapitre, nous avons intégré une zone marine protégée (ZMP) en divisant l'écosystème en une zone protégée s et une zone de pêche $1 - s$.

En supposant une migration rapide des poissons nous avons obtenu un modèle réduit similaire au précédent où les paramètres deviennent $Q = \frac{q}{1-s}$

et $L = \frac{D}{1-u}$. Lorsque cette condition $\frac{1-u}{1-s} < \frac{rcD}{Aq}$ est vérifiée un unique équilibre stable apparaît.

De plus, en choisissant s et u vérifiant $1-s = \frac{4Aq}{rc} \frac{1-u}{(1-u)k + 2D}$ le rendement maximal durable est atteint. L'étude montre que l'efficacité d'une ZMP dépend de la densité des poissons dans la zone protégée. Une ZMP est optimale lorsque la densité des poissons dans la zone protégée est supérieure à la moyenne ($s < u$).

Comme perspectives de ce travail, il serait intéressant d'étudier le modèle avec d'autres fonctions de demande non linéaires afin d'analyser leur influence sur la dynamique globale de la pêche. Il serait également intéressant d'appliquer le modèle à des données réelles pour l'étude d'espèces surexploitées. Enfin, une extension possible consisterait à considérer un modèle multi-sites comportant plusieurs petites réserves marines afin d'étudier l'effet de leur nombre et de leurs tailles sur la dynamique de la pêche et la durabilité des ressources halieutiques.

Bibliographie

- [1] P. Auger, C. Lett et J-C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie*, Dunod, 2010.
- [2] P. Auger, R. Mchich, N. Raïssi, B. Kooi, *Effects of market price on the dynamics of a spatial fishery model : Over-exploited fishery/traditional fishery*, Ecological Complexity, 2010.
- [3] P. Auger, A. Moussaoui, G. Sallet, *Basic reproduction ratio for a fishery model in a patchy environment*, Acta Biotheoretica, 2012.
- [4] G. Birkhoff et G-C. Rota, *Ordinary differential equations*, 4^e éd, John Wiley & Sons, 1989.
- [5] A. Bodin, A. Hanani, G. Fichou, S. Leborgne et L. Pujo-Menjouet, *Fonction de plusieurs variables : Cours mathématique*, Exo7, Université de Lille, 2022.
- [6] C. W. Clark, *Mathematical bioeconomics*, 2^e éd, John Wiley & Sons, 1990.
- [7] J. Douchet, *Analyse : Recueil d'exercice et aide-mémoire*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2005.
- [8] A. El Jai et E. Zerrik, *Stabilité des systèmes dynamiques*, Université Moulay Ismail, 2013.
- [9] A. Fonteneau, J. Ariz, D. Gaertner, V. Nordstrom et P. Pallares, *Observed changes in the species composition of tuna schools in the gulf of guinea between 1981 and 1999, in relation with the fish aggregating device fishery*, Aquatic Living Resources, 2000.
- [10] C. S. Holling, *Some characteristics of simple types of predation and parasitism*, The Canadian Entomologist, 1959.
- [11] A. Ghouali, A. Moussaoui, P. Auger et T. Nguyen huu, *Optimal placement of marine protected areas to avoid the extinction of the fish stock*, Journal of Biological Systems, 2022.
- [12] E. M. Izhikevich, *Dynamical systems in neuroscience : The geometry of excitability and bursting*, MIT Press, 2007.

- [13] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3^e éd, Prentice Hall, 2002.
- [14] S. Ly, P. Auger et M. Balde, *A bioeconomic model of a multi-site fishery with non-linear demand function : Number of sites optimizing the total catch*, Acta Biotheor, 2014.
- [15] D. Merkin, *Introduction to the theory of stability*, Springer, 1996.
- [16] G. Moreno, L. Dagorn, G. Sancho et D. Italo, *Fish behaviour from fishers' knowledge : The case study of tropical tuna around drifting fish aggregating devices (DFADs)*, Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences, 2007.
- [17] A. Moussaoui et P. Auger *A bioeconomic model of a fishery with saturated catch and variable price : Stabilizing effect of marine reserves on fishery dynamics* , Ecological Complexity, 2021.
- [18] A. Moussaoui, P. Auger et C. Lett, *Optimal number of sites in multi-site fisheries with fish stock dependent migrations*, Mathematical Biosciences & Engineering, 2011.
- [19] M. B. Schaefer, *Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries*, Journal of the Fisheries Research Board of Canada, 1957.
- [20] V. L. Smith, *Economics of production from natural resources*, American Economic Review, 1968.
- [21] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos : With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, 2^e éd, CRC Press, 2018.
- [22] P. F. Verhulst, *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population* , Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1845.
- [23] M. Vidyasagar, *Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions : Stability and stabilizability*, IEEE Transactions on Automatic Control, 1980.