

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Biomathématique

Thème

Existence de solutions d'un problème aux limites avec impulsions

Présenté Par :

Mlle BENAÏSSA RAHAL Hanene

Devant le jury composé de :

Dr.SAKHI Hanane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr.MEKHALFI kheira	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr.BELLATAR ZOKHA	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2025/20265

Dédicace

*Je dédie ce mémoire à celles et ceux qui m'ont portée, encouragée
et éclairée tout au long de mon parcours.*

*À mes parents, Said et Zahira, pour leurs sacrifices, leur tendresse
et leur foi inébranlable en moi.*

*À mes sœurs, complices de toujours, et à mon frère, pour leur
soutien silencieux et leurs sourires sincères.*

*À ma grande famille, chacune et chacun de ses membres, pour leur
bienveillance discrète et leur affection précieuse.*

*À mes amis, pour les rires partagés et les mots réconfortants dans
les jours de doute.*

*À tous mes enseignants et enseignantes, pour avoir semé en moi le
goût du savoir et de la rigueur.*

Ce travail est le fruit de votre lumière.

Hanene

Remerciements

Avant toute chose, je rends grâce à Allah qui m'a accordé la force, le courage et la volonté d'aller au bout de ce travail.

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à **Dr. BELATTAR** pour sa précieuse aide, ses judicieux conseils, ainsi que pour son savoir-faire, sa compétence et la richesse de ses connaissances dont j'ai grandement bénéficié.*

*J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury — **Dr.BELLATAR, Dr.MEKHALFI** et **Dr.SAKHI** — qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire et de siéger dans ce jury.*

Un grand merci du fond du cœur à mes chers parents, pour leur amour indéfectible, leurs conseils éclairés, ainsi que leur soutien moral et matériel.

Je remercie chaleureusement mes sœurs pour leurs encouragements constants et leur présence réconfortante, et tout spécialement ma sœur Imane pour avoir été là et s'être tenue à mes côtés.

***Imane** s'est tenue à mes côtés quand j'en avais plus que jamais besoin, et sa seule présence suffisait à me donner la force de continuer.*

Enfin, je suis reconnaissante envers toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur aide, leur écoute ou leur soutien pour mener à bien ce travail d'initiation à la recherche.

À toutes et à tous, merci.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Opérateur compact	3
1.2 Définitions et notions fondamentaux	4
1.3 Le degré topologique	5
1.4 Théorèmes de point fixe	6
1.5 Calcul fractionnaire	10
1.5.1 Fonction Gamma	10
1.5.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	11
1.5.3 Dérivée fractionnaire de Caputo	12
1.5.4 Relation entre intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Caputo . . .	13
1.6 Les équations différentielles ordinaires	14
1.6.1 Les équations différentielles ordinaires d'ordre entière	14
1.6.1.1 Equation différentielle du premier ordre	14
1.6.1.2 Equation différentielle du second ordre	14
1.6.2 Les équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire	15
1.7 Problème aux limites	15
2 Solutions du problèmes différentiels impulsifs	19
2.1 Espace fonctionnel PC^i	19
2.2 Problème de Cauchy avec implusions	21
2.3 Problème aux limites implusive du second ordre	24
2.4 Problème aux limites implusive généralisé du second ordre	27
3 Existence de solutions d'un problème aux limites avec impulsion(Équations différentielles ordinaires)	34
3.1 La solution du problème	34
3.2 Existence et unicité du problème	35
3.2.1 Théorèmes d'existence et d'unicité de solution du problème	36
3.2.2 Théorèmes d'existence de solution du problème	39

4	Problème aux limite pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires	52
4.1	Solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires impulsives	53
4.2	Existence et unicité du problème	59
4.2.1	Théorème d'existence et d'unicité de solution	60
4.2.2	Théorème d'existence de solution du problème	62
	Conclusion	70
	Bibliographie	71

Introduction

Les équations différentielles constituent un outil fondamental dans la modélisation de nombreux phénomènes issus des sciences physiques, biologiques et de l'ingénierie. Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. Son ordre est déterminé par la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation. Parmi les problèmes les plus étudiés dans ce domaine, on trouve les problèmes de Cauchy ainsi que les problèmes aux limites, qui jouent un rôle important dans l'étude des phénomènes d'évolution (voir [15]).

Le calcul fractionnaire, qui généralise les dérivées et les intégrales d'ordre entier à des ordres non entiers, représente aujourd'hui un domaine de recherche très actif. Les équations différentielles fractionnaires offrent une meilleure description de plusieurs phénomènes à mémoire et à hérédité rencontrés en physique, chimie, viscoélasticité et théorie du contrôle.

Par ailleurs, les équations différentielles impulsives ont connu un développement considérable depuis les travaux de Millman et Myshykytis dans les années 1960. Par la suite, plusieurs chercheurs tels que Halanay, Wexler, D. Bainov et L. Byszewski ont contribué à l'enrichissement de cette théorie en obtenant de nombreux résultats concernant l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions (voir [17, 4, 14]).

Les problèmes aux limites impulsifs permettent de modéliser des phénomènes réels présentant des changements brusques et instantanés à certains instants déterminés. Ces problèmes interviennent dans plusieurs domaines tels que les systèmes mécaniques avec impacts, les systèmes biologiques, la dynamique des populations, les battements du cœur, la circulation sanguine, le contrôle optimal ainsi que certains modèles financiers (voir [5]).

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions de certains problèmes aux limites impulsifs d'ordre entier et fractionnaire. Pour établir les résultats principaux, nous utiliserons des outils d'analyse fonctionnelle, notamment le théorème du point fixe de Banach ainsi que le théorème du point fixe de Leray-Schauder.

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour deux types de problème :

- Un problème aux limites avec impulsions du second ordre (voir [5]).
- Un problème aux limites fractionnaire avec impulsions (voir [21]).

Ce travail est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des concepts de base et des outils nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous déterminons la forme des solutions de trois types de problèmes impulsifs.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de solution d'un problème aux limites avec impulsions suivant :

$$\begin{cases} \left((p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = F(t, x(t), x'(t)), & t \neq t_k, t \in [0, 1], \right. \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k), x'(t_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ \Delta x'(t_k) = x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = J_k(x(t_k), x'(t_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Où :

- $x \in \mathbb{R}$ est la variable d'état, et $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux.
- I_k et J_k sont des fonctions représentant les discontinuités de saut de x et x' aux instants $t_k \in (0, 1)$.

En utilisant, le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Leray-Schauder .

Dans le quatrième chapitre, nous examinons l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo avec impulsions suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^q x(t) = \omega(t) f(t, x(t), x'(t)), & 1 < q < 2, t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, \dots, n, \\ \Delta x'(t_k) = J_k(x(t_k)), & k = 1, \dots, n, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1 x'(0) = 0, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2 x'(1) = 0. \end{cases}$$

Où :

- ${}^c D_{0+}^q$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, avec $1 < q < 2$.
- ω est une fonction continue définie sur J à valeur dans $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $f : \mathbb{J} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue .
- Les fonctions $I_k, J_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues pour $k = 1, \dots, n$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes réelles vérifiant $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \neq 0$.

En appliquant, le théorème de Banach et le théorème du point fixe de Leray-Schauder.

À la fin, nous terminerons par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Opérateur compact

Définition 1.1.1. [9] Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. On dit que T est un opérateur compact si, pour tout sous-ensemble borné $B \subset X$, l'ensemble $T(B)$ possède une adhérence compacte dans Y .

Proposition 1.1.1. [9] Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'opérateur T est compact.
2. L'image par T de la boule unité de X est relativement compacte dans Y .
3. Pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X , il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(T(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans Y .

Remarque 1.1.1. Si f est de rang fini et continue, alors elle est compact.

Théorème 1.1.1 (Théorème d'Ascoli-Arzelà [18]). Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et J un ensemble compact d'un espace métrique (J, d) . Considérons $M \subset C(J, X)$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in J} \|f(t)\|_X, \quad f \in M.$$

Alors M est relativement compact dans $(C(J, X), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si :

1. **Uniformément borné :**

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|f\|_\infty \leq \delta, \quad \forall f \in M.$$

2. **Équicontinuité :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } d(t_1, t_2) < \delta(\varepsilon) \implies \|f(t_1) - f(t_2)\|_X < \varepsilon, \quad \forall f \in M, \forall t_1, t_2 \in J.$$

Sous ces conditions, toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ admet une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur J , c'est-à-dire :

$$\exists f \in C(J, X) \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_\infty = 0.$$

1.2 Définitions et notions fondamentaux

Définition 1.2.1 (Continuité). [15] Soient $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(F, \|\cdot\|_\infty)$ deux espaces normés et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est continue en $x_0 \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x - x_0\|_\infty < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_\infty < \varepsilon.$$

L'application f est dite continue sur E si elle est continue en tout point $x_0 \in E$.

Définition 1.2.2 (Application homotopie). [12] Soient X et Y deux espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. Une homotopie entre f et g est une application continue

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

telle que $H(0, x) = f(x)$ et $H(1, x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.3 (Fonction Carathéodory). [12] Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite de Carathéodory si :

- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable ,
- pour presque tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue ,
- pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe une fonction $m_K \in L^1(J)$ telle que

$$\|f(t, x)\| \leq m_K(t),$$

pour presque tout $t \in J$ et tout $x \in K$.

Théorème 1.2.1 (Équation d'Euler-Lagrange). [10] Soit la fonctionnelle

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx$$

avec $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Si $y \in C^2([a, b])$ réalise un extremum de J , alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0.$$

Cette équation est appelée équation d'Euler-Lagrange.

Exemple :

On considère la fonctionnelle

$$I(x) = \int_0^1 \left[(x'(t))^2 - \pi^2 x^2(t) \right] dt,$$

avec $x(0) = x(1) = 0$.

On a

$$L(t, x, x') = (x')^2 - \pi^2 x^2.$$

Alors

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\pi^2 x, \quad \frac{\partial L}{\partial x'} = 2x'.$$

Ainsi, l'équation d'Euler–Lagrange est donnée par

$$-2\pi^2 x - \frac{d}{dt}(2x') = 0 \implies x'' + \pi^2 x = 0.$$

Définition 1.2.4 (Opérateur complètement continu). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est complètement continue si elle est continue et si l'image de tout ensemble borné de E est relativement compacte dans F .*

Définition 1.2.5 (Principe de super position). *[11] Soit $L : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire homogène. Si $(x_k)_{k \in I} \subset E$ sont des solutions de l'équation homogène :*

$$L(x_k) = 0, \quad \forall k \in I$$

alors toute combinaison linéaire finie :

$$x = \sum_k \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

est aussi une solution, c'est-à-dire :

$$L(x) = 0.$$

Exemple 1.2.0.1. *L'opérateur $Lx = (p(t)x'(t))' + q(t)x(t)$ étant linéaire, si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation homogène $Lx = 0$, alors toute combinaison linéaire $\alpha x_1 + \beta x_2$ est également une solution.*

De plus, si x_p est une solution particulière de $Lx = f$ et x_h une solution de $Lx = 0$, alors $x = x_p + x_h$ est solution de $Lx = f$.

1.3 Le degré topologique

Le degré topologique est un outil fondamental en analyse non linéaire, notamment dans l'étude des équations différentielles et des problèmes aux limites ([9]).

Définition 1.3.1. *Soit E un espace de Banach, $U \subset E$ un ouvert borné et $f : \overline{U} \rightarrow E$ une application continue telle que*

$$f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial U.$$

Le degré topologique de f par rapport à U et 0, noté $\deg(f, U, 0)$, est un entier relatif qui mesure le "nombre de solutions" de l'équation $f(x) = 0$ dans U .

Proposition 1.3.1. *Le degré topologique vérifie les propositions suivantes :*

— Si $f(x) = x$, alors

$$\deg(I, U, 0) = 1.$$

— Si $U = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors

$$\deg(f, U, 0) = \deg(f, U_1, 0) + \deg(f, U_2, 0).$$

— Si $H : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow E$ est une homotopie telle que

$$H(\lambda, x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial U, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

alors

$$\deg(H(0, \cdot), U, 0) = \deg(H(1, \cdot), U, 0).$$

— Si

$$\deg(f, U, 0) \neq 0,$$

alors il existe $x \in U$ tel que

$$f(x) = 0.$$

1.4 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, nous introduisons les théorèmes du point fixe pour établir l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites avec impulsions.

Définition 1.4.1. Soit (X, d) un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ une application. On dit que $x \in X$ est un point fixe de T s'il vérifie

$$T(x) = x.$$

On appelle ensemble des points fixes de T l'ensemble

$$\text{Fix}(T) = \{x \in X \mid T(x) = x\}.$$

Remarque 1.4.1. Tout espace de Banach est un espace métrique complet.

Définition 1.4.2 (Contractante). Soit E un espace de Banach et $T : E \rightarrow E$ une application. On dit que T est une contraction (au sens de Banach) s'il existe une constante $k \in [0, 1)$ telle que

$$\|T(x) - T(y)\|_E \leq k \|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in E.$$

Théorème 1.4.1 (Contraction de Banach). [3] Soit X un espace de Banach et soit $T : X \rightarrow X$ une contraction, Alors T admet un unique point fixe .

Preuve. On va montrer l'existence :

Soit $x_0 \in E$ un point quelconque. On définit la suite (x_n) par :

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

La suite (x_n) est bien définie dans E .

Puisque T est une contraction, alors

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\|_E &= \|T(x_n) - T(x_{n-1})\|_E \\ &\leq k \|x_n - x_{n-1}\|_E \\ &\leq k(k \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_E) \\ &\leq k^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_E \\ &\leq \dots \\ &\leq k^n \|x_1 - x_0\|_E. \end{aligned}$$

Pour $n \geq p \geq 0$ l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \|x_n - x_p\|_E &= \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{p+1} - x_p)\|_E \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\|_E + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_E + \dots + \|x_{p+1} - x_p\|_E = \sum_{i=p}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|_E \\ &\leq \sum_{i=p}^{n-1} k^i \|x_1 - x_0\|_E \\ &= \|x_1 - x_0\|_E (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{n-1}) \\ &= \|x_1 - x_0\|_E k^p (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-p-1}) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} \|x_1 - x_0\|_E. \end{aligned}$$

Comme $k \in [0, 1[$, on a $k^p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, donc

$$\|x_n - x_p\|_E \rightarrow 0.$$

Ainsi, (x_n) est une suite de Cauchy dans E .

De plus, puisque E est un espace de Banach, alors il existe $u \in E$ tel que

$$x_n \rightarrow u.$$

et

$$\|T(x_n) - T(u)\|_E \leq k \|x_n - u\|_E \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc :

$$T(x_n) \rightarrow T(x).$$

Or $T(x_n) = x_{n+1}$ et $x_{n+1} \rightarrow x$, donc

$$T(x) = x.$$

Ainsi, x est un point fixe de T .

Pour unicité, supposons qu'il existe $v \in E$ un autre point fixe de T tel que $v \neq u$. Alors

$$\|u - v\|_E > 0.$$

Puisque u et v sont des points fixes, alors

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &= \|T(u) - T(v)\|_E \\ &\leq k \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - k) \|u - v\|_E \leq 0.$$

De plus, $k \in [0, 1[$ ce qui donne $1 - k > 0$, donc

$$\|u - v\|_E = 0.$$

Alors

$$u = v.$$

Théorème 1.4.2 (Leray-Schauder). [12] Soit E un espace de Banach, $U \subset E$ un ouvert borné contenant 0, et soit $F : \overline{U} \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. On considère l'homotopie

$$H(\lambda, x) = \lambda F(x), \quad \lambda \in [0, 1], \quad x \in \overline{U}.$$

Si $H(\lambda, x) \neq x, \forall x \in \partial U, \forall \lambda \in [0, 1]$, alors F admet au moins un point fixe dans U .

Preuve. On considère l'homotopie

$$H(\lambda, x) = x - \lambda F(x), \quad (\lambda, x) \in [0, 1] \times \overline{U}.$$

Par hypothèse

$$H(\lambda, x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial U, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le degré topologique

$$\deg(I - \lambda F, U, 0),$$

est bien défini.

Par invariance du degré par homotopie, on obtient

$$\deg(I - F, U, 0) = \deg(I, U, 0).$$

On sait que

$$\deg(I, U, 0) = 1.$$

Donc

$$\deg(I - F, U, 0) \neq 0.$$

Par propriété du degré topologique, il existe $x \in U$ tel que

$$(I - F)(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$F(x) = x.$$

Ainsi, F admet au moins un point fixe dans $\overline{U}$.

Théorème 1.4.3 (L'Alternative Non Linéaire de Leray–Schauder). [20] *Soit E un espace de Banach et soit $U \subset E$ un ensemble convexe tel que $0 \in U$. Soit $F : U \rightarrow U$ un opérateur complètement continu. Alors*

1. *F possède un point fixe ,
ou bien*
2. *l'ensemble*

$$V = \{x \in U : x = \lambda F(x), \quad 0 < \lambda < 1\}$$

est non borné.

Preuve. Supposons que l'ensemble E est borné définie par

$$E = \{x \in \overline{U} ; x = \lambda T(x), \lambda \in (0, 1)\}$$

Alors il existe un réel $\rho > 0$ tel que

$$\|x\| < \rho, \quad \forall x \in E.$$

Considérons la sphère

$$S_\rho = \{x \in E ; \|x\| = \rho\}.$$

Montrons qu'aucun point de S_ρ ne peut vérifier

$$x = \lambda T(x), \quad \lambda \in (0, 1).$$

D'un côté, par l'absurde supposons qu'il existe $y \in S_\rho$, et $\lambda \in (0, 1)$, tels que $y = \lambda T(y)$. Alors

$$\|y\| < \rho.$$

D'autre côté, puisque $y \in S_\rho$, alors

$$\|y\| = \rho.$$

Ainsi

$$\rho = \|y\| < \rho,$$

ce qui est absurde.

Donc aucun point de S_ρ ne vérifie

$$x = \lambda T(x), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Par conséquent, du théorème de Leray–Schauder l’alternative est impossible, et l’opérateur T admet un point fixe dans $\overline{U}$.

1.5 Calcul fractionnaire

Dans cette section, on rappelle des outils de base et des résultats préliminaires essentiels pour étudier l’existence et l’unicité du problème aux limites d’ordre fractionnaire (voir [19]).

1.5.1 Fonction Gamma

Définition 1.5.1. *La fonction Gamma est définie pour $\Re(z) > 0$ par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

et elle est bien définie sur ce domaine de convergence pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.5.1. *La fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

- 1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, pour $\Re(z) > 0$.
- 2) $\Gamma(1) = 1$.
- 3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Preuve. On va démontrer les trois propositions précédentes

- 1) Montrons que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, pour $\Re(z) > 0$.

Par définition

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt.$$

Par intégration par parties on obtient

$$\Gamma(z+1) = \left[-t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

ce qui implique

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Ainsi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.3}$$

2) On utilise la définition de la fonction Gamma, si $z = 1$, on obtient

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt.$$

Calculons l'intégral, on trouve

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Ainsi

$$\Gamma(1) = 1.$$

3) En utilisant (1.3), on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!,$$

...

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

1.5.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.5.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha) > 0$. On appelle intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α de f , notée $I_a^\alpha f$, l'expression suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a.$$

Où Γ désigne la fonction Gamma. Dans le cas $a = 0$, on note simplement $I^\alpha f$.

Définition 1.5.3. Soit $f \in C^n([a, b])$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $n-1 < \Re(\alpha) < n$. Alors

$$\frac{d^n}{dx^n} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x).$$

Propriétés 1.5.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha, \beta > 0$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville vérifie les propriétés suivantes :

- $I_a^0 f = f$.
- $I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^{\alpha+\beta} f$.

1.5.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.5.4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha) \in]n-1, n[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α de f , notée ${}^c D_a^\alpha f$, la fonction définie par

$${}^c D_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(x) \right),$$

c'est-à-dire

$${}^c D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad x > a,$$

où $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

Lemme 1.5.1. Soient $\Re(\alpha) \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$. Alors

$$(I_a^\alpha {}^c D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

où

$$n = [\Re(\alpha)] + 1.$$

Preuve. Par définition de la dérivée fractionnaire de Caputo, on a

$${}^c D_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(x) \right),$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire, on trouve

$$I_a^\alpha {}^c D_a^\alpha f(x) = I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(x) \right).$$

D'après la propriété 1.5.1, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha {}^c D_a^\alpha f(x) &= I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(x) \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[(x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) \right]_a^x \\ &\quad + \frac{n-1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}}{\Gamma(n)} f^{(n-1)}(a) + \frac{n-1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Par intégrations successives, on obtient :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\alpha f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)} (x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\ &\quad - \cdots - \frac{1}{\Gamma(2)} (x-a) f'(a) + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f'(t) dt. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

Alors

$$(I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

On déduit finalement

$$(I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Propriétés 1.5.2. Soient f et g deux fonctions telles que les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α existent. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$${}^c D_a^{\alpha} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda {}^c D_a^{\alpha} f(x) + \mu {}^c D_a^{\alpha} g(x).$$

1.5.4 Relation entre intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Lemme 1.5.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ vérifiant $n-1 < \Re(\alpha) < n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in C^n([a, b])$. Alors

$$({}^c D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

Preuve. Par définition de la dérivée fractionnaire de Caputo, on a

$${}^c D_a^{\alpha} (I_a^{\alpha} f)(x) = I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dx^n} I_a^{\alpha} f(x) \right).$$

D'après la définition 1.5.3 on a,

$$\frac{d^n}{dx^n} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha-n} f(x).$$

Donc

$${}^c D_a^{\alpha} (I_a^{\alpha} f)(x) = I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha-n} f(x).$$

En utilisant la propriété $I_a^{\beta} I_a^{\gamma} = I_a^{\beta+\gamma}$, on obtient

$$I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha-n} f(x) = I_a^0 f(x).$$

Puisque $I_a^0 f(x) = f(x)$, alors

$${}^c D_a^{\alpha} (I_a^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

1.6 Les équations différentielles ordinaires

1.6.1 Les équations différentielles ordinaires d'ordre entière

Définition 1.6.1. Une équation différentielle sur un espace de Banach E est une relation s'écrivant sous la forme :

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0.$$

1.6.1.1 Equation différentielle du premier ordre

Définition 1.6.2. [7] : Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme :

$$F(t, x, x') = 0,$$

vérifiée en chaque point x d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

où $f : I \times U \rightarrow E$ est une application continue, avec U ouvert de E .

Définition 1.6.3. [7] : Une solution de l'équation (1.1) est une fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, satisfaisante les conditions suivantes :

- Pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$.
- φ est de classe C^1 sur I et vérifie

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),$$

pour tout $t \in I$.

1.6.1.2 Equation différentielle du second ordre

Définition 1.6.4. [7] : Une équation différentielle du second ordre est une équation de la forme :

$$F(t, x, x', x'') = 0,$$

vérifiée en chaque point x d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad (1.2)$$

avec $f : I \times U \times E \rightarrow E$.

Remarque 1.6.1. Toute équation différentielle du second ordre peut se réduire à un système du premier ordre.

Définition 1.6.5. [7] : Une solution de l'équation (1.2) est une fonction $\varphi : I \rightarrow E$, définie sur un intervalle non vide $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfait les conditions suivantes :

- Pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U$.
- φ est de classe C^2 sur I et vérifie

$$\varphi''(t) = g(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

1.6.2 Les équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire

Définition 1.6.6. Une équation différentielle d'ordre fractionnaire est une équation différentielle où l'inconnue apparaît avec une dérivée (au sens de Caputo ou Riemann–Liouville) d'ordre non entier.

Définition 1.6.7. Soit $J = [0, 1]$ et $0 < \alpha < 1$. On appelle équation différentielle ordinaire d'ordre fractionnaire au sens de Caputo toute équation de la forme

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, 1],$$

où ${}^c D^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo et $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

1.7 Problème aux limites

[22] On considère le problème non homogène suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \left(p(t)x'(t) \right)' + q(t)x(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

Lemme 1.7.1. Le problème (P) admet une unique solution écrite sous la forme suivante :

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

où $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ représente la fonction de Green associée à ce problème.

Preuve. Soient u et v deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0,$$

telles que

$$u(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

On pose

$$W = p(t) \left(u(t)v'(t) - u'(t)v(t) \right),$$

où W est une constante non nulle. On cherche une solution sous la forme

$$x(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t).$$

Possons

$$A'(t)u(t) + B'(t)v(t) = 0.$$

Alors

$$x'(t) = A(t)u'(t) + B(t)v'(t).$$

Donc

$$p(t)x'(t) = A(t)p(t)u'(t) + B(t)p(t)v'(t).$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} (p(t)x'(t))' &= A'(t)p(t)u'(t) + B'(t)p(t)v'(t) \\ &\quad + A(t)(p(t)u'(t))' + B(t)(p(t)v'(t))'. \end{aligned}$$

Puisque u et v vérifient l'équation homogène, alors

$$(pu')' = -qu, \quad (pv')' = -qv.$$

Donc

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = A'(t)p(t)u'(t) + B'(t)p(t)v'(t).$$

Puisque x satisfait l'équation non homogène

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = f(t),$$

on obtient le système

$$\begin{cases} A'(t)u(t) + B'(t)v(t) = 0, \\ A'(t)p(t)u'(t) + B'(t)p(t)v'(t) = f(t). \end{cases}$$

Le déterminant du système est

$$p(t)(u(t)v'(t) - u'(t)v(t)) = W.$$

Par la règle de Cramer

$$A'(t) = -\frac{v(t)f(t)}{W},$$

et

$$B'(t) = \frac{u(t)f(t)}{W}.$$

En intégrant

$$A(t) = -\int_0^t \frac{v(s)f(s)}{W} ds + C_1,$$

$$B(t) = \int_0^t \frac{u(s)f(s)}{W} ds + C_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= -u(t) \int_0^t \frac{v(s)f(s)}{W} ds \\ &\quad + v(t) \int_0^t \frac{u(s)f(s)}{W} ds \\ &\quad + C_1u(t) + C_2v(t). \end{aligned}$$

Puisque $u(0) = 0$, la condition $x(0) = 0$, alors

$$C_2 v(0) = 0.$$

Puisque $v(0) \neq 0$, alors

$$C_2 = 0.$$

Ensuite

$$x(1) = -u(1) \int_0^1 \frac{v(s)f(s)}{W} ds + C_1 u(1).$$

Or $x(1) = 0$, donc

$$C_1 = \int_0^1 \frac{v(s)f(s)}{W} ds.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \int_t^1 \frac{v(s)f(s)}{W} ds \\ &\quad + v(t) \int_0^t \frac{u(s)f(s)}{W} ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{u(s)v(t)}{W} f(s) ds \\ &\quad + \int_t^1 \frac{u(t)v(s)}{W} f(s) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds,$$

où la fonction de Green est donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{u(s)v(t)}{W}, & s \leq t, \\ \frac{u(t)v(s)}{W}, & t \leq s. \end{cases}$$

Propriétés 1.7.1. Soit $G(x, t)$ la fonction de Green associée à un problème aux limites. Alors elle vérifie les propriétés suivantes :

— La fonction $G(x, t)$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, c'est à dire

$$G(t^+, t) = G(t^-, t).$$

— La dérivée partielle de G par rapport à x n'est pas continue. Elle est discontinue en $s = t$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t_k^+, t) \neq \frac{\partial G}{\partial x}(t_k^-, t).$$

— La dérivée partielle de G par rapport à x en $t = t_k$ donné par

$$\partial_x G(t_k^+, t_k) - \partial_x G(t_k^-, t_k) = \frac{1}{p(t_k)}$$

— *La fonction de Green est symétrique, c'est à dire :*

$$G(x, t) = G(t, x).$$

— *La dérivée partielle de G par rapport à s est continue, c'est-à-dire :*

$$\frac{\partial G}{\partial s}(t_k^+, t) = \frac{\partial G}{\partial s}(t_k^-, t).$$

Chapitre 2

Solutions du problèmes différentiels impulsifs

Dans ce chapitre, on définit l'espace des fonctions implusif PC^i .Après on va présenter les formes intégrales des solutions pour problème de Cauchy et deux problèmes aux limites avec implusions $([17]),([4]),([5])$.

2.1 Espace fonctionnel PC^i

Définition 2.1.1. Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\{t_1, \dots, t_m\} \subset J$ des instants d'impulsion. Pour un entier $i \geq 0$, on définit l'espace des fonctions impulsives

$$PC^i(J) := \left\{ x \in C^i(J', \mathbb{R}^n) \mid x^{(j)}(t_k^-) \text{ et } x^{(j)}(t_k^+) \text{ existent pour tout } 0 \leq j \leq i, 1 \leq k \leq m \right\},$$

où $J' := J \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$.

Cas particulier : Pour $i = 0$, on note

$$PC^0(J, \mathbb{R}^n) := PC(J, \mathbb{R}^n) = \{x : J \rightarrow \mathbb{R}^n, x \in C(J', \mathbb{R}^n), x(t_k^-) \text{ et } x(t_k^+) \text{ existent et } x(t_k) = x(t_k^-)\}.$$

Définition 2.1.2. Soit $J = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, l'espace $PC^1(J)$ est une espace de toutes les fonctions $x \in PC(J)$ telles que x est continûment différentiable sur J' , pour $i = 1, 2, \dots, m$, les dérivées $x'(t_i^+)$ et $x'(t_i^-)$ existent ainsi $x'(t_i) = x'(t_i^-)$.

Lemme 2.1.1. Pour $x \in PC^1(J)$, l'espace $PC^1([0, 1])$ est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0,$$

où

$$\|x\|_0 = \sup_{t \in J} |x(t)|, \quad \|x'\|_0 = \sup_{t \in J} |x'(t)|.$$

Preuve. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset PC^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ une suite de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x_p\|_1 < \varepsilon.$$

On a

$$\|x_n - x_p\|_1 = \|x_n - x_p\|_0 + \|x'_n - x'_p\|_0,$$

donc

$$\|x_n - x_p\|_{PC} \leq \varepsilon, \quad \|x'_n - x'_p\|_{PC} \leq \varepsilon.$$

Pour $k = 1$

$$\sup_{t \in [0, t_1]} |x_n(t) - x_p(t)| \leq \varepsilon, \quad \sup_{t \in [0, t_1]} |x'_n(t) - x'_p(t)| \leq \varepsilon.$$

Donc il existe $x_1, y_1 \in C([0, t_1], \mathbb{R}^n)$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_1(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(t) = y_1(t).$$

Pour $k = 2$:

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} |x_n(t) - x_p(t)| \leq \varepsilon, \quad \sup_{t \in [t_1, t_2]} |x'_n(t) - x'_p(t)| \leq \varepsilon.$$

Donc il existe $x_2, y_2 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_2(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(t) = y_2(t).$$

De même pour $k = 3, \dots, r$, il existe x_k, y_k tels que

$$x_n(t) \rightarrow x_k(t), \quad x'_n(t) \rightarrow y_k(t).$$

Posons

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, t_1], \\ x_2(t), & t \in]t_1, t_2], \\ \vdots \\ x_r(t), & t \in]t_r, 1], \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [0, t_1], \\ y_2(t), & t \in]t_1, t_2], \\ \vdots \\ y_r(t), & t \in]t_r, 1]. \end{cases}$$

Alors

$$\|x_n - x\|_{PC} \leq \varepsilon, \quad \|x'_n - y\|_{PC} \leq \varepsilon,$$

donc

$$\|x_n - x\|_1 \leq \varepsilon.$$

De plus

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x'_n(s) ds.$$

En passant à la limite, on obtient

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s) ds \Rightarrow x'(t) = y(t).$$

Ainsi $x \in PC^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$.

D'où $PC^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

2.2 Problème de Cauchy avec implusions

Nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \quad t \in J = [0, 1], \\ x(t_k^+) - x(t_k^-) = \eta_k(x(t_k^-)), & k = 1, \dots, m, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où :

- $x \in \mathbb{R}$ est la variable d'état, et f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$.
- $\eta_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sont des fonctions implusives continues.

Définition 2.2.1. Une fonction $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite solution du problème (I) si elle satisfait les conditions suivantes :

1. $x(0^+) = x_0$
2. pour tout $t \neq t_k$, $x(t)$ est différentiable et satisfait

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

3. $x(t)$ est continue à gauche sur $J_k =]t_k, t_{k+1}]$ telle que :

$$x(t^-) = \lim_{t \rightarrow t^-} x(t)$$

$$\text{Si } t = t_k \text{ alors : } x(t_k^+) = x(t_k^-) + \eta_k(x(t_k^-)).$$

Lemme 2.2.1. Soit $x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$, Alors x est solution du problème impulsif (I) si et seulement si pour tout $t \in [0, 1]$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} \eta_k(x(t_k^-)).$$

Preuve. Supposons que x soit une solution du problème impulsif (I).

Pour $t \in [0, t_1]$ on a

$$x'(t) = f(t, x(t)) \implies x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Pour $t \in]t_1, t_2]$

$$x'(t) = f(t, x(t)) \implies x(t) = x(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds.$$

On sait que

$$x(t_1^+) = x(t_1^-) + \eta_1(x(t_1^-)) = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds + \eta_1(x(t_1^-)).$$

Alors

$$x(t) = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s)) ds + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s)) ds.$$

Donc

$$x(t) = x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Pour $t \in]t_2, t_3]$ on a

$$x'(t) = f(t, x(t)) \implies x(t) = x(t_2^+) + \int_{t_2}^t f(s, x(s)) ds.$$

On sait que

$$x(t_2^+) = x(t_2^-) + \eta_2(x(t_2^-)) = x_0 + \int_0^{t_2} f(s, x(s)) ds + \eta_1(x(t_1^-)) + \eta_2(x(t_2^-)).$$

Alors

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^{t_2} f(s, x(s)) ds + \eta_1(x(t_1^-)) + \eta_2(x(t_2^-)) + \int_{t_2}^t f(s, x(s)) ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \eta_1(x(t_1^-)) + \eta_2(x(t_2^-)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$, on obtient

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^k \eta_i(x(t_i^-)).$$

On conclure, pour chaque $t \in [0, 1]$, on a

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} \eta_k(x(t_k^-)).$$

Exemple

On considère le problème de Cauchy impulsive suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = 0, & t \neq t_k, t \in [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, r, \\ x(0^+) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Supposons que x une solution du problème (2.1).

Alors, pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$x'(t) = 0 \implies \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t 0 ds.$$

Donc

$$x(t) = x_0.$$

Pour $t \in]t_1, t_2]$, on a

$$x'(t) = 0 \implies \int_{t_1^+}^t x'(s) ds = \int_{t_1^+}^t 0 ds.$$

Donc

$$x(t) = x(t_1^+).$$

On a

$$x(t_1^+) = \beta + x(t_1^-).$$

et

$$x(t_1^-) = x_0.$$

Ce qui donne

$$x(t) = \beta + x_0, \quad \forall t \in]t_1, t_2].$$

Pour $t \in]t_2, t_3]$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\implies \int_{t_2^+}^t x'(s) ds = \int_{t_2^+}^t 0 ds \\ &\implies x(t) = x(t_2^+). \end{aligned}$$

Or

$$x(t_2^+) = \beta + x(t_2^-)$$

et

$$x(t_2^-) = \beta + x_0.$$

Ainsi

$$x(t) = 2\beta + x_0, \quad \forall t \in (t_2, t_3].$$

Si $t \in]t_k, t_{k+1}]$, on obtient par récurrence

$$x'(t) = 0 \implies \int_{t_k^+}^t x'(s) ds = \int_{t_k^+}^t 0 ds$$

Ce qui implique

$$x(t) = x(t_k^+).$$

Or

$$x(t_k^+) = \beta + x(t_k^-)$$

et

$$x(t_k^-) = (k-1)\beta + x_0.$$

Ainsi, la solution du problème (2.1) est donnée par :

$$x(t) = k\beta + x_0, \quad \forall t \in]0, t_{k+1}].$$

2.3 Problème aux limites impulsives du second ordre

On considère le problème aux limites impulsives suivant :

$$(II) \quad \begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \neq t_k, t \in [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k), x'(t_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ \Delta x'(t_k) = J_k(x(t_k), x'(t_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

où :

- f est une fonction linéaire continue définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Les fonctions I_k et J_k représentent les discontinuités des sauts de x et de sa dérivée x' aux instants impulsifs $t_k \in (0, 1)$.

Définition 2.3.1. Une fonction $x \in PC^1(I)$ est une solution du problème (II) si elle vérifie toutes les équations de ce problème (II).

Lemme 2.3.1. Pour chaque $t \in [0, 1]$, la solution de le problème (II) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds + \sum_{0 < t_k < 1} \left[I_k(x(t_k), x'(t_k)) + J_k(x(t_k), x'(t_k))(t - t_k) \right] \\ & - t \sum_{0 < t_k < 1} \left[I_k(x(t_k), x'(t_k)) + J_k(x(t_k), x'(t_k))(1 - t_k) \right]. \end{aligned}$$

Où :

$$G(t, s) = \begin{cases} s(t - 1), & s \leq t, \\ t(s - 1), & t \leq s. \end{cases}$$

Preuve. On cherche la solution du problème (II) sous forme

$$x(t) = y(t) + z(t).$$

Où

$y(t)$ est la solution du problème sans impulsion suivant :

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & t \neq t_k, t \in [0, 1], \\ \Delta y(t_k) = \Delta y'(t_k) = 0 & k = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds.$$

et $z(t)$ solution du problème homogène avec implusions

$$\begin{cases} z''(t) = 0 & t \neq t_k, t \in [0, 1], \\ \Delta z(t_k) = I_k(x(t_k), x'(t_k)) & k = 1, 2, \dots, m, \\ \Delta z'(t_k) = I_k(x(t_k), x'(t_k)) & k = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$\begin{aligned} z(t) = & \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} J_k(x(t_k), x'(t_k))(t - t_k) \\ & - t \sum_{0 < t_k < 1} I_k(x(t_k), x'(t_k)) - t \sum_{0 < t_k < 1} J_k(x(t_k), x'(t_k))(1 - t_k). \end{aligned}$$

En effet, pour $t \in [0, t_1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t z''(s) ds &= \int_0^t 0 ds \\ \Rightarrow z'(t) - z'(0) &= 0 \\ \Rightarrow z'(t) &= z'(0) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^t z'(s) ds &= \int_0^t z'(0) ds \\ \Rightarrow z(t) - z(0) &= z'(0)t \\ \Rightarrow z(t) &= z'(0)t \end{aligned}$$

Pour $t \in]t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t z''(s) ds &= \int_{t_1}^t 0 ds \\ \Rightarrow z'(t) &= z'(t_1^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t z'(s) ds &= \int_{t_1}^t z'(t_1^+) ds \\ \Rightarrow z(t) &= z(t_1^+) + z'(t_1^+)(t - t_1) \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} z(t_1^+) - z(t_1^-) &= I_1(x(t_1), x'(t_1)), \\ z'(t_1^+) - z'(t_1^-) &= J_1(x(t_1), x'(t_1)), \end{aligned}$$

et

$$z(t_1^-) = z'(0)t_1, \quad z'(t_1^-) = z'(0).$$

Alors

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_1^-) + I_1(x(t_1), x'(t_1)) + (z'(0) + J_1(x(t_1), x'(t_1)))(t - t_1) \\ &= z'(0)t_1 + I_1(x(t_1), x'(t_1)) + J_1(x(t_1), x'(t_1))(t - t_1). \end{aligned}$$

Pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^t z''(s) ds &= \int_{t_k}^t 0 ds \\ \Rightarrow z'(t) &= z'(t_k^+) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^t z'(s) ds &= \int_{t_k}^t z'(t_k^+) ds \\ \Rightarrow z(t) &= z(t_k^+) + z'(t_k^+)(t - t_k) \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} z(t_k^+) - z(t_k^-) &= I_k(x(t_k), x'(t_k)), \\ z'(t_k^+) - z'(t_k^-) &= J_k(x(t_k), x'(t_k)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z(t_k^-) &= z'(0)t_k^- + \sum_{j=1}^{k-1} I_j(x(t_j), x'(t_j)) + \sum_{j=1}^{k-1} J_j(x(t_j), x'(t_j))(t_k^- - t_j), \\ z'(t_k^-) &= z'(0) + \sum_{j=1}^{k-1} J_j(x(t_j), x'(t_j)). \end{aligned}$$

Alors

$$z(t) = z(t_k^-) + I_k(x(t_k), x'(t_k)) + (z'(t_k^-) + J_k(x(t_k), x'(t_k)))(t - t_k).$$

En remplaçant

$$\begin{aligned} z(t) &= z'(0)t_k + \sum_{j=1}^{k-1} I_j(x(t_j), x'(t_j)) + I_k(x(t_k), x'(t_k)) \\ &\quad + \left(z'(0) + \sum_{j=1}^{k-1} J_j(x(t_j), x'(t_j)) + J_k(x(t_k), x'(t_k)) \right) (t - t_k) \\ &= z'(0)t + \sum_{j=1}^k I_j(x(t_j), x'(t_j)) + \sum_{j=1}^k J_j(x(t_j), x'(t_j))(t - t_j) \end{aligned}$$

Ainsi

$$z(t) = z'(0)t + \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} J_k(x(t_k), x'(t_k))(t - t_k)$$

Pour $t = 1$, on a

$$z(1) = z'(0) + \sum_{0 < t_k < 1} I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{0 < t_k < 1} J_k(x(t_k), x'(t_k))(1 - t_k) = 0.$$

Alors

$$z'(0) = - \sum_{0 < t_k < 1} I_k(x(t_k), x'(t_k)) - \sum_{0 < t_k < 1} J_k(x(t_k), x'(t_k))(1 - t_k).$$

Donc

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{0 < t_k < t} I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} J_k(x(t_k), x'(t_k))(t - t_k) \\ &\quad - t \sum_{0 < t_k < 1} I_k(x(t_k), x'(t_k)) - t \sum_{0 < t_k < 1} J_k(x(t_k), x'(t_k))(1 - t_k). \end{aligned}$$

On a

$$x(t) = y(t) + z(t).$$

Finalement, la solution du problème (II) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds + \sum_{0 < t_k < 1} \left[I_k(x(t_k), x'(t_k)) + J_k(x(t_k), x'(t_k))(t - t_k) \right] \\ &\quad - t \sum_{0 < t_k < 1} \left[I_k(x(t_k), x'(t_k)) + J_k(x(t_k), x'(t_k))(1 - t_k) \right]. \end{aligned}$$

2.4 Problème aux limites implusive généralisé du second ordre

On considère le problème aux limites suivant :

$$(III) \quad \begin{cases} \left(p(t)x'(t) \right)' + q(t)x(t) = f(t), & t \neq t_k, \ t \in J = [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k), x'(t_k)), \\ \Delta x'(t_k) = x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = J_k(x(t_k), x'(t_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Où :

- f est une fonction linéaire continue définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $p(t)$ et $q(t)$ sont les coefficients de l'équation différentielle du second ordre associée au problème (II).
- Les fonctions I_k et J_k représentent les discontinuités des sauts de x et de sa dérivée x' aux instants impulsifs $t_k \in (0, 1)$, avec $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$.

Lemme 2.4.1. *Supposons*

(H0) soit $p \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, il existe une constante $p_0 > 0$ telle que $p(t) \geq p_0$, $\forall t \in J$, et soit $q \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $q(t) \leq p_0 \pi^2$, avec $q(t) < p_0 \pi^2$ sur un sous-ensemble de $[0, 1]$ de mesure positive. Alors pour toute fonction $x \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que $x(0) = x(1) = 0$, on a

$$\int_0^1 \left[p(t) (x'(t))^2 - q(t) x(t)^2 \right] dt > 0.$$

Preuve. Soit $x \in C^2([0, 1])$ non nulle telle que $x(0) = x(1) = 0$. D'après (H0), on a

$$\begin{aligned} q(t) \leq p_0 \pi^2 &\implies -q(t) x^2(t) \geq -p_0 \pi^2 x^2(t) \\ &\implies p(t) (x'(t))^2 - q(t) x^2(t) \geq p_0 [(x'(t))^2 - \pi^2 x^2(t)] \\ &\implies \int_0^1 [p(t) (x'(t))^2 - q(t) x^2(t)] dt \geq p_0 \int_0^1 [(x'(t))^2 - \pi^2 x^2(t)] dt. \end{aligned}$$

Définissons la fonctionnelle

$$I(x) = \int_0^1 [(x'(t))^2 - \pi^2 x(t)^2] dt.$$

D'après théorème d'Euler Lagrange on a

$$I(x) = \int_a^b L(t, x, x') dt.$$

Possons

$$L(x, x') = (x')^2 - \pi^2 x^2.$$

Ainsi, l'équation de Lagrange est donnée par

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0.$$

Alors, on trouve

$$x'' + \pi^2 x = 0.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$x(t) = A \cos(\pi t) + B \sin(\pi t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Puisque : $x(0) = 0$ et $x(1) = 0$.

Alors

$$x(t) = B \sin(\pi t), \quad B \in \mathbb{R}^*.$$

En remplaçant cette solution dans $I(x)$, alors pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} I(x) &= I(B \sin(\pi t)) \\ &= \int_0^1 \left[B^2 \pi^2 \cos^2(\pi t) - \pi^2 B^2 \sin^2(\pi t) \right] dt \\ &= B^2 \pi^2 \int_0^1 (\cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)) dt. \\ &= B^2 \pi^2 \int_0^1 \cos(2\pi t) dt \\ &= B^2 \pi^2 \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^1 \left[p(t)(x'(t))^2 - q(t)x(t)^2 \right] dt \geq p_0 \cdot I(x),$$

alors

$$\int_0^1 \left[p(t)(x'(t))^2 - q(t)x(t)^2 \right] dt \geq 0.$$

Maintenant, montrons que

$$\int_0^1 \left[p(t)(x'(t))^2 - q(t)x(t)^2 \right] dt > 0.$$

En effet, le fait qu'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, 1]$ de mesure positive tel que $q(t) < p_0 \pi^2$ pour $t \in E$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[p(t)(x'(t))^2 - q(t)x(t)^2 \right] dt &= \int_0^1 B^2 \left[p(t) \pi^2 \cos^2(\pi t) - q(t) \sin^2(\pi t) \right] dt \\ &> \int_0^1 B^2 \left[p_0 \pi^2 \cos^2(\pi t) - p_0 \pi^2 \sin^2(\pi t) \right] dt \\ &> B^2 p_0 \pi^2 \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = 0. \end{aligned}$$

Lemme 2.4.2. *Si l'hypothèse (H0) est satisfaite, alors le problème homogène*

$$\begin{cases} \left((p(t)x'(t))' + q(t)x(t) \right) = 0, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

n'admet que la solution triviale $x \equiv 0$.

Preuve. Par l'absurde, supposons que le problème homogène (1.2) admet une solution x_0 non triviale qui vérifie les équations de ce problème. Alors

$$\left((p(t)x'_0(t))' + q(t)x_0(t) \right) = 0, \quad \text{pour tout } t \in J, \quad (2.3)$$

avec

$$x_0(0) = x_0(1) = 0. \quad (2.4)$$

Multiplions (2.3) par $x_0(t)$, on trouve

$$(2.3) \implies (p(t)x'_0(t))'x_0(t) + q(t)x_0^2(t) = 0 \quad (2.5)$$

$$\implies \int_0^1 (p(t)x'_0(t))'x_0(t) dt + \int_0^1 q(t)x_0^2(t) dt = 0. \quad (2.6)$$

Posons

$$I = \int_0^1 \left((p(t)x'_0(t))' \right) x_0(t) dt.$$

Par intégration par partie on trouve

$$I = \left[p(t)x'_0(t)x_0(t) \right]_0^1 - \int_0^1 p(t)(x'_0(t))^2 dt.$$

Par (2.4), on trouve $\left[p(t)x'_0(t)x_0(t) \right]_0^1 = 0$.

Ce qui donne

$$I = - \int_0^1 p(t)(x'_0(t))^2 dt.$$

Donc

$$(2.6) \implies - \int_0^1 p(t)(x'_0(t))^2 dt + \int_0^1 q(t)x_0^2(t) dt = 0$$

$$\implies \int_0^1 \left[q(t)x_0^2(t) - p(t)(x'_0(t))^2 \right] dt = 0$$

$$\implies \int_0^1 \left[p(t)(x'_0(t))^2 - q(t)x_0^2(t) \right] dt = 0.$$

Or, d'après le lemme 2.4.1, on a

$$\int_0^1 \left[p(t)(x'_0(t))^2 - q(t)x_0^2(t) \right] dt > 0.$$

Ce qui contredit

Définition 2.4.1. Une fonction $x \in PC^1(I)$ est dite solution de (III) si elle vérifie toutes les équations de ce problème .

Lemme 2.4.3. La solution du problème (III) est donnée par

Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)). \quad (2.7)$$

Où $G(t, s)$ est la fonction de Green associée à (III), définie sur $J \times J$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Preuve. On cherche la solution du problème (III) sous forme

$$x(t) = y(t) + z(t) + w(t).$$

Où

$y(t)$ est la solution du problème (III) sans implusions :

$$\begin{cases} (p(t)y'(t))' + q(t)y(t) = f(t), & t \neq t_k, t \in J, \\ \Delta y(t_k) = \Delta y'(t_k) = 0, & k = 1, 2, \dots, m, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds.$$

$z(t)$ solution du problème homogène

$$\begin{cases} (p(t)z'(t))' + q(t)z(t) = 0 & t \neq t_k, t \in J, \\ \Delta z(t_k) = I_k(x(t_k), x'(t_k)) & k = 1, 2, \dots, m, \\ \Delta z'(t_k) = 0, \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$z(t) = - \sum_{k=1}^m p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \partial_s G(t, t_k), \quad \forall t \in J.$$

En effet, on pose

$$z_k(t) = -A_k \partial_s G(t, t_k),$$

où $A_k \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles quand va déterminer alors

$$\begin{aligned}\Delta z_k(t) &= -A_k \Delta(\partial_s G(t, t_k)), \\ &= -A_k \left(\partial_s G(t_k^+, t_k) - \partial_s G(t_k^-, t_k) \right).\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de la fonctions de Green suivante

$$\partial_s G(t_k^+, t_k) - \partial_s G(t_k^-, t_k) = \frac{1}{p(t_k)}.$$

Donc

$$\Delta z(t_k) = -A_k \left(\frac{1}{p(t_k)} \right) = I_k(x(t_k), x'(t_k)).$$

Ce qui donne

$$A_k = -p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)).$$

Ainsi

$$z_k(t) = -p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \partial_s G(t, t_k).$$

Puisque f est linéaire, par principe de superposition, on a

$$z(t) = \sum_{k=1}^m z_k(t).$$

Donc

$$z(t) = - \sum_{k=1}^m p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \partial_s G(t, t_k), \quad \forall t \in J.$$

et, $w(t)$ solution de :

$$\begin{cases} \left(p(t)w'(t) \right)' + q(t)w(t) = 0, & t \neq t_k, \ t \in [0, 1], \\ \Delta w(t_k) = 0, & k = 1, 2, \dots, m, \\ \Delta w'(t_k) = J_k(x(t_k), x'(t_k)), \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$w(t) = \sum_{k=1}^m p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)) G(t, t_k), \quad \forall t \in J.$$

En effet, on pose

$$w_k(t) = B_k G(t, t_k).$$

et

$$w'_k(t) = B_k \partial_t G(t, t_k),$$

où B_k sont des constantes réelles quand va déterminer, alors

$$\begin{aligned} \Delta w'(t_k) &= B_k \Delta(\partial_t G(t, t_k)) \\ &= B_k \left(\partial_t G(t_k^+, t_k) - \partial_t G(t_k^-, t_k) \right). \end{aligned}$$

D'après les propriétés de fonctions de Green

$$\partial_t G(t_k^+, t_k) - \partial_t G(t_k^-, t_k) = \frac{1}{p(t_k)}.$$

Donc

$$\Delta w'(t_k) = B_k \left(\frac{1}{p(t_k)} \right) = J_k(x(t_k), x'(t_k)).$$

Ce qui donne

$$B_k = p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)).$$

Ainsi

$$w_k(t) = p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)) G(t, t_k).$$

On a

$$w(t) = \sum_{k=1}^m w_k(t).$$

Donc

$$w(t) = \sum_{k=1}^m p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)) G(t, t_k), \quad \forall t \in J.$$

Ainsi, la solution du problème (III) est

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds - \sum_{k=1}^m p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \partial_s G(t, t_k) + \sum_{k=1}^m p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)) G(t, t_k).$$

Remarque 2.4.1. Le problème (III), pour $p(t) = 1$ et $q(t) = 0$, est équivalent au problème (II).

Chapitre 3

Existence de solutions d'un problème aux limites avec impulsion (Équations différentielles ordinaires)

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire du second ordre avec impulsions. En utilisant le théorème de contraction de Banach ainsi le théorème du point fixe de Leray-schuder ([10],[5],[17]).

On considère le problème aux limites suivant :

$$(IV) \quad \begin{cases} \left(p(t)x'(t) \right)' + q(t)x(t) = F(t, x(t), x'(t)), & t \neq t_k, \ t \in J = [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k), x'(t_k)), \\ \Delta x'(t_k) = x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = J_k(x(t_k), x'(t_k)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Où :

- $x \in \mathbb{R}$ est la variable d'état,
- $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux,
- I_k et J_k sont des fonctions représentant les discontinuités de saut de x et x' aux instants $t_k \in (0, 1)$, avec $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$.

3.1 La solution du problème

Définition 3.1.1. Une fonction $x \in PC^1(I)$ est dite solution de (IV) si elle vérifie toutes les équations de ce problème .

Lemme 3.1.1. *La solution du problème (IV) est donnée par
Pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)).$$

Où $G(t, s)$ est la fonction de Green associée à (IV), définie sur $J \times J$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

3.2 Existence et unicité du problème

On définit l'opérateur $\omega : PC^1([0, 1]) \rightarrow PC^1([0, 1])$ par

$$\begin{aligned} \omega(x)(t) = & \int_0^1 G(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \\ & + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. *Une fonction $x \in PC^1([0, 1])$ est solution du problème (IV) si et seulement si x est un point fixe de ω .*

Preuve. Nous allons démontrer l'équivalence dans les deux sens.

Supposons que $x \in PC^1([0, 1])$ est une solution du problème (IV), donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^1 G(t, s) F(s, x(s), x'(s)) ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \\ & + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)). \end{aligned}$$

Par définition de l'opérateur ω , on obtient

$$x(t) = \omega(x)(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ainsi, $x(t)$ est un point fixe de ω .

Réciproquement, supposons que $x \in PC^1([0, 1])$ soit un point fixe de ω , c'est-à-dire

$$x(t) = \omega(x)(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Alors

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^1 G(t, s) F(s, x(s), x'(s)) ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \\ & + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)). \end{aligned}$$

Ainsi, Nous allons montrer que cette fonction $x(t)$ satisfait le problème (IV).

Proposition 3.2.2. *Soit $x \in PC^1([0, 1])$. Alors la fonction $\omega'(x)$ est bien définie sur $[0, 1]$ et $\omega'(x) \in PC([0, 1])$, telle que :*

$$\omega'(x)(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x, x') + \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_k) p(t_k) J_k(x, x').$$

3.2.1 Théorèmes d'existence et d'unicité de solution du problème

Pour établir l'unicité d'une solution au problème (IV), en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.2.1. *Supposons que*

(H1) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ est continue sur J' et satisfait la condition de Lipschitz

$$|F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| \leq \beta(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|).$$

(H2) U_k et V_k sont continues et satisfont les conditions de Lipschitz

$$|U_k(x_1, y_1) - U_k(x_2, y_2)| \leq c_k(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|),$$

$$|V_k(x_1, y_1) - V_k(x_2, y_2)| \leq d_k(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|).$$

Si $2P(\beta + A \sum_{k=1}^m c_k + A \sum_{k=1}^m d_k) < 1$, alors le problème (IV) admet une unique solution.

Notation :

$$K := \max \{|G(t, s)| : (t, s) \in J \times J\}.$$

$$Z := \max \left\{ \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t, s) \right| : (t, s) \in J \times J \right\}.$$

$$M := \max \left\{ \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| : (t, s) \in J \times J \right\}.$$

$$N := \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, s) \right| : (t, s) \in J \times J \right\}.$$

$$P := \max\{K, L, M, N\}.$$

$$A := \sup_{t \in [0, 1]} p(t).$$

Preuve. Pour montrer que ω admet un unique point fixe, il suffit de montrer que ω est une contraction, en effet

D'une côté on a

$$\begin{aligned}
|\omega(x)(t) - \omega(y)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) F(s, x(s), x'(s)) ds - \int_0^1 G(t, s) F(s, y(s), y'(s)) ds \right. \\
&\quad - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(y(t_k), y'(t_k)) \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)) - \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(y(t_k), y'(t_k)) \right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t, s)| |F(s, x(s), x'(s)) - F(s, y(s), y'(s))| ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) \right| p(t_k) |I_k(x(t_k), x'(t_k)) - I_k(y(t_k), y'(t_k))| \\
&\quad + \sum_{k=1}^m |G(t, t_k)| p(t_k) |J_k(x(t_k), x'(t_k)) - J_k(y(t_k), y'(t_k))|.
\end{aligned}$$

D'après **(H1)**et**(H2)** :

$$\begin{aligned}
|\omega(x)(t) - \omega(y)(t)| &\leq K \int_0^1 \beta(|x(s) - y(s)| + |x'(s) - y'(s)|) ds \\
&\quad + ZA \sum_{k=1}^m c_k (|x(t_k) - y(t_k)| + |x'(t_k) - y'(t_k)|) \\
&\quad + KA \sum_{k=1}^m d_k (|x(t_k) - y(t_k)| + |x'(t_k) - y'(t_k)|).
\end{aligned}$$

On sait que

$$\|\omega(x) - \omega(y)\|_0 = \sup_{t \in J} |\omega(x)(t) - \omega(y)(t)|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\omega(x) - \omega(y)\|_0 &\leq K \int_0^1 \beta(\|x - y\|_0 + \|x' - y'\|_0) ds \\
&\quad + ZA \sum_{k=1}^m c_k (\|x - y\|_0 + \|x' - y'\|_0) + KA \sum_{k=1}^m d_k (\|x - y\|_0 + \|x' - y'\|_0).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\|x - y\|_1 = \|x - y\|_0 + \|x' - y'\|_0.$$

Alors

$$\|\omega(x) - \omega(y)\|_0 \leq K \int_0^1 \beta \|x - y\|_1 ds + ZA \sum_{k=1}^m c_k \|x - y\|_1 + KA \sum_{k=1}^m d_k \|x - y\|_1.$$

Ainsi

$$\|\omega(x) - \omega(y)\|_0 = \left(K\beta + ZA \sum_{k=1}^m c_k + KA \sum_{k=1}^m d_k \right) \|x - y\|_1. \quad (\text{P1})$$

D'autre côté, pour $x, y \in PC([0, 1])$, on a

$$\begin{aligned} |\omega'(x)(t) - \omega'(y)(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| |F(s, x, x') - F(s, y, y')| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, t_k) \right| p(t_k) |I_k(x, x') - I_k(y, y')| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_k) \right| p(t_k) |J_k(x, x') - J_k(y, y')|. \end{aligned}$$

En utilisant (H1) et (H2), on obtient

$$\begin{aligned} |\omega'(x)(t) - \omega'(y)(t)| &\leq M \int_0^1 \beta(|x - y| + |x' - y'|) ds \\ &\quad + NA \sum_{k=1}^m c_k (|x(t_k) - y(t_k)| + |x'(t_k) - y'(t_k)|) \\ &\quad + MA \sum_{k=1}^m d_k (|x(t_k) - y(t_k)| + |x'(t_k) - y'(t_k)|). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\omega'(x)(t) - \omega'(y)(t)| \leq \left(M\beta + NA \sum_{k=1}^m c_k + MA \sum_{k=1}^m d_k \right) \|x - y\|_1.$$

Ainsi

$$\|\omega'(x) - \omega'(y)\|_0 \leq \left(M\beta + NA \sum_{k=1}^m c_k + MA \sum_{k=1}^m d_k \right) \|x - y\|_1. \quad (P2)$$

En combinant (P1) et (P2), on obtient

$$\begin{aligned} \|\omega(x) - \omega(y)\|_1 &= \|\omega(x) - \omega(y)\|_0 + \|\omega'(x) - \omega'(y)\|_0 \\ &\leq \left(K\beta + ZA \sum_{k=1}^m c_k + KA \sum_{k=1}^m d_k \right) \|x - y\|_1 \\ &\quad + \left(M\beta + NA \sum_{k=1}^m c_k + MA \sum_{k=1}^m d_k \right) \|x - y\|_1 \\ &= (K + M)\beta \|x - y\|_1 + A(Z + N) \sum_{k=1}^m c_k \|x - y\|_1 \\ &\quad + A(K + M) \sum_{k=1}^m d_k \|x - y\|_1. \end{aligned} \quad (P3)$$

Puisque $P = \max\{K, L, M, N\}$, alors

$$K + M \leq 2P \quad \text{et} \quad Z + N \leq 2P.$$

Donc

$$\|\omega(x) - \omega(y)\|_1 \leq 2P \left(\beta + A \sum_{k=1}^m c_k + A \sum_{k=1}^m d_k \right) \|x - y\|_1.$$

Le faite que

$$2P \left(\beta + A \sum_{k=1}^m c_k + A \sum_{k=1}^m d_k \right) < 1,$$

alors, l'opérateur ω est une contraction et donc ω admet a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach.

3.2.2 Théorèmes d'existence de solution du problème

Nous étudions l'existence de solutions du problème (IV), en utilisant le théorème du point fixe de Leray-Schauder.

Théorème 3.2.2. *supposons que*

(H4) $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur J' et il existe une fonction de Carathéodory $h : J \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, non décroissante par rapport à son second argument, telle que

$$|F(t, x, y)| \leq h(t, |x| + |y|), \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

(H5) I_k et J_k sont continues et il existe $a_k > 0$ et $b_k > 0$ tels que

$$|I_k(x(t_k), y(t_k))| \leq a_k, \quad |J_k(x(t_k), y(t_k))| \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

(H6)

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{\theta} \int_0^1 h(t, \theta) dt + \sum_{k=1}^m R(a_k + b_k) < \frac{1}{2P}.$$

Si les hypothèses (H4), (H5) et (H6) sont vérifiées, Alors le problème (IV) admet au moins une solution.

Preuve. La preuve de ce théorème est donnée par cinq étapes.

Etape1 : On va estimer la solution x et sa dérivée x' , en effet

La solution de problème (IV) est donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k))$$

et sa dérivée est donnée par

$$x'(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x, x') + \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_k) p(t_k) J_k(x, x').$$

D'un côté, on a

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |F(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) \right| |p(t_k)| |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m |G(t, t_k)| |p(t_k)| |J_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\leq K \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + ZA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + KA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

D'après (H4) et (H5)

$$|x(t)| \leq K \int_0^1 |h(t, |x| + |x'|)| ds + ZA \sum_{k=1}^m a_k + KA \sum_{k=1}^m b_k.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \sup_{t \in J} |x(t)| \\ &\leq K \int_0^1 |h(t, \|x\|_0 + \|x'\|_0)| ds + ZA \sum_{k=1}^m a_k + KA \sum_{k=1}^m b_k. \end{aligned}$$

Puisque $P = \max\{K, Z, M, N\}$, alors $(K \leq P)$ et $(Z \leq P)$.

Donc

$$\|x\|_0 \leq P \int_0^1 |h(t, \|x\|_1)| ds + PA \sum_{k=1}^m (a_k + b_k). \quad (1)$$

D'autre côté, on a

$$\begin{aligned}
|x'(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| |F(s, x, x')| ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, t_k) \right| |p(t_k)| |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_k) \right| |p(t_k)| |J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \\
&\leq M \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + NA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\
&\quad + MA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|.
\end{aligned}$$

Par (H4) et (H5)

$$|x'(t)| \leq M \int_0^1 |h(t, |x| + |x'|)| ds + NA \sum_{k=1}^m a_k + MA \sum_{k=1}^m b_k.$$

Ainsi

$$\|x'\|_0 = \sup_{t \in J} |x'(t)|.$$

Donc

$$\|x'\|_0 \leq P \int_0^1 |h(t, \|x\|_1)| ds + PA \sum_{k=1}^m (a_k + b_k). \quad (2)$$

En sommant (1) et (2), on obtient

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0.$$

Alors

$$\|x\|_1 \leq 2P \left(\int_0^1 |h(t, \|x\|_1)| ds + A \sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \right)$$

Maintenant, on pose $\beta_0 = \|x\|_1$, alors

$$\beta_0 \leq 2P \left(\int_0^1 h(s, \beta_0) ds + A \sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \right)$$

Donc

$$\frac{1}{2P} \leq \frac{1}{\beta_0} \left(\int_0^1 h(s, \beta_0) ds + A \sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \right). \quad (3)$$

Le faite que (H6) est satisfaite, alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $\beta > r$ telle que :

$$\frac{1}{\beta} \left(\int_0^1 h(s, \beta) ds + \sum_{k=1}^m A(a_k + b_k) \right) < \frac{1}{2P}. \quad (4)$$

Pour $\beta_0 = \beta > r$, alors on a une contradiction entre (3) et (4) Donc nécessairement il faut prendre $\beta_0 \leq r$.

Ainsi

$$\|x\|_1 \leq r.$$

Etape 2 : Montrons que ω est continu.

Soit $(x_n) \subset PC^1(J)$ une suite telle que, $x_n \rightarrow x$ dans $PC^1(J)$.

Montrons que

$$\|\omega(x_n) - \omega(x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |\omega(x_n)(t) - \omega(x)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |F(s, x_n(s), x'_n(s)) - F(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G(t, t_k)}{\partial s} \right| p(t_k) |I_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m |G(t, t_k)| p(t_k) |J_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

Puisque F, I_k, J_k sont des fonctions continues et $x_n \rightarrow x$ dans $PC^1(J)$, alors

$$|F(s, x_n(s), x'_n(s)) - F(s, x(s), x'(s))| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

$$|I_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - I_k(x(t_k), x'(t_k))| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

$$|J_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - J_k(x(t_k), x'(t_k))| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc

$$\|\omega(x_n) - \omega(x)\|_0 = \sup_{t \in J} |\omega(x_n) - \omega(x)| \rightarrow 0.$$

De même

$$\begin{aligned} |\omega'(x_n)(t) - \omega'(x)(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \right| |F(s, x_n(s), x'_n(s)) - F(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial^2 G(t, t_k)}{\partial t \partial s} \right| p(t_k) |I_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G(t, t_k)}{\partial t} \right| p(t_k) |J_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\omega'(x_n) - \omega'(x)\|_0 = \sup_{t \in J} |\omega'(x_n) - \omega'(x)| \rightarrow 0.$$

Alors

$$\|\omega(x_n) - \omega(x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Par conséquent, ω est continu.

Etape 3 : Montrons que ω transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante strictement positif L tel que pour chaque $x \in B_\eta = \{x \in PC^1(J) : \|x\|_1 \leq \eta\}$.

On veut montrer que

$$\|\omega(x)\|_1 \leq L.$$

D'un côté, pour $x \in B_\eta$, on a

$$\begin{aligned} |\omega(x)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |F(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) \right| |p(t_k)| |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m |G(t, t_k)| |p(t_k)| |J_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\leq K \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + ZA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + KA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

D'après (H4) et (H5)

$$|\omega(x)(t)| \leq K \int_0^1 |h(t, |x| + |x'|)| ds + ZA \sum_{k=1}^m a_k + KA \sum_{k=1}^m b_k.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\omega(x)\|_0 &= \sup_{t \in J} |\omega(x)(t)| \\ &\leq K \int_0^1 |h(t, \|x\|_0 + \|x'\|_0)| ds + ZA \sum_{k=1}^m a_k + KA \sum_{k=1}^m b_k. \end{aligned}$$

Puisque $P = \max\{K, Z, M, N\}$, alors $(K \leq P)$ et $(Z \leq P)$.

Donc

$$\|\omega(x)\|_0 \leq P \int_0^1 |h(t, \|x\|_1)| ds + PA \sum_{k=1}^m (a_k + b_k).$$

D'autre côté, on a

$$\begin{aligned}
|\omega'(x)(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| |F(s, x, x')| ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, t_k) \right| |p(t_k)| |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_k) \right| |p(t_k)| |J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \\
&\leq M \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + NA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\
&\quad + MA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|.
\end{aligned}$$

Par (H4) et (H5)

$$|\omega'(x)(t)| \leq M \int_0^1 |h(t, |x| + |x'|)| ds + NA \sum_{k=1}^m a_k + MA \sum_{k=1}^m b_k$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|\omega'(x)\|_0 &= \sup_{t \in J} |\omega'(x)(t)| \\
&\leq P \int_0^1 |h(t, \|x\|_1)| ds + PA \sum_{k=1}^m (a_k + b_k).
\end{aligned}$$

Alors

$$\|\omega(x)\|_1 \leq 2P \left(\int_0^1 |h(t, \|x\|_1)| ds + A \sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \right) = L.$$

Etape 4 : Montrons que ω transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu.
Soit $x \in B_\eta$ et $t_1, t_2 \in J$, avec $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
|\omega(x)(t_2) - \omega(x)(t_1)| &\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| |F(s, x(s), x'(s))| ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t_2, t_k) - \frac{\partial G}{\partial s}(t_1, t_k) \right| |p(t_k)| |U_k(x(t_k), x'(t_k))| \\
&\quad + \sum_{k=1}^m |G(t_2, t_k) - G(t_1, t_k)| |p(t_k)| |V_k(x(t_k), x'(t_k))|. \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| |h(t, |x| + |x'|)| ds \\
&\quad + A \sum_{k=1}^m a_k \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t_2, t_k) - \frac{\partial G}{\partial s}(t_1, t_k) \right| \\
&\quad + A \sum_{k=1}^m b_k |G(t_2, t_k) - G(t_1, t_k)|.
\end{aligned}$$

Puisque $G(t, s)$ et $\frac{\partial G(t, s)}{\partial s}$ sont continues, alors lorsque $t_2 \rightarrow t_1$,

$$|G(t_2, s) - G(t_1, s)| \rightarrow 0,$$

et

$$\left| \frac{\partial G}{\partial s}(t_2, t_k) - \frac{\partial G}{\partial s}(t_1, t_k) \right| \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$|\omega(x)(t_2) - \omega(x)(t_1)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t_2 \rightarrow t_1.$$

On conclure, d'après les étapes précédentes et le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'opérateur ω transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.

Puisque ω est aussi continu, alors ω est un opérateur complètement continu.

Étape 5 : Dans la suite on va appliquée le thoerème de Leray-Schauder.

Soit $\bar{\Omega} = \{x \in PC^1(J) : \|x\|_1 < r + 1\}$, un sous-ensemble ouvert et convexe de $PC^1(J)$.

Définissons un opérateur $H(\lambda, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow PC^1(J)$ par

$$\begin{aligned} H(\lambda, x)(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s) F(s, x(s), x'(s)) ds \\ &\quad + \lambda \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \\ &\quad + \lambda \sum_{k=1}^m G(t, t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de montre que $\forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in [0, 1], H(\lambda, x) \neq x$, en effet il suffit de montrer que

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in [0, 1], \quad H(\lambda, x) \neq x.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in [0, 1]$ tels que

$$x = H(\lambda, x).$$

D'après étape 1, on a

$$\|x\|_1 \leq 2P \left(\int_0^1 h(t, \|x\|_1) dt + A \sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \right).$$

Puisque $x \in \partial\Omega$, alors

$$\|x\|_1 = r + 1.$$

Donc

$$r + 1 \leq 2P \left(\int_0^1 h(t, r + 1) dt + A \sum_{k=1}^m (a_k + b_k) \right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{2P} \leq \frac{1}{r + 1} \left(\int_0^1 h(t, r + 1) dt + \sum_{k=1}^m A(a_k + b_k) \right).$$

Ce qui contredit (H6) .

Finalement, on déduit que le problème (IV) admet au moins une solution.

Le Théorème 3.2.2 suppose que les impulsions sont bornées, ce qui facilite l'estimation a priori. Le Théorème suivant (Théorème 3.2.3) généralise ce résultat en autorisant des impulsions à croissance linéaire par rapport à x et x' . Cependant, cette généralisation nécessite une condition supplémentaire (H10), qui assure que la croissance des sauts reste suffisamment petite pour ne pas compromettre l'existence.

Théorème 3.2.3. *supposons que*

(H7) *il existe $g \in L^1(J)$ tel que*

$$|F(t, x, y)| \leq g(t) \quad p.p \ t \in J, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(H8) $I_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *est continue et il existe $\alpha_k > 0$ tel que*

$$|I_k(x(t_k), y(t_k))| \leq \alpha_k(\|x\|_0 + \|y\|_0), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

(H9) $J_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *est continue et il existe $\beta_k > 0$ tel que*

$$|J_k(x(t_k), y(t_k))| \leq \beta_k(\|x\|_0 + \|y\|_0), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Si

$$2PA \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \beta_k) < 1,$$

alors le problème (IV) admet au moins une solution.

Preuve. La preuve de ce théorème est donnée par cinq étapes.

Etape1 : On va estimer la solution x et sa dérivée x'

On sait que

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) + \sum_{k=1}^m G(t, t_k) p(t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)),$$

et

$$x'(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) F(s, x, x') ds - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial s}(t, t_k) p(t_k) I_k(x, x') + \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_k) p(t_k) J_k(x, x').$$

D'un côté, on a

$$|x(t)| \leq K \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + ZA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| + KA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|.$$

D'après (H7), (H8), et (H9)

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq K \int_0^1 g(s) ds + ZA \sum_{k=1}^m \alpha_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) + KA \sum_{k=1}^m \beta_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) \\ &\leq K \|g\|_{L^1} + A \left(Z \sum_{k=1}^m \alpha_k + K \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x(t)\|_0 = \sup_{t \in J} |x(t)|.$$

Donc

$$\|x(t)\|_0 \leq K\|g\|_{L^1} + A \left(Z \sum_{k=1}^m \alpha_k + K \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1.$$

D'autre côté, on a

$$|x'(t)| \leq M \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + NA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| + MA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|.$$

D'après (H7),(H8), et (H9)

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq M \int_0^1 g(s) ds + NA \sum_{k=1}^m \alpha_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) + MA \sum_{k=1}^m \beta_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) \\ &\leq M\|g\|_{L^1} + A \left(N \sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x'(t)\|_0 = \sup_{t \in J} |x'(t)|.$$

Donc

$$\|x'(t)\|_0 \leq M\|g\|_{L^1} + A \left(N \sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1.$$

On sait que

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0.$$

Alors

$$\|x\|_1 \leq (M + K)\|g\|_{L^1} + A \left((Z + N) \sum_{k=1}^m \alpha_k + (K + M) \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1.$$

Puisque, $M + K \leq 2P$ et $Z + N \leq 2P$, alors

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq 2P\|g\|_{L^1} + A \left(2P \sum_{k=1}^m \alpha_k + 2P \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1 \\ &\leq 2P\|g\|_{L^1} + 2PA \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \beta_k) \|x\|_1. \end{aligned}$$

Posons : $\mu = 2PA \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \beta_k)$, on trouve

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq 2P\|g\|_{L^1} + \mu\|x\|_1 \\ \Rightarrow (1 - \mu)\|x\|_1 &\leq 2P\|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Par condition, on a $\mu < 1$, alors

$$\|x\|_1 \leq \frac{2P\|g\|_{L^1}}{1 - \mu} = r_1.$$

Etape 2 : Montrons que ω est continu.

Soit $(x_n) \subset PC^1(J)$ une suite telle que, $x_n \rightarrow x$ dans $PC^1(J)$, c'est-à-dire

$$\|x_n - x\|_1 = \|x_n - x\|_0 + \|x'_n - x'\|_0 \rightarrow 0.$$

Montrons que

$$\|\omega(x_n) - \omega(x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |\omega(x_n)(t) - \omega(x)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |F(s, x_n(s), x'_n(s)) - F(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G(t, t_k)}{\partial s} \right| p(t_k) |I_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m |G(t, t_k)| p(t_k) |J_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

Puisque F, U_k, V_k sont des fonctions continues et $x_n \rightarrow x$ dans $PC^1(J)$, alors

$$\begin{aligned} |F(s, x_n(s), x'_n(s)) - F(s, x(s), x'(s))| &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \\ |I_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - I_k(x(t_k), x'(t_k))| &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \\ |J_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - J_k(x(t_k), x'(t_k))| &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\omega(x_n) - \omega(x)\|_0 = \sup_{t \in J} |\omega(x_n) - \omega(x)| \rightarrow 0.$$

De même

$$\begin{aligned} |\omega'(x_n)(t) - \omega'(x)(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \right| |F(s, x_n(s), x'_n(s)) - F(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial^2 G(t, t_k)}{\partial t \partial s} \right| p(t_k) |I_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - I_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G(t, t_k)}{\partial t} \right| p(t_k) |J_k(x_n(t_k), x'_n(t_k)) - J_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\omega'(x_n) - \omega'(x)\|_0 = \sup_{t \in J} |\omega'(x_n) - \omega'(x)| \rightarrow 0.$$

Alors

$$\|\omega(x_n) - \omega(x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Par conséquent, ω est continu.

Etape 3 : Montrons que ω transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante strictement positif L tel que pour chaque $x \in B_\eta = \{x \in PC^1(J) : \|x\|_1 \leq \eta\}$.

On veut montrer que

$$\|\omega(x)\|_1 \leq L_1.$$

D'un côté, pour $x \in B_\eta$, on a

$$|\omega(x)(t)| \leq K \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + ZA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| + KA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|.$$

D'après (H7),(H8), et (H9)

$$\begin{aligned} |\omega(x)(t)| &\leq K \int_0^1 g(s) ds + ZA \sum_{k=1}^m \alpha_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) + KA \sum_{k=1}^m \beta_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) \\ &\leq K \|g\|_{L^1} + A \left(Z \sum_{k=1}^m \alpha_k + K \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1. \end{aligned}$$

Donc

$$\|x(t)\|_0 \leq K \|g\|_{L^1} + A \left(Z \sum_{k=1}^m \alpha_k + K \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1.$$

D'autre côté, on a

$$|\omega'(x)(t)| \leq M \int_0^1 |F(s, x, x')| ds + NA \sum_{k=1}^m |I_k(x(t_k), x'(t_k))| + MA \sum_{k=1}^m |J_k(x(t_k), x'(t_k))|.$$

D'après (H7),(H8), et (H9)

$$\begin{aligned} |\omega'(x)(t)| &\leq M \int_0^1 g(s) ds + NA \sum_{k=1}^m \alpha_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) + MA \sum_{k=1}^m \beta_k (\|x\|_0 + \|x'\|_0) \\ &\leq M \|g\|_{L^1} + A \left(N \sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x'(t)\|_0 \leq M \|g\|_{L^1} + A \left(N \sum_{k=1}^m \alpha_k + M \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1.$$

Alors

$$\|x\|_1 \leq (M + K)\|g\|_{L^1} + A \left((Z + N) \sum_{k=1}^m \alpha_k + (K + M) \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1.$$

Puisque, $M + K \leq 2P$ et $Z + N \leq 2P$, alors

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq 2P\|g\|_{L^1} + A \left(2P \sum_{k=1}^m \alpha_k + 2P \sum_{k=1}^m \beta_k \right) \|x\|_1 \\ &\leq 2P\|g\|_{L^1} + 2PA \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \beta_k) \|x\|_1 = L_1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x\|_1 \leq L_1.$$

Etape 4 : Montrons que ω transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu.

Soit $x \in B_\eta$ et $t_1, t_2 \in J$, avec $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned} |\omega(x)(t_2) - \omega(x)(t_1)| &\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| |F(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial G}{\partial s}(t_2, t_k) - \frac{\partial G}{\partial s}(t_1, t_k) \right| p(t_k) |U_k(x(t_k), x'(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m |G(t_2, t_k) - G(t_1, t_k)| p(t_k) |V_k(x(t_k), x'(t_k))|. \end{aligned}$$

Puisque $G(t, s)$ et $\frac{\partial G(t, s)}{\partial s}$ sont continues, alors lorsque $t_2 \rightarrow t_1$,

$$|G(t_2, s) - G(t_1, s)| \rightarrow 0,$$

et

$$\left| \frac{\partial G}{\partial s}(t_2, t_k) - \frac{\partial G}{\partial s}(t_1, t_k) \right| \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$|\omega(x)(t_2) - \omega(x)(t_1)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t_2 \rightarrow t_1.$$

On conclure, d'après les étapes précédentes et le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'opérateur ω transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.

Puisque ω est aussi continu, alors ω est un opérateur complètement continu.

Etape 5 : On va appliquée le thoerème de Leray-Schauder

Soit $\Omega = \{x \in PC^1(J) : \|x\|_1 < r_1 + 1\}$, un sous-ensemble ouvert et convexe de $PC^1(J)$.

Définissons un opérateur $H(\lambda, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow PC^1(J)$ par

$$\begin{aligned} H(\lambda, x)(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s) F(s, x(s), x'(s)) ds \\ &\quad + \lambda \sum_{k=1}^m \frac{\partial G}{\partial s}(t, t_k) I_k(x(t_k), x'(t_k)) \\ &\quad + \lambda \sum_{k=1}^m G(t, t_k) J_k(x(t_k), x'(t_k)), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de montrer que $\forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in [0, 1], H(\lambda, x) \neq x$, en effet il suffit de montrer que

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in [0, 1], \quad H(\lambda, x) \neq x.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in [0, 1]$ tels que

$$x = H(\lambda, x).$$

D'après étape 1, on a

$$\|x\|_1 \leq r_1. \quad (5)$$

Où

$$r_1 = \frac{2P\|g\|_{L^1}}{1 - \mu}.$$

Puisque $x \in \partial\Omega$, alors

$$\|x\|_1 = r_1 + 1. \quad (6)$$

D'après (5) et (6), on obtient

$$r_1 + 1 \leq r_1.$$

Ce qui est impossible.

Finalement, on déduit que le problème (IV) admet au moins une solution.

Chapitre 4

Problème aux limite pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité de solutions du problème aux limite d'ordre fractionnaire avec impulsions. En appliquant le théorème du point fixe de Banach et Leray-Schauder ([21]).

On considère le problème au limite suivant :

$$(V) \quad \begin{cases} {}^c D_{0+}^q x(t) = \omega(t) f(t, x(t), x'(t)), & 1 < q < 2, t \in J = [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, \dots, n, \\ \Delta x'(t_k) = J_k(x(t_k)), & k = 1, \dots, n, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1 x'(0) = 0, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2 x'(1) = 0. \end{cases}$$

Où :

- ${}^c D_{0+}^q$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, avec $1 < q < 2$.
- La fonctions ω est une fonction continue définie sur J à valeur dans $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un fonction continue .
- Les fonctions $I_k, J_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues pour $k = 1, \dots, n$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes réelles.

4.1 Solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires impulsives

Définition 4.1.1. Une fonction $x \in PC^1(J)$ est dite solution de problème (V) si elle vérifie tout les équations de ce problème.

Lemme 4.1.1. [21] Pour $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \neq 0$, la solution du problème (V) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\ & + \sum_{i=1}^{n+1} \partial_s G(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\ & - \sum_{i=1}^n G(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\ & + \sum_{i=1}^n \partial_s G(t, t_i) I_i(x(t_i)) - \sum_{i=1}^n G(t, t_i) J_i(x(t_i)). \end{aligned}$$

pour tout $t \in (t_k, t_{k+1}]$, avec $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = 1$.

Où :

$$\begin{aligned} G(t, s) = & -\frac{1}{\eta} \begin{cases} (\beta_1 + \alpha_1 t)(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_2 s), & t \leq s, \\ (\beta_1 + \alpha_1 s)(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_2 t), & t \geq s, \end{cases} \\ \partial_s G(t, s) = & -\frac{1}{\eta} \begin{cases} -\alpha_2 (\beta_1 + \alpha_1 t), & \text{si } t \leq s, \\ \alpha_1 (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_2 t), & \text{si } t \geq s, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\eta = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1.$$

Preuve. Supposons que x soit une solution du problème (V).

Alors, pour $t \in [0, t_1]$, on considère :

$${}^c D_{0+}^q x(t) = \sigma(t), \quad 1 < q < 2.$$

On applique l'opérateur intégral fractionnaire I_{0+}^q des deux côtés :

$$I_{0+}^q {}^c D_{0+}^q x(t) = I_{0+}^q \sigma(t).$$

En utilisant la propriété fondamentale de la dérivée de Caputo, on obtient :

$$I_{0+}^q {}^c D_{0+}^q x(t) = x(t) - x(0) - x'(0)t.$$

Ainsi :

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds.$$

Posons $b_0 = -x(0)$ et $b_1 = -x'(0)$, on obtient :

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds - b_0 - b_1 t. \quad (1)$$

Alors :

$$x'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds - b_1. \quad (2)$$

Pour $t \in]t_1, t_2]$, il existe des constantes $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$x(t) = \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds - d_0 - d_1(t-t_1), \quad (3)$$

$$x'(t) = \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds - d_1. \quad (4)$$

Les conditions impulsives en $t = t_1$ sont :

$$x(t_1^+) - x(t_1^-) = I_1(x(t_1)), \quad x'(t_1^+) - x'(t_1^-) = J_1(x(t_1)).$$

De (1) et (2) avec $t = t_1$:

$$x(t_1^-) = \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds - b_0 - b_1 t_1, \quad (5)$$

$$x'(t_1^-) = \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds - b_1. \quad (6)$$

De (3) et (4) avec $t = t_1$:

$$x(t_1^+) = -d_0, \quad x'(t_1^+) = -d_1. \quad (7)$$

D'un côté, on a

$$x(t_1^+) - x(t_1^-) = I_1 \Rightarrow d_0 = -I_1 - x(t_1^-).$$

D'après (5) :

$$d_0 = -I_1 - \left(\int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds - b_0 - b_1 t_1 \right).$$

Ainsi

$$d_0 = b_0 + b_1 t_1 - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds - I_1. \quad (8)$$

D'autre côté, on a

$$x'(t_1^+) - x'(t_1^-) = J_1 \Rightarrow -d_1 - x'(t_1^-) = J_1.$$

Alors

$$d_1 = -J_1 - x'(t_1^-).$$

Par (6), on trouve :

$$d_1 = b_1 - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds - J_1. \quad (9)$$

En remplaçant (8) et (9) dans (3), on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \\ &+ \int_0^{t_1} \left[\frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{(t_1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} (t-t_1) \right] \sigma(s) ds \\ &- b_0 - b_1 t_1 - b_1(t-t_1) + I_1(x(t_1)) + J_1(x(t_1))(t-t_1) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \\ &+ \int_0^{t_1} \left[\frac{(t-t_1)(t_1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right] \sigma(s) ds \\ &- b_0 - b_1 t + J_1(x(t_1))(t-t_1) + I_1(x(t_1)). \end{aligned}$$

Pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right] \sigma(s) ds \\ &- b_0 - b_1 t + \sum_{i=1}^k J_i(x(t_i))(t-t_i) + \sum_{i=1}^k I_i(x(t_i)). \end{aligned} \quad (10)$$

Maintenant on va déterminons b_0 et b_1 :

On a

$$x(0) = -b_0, \quad x'(0) = -b_1.$$

Par première condition aux limites :

$$\alpha_1 x(0) - \beta_1 x'(0) = 0 \implies -\alpha_1 b_0 + \beta_1 b_1 = 0 \implies \alpha_1 b_0 - \beta_1 b_1 = 0. \quad (11)$$

D'après (10), on trouve

$$\begin{aligned} x(1) &= \int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(1-t_i)(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right] \sigma(s) ds \\ &- b_0 - b_1 + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i))(1-t_i) + \sum_{i=1}^n I_i(x(t_i)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x'(1) &= \int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds - b_1 + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i)). \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds, \\ B &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(1-t_i)(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right] \sigma(s) ds, \\ C &= \int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds, \\ D &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds, \\ E &= \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i))(1-t_i), \\ F &= \sum_{i=1}^n I_i(x(t_i)), \\ G &= \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i)). \end{aligned}$$

Donc

$$x(1) = A + B - b_0 - b_1 + E + F, \quad (12)$$

et

$$x'(1) = C + D - b_1 + G \quad (13)$$

Par deuxième condition aux limites :

$$\alpha_2 x(1) + \beta_2 x'(1) = 0.$$

On obtient :

$$\alpha_2 b_0 + (\alpha_2 + \beta_2) b_1 = S, \quad (14)$$

où

$$S = \alpha_2(A + B + E + F) + \beta_2(C + D + G);$$

De (11) et (14), on a le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 b_0 - \beta_1 b_1 = 0, \\ \alpha_2 b_0 + (\alpha_2 + \beta_2) b_1 = S. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est :

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} &= \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2) + \alpha_2\beta_1 \\ &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ &= \eta \neq 0.\end{aligned}$$

Par la règle de Cramer, on trouve

$$\begin{aligned}b_0 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ S & \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}}{\eta} \\ &= \frac{0 \cdot (\alpha_2 + \beta_2) - (-\beta_1)S}{\eta} \\ &= \frac{\beta_1 S}{\eta},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & S \end{pmatrix}}{\eta} \\ &= \frac{\alpha_1 S - 0 \cdot \alpha_2}{\eta} \\ &= \frac{\alpha_1 S}{\eta}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}b_0 &= \frac{1}{\eta} \left\{ \alpha_2 \beta_1 \left[\int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \right. \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(1-t_i)(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right) \sigma(s) ds \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i))(1-t_i) + \sum_{i=1}^n I_i(x(t_i)) \right] \\ &\quad + \beta_1 \beta_2 \left[\int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i)) \right] \Big\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_1 = \frac{1}{\eta} & \left\{ \alpha_1 \alpha_2 \left[\int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \right. \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(1-t_i)(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right) \sigma(s) ds \\
& + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i))(1-t_i) + \sum_{i=1}^n I_i(x(t_i)) \left. \right] \\
& + \alpha_1 \beta_2 \left[\int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i)) \left. \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
x(t) = & \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \\
& + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} (t-t_i) \right] \sigma(s) ds \\
& - \frac{1}{\eta} \left[(\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_2 t) \left(\int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \sigma(s) ds \right. \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(1-t_i)(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right) \sigma(s) ds \\
& + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i))(1-t_i) + \sum_{i=1}^n I_i(x(t_i)) \left. \right) \\
& + (\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 t) \left(\int_{t_n}^1 \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \sigma(s) ds + \sum_{i=1}^n J_i(x(t_i)) \left. \right) \left. \right] \\
& + \sum_{i=1}^k I_i(x(t_i)) + \sum_{i=1}^k J_i(x(t_i))(t-t_i).
\end{aligned}$$

Alors, la solution du problème (V) est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
x(t) = & \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
& + \sum_{i=1}^{n+1} \partial_s G(t, t_i) \int_{t_i}^{t_{i-1}} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
& - \sum_{i=1}^n G(t, t_i) \int_{t_i}^{t_{i-1}} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
& + \sum_{i=1}^n \partial_s G(t, t_i) I_i(x(t_i)) - \sum_{i=1}^n G(t, t_i) J_i(x(t_i)).
\end{aligned}$$

Notations

$$c_1 := \max |G(t, s)|,$$

$$c_2 := \max \left| \frac{\partial G(t, s)}{\partial s} \right| = \max \left| \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \right|,$$

$$c_3 := \max \left| \frac{\partial^2 G(t, s)}{\partial s \partial t} \right|,$$

$$\gamma := \max_{t \in J} \omega(t).$$

4.2 Existence et unicité du problème

On considère l'opérateur $T : PC^1([0, 1]) \rightarrow PC^1([0, 1])$ défini par :

$$\begin{aligned}
T(x)(t) = & \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
& + \sum_{i=1}^{n+1} \partial_s G(t, t_i) \int_{t_i}^{t_{i-1}} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
& - \sum_{i=1}^n G(t, t_i) \int_{t_i}^{t_{i-1}} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
& + \sum_{i=1}^n \partial_s G(t, t_i) I_i(x(t_i)) - \sum_{i=1}^n G(t, t_i) J_i(x(t_i)).
\end{aligned}$$

pour tout $t \in (t_k, t_{k+1}]$, avec $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = 1$.

Proposition 4.2.1. *Soit $T : PC^1([0, 1]) \rightarrow PC^1([0, 1])$ l'opérateur défini précédemment.*

Alors, pour tout $x \in PC^1([0, 1])$, la fonction Tx est dérivable sur chaque intervalle (t_k, t_{k+1}) et sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
(Tx)'(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} \partial_t \partial_s G(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
&- \sum_{i=1}^n \partial_t G(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) f(s, x(s), x'(s)) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \partial_t \partial_s G(t, t_i) I_i(x(t_i)) - \sum_{i=1}^n \partial_t G(t, t_i) J_i(x(t_i)).
\end{aligned}$$

4.2.1 Théorème d'existence et d'unicité de solution

Pour établir l'unicité d'une solution au problème (V), en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 4.2.1. *Supposons que*

(H₁) Il existe une constante $L_1 > 0$ telle que

$$|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq L_1 (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|),$$

pour tout $t \in J$ et pour tous $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$.

(H₂) Il existe des constantes $L_2, L_3 > 0$ telles que

$$|I_k(x) - I_k(y)| < L_2 |x - y| \quad \text{et} \quad |J_k(x) - J_k(y)| < L_3 |x - y|,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $k = 1, 2, \dots, n$.

Si

$$\Lambda < \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\} < 1,$$

où

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \frac{2L_1(1 + c_1 + nc_1)}{\Gamma(q+1)} + \frac{2L_1nc_1}{\Gamma(q)} + n(c_2L_2 + c_1L_3), \\
\Lambda_2 &= \frac{2L_1(1 + nc_2)}{\Gamma(q)} + \frac{2L_1(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + n(c_3L_2 + c_2L_3).
\end{aligned}$$

Alors le problème admet une unique solution.

Preuve. Soient $x, y \in PC^1([0, 1])$, on veut montrer que :

$$\|Tx - Ty\|_1 \leq \Lambda \|x - y\|_1.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x(s), x'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x, x') - f(s, y, y')| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x, x') - f(s, y, y')| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t, t_i)| |I_i(x(t_i)) - I_i(y(t_i))| + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| |J_i(x(t_i)) - J_i(y(t_i))| \\
&\leq 2L_1 \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) \|x - y\|_{PC^1} ds \\
&\quad + 2L_1 \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) \|x - y\|_{PC^1} ds \\
&\quad + 2L_1 \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) \|x - y\|_{PC^1} ds \\
&\quad + L_2 \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t, t_i)| |x(t_i) - y(t_i)| + L_3 \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| |x(t_i) - y(t_i)|. \tag{*}
\end{aligned}$$

Par intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds &= \frac{(t-t_k)^q}{\Gamma(q+1)} \leq \frac{1}{\Gamma(q+1)}, \\
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds &= \frac{(t_i-t_{i-1})^q}{\Gamma(q+1)} \leq \frac{1}{\Gamma(q+1)},
\end{aligned}$$

et

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} ds = \frac{(t_i-t_{i-1})^{q-1}}{\Gamma(q)} \leq \frac{1}{\Gamma(q)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(*) \implies \|Tx - Ty\|_0 &\leq \frac{2L_1\gamma}{\Gamma(q+1)} \|x - y\|_1 + \frac{2L_1\gamma(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} \|x - y\|_1 \\
&\quad + \frac{2L_1\gamma nc_1}{\Gamma(q)} \|x - y\|_1 + nc_2L_2 \|x - y\|_1 + nc_1L_3 \|x - y\|_1 \\
&\leq \left[\frac{2L_1\gamma(1+c_2+nc_2)}{\Gamma(q+1)} + \frac{2L_1\gamma nc_1}{\Gamma(q)} + n(c_2L_2 + c_1L_3) \right] \|x - y\|_1 \\
&\leq \Lambda_1 \|x - y\|_1.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
|(Tx)'(t) - (Ty)'(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x(s), x'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n+1} G_{st}(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(ti-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x, x') - f(s, y, y')| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |G_t(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(ti-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x, x') - f(s, y, y')| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n G_{st}(t, t_i) |I_i(x(t_i)) - I_i(y(t_i))| + \sum_{i=1}^n G_t(t, t_i) |J_i(x(t_i)) - J_i(y(t_i))| \\
&\leq \frac{2L_1\gamma}{\Gamma(q)} \|x - y\|_1 + \frac{2L_1\gamma(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} \|x - y\|_1 \\
&\quad + \frac{2L_1\gamma nc_2}{\Gamma(q)} \|x - y\|_1 + nc_3L_2 \|x - y\|_1 + nc_2L_3 \|x - y\|_1 \\
&= \left[\frac{2L_1\gamma(1+nc_2)}{\Gamma(q)} + \frac{2L_1\gamma(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + n(c_3L_2 + c_2L_3) \right] \|x - y\|_1.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Tx' - Ty'\|_0 &\leq \left[\frac{2L_1\gamma(1+nc_2)}{\Gamma(q)} + \frac{2L_1\gamma(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + n(c_3L_2 + c_2L_3) \right] \|x - y\|_1 \\
&\leq \Lambda_2 \|x - y\|_1.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|_1 &= \|Tx - Ty\|_0 + \|Tx' - Ty'\|_0 \\
&\leq \Lambda_1 \|x - y\|_1 + \Lambda_2 \|x - y\|_1 \\
&\leq \Lambda \|x - y\|_1.
\end{aligned}$$

Puisque $\Lambda < 1$, alors par le théorème de contraction de Banach le problème (V) admet une unique solution.

4.2.2 Théorème d'existence de solution du problème

Nous étudions l'existence de solutions du problème (V), en utilisant le théorème du point fixe de L'Alternative de Leray-Schauder.

Théorème 4.2.2. *Supposons que*

(H₃) *Il existe une fonction $\nu_1(t) \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\nu_1(t) > 0$ sur un sous-intervalle de $[0, 1]$ tel que*

$$|f(t, x, y)| \leq \nu_1(t), \quad \forall (t, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2.$$

(H₄) Il existe des constantes $\nu_2, \nu_3 > 0$ telles que

$$|I_k(x)| \leq \nu_2, \quad |J_k(x)| \leq \nu_3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si les fonctions f , I_k et J_k vérifient les hypothèses (H₃) et (H₄), alors le problème admet au moins une solution.

Notations

$$\tau = \max_{t \in J} \nu_1(t), \quad \gamma = \max_{t \in J} \omega(t).$$

Preuve. La preuve est donnée par quatre étapes.

Étape 1 : Montrons que T est continu.

Soit $(x_n) \subset PC^1(J)$ une suite telle que, $x_n \rightarrow x$ dans $PC^1(J)$.

Montrons que

$$\|T(x_n) - T(x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x_n(s), x'_n(s)) - f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x_n, x'_n) - f(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x_n, x'_n) - f(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t, t_i)| |I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i))| + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| |J_i(x_n(t_i)) - J_i(x(t_i))|. \end{aligned}$$

Puisque f, I_k, J_k sont des fonctions continues et $x_n \rightarrow x$ dans $PC^1(J)$, alors

$$\|T(x_n) - T(x)\|_0 = \sup_{t \in J} |T(x_n) - T(x)| \rightarrow 0.$$

De même

$$\begin{aligned} |(Tx_n)'(t) - (Tx)'(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x_n(s), x'_n(s)) - f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} G_{st}(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x_n, x'_n) - f(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |G_t(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x_n, x'_n) - f(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n G_{st}(t, t_i) |I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i))| + \sum_{i=1}^n G_t(t, t_i) |J_i(x_n(t_i)) - J_i(x(t_i))|. \end{aligned}$$

Alors

$$\|T'(x_n) - T'(x)\|_0 = \sup_{t \in J} |T'(x_n) - T'(x)| \rightarrow 0.$$

Donc

$$\|T(x_n) - T(x)\|_1 \rightarrow 0.$$

Finalement, T est continu.

Etape2 : Montrons que T transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante strictement positive M tel que pour chaque $x \in B_\eta = \{x \in PC^1(J) : \|x\|_1 \leq \eta\}$.

On veut montrer que

$$\|T(x)\|_1 \leq M.$$

D'un côté, pour $x \in B_\eta$, on a

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x, x')| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t, t_i)| |I_i(x(t_i))| + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| |J_i(x(t_i))|. \end{aligned}$$

D'après (H_3) et (H_4)

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) v_1(s) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) v_1(s) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) v_1(s) ds \\ &\quad + v_2 \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t, t_i)| + v_3 \sum_{i=1}^n |G(t, t_i)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)| &\leq \frac{\gamma\tau}{\Gamma(q+1)} + \frac{\gamma\tau c_2(n+1)}{\Gamma(q+1)} \\
&\quad + \frac{\gamma\tau n c_1}{\Gamma(q)} + n c_2 v_2 + n c_1 v_3 \\
&\leq \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{n c_1}{\Gamma(q)} \right] \\
&\quad + n(c_2 v_2 + c_1 v_3).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_0 &= \sup_{t \in J} |T(x)(t)| \\
&\leq \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{n c_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2 v_2 + c_1 v_3).
\end{aligned}$$

D'autre côté, on a

$$\begin{aligned}
|(Tx)'(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x(s), x'(s))| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_{st} G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x, x')| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_t G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x, x')| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_{st} G(t, t_i)| |I_i(x(t_i))| \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_t G(t, t_i)| |J_i(x(t_i))|.
\end{aligned}$$

D'après (H_3) et (H_4) , on obtient

$$\begin{aligned}
|(Tx)'(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) v_1(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_{st}G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) v_1(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |\partial_t G(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) v_1(s) ds \\
&\quad + v_2 \sum_{i=1}^n |\partial_{st}G(t, t_i)| \\
&\quad + v_3 \sum_{i=1}^n |\partial_t G(t, t_i)| \\
&\leq \frac{\gamma\tau}{\Gamma(q)} + \frac{\gamma\tau c_3(n+1)}{\Gamma(q+1)} \\
&\quad + \frac{\gamma\tau n c_2}{\Gamma(q)} + n c_3 v_2 + n c_2 v_3 \\
&\leq \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + \frac{n c_2}{\Gamma(q)} \right] \\
&\quad + n(c_3 v_2 + c_2 v_3).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|T'(x)\|_0 &= \sup_{t \in J} |T'(x)(t)| \\
&\leq \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + \frac{n c_2}{\Gamma(q)} \right] + n(c_3 v_2 + c_2 v_3).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_1 &= \|T(x)\|_0 + \|T'(x)\|_0 \\
&\leq \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{n c_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2 v_2 + c_1 v_3) \\
&\quad + \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + \frac{n c_2}{\Gamma(q)} \right] + n(c_3 v_2 + c_2 v_3) = M.
\end{aligned}$$

Etape3 : Montrons que T transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu.

Soit $x \in B_\eta$ et $t_1, t_2 \in J$, avec $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| &\leq \left| \int_{t_k}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x, x') ds - \int_{t_k}^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) f(s, x, x') ds \right| \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t_2, t_i) - \partial_s G(t_1, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x, x')| ds \\
&+ \sum_{i=1}^n |G(t_2, t_i) - G(t_1, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x, x')| ds \\
&+ \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t_2, t_i) - \partial_s G(t_1, t_i)| |I_i(x(t_i))| \\
&+ \sum_{i=1}^n |G(t_2, t_i) - G(t_1, t_i)| |J_i(x(t_i))|.
\end{aligned}$$

D'après (H_3) et (H_4) , on obtient

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| &\leq \left| \int_{t_k}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) v_1(s) ds - \int_{t_k}^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) v_1(s) ds \right| \\
&+ \frac{\gamma\tau}{\Gamma(q+1)} \sum_{i=1}^{n+1} |\partial_s G(t_2, t_i) - \partial_s G(t_1, t_i)| \\
&+ \frac{\gamma\tau}{\Gamma(q)} \sum_{i=1}^n |G(t_2, t_i) - G(t_1, t_i)| \\
&+ v_2 \sum_{i=1}^n |\partial_s G(t_2, t_i) - \partial_s G(t_1, t_i)| \\
&+ v_3 \sum_{i=1}^n |G(t_2, t_i) - G(t_1, t_i)|.
\end{aligned}$$

Puisque G et $\partial_s G$ sont continues sur $[0, 1] \times [0, 1]$, alors

$$|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t_2 \rightarrow t_1.$$

On conclure, Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'opérateur T transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.

Puisque T est aussi continu, alors T est un opérateur complètement continu.

Etape4 : Il suffit de montre que l'ensemble $V = \{x \in PC^1(J, \mathbb{R}) \mid x = \lambda Tx, 0 < \lambda < 1\}$ est borné.

Soit $x \in V$, pour chaque $t \in J$ on a :

$$|x(t)| = \lambda |(Tx)(t)|, \quad \forall t \in [0, 1], \quad 0 < \lambda < 1$$

Puisque $\lambda < 1$, alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |(Tx)(t)| \\ &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x(s), x(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} G_s(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x(s), x(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n G(t, t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x(s), x(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n G_s(t, t_i) |I_i(x(t_i))| + \sum_{i=1}^n G(t, t_i) |J_i(x(t_i))| \\ &\leq \gamma \tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{nc_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2v_2 + c_1v_3). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x\|_0 \leq \gamma \tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{nc_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2v_2 + c_1v_3).$$

De plus

$$\begin{aligned} |x'(t)| &= \lambda |(Tx)'(t)| \leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x(s), x(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |G_{st}(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \omega(s) |f(s, x(s), x(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |G_t(t, t_i)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \omega(s) |f(s, x(s), x(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |G_{st}(t, t_i)| |I_i(x(t_i))| + \sum_{i=1}^n |G_t(t, t_i)| |J_i(x(t_i))| \\ &\leq \gamma \tau \left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{(n+1)c_3}{\Gamma(q+1)} + \frac{nc_2}{\Gamma(q)} \right] + n(c_3v_2 + c_2v_3). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|x'\|_0 \leq \gamma \tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{nc_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2v_2 + c_1v_3).$$

On sait que

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0$$

Alors

$$\|x\|_1 \leq \zeta_1 + \zeta_2,$$

où

$$\zeta_1 = \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{nc_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2v_2 + c_1v_3),$$

$$\zeta_2 = \gamma\tau \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{(n+1)c_2}{\Gamma(q+1)} + \frac{nc_1}{\Gamma(q)} \right] + n(c_2v_2 + c_1v_3).$$

Posons

$$\zeta \leq \max\{\zeta_1, \zeta_2\},$$

alors

$$\|x\|_1 \leq \zeta.$$

Par conséquence, V est un ensemble borné .

Ainsi, par le théorème (1.4.3) du point fixe de Leray-Schauder. On déduit que T admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (V).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes aux limites impulsifs d'ordre entier et fractionnaire.

Pour obtenir les résultats principaux, nous avons utilisé plusieurs outils d'analyse fonctionnelle, notamment le théorème du point fixe de Banach ainsi que les théorèmes de Leray–Schauder.

Sous différentes hypothèses portant sur les fonctions considérées et les conditions impulsives, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité des solutions. Ces résultats montrent l'importance des méthodes de point fixe dans l'étude des équations différentielles impulsives et fractionnaires.

Les problèmes étudiés permettent de modéliser plusieurs phénomènes réels présentant des changements brusques et des effets de mémoire. Ainsi, l'étude des problèmes aux limites impulsifs d'ordre entier et fractionnaire constitue un domaine de recherche actif et important en analyse différentielle.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2ème édition, Elsevier/Academic Press, 2003.
- [2] I. Ameen, S. Z. Rida, A. M. A. El-Sayed, A. S. Abdel-Rady, “On some impulsive differential equations”, *Mathematical Sciences Letters*, Vol. 1, No. 2, 2012.
- [3] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 3, No. 1, pp. 133–181, 1922.
- [4] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, Contemporary Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.
- [5] A. Boucherif, A. S. Al-Qahtani, B. Chanane, “Existence of solutions for second-order impulsive boundary-value problems”, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2012, No. 24, pp. 1–10, 2012.
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [7] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.
- [8] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1969.
- [9] S. Djebali, *Le degré topologique : Théorie et application*, Thèse de doctorat, Département de mathématique, ENS, Alger, 2006.
- [10] L. Elsgolts, *Differential Equations and Calculus of Variations*, MIR Publishers, Moscow, 1970.
- [11] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [12] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2003.
- [13] R. B. Guenther, *Problèmes aux limites non linéaires pour certaines classes d’équations différentielles ordinaires*, Vol. 93, Presses de l’Université de Montréal, 1985.
- [14] A. Halanay, D. Wexler, *Teoria Calitativa a Sistemelor cu Impulsuri*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest, 1968.
- [15] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Classics in Applied Mathematics, 2ème édition, 2002.

- [16] P. Hartman, “On local homeomorphisms of euclidean spaces”, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, Vol. 5, pp. 220–241, 1960.
- [17] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [18] S. Lang, *Analyse réelle*, InterEditions, Paris, 1977.
- [19] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [20] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I : Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [21] J. Zhou, M. Feng, “Green’s function for Sturm-Liouville-type boundary value problems of fractional order impulsive differential equations and its application”, *Boundary Value Problems*, Vol. 2014, Article 69, 2014.
- [22] W. F. Trench, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, 2013.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons analysé des problèmes aux limites liés à des équations différentielles impulsives du second ordre et à des équations différentielles fractionnaires impulsives. En appliquant le principe de contraction de Banach ainsi que le deux théorèmes du point fixe de Leray-Schauder, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité des solutions sous des hypothèses convenables. Ces travaux confirment l'importance des méthodes de point fixe dans l'étude des systèmes différentiels impulsifs.

Mots-clés : Équations différentielles impulsionnelles, équations différentielles fractionnaires, problèmes aux limites, théorèmes de point fixe, principe de contraction de Banach, théorèmes de Leray-Schauder, existence, unicité.

Abstract

In this thesis, we analyzed boundary value problems related to second-order impulsive differential equations and impulsive fractional differential equations. By applying the Banach contraction principle as well as the two fixed point theorems of Leray-Schauder, we established existence and uniqueness results for solutions under suitable hypotheses. This work confirms the importance of fixed point methods in the study of impulsive differential systems.

Keywords : Impulsive differential equations, fractional differential equations, boundary value problems, fixed point theorems, Banach contraction principle, Leray-Schauder theorems, existence, uniqueness.

الملخص

في هذه المذكرة، قمنا بتحليل مسائل حدودية مرتبطة بمعادلات تفاضلية اندفاعية من الرتبة الثانية ومعادلات تفاضلية كسرية اندفاعية. بتطبيق مبدأ الانكماش لباناخ بالإضافة إلى نظريتي النقطة الثابتة ليراي-شودر، توصلنا إلى نتائج حول وجود ووحدة الحلول تحت فرضيات مناسبة. يؤكد هذا العمل أهمية طرق النقطة الثابتة في دراسة الأنظمة التفاضلية الاندفاعية.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية اندفاعية، معادلات تفاضلية كسرية، مسائل حدودية، نظريات النقطة الثابتة، مبدأ الانكماش لباناخ، نظريتي ليراي-شودر، الوجود، الوحدة.