Centre universitaire Belhadj Bouchaib de Ain Temouchente, Algérie. Route de Sidi Bel Abbes-BP 284-(46000)

Licence mathématiques et info,
Spécialité Mathématiques,
Benaissa Abdelkader,
benaissaek@yahoo.fr.

Analyse 1

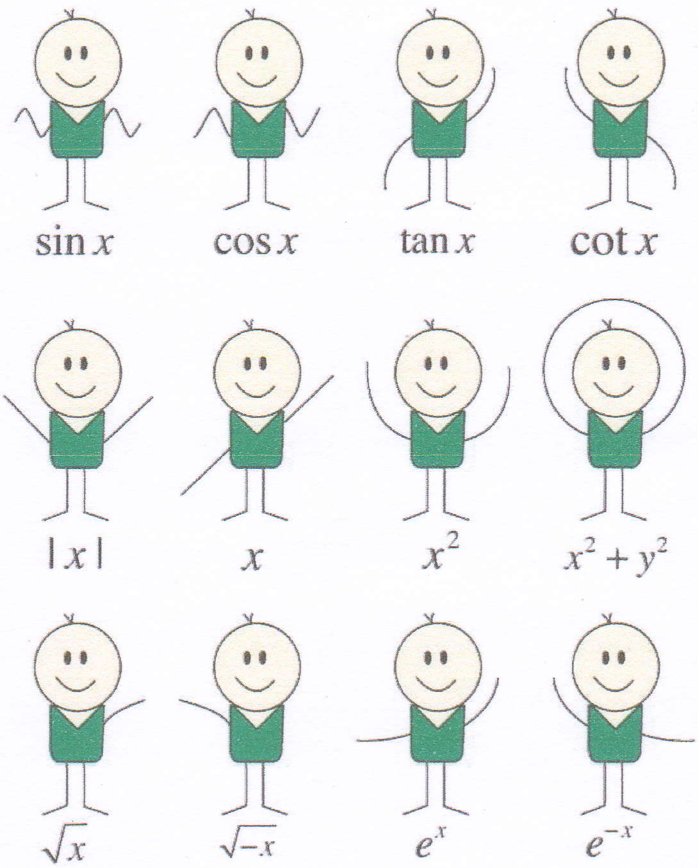


Table des matières

Introduction

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse mathématique de la licence. Etant donné que le recrutement en première année d'analyse est assez hétérogène, il semble assez judicieux de commencer par rappeler les notions élémentaires qui serviront tout au long de ce cours, histoire de ne perdre personne en route.

Quand il sera nécessaire au début de chaque chapitre, nous rappellerons ce qui est censé être connu en terminal. Nous essaierons également dans la mesure du possible de fournir l'essentiel des résultats de chaque chapitre sur une page, histoire de synthétiser les connaissances à bien maîtriser pour passer au chapitre suivant.

Nous fournirons autant d'exemples et de figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours. Nous essaierons également de souligner les pièges dans lesquels chacun peut se fourvoyer soit par inattention, soit par une mauvaise maîtrise du cours.

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Introduction aux nombres réels

1.1.1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, ...\}$,
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$,
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, i.e. l'ensembles des fractions

$$\frac{a}{b},$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Pour chacun de ces ensembles, l'ajout de $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$.
$\mathbb{Q}_+$ est l'ensemble des rationnels positifs.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble déjà bien fourni de nombres. Par exemple, entre deux rationnels $q < p$ quelconques il y a une infinité de rationnels. En effet $p' = (p + q)/2$ est rationnel encore et vérifie $q < p' < p$. Ainsi de suite on peut en construire une infinité entre q et p.

Avec cette remarque, on voit qu'aucun rationnel $q \in \mathbb{Q}$ n'admet de "suivant" dans $\mathbb{Q}$. En effet, si on regarde l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{Q}; p > q\}$$

alors $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément. En effet, sinon cet élément p vérifie $q < p$ et on peut construire $q < p' < p$ et contredire le fait que p est le plus petit.

Une autre façon de dire la même chose : dans n'importe quel intervalle (rationnel) autour d'un rationnel q il y a une infinité de rationnels.

Et pourtant les rationnels sont loins d'être suffisants, la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel. C'est un résultat qui avait déja été remarqué en

Gréce antique. Démontrons-le. Si $\sqrt{2}$ est un rationnel a/b, que l'on peut toujours supposer être sous forme réduite, i.e. sans diviseur commun. On a

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi a^2 est pair. ce qui implique que a est pair (le carré d'un impair est impair). Donc $a = 2k$, ce qui donne $b^2 = 2k^2$ et b pair aussi. Ce qui contredit l'hypothése initiale de primalité entre a et b. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. C'est d'ailleurs le cas de toutes les racines carrées qui ne sont pas des entiers.

1.1.2 Quelques règles de calcul

Propriété 1.1.1. *(Régles de calcul)*
Soient a, b et c trois nombres réels. On pourra écrire $a, b, c \in \mathbb{R}$. On notera l'addition $+$ et la multiplication $\times$ ou rien du tout ($a \times b$ ou ab quand il n'y a pas d'ambiguité). On a alors les régles de calcul suivantes :

1. ***Commutativité*** *: quels que soient les nombres réels a et b,*
$$a + b = b + a \text{ et } ab = ba.$$
2. ***Associativité*** *: quels que soient les nombres réels a, b et c,*
$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ et } (ab)c = a(bc).$$
3. ***Distributivité*** *: quels que soient les nombres réels a, b et c,*
$$(a + b)c = ac + bc.$$
4. ***Eléments neutres pour + et pour*** $\times$ *: quel que soit le nombre réel a,*
$$a + 0 = a \text{ et } a \times 1 = a.$$

Viennent ensuite les régle de comparaison. C'est important de les exprimer ici, même si elles ont l'air simples. Elles permettront de résoudre un grand nombre de problèmes. Il est également sagé de rappeler que ces règles sont valables pour les nombres réels, mais lorsqu'il s'agira d'étudier les nombres complexes, ce sera une autre histoire.

Propriété 1.1.2. *(Régles de comparaison)*
Soient a, b et c trois nombres réels. On a alors les règles de comparaison suivantes :

1. ***Réflexivité*** *: quel que soit le nombre réel a,*
$$a \leq a.$$
2. ***Antisymétrie*** *: quels que soient les nombres réels a et b,*
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \text{ alors } a = b.$$
3. ***Transitivité*** *: quels que soient les nombres réels a, b et c,*
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \text{ alors } a \leq c.$$

4. *Quels que soient les nombres réels a et b, on a :*

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

Remarque Les régles 1, 2 et 3 de la propriété précédente expriment que $\leq$ est une relation d'ordre, et la propriété 4 que cette relation est totale.

Remarque
1. A partir de la relation inférieur ou égal ($\leq$) définie précédement, on peut définir sa relation symétrique supérieur ou égal ($\geq$) pour tous réels a et b par :

$$a \geq b \text{ si et seulement si } b \leq a.$$

On remarquera que $\geq$ est également une relation totale.
2. On définit également la relation strictement inférieur pour tous réels a et b par :

$$a < b \text{ si et seulement si } a \leq b \text{ et } a \neq b.$$

et la relation strictement supérieur pour tous réels a et b par :

$$a > b \text{ si et seulement si } a \geq b \text{ et } a \neq b.$$

On aborde ensuite les régles dites de compatibilité que la plupart d'entre vous connaissez depuis le collège.

Propriété 1.1.3. *(Régles de compatibilité)*
Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$. On a alors les régles de compatibilité suivantes :
1. *si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,*
2. *si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.*

Remarque
La règle 2 de la propriété précédente peut également s'écrire avec la relation "stricte", en utilisant le résultat suivant :

$$\text{si } ab = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ (ou les deux).}$$

On a alors la règle suivante :

$$\text{si } a < b \text{ et } c > 0 \text{ alors } ac < bc.$$

Définition 1.1.1. *(Ensembles ordonnés)*
On dit qu'un ensemble X est ordonné s'il est muni d'une relation $\leq$, entre éléments de X qui satisfait
1. *$x \leq x$ pour tout $x \in X$,*
2. *si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,*
3. *si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.*

Par exemple $\mathbb{Q}$ avec la relation usuelle $\leq$ est un ensemble ordonné, et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties de E, muni de l'inclusion d'ensemble $\subset$ est un ensemble ordonné aussi.

On dit qu'un ensemble ordonné X est muni d'un ordre total si tous les éléments de X sont comparables :

$$\textit{Pour tout } x, y \in X \textit{ on a } x \leq y \textit{ ou bien } y \leq x.$$

C'est le cas pour $(\mathbb{Q}, \leq)$, mais ce n'est pas le cas pour $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Définition 1.1.2. *(Opposé et inverse)*

1. *Deux nombres réels a et b sont opposés si $a + b = 0$.*
2. *Deux nombres réels a et b non nuls sont dits inverses l'un de l'autre si ab=1.*

La construction de $\mathbb{R}$ et la preuve du théorème est extrèmement longue, nous ne la ferons pas. L'essentiel est de retenir que dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet un sup. On en déduit facilement que toute partie non vide minorée admet un inf. Ce n'était pas le cas de $\mathbb{Q}$, comme on l'a vu dans l'exemple 3. Dans $\mathbb{R}$ on a par exemple, si

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\}$$

alors $\sup A = \sqrt{2}$.

C'est une propriété assez forte en fait. elle dit en gros que pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, si on a une "accumulation" des points de A alors la "limite" de ces points est encore dans $\mathbb{R}$. On pourra dire les choses plus précisément quand on parlera de suites de cauchy, mais pour le moment on reste vague comme ça.

Revenons à notre ensemble $A = \{q \in \mathbb{Q}; q^2 < 2\}$, c'est facile de voir que les points de A s'accumulent à droite : on peut fabriquer facilement une suite d'éléments (u_n) de A tels que $u_n - u_m$ tend vers 0, quand n et m tendent vers $+\infty$, pourtant il n'y a pas d'élément limite dans $\mathbb{Q}$ au dout. En fait la construction de $\mathbb{R}$ consiste en gros à rajouter tous ces éléments limites qui manquent à $\mathbb{Q}$.

1.2 Densité de $\mathbb{Q}$

Cette propriété d'existence du sup dans $\mathbb{R}$ a beaucoup de conséquences trés importantes.

Théorème 1.2.1. *($\mathbb{R}$ est archimédien)*
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Démonstration Soit $A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}$. Si la propriété ci-dessus n'était pas vraie alors y serait un majorant de A. Donc A admettrait un sup dans $\mathbb{R}$, noté α.

On a $\alpha - x < \alpha$, donc $\alpha - x$ n'est pas un majorant de A. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mx > \alpha - x$. D'oú

$$(m + 1)1 > \alpha.$$

Ce qui contredit que $\alpha = \sup A$

Théorème 1.2.2. *(Densité de $\mathbb{Q}$)*
Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.

Démonstration On a $y - x > 0$, donc par le théorème 1.2.1 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n(y - x) > 1.$$

De même, par le même théorème, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$-m_2 < nx < m_1$$

(n est fixé, on cherche m_1 tel que $m_1 > nx$, on fait de même avec $-nx$).
On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$m - 1 \leq nx < m,$$

en effet, on regarde $m = m_1 - 1$, si $nx < m$ on recommence, par contre si $m \leq x$ alors on a gagné.

Ainsi, on a

$$nx < m \leq nx + 1 < ny$$

d'où

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Il existe plusieurs types d'intervalles. Tout est assez intuitif, nous garderons cette forme d'intuition dans les définitions sans aller dans les détails.
Voici tout d'abord la définition générale d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. *(Intervalles de $\mathbb{R}$)*
On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y dans I et pour tout z dans $\mathbb{R}$,

$$\textit{si } x \leq z \leq y \textit{ alors } z \textit{ appartient à } I.$$

Remarque
1. Le fait de considèrer une partie I de $\mathbb{R}$ se note $I \subset \mathbb{R}$ (qui se lit I inclus dans $\mathbb{R}$).
2. Le fait de considèrer un élément a de I se note $a \in I$ (qui se lit a appartient à I). Il ne faut donc pas confondre le symbole $\subset$ qui est utilisé pour les parties, et $\in$ qui est utilisé pour des éléments.
3. La définition précédente pourrait alors s'écrire :
on appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in I$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\text{si } x \leq z \leq y \text{ alors } z \in I.$$

Il existe plusieurs types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous allons les résumer dans les définitions suivantes.

Définition 1.3.2. *(Intervalle fermé et borné(segment))*
Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé et borné(appelé aussi segment) de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Définition 1.3.3. *(Intervalle ouvert)*
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

mais pas que...
Ce sont également les ensemble de la forme :

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}, a<x\}.$$

ou

$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}, x<b\}.$$

Remarque Un cas particulier d'intervalle ouvert est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier : $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

Définition 1.3.4. *(Intervalle ouvert et borné)*
Soient a et b deux réels tels que $a\leq b$. On appelle intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}, a<x<b\}.$$

Définition 1.3.5. *(Intervalle semi-ouvert et borné)*
Soient a et b deux réels tels que $a\leq b$. On appelle intervalle semi-ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}, a\leq x<b\},$$

mais aussi

$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}, a<x\leq b\}.$$

Définition 1.3.6. *(Intervalle fermé et non borné)*
Soient a et b deux réels. Par convention on appelle intervalle fermé et non borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}, a\leq x\},$$

mais aussi

$$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}, x\leq b\}.$$

Notation 1.3.1. *On notera les intervalles particulaires suivants :*

$$\mathbb{R}_+=[0,+\infty],\ \mathbb{R}_+^*=]0,+\infty],\ \mathbb{R}_-=]-\infty,0],\ \mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[.$$

La notation $\mathbb{R}^*$ désignant l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0.

Remarque

1. L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide, il est noté $\emptyset$.
2. L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé singleton. Autrement un singleton contenant le nombre réel a s'écrit $\{a\}$.
3. Un singleton $\{a\}$ est considéré comme l'intervalle $[a,a]$ et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé.
4. L'ensemble vide $\emptyset$ est considéré comme l'intervalle $]a,a[$ donc c'est un cas particulier d'intervalle ouvert. Comme c'est le complémentaire de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbb{R}$ alors comme un intervalle fermé.
   Mais, $\mathbb{R}$ peut être également vu comme un intervalle ouvert si on l'écrit $]-\infty,+\infty[$. Et donc son complémentaire $\emptyset$ sera considéré comme fermé.
   C'est la raison pour laquelle $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont considérés comme des ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.7. *(Segment)*
Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$. On appelle segment, l'ensemble noté $[a, b]$ défini par

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Remarque Nous pourrons utiliser quelques fois la notion de paramétrage du segment. Autrement dit, en essayant d'interpréter, nous laisserons un point se balader entre les bornes de l'intervalle suivant un "temps" t compris entre 0 et 1.
Pour être plus claire, on aura l'équivalence suivante :

$$x \in [a, b] \text{ si et seulement s'il existe } t \in [0, 1] \text{ tel que } x = (1 - t)a + bt.$$

Cette équivalence permet de dire que tout point du segment $[a, b]$ peut être identifié grâce à un paramètre t compris entre 0 et 1.

1.4 Voisinage

La notion de voisinage servira pour les chapitres suivants quand on abordera les notions de limites, les limites qui seront des outils indispensables en analyse.

Noter que dans ce qui suit (et ce sera valable pour tous les chapitres), dès que l'on considère une quantité aussi petite que l'on veut, on la note ϵ (la notation usuelle de cette lettre grecque remplaçant le e latin(pour ne pas le confondre avec le e de l'exponentiel), proviendrait d'Augustin-Louis Cauchy qui désignait ainsi les toutes petites erreurs d'approximation, la e étant l'initiale de "erreur" qui a donné ϵ en grec).

Définition 1.4.1. *(Voisinage d'un point)*
Soit a un nombre réel. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$.

Remarque
1. On peut aussi dire, c'est équivalent que $V \subset \mathbb{R}$ est'un voisinage de a si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a - \epsilon, a + \epsilon[\subset V$.
2. Le voisinage V de a peut s'interpréter donc comme ce qu'il y a autour de a tout en étant très proche de a.

Définition 1.4.2. *(Voisinage de l'infini)*
On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$(respectivement de $-\infty$) si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$(respectivement $] - \infty, A] \subset V$).

1.5 Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Voyons maintenant comment on pourrait construire l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ (ce n'est pas l'unique féçon de construire $\mathbb{R}$ mais pour l'instant c'est la seule que l'on puisse aborder dans l'état de nos connaissances).
Pour cela nous avons besoin des notions de borne supérieures et inférieures, pour les utiliser, nous devons auparavant définir les notions de majorant et minorant.

Définition 1.5.1. *(Majorant, minorant)*
Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. *E est majorée s'il existe un nombre réel M(pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E, x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.*
2. *E est mimorée s'il existe un nombre réel m(pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E, x \geq m$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé minorant de E.*
3. *E est bornée si E est majorée et minorée.*

Définition 1.5.2. *(Borne supérieure, borne inférieure)*
Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. *M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E, x \leq M$.*
2. *Si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants.*

De même $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. *m est un minorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E, x \geq m$.*
2. *Si m' est un majorant de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.*

Proposition 1.5.1. *(Caractérisation des bornes* sup *et* inf*)*
Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. *Si la partie E est minorée par un réel m. Alors $m = \inf(E)$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que*
$$x \in]M - \epsilon, M].$$
2. *Si la partie E est majorée par un réel M. Alors $M = \sup(E)$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que*
$$x \in]m, m + \epsilon].$$

Si les majorants et les minorants appartiennent à l'ensemble E, on les appelle maximum et minimum. Donc ne confondez pas ces notions !

Définition 1.5.3. *(Maximum, minimum)*
Soit $E \subset \mathbb{R}$.
On dit que M est le maximum de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.
On dit que m est le minimum de E, que l'on note $m = \min(E)$ si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

On peut maintenant décrire une façon de construire $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$ correspond à $\mathbb{Q}$ auquel on rajoute "toutes les bornes sup de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$". On a alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 1.5.1. *(Propriété de la borne* sup*)*
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup.

Propriété 1.5.2. *(Réel et borne* sup*)*
Tout réel est la borne sup d'un ensemble d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Remarque
1. La première propriété est due à Bernhard Bolzano en 1817.
2. $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne sup : $\{x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 < 2\}$ admet $\sqrt{2}$ comme borne sup dans $\mathbb{R}$ et n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$.

1.6 Racines n-iémes

Théorème 1.6.1. *(Racine n-ièmes)*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, tel que

$$y^n = x. \tag{1.1}$$

Démonstration Tout d'abord l'unicité. Si $y_1 \neq y_2$ (par exemple $y_1 < y_2$), on a $y_1^n \neq y_2^n$, (i.e. $y_1^n < y_2^n$). Donc on ne peut pas avoir $y_1^n = y_2^n = x$.

Maintenant l'existence. Soit

$$B = \{r \in \mathbb{R}; r > 0, r^n < x\}.$$

Si $x < 1$ alors comme $1^n = 1$, on a que 1 est un majorant de B. Si $x \geq 1$ alors $x^n \geq x$ et donc x est un majorant de B. Dons tous les cas on a montré que B est majoré.

Il est aussi vrai que B est non vide, car

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^n \leq \frac{x}{x+1} < x$$

Donc B admet un sup, notons le y.

Si on a $y^n < x$, on choisit $h \in]0,1[$ tel que

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} h^k \\
&= y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} h^{k-1} \\
&\leq y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \\
&= y^n + h((1+y)^n - y^n) \\
&< x.
\end{aligned}$$

Ainsi $y + h$ est aussi un élément de B et y n'est pas un majorant de B.

Si $y^n > x$, soit $k \in]0,1[$, $k < y$ et

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(y-k)^n &= y^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j}(-k)^j \\
&= y^n - k\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j}(-k)^{j-1} \\
&\leq y^n - k\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} \\
&= y^n - k((1+y)^n - y^n) \\
&> x.
\end{aligned}$$

Si $r \in B$ alors $r^n < x < (y-k)^n$, en particulier $r^n < (y-k)^n$ et donc $r < y-k$. Donc cela montre que $y-k$ est un majorant de B, ce qui contredit le fait que y est le plus petit.

Il ne reste donc plus que $y^n = x$ comme possibilité.

Ce nombre y qui vérifie $y^n = x$ est la racine n-iéme de x. On le note

$$y = x^{\frac{1}{n}}.$$

1.7 Valeur absolue

Rappelons ici quelques propriétés des valeurs absolues que vous êtes censés maîtriser depuis le lycée. Commençons par en donner la définition qui est due à François Viète en 1591.

Définition 1.7.1. *(Valeur absolue)*
Soit a un nombre réel. La valeur absolue de a est le nombre réel défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0. \end{cases}$$

Propriété 1.7.1. *(Valeur absolue, rappels)*
Pour tous nombres réels a et b, nous avons :

1. $|a| \geq 0, -|a| \leq a \leq |a|, |-a| = |a|$,
2. $\sqrt{a^2} = |a|$,
3. $|ab| = |a||b|$,
4. *pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ (si on a en plus $a \in \mathbb{R}^*$), $|a|^n = |a^n|$,*
5. *si $a \neq 0$, $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ et de façon générale $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$,*
6. *si $b \geq 0$, $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a \leq b$,*
7. *si $b \geq 0$, $|a| \geq b$ si et seulement si $a \leq -b$ ou $a \leq b$,*
8. *$|a+b| \leq |a| + |b|$ (c'est l'inégalité triangulaire),*
9. *$||a| - |b|| \leq |a-b|$ (c'est l'inégalité triangulaire inversée).*

Proposition 1.7.1. *(Inégalité triangulaire)*
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|.$$

Démonstration On a $|a+b| = a+b$ ou $-a-b$, qui sont tous deux $\leq |a|+|b|$. Ce qui prouve la première inégalité.

Ensuite, supposons que $|a| \geq |b|$ (sinon, on échange les rôles). Alors

$$||a|-|b|| = |a|-|b| = |a+b-b|-|b| \leq |a+b|+|b|-|b| = |a+b|.$$

Propriété 1.7.2. *(Valeur absolue et distance)*

1. $|x-a| < \epsilon$ *si et seulement si* $a-\epsilon < x < a+\epsilon$,
2. $|x-a| \leq \epsilon$ *si et seulement si* $a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon$.

Nous finissons par un petit rappel sur les parties entières.

1.8 Partie entière

Une notion qui peut vous sembler nouvelle est celle de la partie entière d'un nombre réel. La partie entière a beaucoup d'applications notamment en probabilité, en théorie des nombres mais également dans l'affichage numérique d'appareils de mesures. Elle pourra également nous être utile pour la résolution d'exercices ainsi que pour la preuve de certaines propositions.

Définition 1.8.1. *(Partie entière)*
Soit a un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à a s'appelle la partie entière de a. Nous le noterons $E(a)$ ou $[a]$.

Remarque intuitivement, il est assez aisé de voir que pour les nombre positifs, la partie entière d'un nombre est le nombre lui-même "coupé" de ses chiffres aprés la virgule, D'où le nom de partie entière
Par contre pour les nombres négatifs, il faudra faire attention, ce sera le nombre entière inférieur au nombre "coupé" de ses chiffres après la virgule.
Il ne faut donc pas confondre partie entière et troncature !(la partie entière est la troncature pour les nombres positifs, mais pas pour les nombres négatifs !

Exemple
1. $E(\pi) = 3$,
2. $E(-\pi) = -4$.

Proposition 1.8.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$n \leq x < n+1.$$

Démonstration L'existence a déjà été démontrée au cours de la démonstration du théorème 1.2.2, ou en tout cas sous une forme un peu différente qui s'adapte facilement ici. Montrons l'unicité. Si $m \leq x < m+1$ aussi alors, on a bien $n < m$ auquel cas on a $n+1 \leq m$ et donc $n+1 \leq x$, ce qui est impossible, ou bien $n > m$ et on fait le même raisonnement : ou bien $n = m$.

Remarque Par conséquent, $E(a)$ est l'unique entier tel que $E(a) \leq a < E(a)+1$. Il est important de noter l'inégalité stricte à droite et large à gauche !

1.9 Enoncés des exercices

Exercice 1.9.1. *Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}, x^3 \leq 1\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1\}$$

$$A_5 = \{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{1}{x^2-1} < 1\}$$

Exercice 1.9.2. *Trouver tous les réels x tels que $|x-1| + |x-2| = 2$.*

Exercice 1.9.3. *Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 1.9.4. *1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = 0$.*
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = -1$.

1.10 Corrigés des exercices

Corrigé d'exercice 1.9.1

$$A_1 =]-1, 1[$$

$$A_2 =]-\infty, 1]$$

$$1 - (\frac{2x}{x^2+1})^2 = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - (\frac{2x}{x^2+1})^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

On pouvait aussi etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

On en déduit que

$$A_3 =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$A_4 =]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$1 - (\frac{1}{x^2-1})^2 = \frac{(x^2-1)^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} > 0.$$

Comme $x^2 - 2$ est positif si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$
Donc
$$(\frac{1}{x^2-1})^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - (\frac{1}{x^2-1})^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[.$$
Par conséquent
$$A_5 =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[.$$

Corrigé d'exercice 1.9.2 On pose $f(x) = |x-1| + |x-2|$.
Pour $x \leq 1, x-1 \leq 0$, et $x-2 \leq -1 < 0$ donc
$$f(x) = -(x-1) - (x-2) = -2x + 3.$$
Pour $1 \leq x \leq 2, x-1 \geq 0$ et $x-2 \leq 0$ donc
$$f(x) = (x-1) - (x-2) = 1.$$
Pour $x \geq 2, x-1 \geq 1 > 0$ et $x-2 \geq 0$ donc
$$f(x) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3.$$
Puis on va résoudre $f(x) = 2$ sur chacun des trois intervalles.
$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2x + 3 = 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{array}\right.$$
donc $\frac{1}{2}$ est solution
$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1 = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$$
Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.
$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = 2 \\ 2 \leq x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x - 3 = 2 \\ 2 \leq x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \frac{5}{2} \\ 2 \leq x \end{array}\right.$$
donc $\frac{5}{2}$ est solution.
Les réels qui vérifient $|x-1| + |x-2| = 2$ sont $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$.

Corrigé d'exercice 1.9.3
Supposons qu'il existe p et q des entiers naturels, non tous les deux pairs tels que
$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}.$$
En élevant au carré on obtient
$$3 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 3q^2 = p^2. \tag{1.2}$$

Si p est pair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p = 2k$ et $q = 2l + 1$ ce que l'on remplace dans (1.2)

$$3(4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 \Leftrightarrow 2(6l^2 + 6l + 1) + 1 = 2 \times 2k^2.$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.
Si p est impair et q est pair, alors il existe k et l des entiers tels que $p = 2k + 1$ et $q = 2l$ ce que l'on remplace dans (1.2)

$$3 \times 4l^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 2 \times 6l^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, ce n'est pas possible.
Si p est impair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p = 2k + 1$ et $q = 2l + 1$ ce que l'on remplace dans (1.2)

$$3 \times (4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 2(6l^2 + 6l + 1) + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Leftrightarrow$$

$$2(6l^2 + 6l + 1) = 2(2k^2 + 2k) \Leftrightarrow 6l^2 + 6l + 1 = 2k^2 + 2k \Leftrightarrow 2(3l^2 + 3l) + 1 = 2(k^2 + k).$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.
Donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Corrigé d'exercice 1.9.4

1. Pour tous les entiers relatifs $E(x) = x$ et donc $E(-x) = -x$, donc $E(x)+E(-x) = 0$.
2. Pour tous réels
$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$
Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte
$$E(x) < x < E(x) + 1.$$
On multiplie cette inégalité par (-1)
$$-E(x) - 1 < -x < -E(x).$$
Cela montre que
$$E(x) = -E(-x) - 1.$$
Par conséquent
$$E(x) + E(-x) = -1.$$

Chapitre 2

Les nombres complexes

Introduction

L'équation $x+7=6$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Z}(x=-1)$. De même, L'équation $3x=1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par exemple, il y en a une : $x=1/3$. Et puis, L'équation $x^2=2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$, il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour en trouver.

Bref, quand une equation n'a pas de solutions, une demarche naturelle (et historique) consiste a en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontre est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

On va donc, dans ce chapitre "construire ?" ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation $x^2+1=0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire). Le nombre i est tel que $i^2=-1$! l'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2+1=0$ équivaut à $x^2-i^2=0$ soit $(x-i)(x+i)=0$ donc $x=i$ ou $x=-i$.

2.1 Construction du corps des nombres complexes

Définition 2.1.1. *Notons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples de réels :*

$$\mathbb{C}=\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}.$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appeles des nombres complexes.

Comme il n'est pas pratique de travailler avec des couples (notations un peu lourdes), nous allons voir (théorème 2.1.1) que l'on peut noter les éléments de $\mathbb{C}$ de manière commode et faciliter ainsi les calculs.

Théorème 2.1.1. *Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément, noté i, tel que $i^2=-1$. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique $z=a+bi$, où a et b sont des réels.*

Théorème 2.1.2. *(Égalité entre deux nombres complexes)*
Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels.

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier, $a + bi = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. On parle alors de nombre complexe nul.

Définition 2.1.2. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ (avec a et b des réels). Le réel a s'appelle la partie réelle de z et b la partie imaginaire.*
On note : $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.

Exemple Soient $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = -3i$.
On a : $Re(z_1) = 3, Im(z_1) = 2, Re(z_2) = 0$ et $Im(_2) = -3$.
Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel !

Définition 2.1.3. *Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (où $b \in \mathbb{R}$) s'appelle un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est note $i\mathbb{R}$.*

Remarque
1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, il n'y a plus la notion d'ordre usuelle. On ne pourra pas, a ce niveau, comparer un nombre complexe a un autre ou dire s'il est positif ou négatif etc ...(Excepté pour les imaginaires purs où l'on peut définir un ordre naturel comme pour les réels).
2. On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{}$ qui reste réservé aux réels positifs.
3. Les applications $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires. Cela signifie :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : Re(z+\lambda z') = Re(z)+\lambda Re(z') \text{ et } Im(z+\lambda z') = Im(z)+\lambda Im(z').$$

2.2 Représentation géométrique des nombres complexes

Munissons le plan $\mathcal{A}$ d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

2.2.1 Principe

tout nombre complexe $z = a + bi$ (avec a et b réels), on peut associer le point $M(a, b)$. Cela découle simplement du fait que l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathcal{A} \\ z = a + bi & \mapsto & M(a, b) \end{array}$$

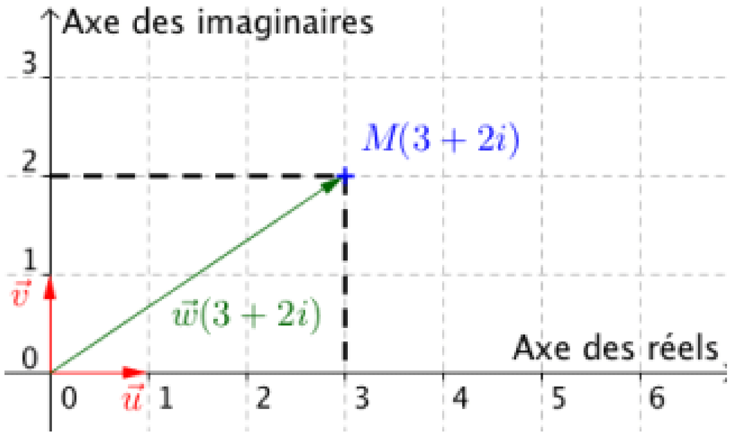
est une bijection.
Exemple à $z = 2 - 5i$ correspond le point $M(2, -5)$ et réciproquement.

2.2.2 Vocabulaire

1. Le point $M(a, b)$ s'appelle l'image du nombre complexe $z = a + bi$.
2. Le nombre complexe $z = a + bi$ s'appelle l'affixe du point $M(a, b)$. ("Affixe" est un nom féminin).
3. On note souvent $z =$affixe(M) ou $z =$aff(M).

2.2.3 Autre interprétation très utilisée

À tout nombre complexe $z = a + bi$ (avec a et b réels), on peut associer le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Ce vecteur $\overrightarrow{u}$ s'appelle le vecteur image du nombre complexe z.
Exemple si $z = 3 + 2i$ et $M = (3, 2)$ est l'image de z, alors le vecteur $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur image de z.



2.2.4 Conjugué et l'inverse d'un nombre complexe

Définition 2.2.1. *Soient a et b deux nombres réels.*
Le nombre complexe conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.

Exemples le conjugué de $9 - 4i$ est $9 + 4i$. Cas particuliers : $\overline{i} = \overline{0 + 1i} = 0 - 1i = -i, \overline{7} = 7$.
Vocabulaire on dit que z et $\overline{z}$ sont des nombres complexes conjugués
Remarque $Re(z) = Re(\overline{z})$.

Propriété 2.2.1. *Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp imaginaire pur) On a :*

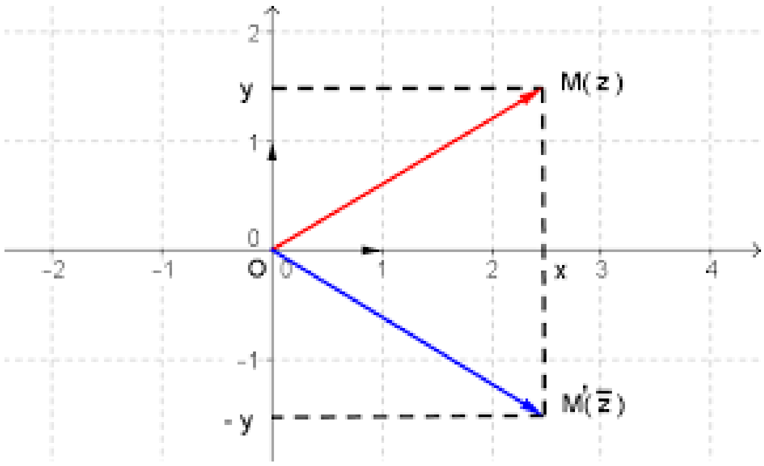
$$z + \overline{z} = 2Re(z) \text{ et } z - \overline{z} = 2iIm(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel } \iff z = \overline{z} \text{ et } z \text{ est imaginaire pur } \iff z = -\overline{z}$$

2.2.5 Interprétation géométrique du conjugué

Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Théorème 2.2.1. *Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), la quantité $z\overline{z}$ est un nombre réel :*

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Application pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $a + bi$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée. **Exemples**

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25} = \quad = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

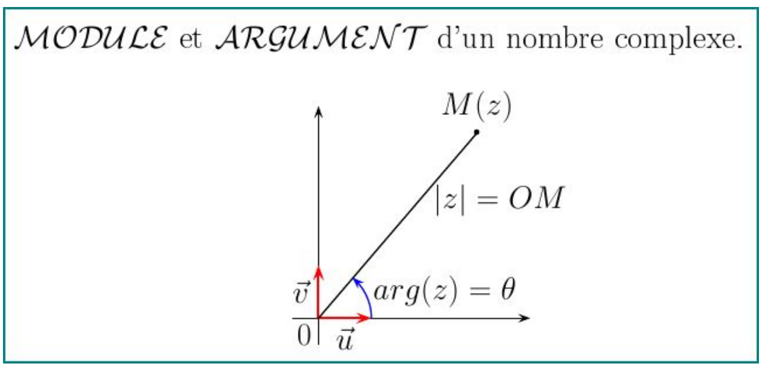
Théorème 2.2.2. *(Propriétés de la conjugaison) Pour tous nombres complexes z et z', on a :*
$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{-z} = -\overline{z}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}(z' \neq 0)$.

Exemples

1. Le conjugué de $z_1 = \dfrac{4-5i}{3+i}$ est $\overline{z_1} = \dfrac{4+5i}{3-i}$.
2. Celui de $z = \dfrac{2z^2-1}{5z+1}$ est $\overline{z} = \dfrac{\overline{2z^2-1}}{\overline{5z+1}} = \dfrac{2\overline{z}^2-1}{5\overline{z}+1}$.

2.3 Module et argument d'un nombre complexe

Voici la figure illustrant les deux définitions suivantes :



Définition 2.3.1. *On appelle module d'un nombre complexe $z = a+bi$ la quantité positive $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.*

Exemples Module de $z = -3+4i$: $|z|^2 = 9+16 = 25$ donc $|z| = 5$. Module de $z = 9i$:$|z| = 9$.

Remarque
1. $|z| \geq 0$ pour tout nombre complexe z.
2. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
3. On a également (d'après le théorème 2.2.1) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore $|z^2| = z\overline{z}$.
4. Si $z = a+bi$ est réel ($b = Im(z) = 0$), on a $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.
5. Le module de $z = a+bi$ est toujours supérieur à $\max(|a|,|b|)$. En effet :

$$a^2+b^2 \geq a^2 \text{ et } a^2+b^2 \geq b^2.$$

Et par passage à la racine carrée : $|z| \geq |a|$ et $|z| \geq |b|$.
D'où : $|z| \geq \max(|a|,|b|)$

Propriété 2.3.1. *Pour tous nombres complexes z et z' :*
1. *Module d'un produit : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$. Et en particulier, si λ est réel : $|\lambda z| = |\lambda||z|$.*
2. *Module d'un quotient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (lorsque $z' \neq 0$). En particulier, pour tout $z \neq 0$: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.*
3. *Inégalité triangulaire : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.*

Définition 2.3.2. *On appelle argument d'un nombre complexe z non nul toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM})$.*
On le note $\theta = \arg(z)$.

Remarque un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! Si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2kp (k \in \mathbb{Z})$.
L'unique argument θ appartenant a l'intervalle $]-\pi,\pi]$ s'appelle l'argument principal.
On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut être égal a $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal a n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ où $k \in F$.
Attention ! Le nombre complexe nul $z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM})$ ne se défini pas.

Exemples $\arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(1) = 0[2\pi]$, $\arg(-1) = \pi[2p]$, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Cas particuliers importants
1. un réel strictement positif a un argument nul $[2\pi]$, un réel strictement négatif a un argument égal à $\pi[2p]$. On peut dire :

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0[\pi]),$$

2. un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On peut dire :

$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]).$$

Exemples (Méthode générale pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe non nul)

1. Argument principal θ de $z = -2\sqrt{3} + 2i$.
   On a $|z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$ donc $|z| = 4$.
   Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Comme nous avons une bonne connaissance du cercle trigonométrique, nous concluons $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
2. Argument principal θ de $z = 3 - 4i$.
   On a $|z|^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|z| = 5$.
   Nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) &= \frac{-4}{5} \end{cases}$$

   Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $\theta \simeq 0.9273$rad. Mais $sin(\theta)$ est négatif, donc θ est négatif : $\theta \simeq 0.9273$rad, c'est-a-dire : $\theta = 53,13°$.

Propriété 2.3.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$*
$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$, $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)[2\pi]$.

2.4 Différentes formes d'écritures des nombres complexes

2.4.1 Forme trigonométrique

L'écriture $z = a + bi$ s'appelle la forme algébrique de z (ou encore forme cartésienne). Or, nous avons vu que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Le nombre complexe z peut donc s'écrire :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

cette écriture s'appelle une forme trigonométrique de z.

Théorème 2.4.1. *Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$*

Propriété 2.4.1. *Pour tous nombres complexes z et z' non nuls on a :*

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$.
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.
4. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)[2\pi]$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Définition 2.4.1. *Pour tout réel* θ*, on note* $e^{i\theta}$ *le nombre complexe* $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$e^{i\theta}$ désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$.

2.5 Enoncés des exercices

Exercice 2.5.1. *Mettre sous la forme* $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *les nombres :*

1. $\frac{3+6i}{3-4i}$.
2. $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$.
3. *Nombre de module 2 et d'argument* $\frac{\pi}{3}$.
4. *Nombre de module 3 et d'argument* $\frac{-\pi}{8}$.

Exercice 2.5.2. *Calculer le module et l'argument de* $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ *et* $v = 1 - i$ *En déduire le module et l'argument de* $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 2.5.3. *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :*

$$e^{e^{i\alpha}} \text{ et } e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 2.5.4. *Déterminer l'ensemble des nombres complexes* z *tels que :*

1. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.6 Corrigés des exercices

Corrigé d'exercice 2.5.1

1. $\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9.-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$
2. Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$$

Donc
$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=-\frac{23}{25}+\frac{36}{25}i.$$

3. $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1+i\sqrt{3}.$

4. $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{8}}=3(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8})=\frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

Corrigé d'exercice 2.5.2 Nous avons

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Corrigé d'exercice 2.5.3 D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}}=e^{\cos\alpha+i\sin\alpha}=e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha}>0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".
De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu}+e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu}+e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}(e^{i\frac{u-v}{2}}+e^{-i\frac{u-v}{2}}) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}}2\cos\frac{u-v}{2} \\ &= 2\cos\frac{u-v}{2}e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z=e^{i\theta}+e^{2i\theta}=e^{\frac{3i\theta}{2}}[e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}]=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$ alors $2\cos\frac{\theta}{2}$ est le module de z et $\frac{3\theta}{2}$ est son argument ; par contre si $\cos\frac{\theta}{2}<0$ le module est $2|\cos\frac{\theta}{2}|$ et l'argument $\frac{3\theta}{2+\pi}$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi}=-1$).

Corrigé d'exercice 2.5.4 Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie précisément que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3, 0)$ et $5 = (5, 0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A, B]$.
Ensuite pour

$$\begin{array}{rcc} \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} & \Leftrightarrow & |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\ & \Leftrightarrow & (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ & \Leftrightarrow & z\overline{z} - (z + \overline{z}) = 7 \\ & \Leftrightarrow & |z-1|^2 = 8 \\ & \Leftrightarrow & |z-1| = 2\sqrt{2}. \end{array}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Définition

Définition 3.1.1. *(Suites réelles)*
On appelle suite réelle toute application

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array} \right.$$

On note une telle application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le nombre u_n *est appelé terme général de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque On appellera aussi suite les applications dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.

On peut définir les suites de deux façons différentes.

1. Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = f(n),$$
c'est ce qu'on appelle une formulation explicite de la suite.
2. Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :
$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{n+1} & = & f(U_n) \\ u_0 & = & a \end{array} \right.$$
c'est ce qu'on appelle une formulation par récurrence.

3.2 Deux suites classiques

Il existe deux suites classiques que l'on rencontrera assez souvent. Les suites arithmétiques et les suites géométriques.

3.2.1 Suites arithmétiques

Définition 3.2.1. *(Suite arithmétique)*
On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour laquelle il existe* $a \in \mathbb{R}$ *appelé raison de cette suite tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = a + u_n.$$

3.2.2 Suites géométriques

Définition 3.2.2. *(Suite géométrique)*
On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour laquelle il existe* $r \in \mathbb{R}$ *appelé raison de cette suite tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = ru_n.$$

Il est possible de donner la formulation explicite de chacune de ces suites grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *(Formulation explicite des suites arithmétiques et géométriques)*

1. *Le terme général d'une suite arithmétique de raison* a *et de premier terme* u_0 *est*

$$u_n = u_0 + na.$$

2. *Le terme général d'une suite géométrique de raison* r *et de premier terme* u_0 *est*

$$u_n = u_0 r^n.$$

3.3 Récurrence d'ordre 2

Il se peut que l'on définisse les suites par une récurrence d'ordre supérieure à 1 comme formulée dans la section précédente. Un cas particulier que l'on va étudier est la récurrence d'ordre 2 (dans le cas le plus simple, le cas linéaire).

Définition 3.3.1. *(Récurrence d'ordre 2)*
Toute suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ *définie par la formulation récurrente linéaire d'ordre 2 s'écrit de la façon suivante*

$$\begin{cases} u_{n+1} = & bu_n + cun - 1 \\ u_0 = a_0, & u_1 = a_2, \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$*, où* a *et* b *sont des réels donnés.*

Remarque Si $b = c = 1$, si $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ on définit alors la suite de Fibonacci.

Pour calculer explicitement le terme général de toute suite définie par des récurrences linéaires d'ordre 2, l'idée est de chercher des suites géométriques de raison r satisfaisant cette récurrence.
La raison vérifie alors l'équation caractéristique

$$r^2 - br - c = 0.$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 3.3.1. *(Formulation explicite suites récurrentes d'ordre 2)*

1. *Si l'équation caractéristique* $r^2 - br - c = 0$ *possède deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n,$$

   avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels.*
2. *Si l'équation caractéristique* $r^2 - br - c = 0$ *possède une solution réelle* $r_0 \neq 0$*, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n,$$

   avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels.*
3. *Si l'équation caractéristique* $r^2 - br - c = 0$ *possède deux solutions complexes conjuguées* $r = \rho e^{i\theta}$ *et* $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$*, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 \rho^n \cos(n\theta) + \lambda_2 \rho^n \sin(n\theta),$$

   avec λ_1 *et* λ_2 *deux réels.*

3.4 Limite de suites

3.4.1 Introduction

Définition 3.4.1. *(Limite finie d'une suite)*

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$ *si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Si c'est le cas, on dit que la suite est convergente (on dit aussi qu'elle converge vers l*).*
S'il n'existe pas de $l \in \mathbb{R}$*, on dit que la suite est divergente.*
Et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Remarque On a les équivalences suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

Proposition 3.4.1. *(Unicité de la limite)*
La limite $l \in \mathbb{R}$ *d'une suite réelle, si elle existe est unique.*

Définition 3.4.2. *(Limite infinie d'une suite)*

1. *On dit qu'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite* $+\infty$ *si et seulement si pour* $M > 0$ *il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n \geq M.$$

2. *On dit qu'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite* $-\infty$ *si et seulement si pour* $M < 0$ *il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n \leq M.$$

Proposition 3.4.2. *Si la suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite finie ou infinie, et*

1. *s'il existe un* $n \in \mathbb{N}$ *et* $M \in \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n < M.$$

(on dit que la suite est majorée par M *à partir d'un certain rang) alors la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est soit* $-\infty$ *soit* $l \in]-\infty, M]$,

2. *s'il existe un* $n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n > m.$$

(on dit que la suite est minorée par m *à partir d'un certain rang) alors la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est soit* $+\infty$ *soit* $l \in [m, +\infty[$.

Remarque Il est important de remarquer ici que dans le cas de la limite finie, une inégalité stricte sur le terme général de la suite entrîne seulement une inégalité large sur la limite.

Définition 3.4.3. *(Suite majorée, minorée et bornée)*

1. *On dit qu'une suite est majorée si et seulement s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \leq M$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *On dit qu'une suite est minorée si et seulement s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \geq m$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si elle est majorée et minorée.*

Remarque Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Propriété 3.4.1. *(Convergence et suite bornée) Toute suite convergente est une suite bornée.*

Remarque Attention, la réciproque de la propriété précédente est fausse.

Remarque Pour que tout soit bien clair, il paraît nécessaire de faire le point sur un peu de vocabulaire : en effet, il ne faut pas confondre suit convergente et suite qui admet une limite.

3.4.2 Opération algébriques sur les limites

Limite d'une somme de suites

Propriété 3.4.2. *(Limite de somme)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2.
Alors la limite de la somme des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l_1	l_2	l_1+l_2
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*Forme indéterminée*

Limite d'un produit de suites

Propriété 3.4.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2.*
Alors la limite du produit des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	*0*	*0*
0	∞	*Forme indéterminée*

Limite d'un quotient de suites

Propriété 3.4.4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2.*
Alors la limite du quotient des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l_1	$l_2(\neq 0)$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	*0*
l_1	*0*	∞
0	∞	*0*
∞	*0*	∞
∞	∞	*Forme indéterminée*
0	*0*	*Forme indéterminée*

3.4.3 Résultats sur les limites de suites

Toujours de façon analogue aux résultats sur les fonctions, nous avons des résultats sur les comparaisons de suites, ainsi que le théorème des gendarmes pour les suites.

Proposition 3.4.3. *(Comparaison suites et limites)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$
$$u_n \leq v_n$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *et s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$
$$v_n \leq u_n$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Proposition 3.4.4. *(Limite positive)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergence telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} = l$, *alors* $l \geq 0$.

Théorème 3.4.1. *(Théorème des gendarmes)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ *(finie ou infinie) et s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$
$$u_n \leq v_n \leq w_n,$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Nous avons également le résultat suivant qui pourra s'avérer trés utile pour certaines preuves dans les exercices rencontrés.

Proposition 3.4.5. *(Recollement)*
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est telle que les suites* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*
$$v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1} \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}$$
ont même limite l *(finie ou infinie), alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a pour limite* l.

Remarque Il est important de faire attention dans cet énoncé au fait que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aient la même limite. Si ce n'est pas le cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

3.5 Suites réelles et monotonie

Définition 3.5.1. *(Suite croissante, décroissante)*
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite :*
1. *croissante si pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \leq u_{n+1},$$
2. *décroissante si pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \geq u_{n+1},$$
3. *monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Proposition 3.5.1. *(Limite et monotonie)*
Toute suite monotone admet une limite. De façon plus précise :
1. *toute suite croissante non majorée admet pour limite* $+\infty$,
2. *toute suite croissante et majorée admet une limite finie,*
3. *toute suite décroissante non minorée admet pour limite* $-\infty$,
4. *toute suite croissante et minorée admet une limite finie.*

3.6 Suites adjacentes

Définition 3.6.1. *(Suites adjacentes)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si

1. *l'une des suites est croissante,*
2. *l'autre suite est décroissante,*
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$

Propriété 3.6.1. *(Limites et suites adjacentes)*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante alors :

1. *pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2, u_n \leq v_m$,*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *existent, sont finies et sont égales.*

3.7 Suites extraites

Définition 3.7.1. *(Suites extraites)*
Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite, s'il existe une application

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante,}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Propriété 3.7.1. *(Propriété de φ)*
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(n) \geq n.$$

En particulier, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} := \varphi(n)$ a pour limite $+\infty$.

Théorème 3.7.1. *(Bolzano-Weierstrass)*
De toute suite réelle bornée on peut en extraite une sous-suite convergente.

3.8 Suites de Cauchy

Il se peut que l'on ait besoin de montrer qu'une suite est convergente sans nécessairement calculer explicitement sa limite. C'est le cas par exemple quand cette limite est difficile à trouver. Il existe alors un critère qui marche bien pour les suites réelles. C'est le critère de Cauchy. Avant de le définir, commençons par introduire les suites de Cauchy.

Définition 3.8.1. *(Suites de Cauchy)*
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p et $q \in \mathbb{N}$, si $p, q \geq N$ alors

$$|u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

Proposition 3.8.1. *(Suite de Cauchy bornée)*
Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 3.8.2. *(Suite de Cauchy et convergence)*
Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Remarque Attention : même si toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque (toute suite de Cauchy est convergente) n'est pas vraie dans n'importe quel ensemble. Ici, nous travaillons dans $\mathbb{R}$, et ça marche. Mais il faut absolument que l'on se trouve dans un ensemble "sans trou", que l'on appelle également ensemble complet. Par exemple, cela ne marcherait pas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels qui n'est pas complet.

3.9 Fonctions et suites

Proposition 3.9.1. *(Suites et fonctions continues)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telles que :

1. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$,*
2. *f est continue en l,*

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

3.10 Enoncés des exercices

Exercice 3.10.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.*
2. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.*
3. *Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.*
4. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*

Exercice 3.10.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. *Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$*
2. *Exprimer v_n en fonction de n.*
3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
4. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.*

Exercice 3.10.3. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par*

$$u_n = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$$

Exercice 3.10.4. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :*

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + ... + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

3.11 Corrigés des exercices

Corrigé d'exercice 3.10.1

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]0,1]$ donc $u_0 > 0$. Montrons que $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} > 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]0,1]$ donc $u_0 \leq 1$. Montrons que $u_n \leq 1$ entraine que $u_{n+1} \leq 1$.

$$0 < u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1$$

$$u_n + 1 = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

3. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n)$$

Comme $0 < u_n \leq 1$, on a $-2 \leq -2 + u_n \leq -1 < 0$, par conséquent

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n) < 0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante.
Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante.

4. La suite est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite notee l, cette limite appartient a $[0,1]$ et cette valeur verifie

$$l = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow 0 = -\frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow -2l + l^2 = 0 \Leftrightarrow l(-2+l) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 2$$

Par conséquent $l = 0$.

Corrigé d'exercice 3.10.2

1.

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1}-2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1}+2}=\frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{u_n+8+2(2u_n+1)}=\frac{-3u_n+6}{5u_n+10}=-\frac{3}{5}\times\frac{u_n-2}{u_n+2}=-\frac{3}{5}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$

2.

$$v_n=\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n v_0=\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n\times\frac{u_0-2}{u_0+2}=\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n\times\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}\times\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}v_n=\frac{u_n-2}{u_n+2} &\Leftrightarrow v_n(u_n+2)u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n+2v_n=u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n-u_n=-2-2v_n\\ &\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-2v_n\Leftrightarrow u_n=-\frac{2+2v_n}{v_n-1}=-\frac{2-\frac{2}{3}\times(-\frac{3}{5})^n}{-\frac{1}{3}\times(-\frac{3}{5})^n-1}\end{aligned}$$

4. Comme $-1<-\frac{3}{5}<1$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\frac{2}{-1}=2.$$

Corrigé d'exercice 3.10.3

Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

Premiere méthode : On va multiplier en haut et en bas par la quantite conjuguée

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{(2n+\sqrt{4n^2+1})(2n-\sqrt{4n^2+1})(n-\sqrt{n^2+1})}{(n+\sqrt{n^2+1})(n-\sqrt{n^2+1})(2n-\sqrt{4n^2+1})}\\ &=\frac{(4n^2-(4n^2+1))(n-\sqrt{n^2+1})}{(n^2-(n^2+1))(2n-\sqrt{4n^2+1})}=\frac{-(n-\sqrt{n^2+1}}{-(2n-\sqrt{4n^2+1})}=\frac{-n+\sqrt{n^2+1}}{-2n+\sqrt{4n^2+1}}\end{aligned}$$

Il s'agit d'une forme encore plus indéterminée que la précédente, il s'agit donc d'une mauvaise idée.

Deuxième méthode :

$$u_n=\frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n+\sqrt{4n^2(1+\frac{1}{4n^2})}}{n+\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}=\frac{2n+2n\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{2n(1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}})}{n(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}=2\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2.$$

Corrigé d'exercice 3.10.4

Il suffit d'imaginer la tête de u_{n+1} pour être décourager à l'avance de calculer $u_{n+1} - u_n$ pour essayer de montrer la monotonie de cette suite. On va faire autrement, pour tout $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

$$\frac{1}{3n^2+n} \leq \frac{1}{3n^2+k} \leq \frac{1}{3n^2+1}.$$

Donc

$$\frac{2n+1}{3n^2+n} + \frac{2n+1}{3n^2+n} + ... + \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + ... + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

$$\leq \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+1} + ... + \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

Les n termes dans le premier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+n}$. Les n termes dans le dernier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+1}$, on en déduit que

$$n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+n} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+1}$$

$$\frac{2}{3} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \frac{2}{3}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

Chapitre 4

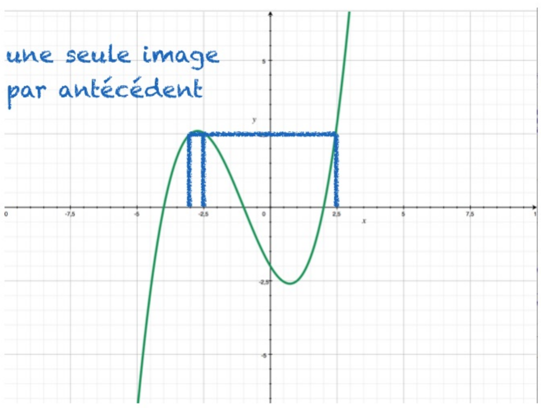
Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Notions de bases sur les fonctions

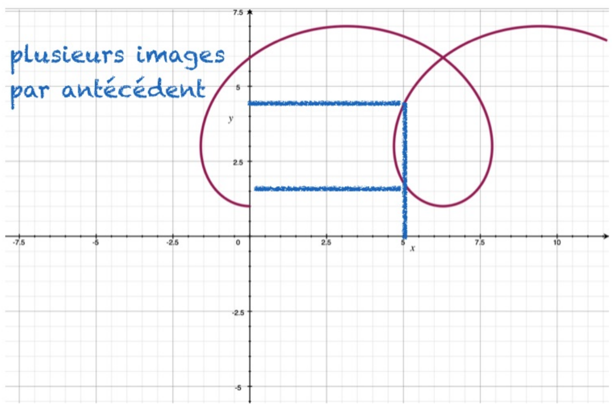
Commençons par donner les définitions de base des fonctions.
On considère ici deux ensembles E et F inclus dans $\mathbb{R}$. Ces ensembles peuvent être $\mathbb{R}$ lui-même.

Définition 4.1.1. *(Fonction)*
Soit E et $F \subset \mathbb{R}$.
La fonction f définie par un ensemble de départ $E \subset \mathbb{R}$ et par un ensemble d'arrivée $F \subset \mathbb{R}$ est une relation de E vers F dans laquelle chaque élément de E appelé antécédent possède au plus un élément dans l'ensemble F appelé image.

Remarque Le fait que chaque élément de E possède au plus une image dans F signifie que certains éléments de E peuvent ne pas avoir d'éléments dans F du tout. Mais d'un autre côté, cela veut également dire que les élément de E ne peuvent pas avoir plus d'une image dans F. Ceci est très important, nous le verrons lors que nous tracerons le graphe d'une fonction.



FONCTION



PAS FONCTION

Que se passe-t-il si l'on ne sélectionne que les éléments de I qui auront exactement une image. En laissant de côté ce qui n'en ont pas. C'est la définition suivante.

Définition 4.1.2. *(Domaine de définition)*
Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$. L'ensemble des éléments de E qui ont exactement une image dans F par la fonction f est appelé domaine de définition de f. On le note D_f.

Du coup, on peut carrément définir les fonctions à partir de leur ensemble de définition. Dans ce cas là, on ne les appellera plus fonctions mais applications.

Définition 4.1.3. *(Application)*
L'application f définie par un ensemble de départ E et par un ensemble d'arrivée F est une relation de E vers F dans laquelle chaque élément de E possède une image et une seule dans l'ensemble F.

Remarque Une application est donc une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble de départ choisi. En d'autres termes, pour une application f définie de E dans l'ensemble F, nous avons $D_f = E$.
Ou encore, une application est une fonction de D_f dans F.

Notation 4.1.1. *On note les fonctions f de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Et les applications f de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : D_f & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

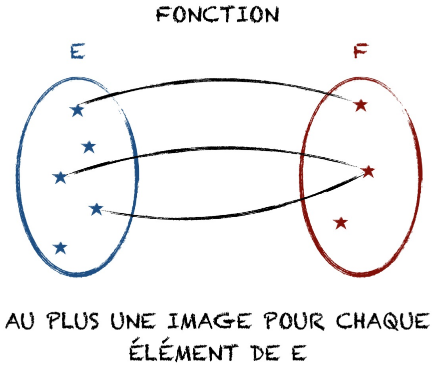
La différence est subtile, tout est question de domaine de départ et domaine de définition.

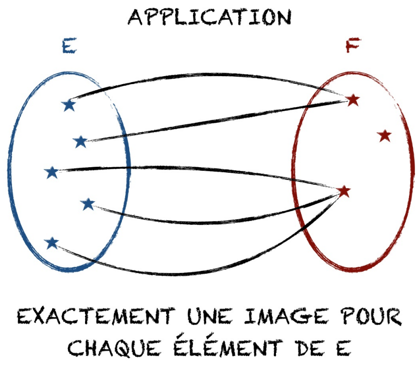
Attention : dans chacune de ces définitions,

1. la première flèche reliant E ou D_f à F qui s'écrit $\to$ sans barre verticale à l'extrémité gauche se lit : "dans" (f va de E (ou D_f) dans F).
2. la deuxième flèche reliant x à $f(x)$ possède, elle une barre verticale à l'extrémité gauche et se lit : "a pour image" (x a pour image $f(x)$).

Remarque

1. En règle générale, on étudiera plutôt des applications en TD, et donc nous essaierons de calculer dans la mesure du possible le domaine de définition de la fonction étudiée.
2. Comme dit précédemment, l'élément x dans l'ensemble D_f est appelé antécédent de f, et l'élément $f(x)$ est appelé image de x par f.
3. Ainsi, l'antécédent se trouve dans le domaine de définition, et l'image dans l'ensemble d'arrivée.





Nous pouvons maintenant essayer de tracer ces applications. Les courbes représentant ces applications, appelées également graphes, permettent de les visualiser plus facilement dans un repère en deux dimensions. Pour cela nous avons besoin de définir le graphe d'une application.

Définition 4.1.4. *(Graphe d'une application)*
Le graphe, appelé encore courbe représentative, noté $\mathcal{C}_f$ d'une application $f : D_f \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x appartienne à D_f et $y = f(x)$ appartienne à $F \subset \mathbb{R}$.

Remarque Le graphe de f s'écrit en général de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\}.$$

Remarque importat : il ne faudra pas confondre :
1. f qui désigne la fonction (ou l'application),
2. $f(x)$ qui désigne un nombre réel (l'image de x par f),
3. $\mathcal{C}_f$ qui désigne le graphe de f, autrement une représentation de f dans un repère, c'est une partie du plan.

Il ne faudra donc pas dire : soit $f(x)$ la fonction ! Mais soit f la fonction...

4.2 Quelques propriétés des fonctions

Par abus, dans tout ce qui suit (sauf dans des cas particuliers) nous allons parler de fonctions plutôt que d'applications. Ceci afin de ne pas alourdir les propos et de permettre de donner un cadre général aux propriétés. Toutefois, on gardera en tête qu'il suffira de définir l'ensemble de départ comme étant le domaine de définition pour que le résultat s'applique aux applications. Nous allons donner ici quelques propriétés connues, et d'autres moins connues sur les fonctions. Ces propriétés permettront de décomposer des fonctions un peu compliquées en fonctions connues plus simples.

4.2.1 Les opérations algébriques

Commençons par les opérations connues : somme, produit et division de fonctions.

Définition 4.2.1. *(Graphe d'une application)*
Si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a alors les résultats suivant :

1. ***Somme :*** *la fonction somme $f+g$ est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :*
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
2. ***Produit :*** *la fonction produit fg est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :*
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
3. ***Quotient :*** *lorsque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction quotient f g est définie pour tout réel x de I par :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque Il est important de rappeler que l'on ne peut pas diviser par 0 et donc il faudra absolument que le domaine de définition de g comprenne entre autre le fait que $g(x)$ ne s'annule pas pour x dans ce domaine.

4.2.2 La restriction

Il se peut que de temps à autre, nous n'ayons pas besoin d'étudier une applications sur tout son domaine de définition, mais seulement sur une partie. On restreint alors la fonction sur un intervalle plus petit que son domaine de définition.

Définition 4.2.2. *(Restriction)*
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit I_0 un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. On appelle restriction de f à I_0 que l'on note $f|_{I_0}$, la fonction définie sur I_0 par :
$$\text{pour tout } x \in I_0, f|_{I_0}(x) = f(x).$$

Remarque Cette définition signifie juste que les fonctions f et $f|_{I_0}$ prennent les mêmes valeurs en chaque point de l'intervalle I_0.

4.2.3 Fonctions définies par morceaux

L'image de la fonction que l'on avait jusqu'à maintenant est celle d'une courbe assez régulière que l'on peut dessiner à main levée sans trop de problème. Il se peut en fait qu'une fonction soit définie par des petits morceaux que l'on peut rapiécer Ces morceaux de fonctions peuvent se toucher ou non suivant ce que l'on étudie.
Si l'on considère par exemple un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient plusieurs sous intervalles I_1, I_2,...,I_n (où n est un entier naturel). On suppose que ces intervalles ne se chevauchent pas, sinon nous aurions des problèmes, nous ne serions pas en présence de fonctions dans un cadre général.
Ces intervalles peuvent se toucher en découpant ainsi l'intervalle I en n sous intervalles ou non.
Supposons qu'en chacun de ces sous-intervalles la fonction f possède une expression différente.

Autrement dit, en reprenant la notation de la restriction de la section précédente nous aurions :

$$f|_{I_1} = f_1, f|_{I_2} = f_2, ..., f|_{I_n} = f_n.$$

La fonction ainsi définie serait une fonction par morceaux.

4.2.4 Fonctions majorées, minorées et bornées

Il se peut que l'on ait besoin de savoir de temps en temps si une fonction peut-être majorée ou minorée (on pourrait par exemple chercher le coût minimum ou maximum d'une opération financière). Pour cela nous devons définir les notions suivantes.

Définition 4.2.3. *(Fonction majorée)*
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donné un réel M, la fonction f est dite majorée (par M) sur I si pour tout réel x de I :

$$f(x) \leq M.$$

Définition 4.2.4. *(Fonction minorée)*
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donné un réel m, la fonction f est dite minorée (par m) sur I si pour tout réel x de I :

$$f(x) \geq m.$$

Définition 4.2.5. *(Fonction bornée)*
Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est dite bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque La majoration ou la minoration de f peuvent ne pas exister. Elles peuvent également ne pas être unique. Il suffit de trouver un majorant ou un minorant qui marche. Si ce majorant (ou minorant) est le plus petit des majorants (ou plus grand des minorants), ça peut être soit la borne supérieure (ou inférieure), soit le maximum (ou le minimum) de la fonction. Tout dépend en fait de l'appartenance ou non de ce majorant ou minorant dans l'intervalle d'arrivée.

Quelques fois, ce n'est pas un nombre qui majore (ou minore) une fonction. ll se peut que ce soit carrément une autre fonction. Nous avons alors les définitions suivantes.

Définition 4.2.6. *(Fonction majorée par une fonction)*
Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f majore g si pour tout x de I :

$$f(x) \geq g(x).$$

On écrit alors $f \geq g$.

Définition 4.2.7. *(Fonction minorée par une fonction)*
Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f minore g si pour tout x de I :

$$f(x) \leq g(x).$$

On écrit alors $f \leq g$.

4.2.5 La composition

Cette partie est nouvelle mais pas très difficile à comprendre. Elle concerne l'"emboîtement" de fonctions les unes dans les autres. Un peu comme des poupées russes. On nomme cet "emboîtement" la composition de fonctions.

Définition 4.2.8. *(Composition de fonctions)*
Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction définie de l'intervalle J de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K de $\mathbb{R}$. La fonction composée des fonctions f et g est la nouvelle fonction que l'on écrit $g \circ f$ (et que l'on lit g rond f) définie pour tout x dans l'intervalle I par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccccc} g \circ f : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & K \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Remarque Il y aura deux difficultés à affronter dans cette nouvelle notion :
1. Il faudra faire très attention aux ensembles de départs et d'arrivées de chacune des fonctions impliquées,
2. À partir d'une fonction composée, il faudra reconnaître quelles sont les fonctions qui la composent, et inversement, à partir de fonctions simples essayer de construire des fonctions compoées.

L'habitude et la pratique permettront de rendre ces notions très familières.

Remarque
1. Il n'est pas nécessaire que J soit l'ensemble de départ de g. Il suffit que l'ensemble de départ de g contienne J.
2. Nous ne pourrons pas avoir l'égalité suivante en général : $f \circ g = g \circ f$.
3. Il existe une fonction que l'on appelle la fonction identité que l'on écrit : Id définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $Id(x) = x$. Autrement dit cette fonction met x en relation avec lui même. Elle ne change rien. On l'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} Id : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Cette fonction identité est importante parce que l'on a les propriétés suivantes :
(a) $Id \circ f = f \circ Id = f$. Autrement dit la fonction identité se comporterait comme l'élément neutre pour la loi de composition $\circ$,
(b) la question que l'on peut se poser, est la suivante : existe-t-il une fonction g telle que l'on ait :

$$f \circ g = g \circ f = Id?$$

Ce qui pour tout x dans I pourrait s'écrire : $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Ce serait une fonction qui permettrait de remettre x en relation avec lui-même après être passé par un intermédiaire.
Ce type de fonction g peut exister (c'est le cas si f est bijective) et c'est la fonction réciproque de f que l'on notera f^{-1} dans la section 4.3.

N.B. : c'est un peu comme, en reprenant l'image du début de cette section, en mangeant une poire on devient petit chaperon rouge et en mangeant le petit chaperon rouge, on redevient une poire. Dit comme ça, cela paraît étrange, mais Raymond Queneau qui a publié des articles de recherche en mathématiques n'était-il pas lui-même un surréaliste.

4.2.6 Monotonie

Certaines fonctions sont monotones, dans le sens littéral du terme. Autrement dit, elles ne varient pas. Elles sont soit croissantes, soit décroissantes sur un intervalle fixé. C'est ce que nous allons définir ici.

Définition 4.2.9. *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

1. *f est croissante sur D_f si $\forall x, y \in D_f \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.*
2. *f est strictement croissante sur D_f si $\forall x, y \in D_f \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.*
3. *f est décroissante sur D_f si $\forall x, y \in D_f \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.*
4. *f est strictement décroissante sur D_f si $\forall x, y \in D_f \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.*
5. *f est monotone (resp. strictement monotone) sur D_f si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D_f.*

Remarque Etudier les variations d'une application consiste donc à regarder sa variation de monotonie et donc à partager son ensemble de définitions en intervalles tels que sur chacun d'eux, la fonction soit monotone.

Exemple

1. La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Propriété 4.2.1. *(Somme, produit et composition de fonctions monotones)*
Soient f et g deux fonctions définies sur I.

1. *Si f et g sont croissantes sur I, la somme $f + g$ est croissante.*
2. *Si f et g sont positives ou nulles sur I. Si f et g sont croissantes sur I, alors leur produit fg est croissant sur I.*
3. *Si f et g sont croissantes toutes les deux (resp décroissantes toutes les deux) alors leur composée (si elle existe), est croissante (resp décroissante).*
4. *Si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante, alors la composée est décroissante.*

4.2.7 Parité

Il sera très utile parfois de regarder si notre fonction (et donc son graphe) est symétrique soit par rapport à l'origine $O(0, 0)$ soit par rapport à l'axe des ordonnées (c'est à dire la droite d'équation $x = 0$). En effet, cela nous permettra de n'étudier la fonction que sur une partie de son domaine, l'autre partie se déduisant par symétrie. C'est extrêmement pratique notamment quand on utilisera des valeurs absolues.
Pour cela nous devons définir la parité d'une fonction.

Définition 4.2.10. *(Fonction paire et impaire)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

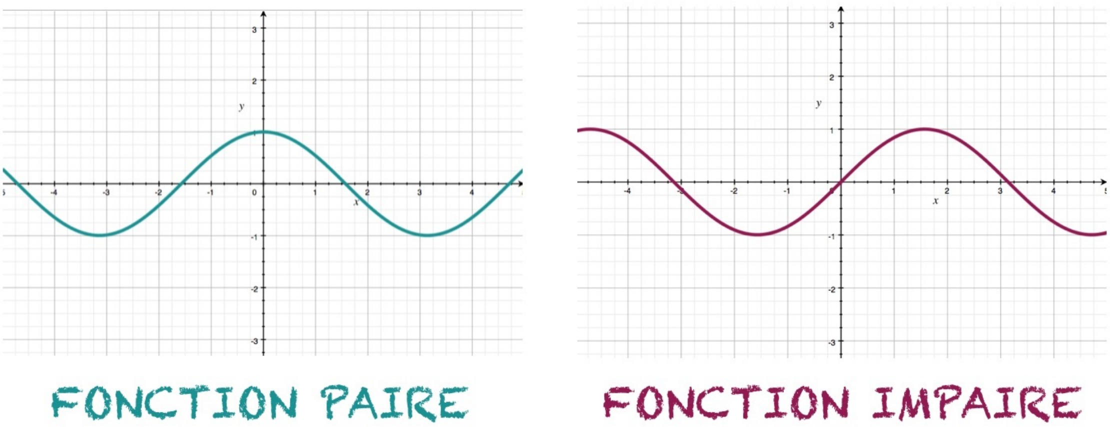
1. *f est paire si $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$,*
2. *f est impaire si $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.*

Remarque Si f est paire, sa courbe représentative (son graphe) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$).

Remarque Si f est impaire, sa courbe représentative (son graphe) est symétrique par rapport à l'origine $O(0, 0)$.

Remarque important : toute application f impaire s'annule en 0. Autrement dit, si f est impaire alors $f(0) = 0$.

Exemple
1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.



Il se peut que l'axe de symétrie ne soit pas l'axe des ordonnées. La fonction ne sera alors pas paire, mais juste symétrique par rapport à un autre axe. Supposons que ce soit la droite verticale d'équation $x = a$. Nous avons alors la propriété suivante.

Propriété 4.2.2. *(Axe de symétrie quelconque)*
Soit f une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel de I tel que pour tout x de I l'on ait :

$$a + x \in I \text{ et } a - x \in I.$$

Le graphe $\mathcal{C}_f$ de f admet commet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie si et seulement si pour tout réel x :

$$f(a + x) = f(a - x).$$

Il se peut que le centre de symétrie ne soit par l'origine. Dans ce cas, la propriété suivante nous permet de prouver qu'un point A de coordonnées (a, b) du plan est un centre de symétrie pour l'application f.

Propriété 4.2.3. *(Centre de symétrie quelconque)*
Soit f une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ et b deux réels tels que pour tout x de I l'on ait :

$$a + x \in I \text{ et } a - x \in I.$$

Le graphe $\mathcal{C}_f$ de l'application f admet le point A de coordonnées (a, b) pour centre de symétrie si et seulement si pour tout réel x de I

$$f(a + x) + f(a - x) = 2b.$$

4.2.8 Fonctions périodiques

Penchons-nous maintenant sur les fonctions périodiques. Montrer qu'une fonction est périodique peut être très utile, dans le sens où, un peu comme dans le cas de la parité, cela permet de réduire fortement le domaine d'étude de la fonction, en l'occurrence ici sur une seule période.

Définition 4.2.11. *(Fonction périodique)*
Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit T un nombre réel non nul tel que pour tout x de I l'on ait :

$$x + T \text{ dans l'intervalle } I.$$

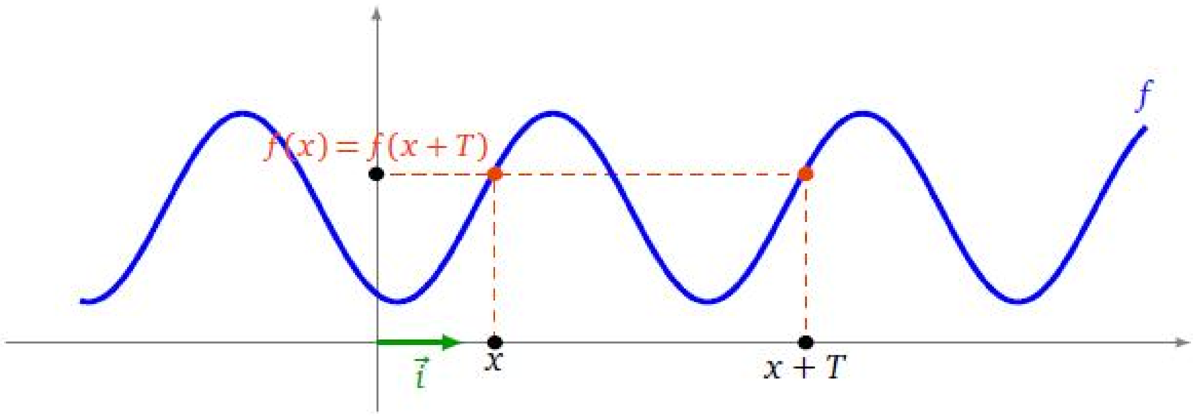
L'application f est dite T-périodique si pour tout réel x de I :

$$f(x + T) = f(x).$$

T est alors appelé la période de f.

Remarque Si f est une application périodique et si T et T' sont deux périodes de f telles que $T + T' \neq 0$, alors $-T$ et $T + T'$ sont également des périodes de f.
f peut donc posséder plusieurs périodes de f. La plus petite d'entre elle est appelée période fondamentale.

Définition 4.2.12. *(Période fondamentale)*
Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. On suppose f périodique. Si l'ensemble des périodes strictement positives de f a un plus petit élément T_0, celui-ci est appelé période fondamentale de f. Toutes les périodes de f sont alors de la forme nT_0, où n est un entier relatif.

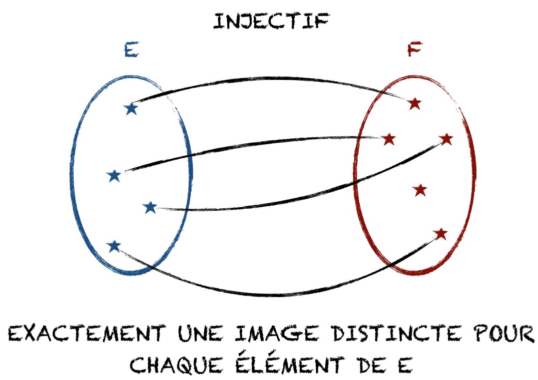


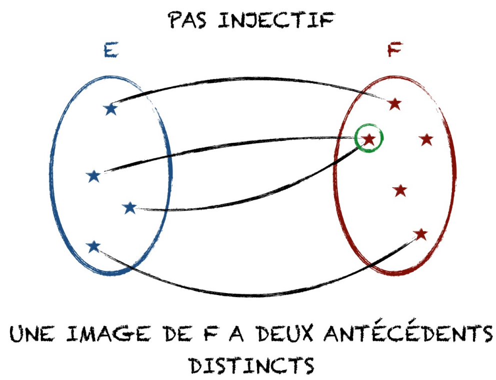
Exemple Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont 2π-périodiques. La fonction *tangente* est π-périodique.

4.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité sont nouvelles pour la plupart d'entre vous. Mais elles ne sont pas compliquées quand on comprend ce qu'elles représentent.
Considérons une fonction f définie d'un ensemble I de $\mathbb{R}$ vers un ensemble J de $\mathbb{R}$. On rappelle alors que I représente l'ensemble de départ et J l'ensemble d'arrivée.

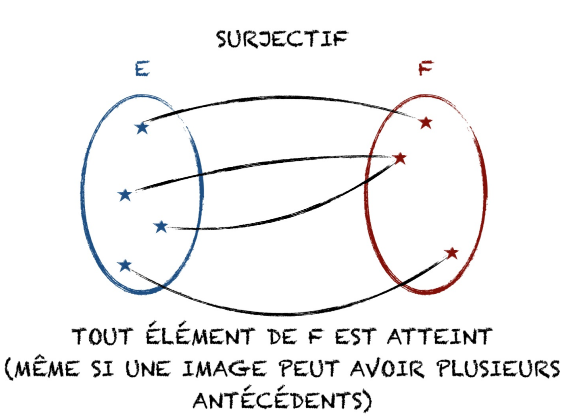
Définition 4.3.1. *(Fonction injective)*
On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est injective si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au plus un antécédent dans l'ensemble I de départ.
Autrement dit, il en possède soit un, soit aucun mais pas plus de un. En mathématiques cela s'écrit :
pour tous x_1 et x_2 de I, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.

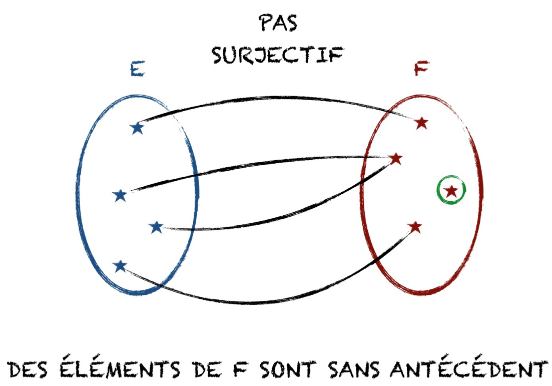




Définition 4.3.2. *(Fonction surjective)*
On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est surjective si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au moins un antécédent dans l'ensemble I de départ.
Autrement dit, il en possède soit un, soit plus, mais il est obligé d'en posséder un. En mathématiques cela s'écrit :
pour tout y de J il existe (au moins un) x de I tel que

$$f(x) = y$$



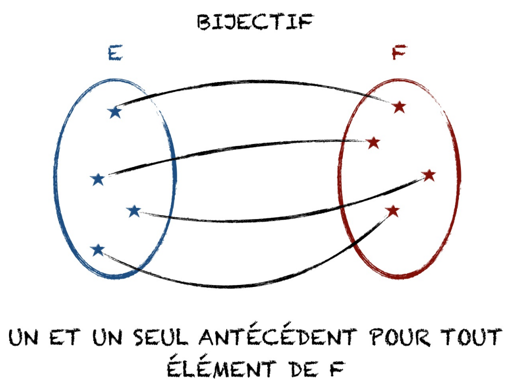


Définition 4.3.3. *(Fonction bijective)*
On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective si et seulement elle est à la fois injective et surjective. C'est à dire si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet exactement un antécédent dans l'ensemble I de départ.
En mathématiques cela s'écrit :
pour tout y de J il existe un unique x de I tel que

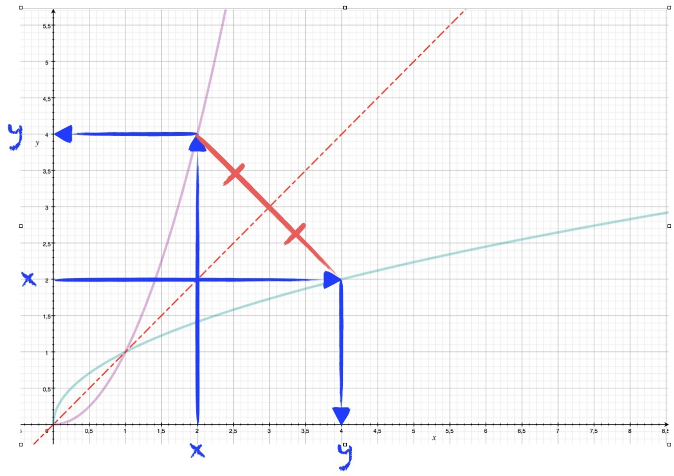
$$f(x) = y$$

Il est alors possible de passer de y à x par ce qu'on appelle la fonction réciproque, que l'on note f^{-1}.
Et donc si f est bijective on a :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & y = f(x). \end{array} \quad \text{et} \quad f^{-1}: \begin{array}{ccc} J & \to & I \\ y & \mapsto & x = f^{-1}(y). \end{array}$$



Question.
Comment construire le graphe d'une fonction f^{-1} réciproque d'une fonction f ?
Réponse.
On voit par construction de la fonction réciproque que si l'on suppose x un point de l'intervalle I et y un point de l'intervalle $J = f(I)$ l'image de I par f tel que $y = f(x)$, alors (x, y) appartient au graphe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si (y, x) appartient au graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.
Autrement dit tout point du graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la première bissectrice (c'est à dire la droite d'équation $y = x$).



Construction de la fonction réciproque (ici la fonction $x \mapsto x^2$ dont la réciproque si $x \geq 0$ est $x \mapsto \sqrt{x}$. La droite pointillée rouge est la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

4.4 Limites

4.4.1 Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 4.4.1. *Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple 4.4.1. *Calculer la limite de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.*
Si l'on pose $g(x) = \tan x$, la limite cherchée est celle du taux de variation de g entre 0 et x. Donc

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Définition 4.4.2. *Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$,*

1. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

2. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in I\ \ |x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)|<-A.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Limite en l'infini

Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I=]a,+\infty[$.

Définition 4.4.3. 1. *On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si*

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists B>0\ \ \forall x\in I\ \ x>B\Longrightarrow|f(x)-l|<\varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$

2. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A>0\ \ \exists B>0\ \ \forall x\in I\ \ x>B\Longrightarrow|f(x)-l|>A.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$

Exemple 4.4.2. *Calculer la limite de la fonction f définie par* $f(x)=x\Big(1-\cos\dfrac{1}{x}\Big)$ *en $+\infty$.*
En posant $u=\dfrac{1}{x}$, *et* $g(u)=\cos u$, *on peut écrire*

$$f(x)=x\Big(1-\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)=-\frac{g(u)-g(0)}{u-0}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers zéro et l'expression précédente tend vers $-g'(0)=0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{g(u)-g(0)}{u-0}=-g'(0)=0.$$

Proposition 4.4.1. *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

Proposition 4.4.2. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$, *alors*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda\cdot f=\lambda l$ *pour tout* $\lambda\in\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)=l+l'$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)=l\times l'$
4. *Si* $l\neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{l}$.

De plus, si $\lim\limits_{x\to x_0} f=+\infty$ *ou* $-\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f}=0$.

Proposition 4.4.3. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f=l$ *et* $\lim\limits_{y\to l} g=l'$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f=l'$.

Proposition 4.4.4. 1. *Si* $f\leq g$ *et Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f=l\in\mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g=l'\in\mathbb{R}$, *alors* $l\leq l'$

2. *Si* $f\leq g$ *et Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g=+\infty$.

3. *Théorème des gendarmes*

$$\text{Si } f \leq g \leq h \text{ et si } \lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} h = l \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{x\to x_0} g = l \in \mathbb{R}$$

Voici une liste de formes indéterminées

$$\boxed{+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \tfrac{\infty}{\infty}, \quad \tfrac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^0.}$$

4.5 Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Définition 4.5.1. *1. On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemple 4.5.1. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & si \quad x \geq 2, \\ \frac{4}{x^2} & si \quad 0 < x < 2. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2.
On a $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-1} = 1$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{4}{x^2} = 1$.
Ainsi, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 1$ donc la fonction f est continue en 2.

Proposition 4.5.1. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

1. *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*
2. *$f + g$ est continue en x_0,*
3. *$f \times g$ est continue en x_0,*
4. *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.*

4.5.1 Prolongement par continuité

Définition 4.5.2. *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I\backslash\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$*
2. *On définit alors la fonction $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \ x \neq x_0, \\ l & si \ x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 4.5.2. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.*
La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$, comme $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, f est prolongeable par continuité en 1.
Le prolongement par continuité en 1 de la fonction f est la fonction $\widetilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & si \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\\ 2 & si \quad x=1.\end{cases}$$

4.6 Enoncés des exercices

Exercice 4.6.1. *Après avoir donné leur domaine de définition, dire si les fonctions f définies de la façon suivante sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.*

a. $f(x)=2x^5-3x^2+2$, *b.* $f(x)=x^3-x^7$, *c.* $f(x)=\cos(x^2)$, *d.* $f(x)=1+\sin(x)$.

Exercice 4.6.2. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=\begin{cases}|x|+x+1 & si \quad x\leq 1,\\ \sqrt{x}(x^2+2) & si \quad x>1.\end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$.*
2. *Etudier la continuité de f en 1.*
3. *En déduire la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.*

Exercice 4.6.3. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\, x\neq 0,\\ 0 & si\, x=0.\end{cases}$$

Montrer que f continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.6.4. *Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.*

Exercice 4.6.5. *Calculer les limites suivantes*
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}-e}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\tan x-\sin x)-x^3}{x^5}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x}$

Exercice 4.6.6. *Montrer en revenant à la définition que* $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-5}$ *est continue en tout point de* $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

4.7 Corrigés des exercices

Corrigé d'exercice 4.6.1

a. $D_f = \mathbb{R}$ et f ni paire, ni impaire,
b. $D_f = \mathbb{R}$ et f est impaire,
c. $D_f = \mathbb{R}$ et f est paire,
d. $D_f = \mathbb{R}$ et f ni paire, ni impaire.

Corrigé d'exercice 4.6.2

1. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = |x| + x + 1$. Sur cet intervalle, f est la somme de la fonction valeur absolue continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty, 1[$, et de la fonction affine $x \mapsto x+1$ continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty, 1[$. Par conséquent, f est continue sur $]-\infty, 1[$.
   Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}(x^2+2)$. Sur cet intervalle, f est le produit de la fonction racine carrée, continue sur $\mathbb{R}^+ \supset]1, +\infty[$, par la fonction polynôme continue sur $\mathbb{R} \supset]1, +\infty[$. Par conséquent, f est continue sur $]1, +\infty[$.
2. Etudions la continuité de f en 1
   D'une part, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = |1| + 1 + 1 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sqrt{2}(1^2+1) = 3$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 3$. Alors f est continue en 1.
3. Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
   D'après la première question, f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et d'après la question précédente, f est également continue en 1. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé d'exercice 4.6.3

1. Montrons tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour tout x non nul, f est le produit de la fonction carré par la composée de la fonction inverse par la fonction sinus d'autre part, toutes continues sur $\mathbb{R}^*$. Par consequent, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrons enfin que f est continue en 0.
   Pour tout $x \neq 0$, $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$. D'où, en multipliant par $x^2 > 0$, $x^2|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2$.
   Il vient alors que $0 \leq |x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) \leq x^2$.
   Or, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes en 0, il résulte que $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. On a bien, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, donc la fonction f est continue en 0.
   Il résulte que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé d'exercice 4.6.4

Soit T une période strictement positive de f. On note l la limite de f en $+\infty$.
Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(x+nT)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x+nT) = l.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = l$ et donc, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé d'exercice 4.6.5

1. On se rappelle d'abord que

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 on a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \frac{-e}{2}.$$

2. On note $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x}$. On écrit d'abord la fonction comme

$$f(x) = \left[\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

On pose $y = \dfrac{1}{x}$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+y^2+y^3)^{\frac{1}{3}} - (1+y)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

En utilisant le développement limité de $(1+y)^\alpha$ en 0 on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+y^2+y^3)^{\frac{1}{3}} - (1+y)^{\frac{1}{2}}}{y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+o(y)-1-\frac{y}{2}+o(y)}{y} = -\frac{1}{2}.$$

3. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1.
\end{aligned}$$

4. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o(x^5)) - x^3}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{4}+o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

5. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 3.
\end{aligned}$$

Corrigé d'exercice 4.6.6 Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Pour $x \neq 5$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5} \right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5||x_0-5|}$$

Puis, pour $x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[$, on a $|x-5| > \frac{|x_0-5|}{2} (> 0)$, et donc

$$\forall x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[, |f(x) - f(x_0)| = \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0|.$$

Soient $\epsilon > 0$ puis $\alpha = Min\{\frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2\epsilon}{28}\}(> 0)$.

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0| < \frac{28}{(x_0-5)^2}\frac{(x_0-5)^2\epsilon}{28} = \epsilon.$$

On a monté que $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}, |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$. f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Dérivée

5.1.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 5.1.1. *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Définition 5.1.2. *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f'.*

Exemple 5.1.1. *Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0, \\ 0 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est nulle sur cet intervalle, étudions donc la dérivabilité en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} & si\, x < 0, \\ 0 & si\, x > 0. \end{cases}$$

or $\dfrac{e^{1/x}}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

Exemple 5.1.2. *Étudier la dérivabilité de la fonction $f(x) = \sin x . \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.*
La fonction f est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous avons que $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ *et que* $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite quand* $x \longrightarrow 0$. *Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc* f *n'est pas dérivable en 0.*

Proposition 5.1.1. *Soit* I *un intervalle ouvert,* $x_0 \in I$ *et soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

1. *Si* f *est dérivable en* x_0 *alors* f *est continue en* x_0.
2. *Si* f *est dérivable sur* I *alors* f *est continue sur* I.

5.1.2 Opérations de dérivations

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

1. **Somme** : La fonction somme $f + g$ est dérivable sur I et on a
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$
2. **Produit** : La fonction produit fg est dérivable sur I et on a
$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
3. **Quotient** : si $g(x) \neq 0$, la fonction f/g est dérivable sur I et on a
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(x),$$
en particulier
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\left(\frac{g'}{g^2}\right)(x).$$

Dérivée de la composée de deux fonctions

Proposition 5.1.2. *Si* f *est dérivable en* x *et* g *est dérivable en* $f(x)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x *de dérivée :*
$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

Exemple 5.1.3. *Calculons la dérivée de* e^{1+x^2}. *Nous avons* $g(x) = e^x$ *avec* $g'(x) = e^x$ *et* $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$. *Alors la dérivée de* $g \circ f(x) = e^{1+x^2}$ *est*
$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 2x.g'\left(1+x^2\right) = 2xe^{1+x^2}.$$

5.1.3 Dérivée de la fonctions réciproque

Corollaire 5.1.1. *Soit* I *un intervalle ouvert. Soit* $f : I \longrightarrow J$ *dérivable et bijective dont on note* $f^{-1} : J \longrightarrow I$ *la bijection réciproque. Si* f' *ne s'annule pas sur* I *alors* f^{-1} *est dérivable et on a pour tout* $x \in J$:
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Exercice Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 2x^2$.

1. Monter que : $f :]\frac{4}{3}, +\infty[\longrightarrow] - \frac{32}{27}, +\infty[$ posséde une fonction réciproque.
2. Caculer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$ avec $f(1) = -1$.

5.1.4 Dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	**Dérivée** f'	**Fonction** f	**Dérivée** f'
x^n	nx^{n-1}	u^n	nu^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u'\sin u$

5.1.5 Règle de l'Hospital

Corollaire 5.1.2. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivable et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
2. $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 5.1.4. *Calculer la limite en 1 de $\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :*

1. $f(x) = \ln(x^2+x-1)$, $f(1) = 0$ *et* $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$,
2. $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$ *et* $g'(x) = \dfrac{1}{x}$,
3. *Prenons* $I =]0,1]$, $x_0 = 1$, *alors* g' *ne s'annule pas sur* $I - \{x_0\}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2+x-1}.x = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} = 3.$$

Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 3.$$

5.2 Enoncés des exercices

Exercice 5.2.1. *Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :*

$$f(x) = \sqrt{1+(x\cos x)^2}, \quad g(x) = \frac{\exp(\frac{1}{x})+1}{\exp(\frac{1}{x})-1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \quad k(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}.$$

Exercice 5.2.2. *En utilisant la définition, calculer la dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2$.*

Exercice 5.2.3. *Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ 2. $g(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$

Exercice 5.2.4. *On considère* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer a, b et c pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

5.3 Corrigés des exercices

Corrigé d'exercice 5.2.1

- $1 + (x\cos x)^2 > 0$ pour tout x donc $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2\cos^2 x)'}{2\sqrt{1 + (x^2\cos^2 x)}} = \frac{2x\cos^2 x - 2x^2\cos x\sin x}{2\sqrt{1 + (x^2\cos^2 x)}} = \frac{x\cos x(\cos x - x\sin x)}{2\sqrt{1 + (x^2\cos^2 x)}}.$$

- Il faut $x \neq 0$ sinon $\frac{1}{x}$ non défini, et $\exp(\frac{1}{x}) \neq 1$ (dénominateur non nul) c'est-à-dire $\frac{1}{x} \neq 0$, ce qui est toujours vrai. D'où $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}^*$. $\Big(\exp(\frac{1}{x})\Big)' = -\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})$ d'où

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})(\exp(\frac{1}{x}) - 1) + \frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})(\exp(\frac{1}{x}) + 1)}{(\exp(\frac{1}{x}) - 1)^2} = \frac{2\exp(\frac{1}{x})}{x^2(\exp(\frac{1}{x}) - 1)^2}.$$

- Il faut $\tan x > 0$ d'où $D_h = D_{h'} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.

$$h'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x\tan x} = \frac{1}{\cos x\sin x}.$$

- $D_k = D_{k'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $k'(x) = 4x^3(1+x)^{-4} - 4x^4(1+x)^{-5} = \dfrac{4x^3((1+x) - x)}{(1+x)^5} = \dfrac{4x^3}{(1+x)^5}$.

Corrigé d'exercice 5.2.2

$f(2) = 1$, $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)^2}{x - 2} = x - 2$, donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$

Corrigé d'exercice 5.2.3

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} = |x|\sqrt{1 - x}$ est définie et continue sur $]-\infty, 1]$.
   Il est clair que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Montrons que f est dérivable en 0

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\sqrt{1 - h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{1 - h} = 1$$

et

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h\sqrt{1 - h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\sqrt{1 - h} = -1$$

f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.

2. $g(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Par opération f est dérivable sur $]-1, 1[$. Montrons que f est dérivable en 1 et -1.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} (2+h)\arccos(1+h)^2 = 0$$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$. Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Corrigé d'exercice 5.2.4

f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^-$, car $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$, de même un polynôme est $\mathcal{C}^\infty$, donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. f doit être continue en 0.
   C'est le cas si $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, or $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
   Donc on doit avoir $c = 1$.
2. f doit être dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Avec le même raisonnement que pour la continuité, il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.
   C'est le cas si $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.
   Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} ax + b = b$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
   Donc on doit avoir $b = 1$.
3. f doit être $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   C'est le cas si f' est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi f' continue $\Leftrightarrow$ f' continue en 0. c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2ax + b = b = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$.
   Donc f est $\mathcal{C}^1$.
4. f doit être $\mathcal{C}^2$ en 0,
   f est $\mathcal{C}^2$ si et seulement si f'' continue sur $\mathbb{R}$, ce qui revient à prouver que f'' continue en 0.
   On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2a = 2a$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$.
   On doit donc avoir $a = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion

Ainsi, pour que f soit $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, il faut avoir : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = 1$.

Chapitre 6

Fonctions Élémentaires

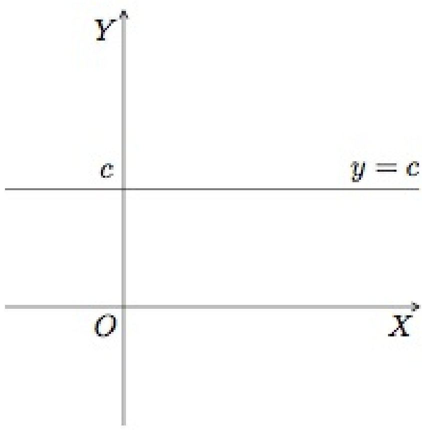
Nous allons dans ce chapitre présenter les fonctions les plus connues (qui pourraient sembler nouvelles pour certains d'entre vous). Ces fonctions ainsi que leurs propriétés sont à connaître par coeur. Nous donnerons quelques propriétés essentielles de ces fonctions (notamment leur comportement asymptotique). Mais pour nous ne ferons pas une étude détaillée qui nécessite également la connaissance de leur dérivée (quand elle existe).

6.1 Fonction constante

La fonction constante est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a. \end{array}$$

où a est un nombre réel.
On peut montrer assez facilement que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$.



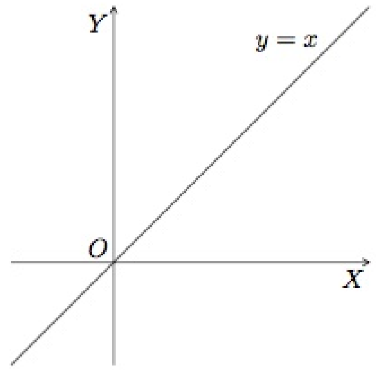
6.2 Fonction identité

La fonction identité est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} Id : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

La fonction identité n'est rien d'autre qu'une fonction linéaire de la forme $f(x) = mx$ dont le coefficient directeur m vaut 1.
On rappelle au passage qu'en déplaçant la fonction linéaire $x \mapsto mx$ de p unités (vers le haut si p est positif ou vers le bas si p est négatif), on obtient la fonction affine $x \mapsto mx+p$.
On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x\to+\infty} Id(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} Id(x) = -\infty$$



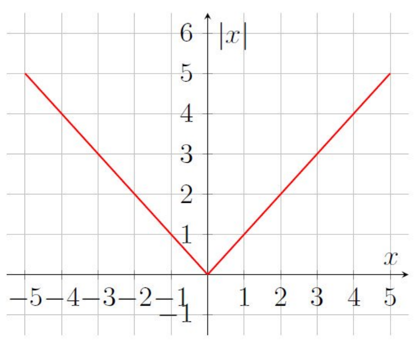
6.3 Fonction valeur absolue

Pour un rappelle sur les propriétés des valeurs absolues d'un nombre, il n'est pas inutile de relire la section 1.7. Ici, nous ne nous intéressons qu'à la fonction valeur absolue.
La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} |.| : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0, \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases} \end{array}$$

On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$$



Une des propriétés liées à la valeur absolue est la suivante.

Propriété 6.3.1. *(Valeur absolue et fonction bornée)*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est bornée sur I si la fonction

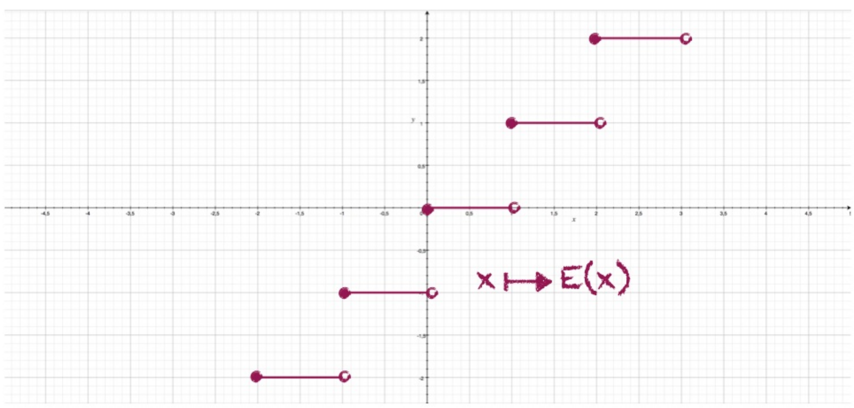
$$|f| : x \mapsto |f(x)| \text{ est majorée.}$$

6.4 Fonction partie entière

Cette fonction peut-être nouvelle pour certains d'entre vous. C'est la fonction partie entière. Pour la définition et les propriétés de la partie entière, il ne sera pas inutile de revoir la section 1.8.
La fonction partie entière que l'on note E est la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} E : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x). \end{array}$$

où $E(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ dans la définition 1.8.1 de la section 1.8. La fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est constante sur tous les intervalles du type $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. On peut remarquer sur le graphe de la partie entière que sa représentation n'est pas en un seul morceau. On dira que la fonction partie entière est continue par morceaux.



Fonction partie entière

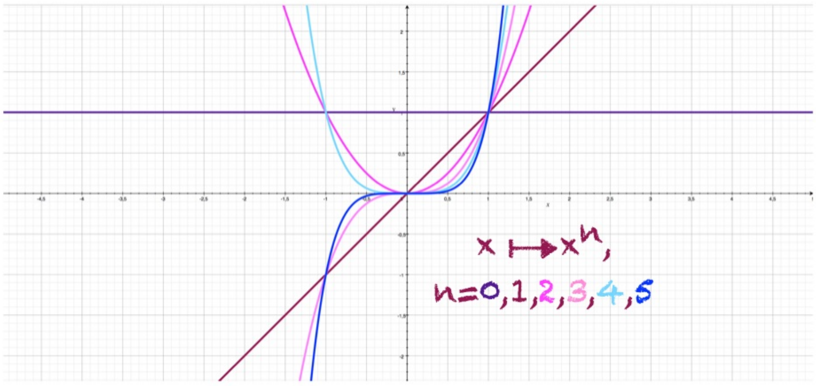
6.5 Fonction puissances entières $n \in \mathbb{N}$

Commençons par rappeler la définition de la puissance entière d'un nombre réel a.

Définition 6.5.1. *(Puissance entière)*
Soient a un réel non nul et n un entier naturel. La puissance n-ième de a est définie par :

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \text{ (où } a \text{ est multiplié } n \text{ fois).}$$

Notons que si $n = 0$, $a^0 = 1$.



Fonction puissance entière

Il est important de noter que cette fonction est définie pour tout réel a. Ce sera important pour donner le domaine de définition de cette fonction.
Continuons par quelques propriétés des puissances entières d'un nombre réel a.

Propriété 6.5.1. *(Opérations puissances entières)*
Soient a, b des nombres réels et n, p deux entiers naturels. On a les propriétés suivantes :

$$a^n a^p = a^{n+p}, (a^n)^p = a^{np}, a^n b^n = (ab)^n,$$

et si en plus b est non nul :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ et } b^n = \frac{1}{b^{-n}}.$$

Remarque Grâce à ce qui précède on peut généraliser les propriétés à n et p entier relatifs, en faisant attention à chaque fois que pour an, avec $n \in \mathbb{Z}$, si la puissance de a est négative, le nombre a ne doit pas être nul, car on ne peut pas diviser par 0 (on ne le répètera jamais assez).

La fonction puissance entière peut donc être définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n. \end{aligned}$$

Remarque
1. Si $n = 0$ on retrouve la fonction constante définie plus haut.
2. Si $n = 1$ on retrouve la fonction identité Id définie plus haut.
3. Si n est pair, la fonction f est paire.
4. Si n est impaire, la fonction f est impaire.

5. Si n est un entier négatif, il faut bien faire attention au domaine de définition qui devient $D_f = \mathbb{R}^*$ (c'est à dire $\mathbb{R}$ privé de 0).
6. Si $n = -1$ on retrouve la fonction inverse classique :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-1} = \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

6.6 Fonction polynôme

Si l'on considère les puissances entières positives. Nous pouvons faire la somme de plusieurs fonctions puissances entières, qui donnent alors naissance à la fonction polynôme (plusieurs puissances).
On la définit en général avec la lettre p (pour l'initiale de polynôme) de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n. \end{array}$$

où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des réels (qui peuvent être nuls) appelés coefficients du polynôme.

Remarque L'écriture $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ peut se simplifier en utilisant le symbole de la somme de plusieurs éléments en mathématique de la façon suivante :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

qu'on lit : "somme de $i = 1$ à n de $a_i x^i$". C'est écriture est beaucoup plus pratique, elle permet d'éviter de surcharger les calculs.

6.7 Fonction racine n-ième, puissance rationnelle

Il se peut que la puissance ne soit pas entière. Elle peut alors être rationnelle. Autrement dit sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Pour éviter les cas particuliers, nous définirons la puissance rationnelle (ou puissance fractionnaire) pour a un réel strictement positif :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Remarque

1. Noter que si $p = 1$ et $q = 2$ on obtient $\sqrt{a}$ et $a > 0$ qui est la racine carrée comme nous la connaissons (mais définie seulement pour $a > 0$).
2. Noter que si $p = 1$ et $q = 3$ on obtient $\sqrt[3]{a}$, et $a > 0$ qui est la racine cubique que nous connaissons également (et qui peut être définie sur $\mathbb{R}$).
3. Noter que ce n'est pas toujours nécessaire de prendre $a > 0$, mais pour la définition générale d'une puissance rationnelle nous prendrons toujours a dans $\mathbb{R}_+^*$. Sinon il faudra faire attention au rapport $\frac{p}{q}$ qui doit écrit de façon irréductible. Alors seulement dans ce cas, si q est impair on peut définir $a^{\frac{p}{q}}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

4. Notons enfin que si p est négatif, il faut également prendre en compte le fait que a ne doit pas être nul (sinon on diviserait par 0).

On peut alors définir la fonction racine n-ième de la façon suivante :

a. Si n est pair :

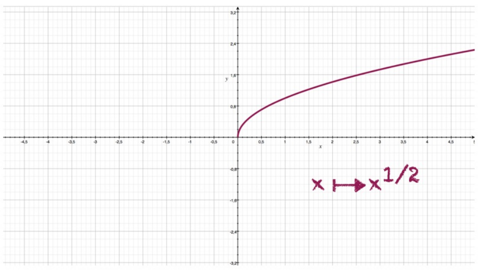
$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

b. Si n est impair :

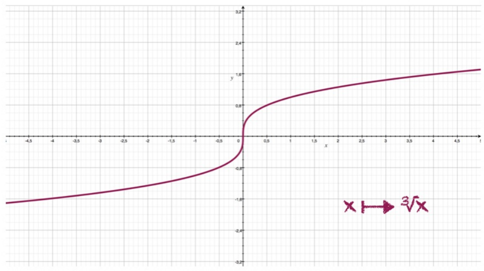
$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

Et d'un autre côté la fonction puissance rationnelle (pour n'importe quels $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{p}{q}}. \end{array}$$



Fonction racine carrée



Fonction racine cubique

6.8 Fonction logarithme népérien

Définition 6.8.1. *On appelle logarithme népérien et on note* ln *l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} \ln :]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}. \end{array}$$

Proposition 6.8.1. *(Logarithme népérien)*

1. *Il existe un nombre* $e = 2,71828$ *tel que* $ln(e) = 1$
2. *Soient* a *et* b *deux réels strictement positifs, alors*

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \;\; \textit{et} \;\; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),$$

Cette dernière égalité nous permet d'ailleurs de déduire (en posant $a = b$*) que* $ln(1) = 0$.

3. Soient n un entier naturel non nul, et a un réel strictement positif, on a alors :

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \text{ et } \ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$$

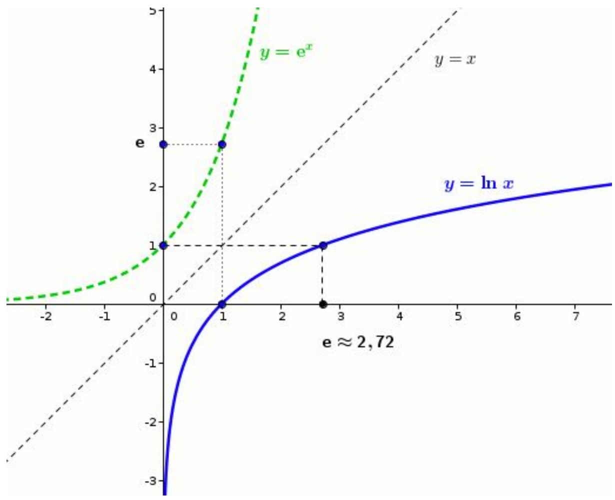
Les résultats sur les limites liées à la fonction ln sont également à connaître et à savoir redémontrer.

Proposition 6.8.2. *(Limites et Logarithme népérien)*
Soit x réel strictement positif,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

mais également

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1,$$



Il sera utile quelques fois de connaître les logarithme de base 10 (en général pour des applications en physique, chimie ou biologie), et donc plus généralement les logarithmes de base a où a est un réel strictement positif.

Définition 6.8.2. *Soient a un réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on définit son logarithme de base a noté $log_a(x)$ par*

$$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

Remarque Le logarithme népérien ln est le logarithme de base e, c'est celui que l'on utilisera le plus souvent, et c'est celui qui est le plus simple, que l'on croise le plus naturellement (même si historiquement ce n'est pas celui-là qui a été utilisé en premier par John Napier (ou Neper) en 1614 qui à donné son nom à cette fonction). C'est pour cela qu'on l'appelle aussi logarithme naturel (celui-ci est dû à Nicolaus Mercator (en 1668)).

6.9 Fonction exponentielle

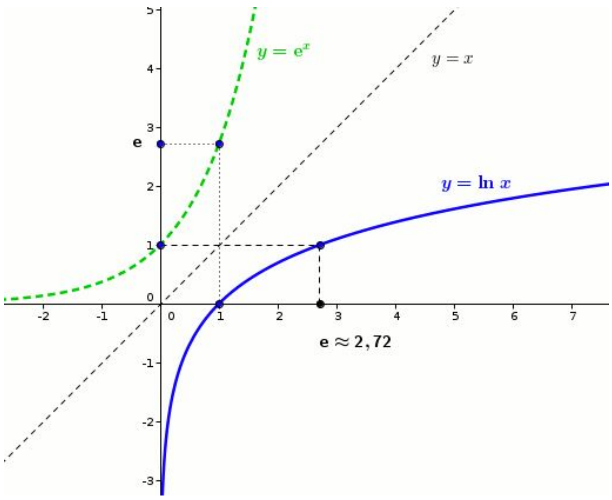
Définition 6.9.1. *L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle. Noté* exp *définie par :*

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x) = e^x. \end{aligned}$$

Il est important de se rappeler que la fonction exponentielle reste toujours strictement positive. Cela sera très utile de le savoir tout au long de ce semestre. Elle possède, entre autres les propriétés suivantes :

Proposition 6.9.1. *(Exponentielle)*
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $e^0 = 1$ *et* $e^1 = e$.
2. *Pour tous réels a et b,*
$$e(a+b) = e^a e^b, \quad e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}.$$
3. *Pour tout réel a et pour tout entier naturel n*
$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad (e^a)^n = e^{na}.$$
4. *Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel b*
$$e^{(\ln(a))} = a, \quad \ln(e^a) = a, \quad \text{et } e^{b\ln a} = a^b.$$



On a alors les limites suivantes (que l'on appelle croissances comparées) (c'est à dire que l'on étudie la vitesse de croissance de certaines fonctions par rapport à d'autres)

Proposition 6.9.2. *(Limites et exponentielles)*
Soit x réel. On a alors les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+a)^x}{x} = e^a.$$

Soit α un réel strictement positif, Soit β un réel quelconque. On a alors les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{-\alpha}} = +\infty,$$

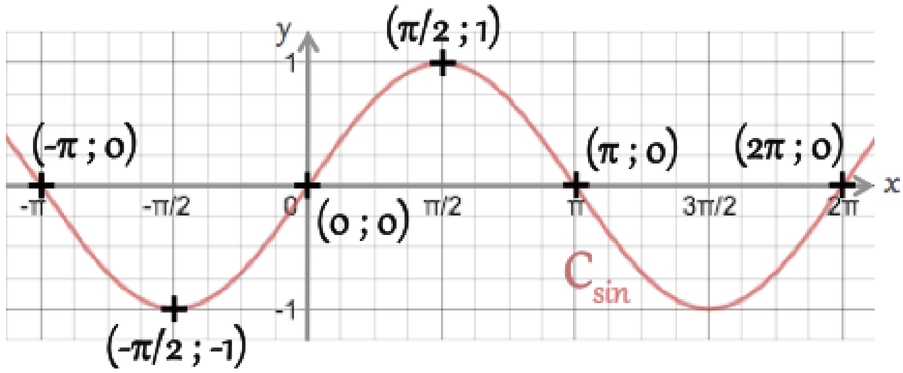
6.10 Fonctions circulaires (ou trigonométriques)

La trigonométrie est connue depuis le collège. Les formules avec sinus, cosinus et tangente sont à connaître par coeur (voir fiche de rappel à la fin de cette section).
Ici nous ne nous intéressons qu'aux fonctions et non pas aux formules. Nous avons :

6.10.1 Fonction sinus

La fonction sinus est définie de la façon suivante :

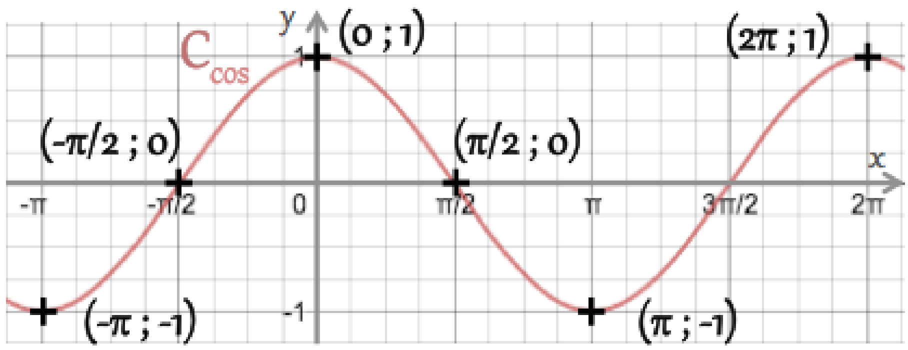
$$\begin{array}{rcl} \sin : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x). \end{array}$$



6.10.2 Fonction cosinus

La fonction cosinus est définie de la façon suivante :

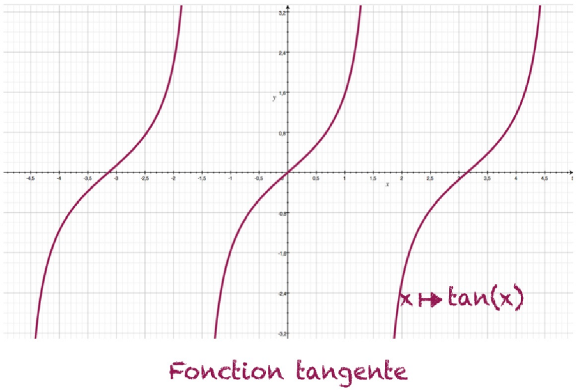
$$\begin{array}{rcl} \cos : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x). \end{array}$$



6.10.3 Fonction tangente

La fonction tangente est définie de la façon suivante :

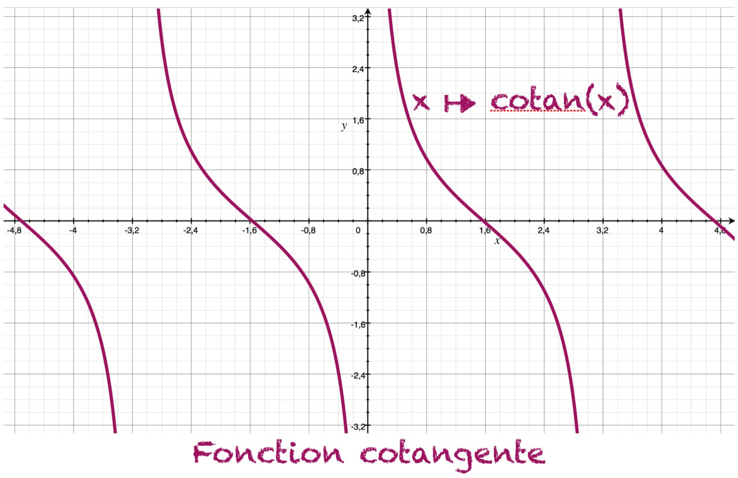
$$\begin{array}{rcl} \tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{array}$$



6.10.4 Fonction cotangente

La fonction cotangente est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} cotan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$



Remarque Nous verrons dans la prochaine section quelques propriétés des fonctions réciproques de ces fonctions trigonométriques.

6.11 Fonctions hyperboliques

Ces fonctions sont peut-être nouvelles pour certains d'entre vous. Elles sont très utilisées dans les applications pratiques. Ce sont des combinaisons de fonctions exponentielles qui ont des propriétés assez similaires aux fonctions trigonométriques.
Nous donnerons quelques propriétés de ces fonctions à la fin de cette section.

6.11.1 Fonction cosinus hyperbolique

Définition 6.11.1. *La fonction cosinus hyperbolique notée* cosh *est définie de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \cosh : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition 6.11.1. *La fonction cosinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle définie donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur son image $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et est notée Argch.*

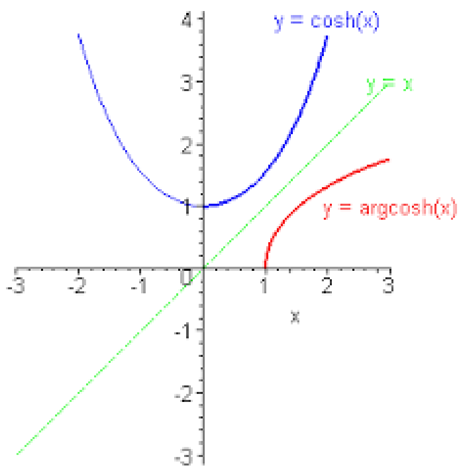
$$\begin{array}{rcl} Argch : [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ y & \longmapsto & Argch(y) \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rl} \cosh\left(Argch(x)\right) = x & \forall x \in [1, +\infty[\\ Argch\left(\cosh(x)\right) = x & \forall x \in [0, +\infty[\end{array}$$

De plus,

1. *Argch est continue sur* $[1, +\infty[$
2. *Argch est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et* $argch'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$



6.11.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Définition 6.11.2. *On définit la fonction sinus hyperbolique* sinh *sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{array}{rcl} \sinh : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

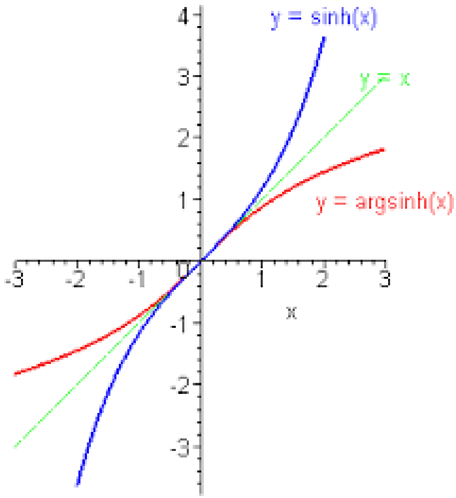
Proposition 6.11.2. *La fonction sinus hyperbolique est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle définie donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et est notée Argsh.*

$$\begin{array}{rcl} Argsh : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & Argsh(y) \end{array}$$

On a

$$\sinh(Argsh(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$Argsh(\sinh(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus, Argsh est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Propriété 6.11.1. *(Egalités hyperboliques)*
Soit x un nombre réel. Alors on a :
1. $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$.
2. $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$.
3. $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

6.11.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Définition 6.11.3. *On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rccl} \tanh : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{array}$$

Proposition 6.11.3. $\tanh$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

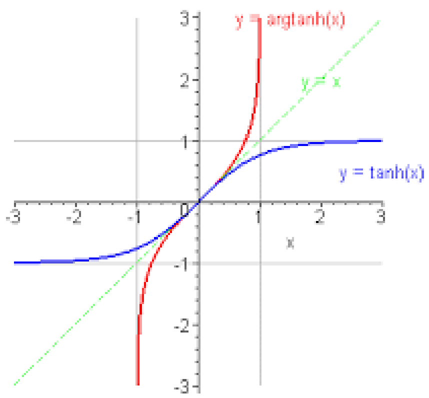
Proposition 6.11.4. *La fonction tangente hyperbolique est de dérivée strictement positive sur* $\mathbb{R}$*. Elle définie donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur son image* $]-1,1[$*. L'application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée Argth.*

$$\begin{array}{rcl} Argth :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & Argth(y) \end{array}$$

On a

$$\tanh(Argth(x)) = x \quad \forall x \in]-1,1[$$
$$Argth(\tanh(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De plus, Argth est continue, dérivable sur $]-1,1[$ *et* $argth'x = \dfrac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



6.11.4 Réciproque de la fonction sinus : la fonction arc sinus

La fonction sinus que l'on note sin : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est évidemment pas bijective. Il faut donc restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de telle sorte qu'elle le soit.
Intuitivement on va donc restreindre l'ensemble de départ où la fonction sin est strictement monotone. Dès qu'elle commence à changer de monotonie, on pose les limites du domaine. Il est donc naturel de choisir la fonction sinus définie par :

$$\begin{array}{rcl} \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

Dans ce cas là, la fonction sinus est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc sinus que l'on note arcsin et que l'on définit par :

$$\begin{array}{rcl} \sin : [-1, 1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \arcsin(x). \end{array}$$

Remarque Comme la fonction sinus, la fonction arc sinus est :

1. strictement croissante,
2. impaire,

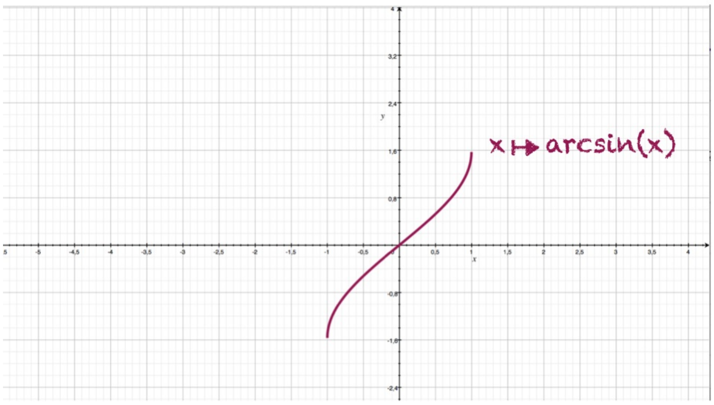
Remarque Il est important de souligner qu'étant donné que la fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\arcsin(x)) = x,$$

d'un autre côté, comme sin est à valeurs dans $[-1, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction arcsin est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Mais attention,

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \text{ seulement sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Si l'on prolonge ce domaine, la fonction arcsin n'est plus bijective.



Fonction arc sinus

6.11.5 Réciproque de la fonction cosinus : la fonction arc cosinus

La fonction cosinus cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est évidemment pas bijective. Il faut donc restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de telle sorte qu'elle le soit.
Intuitivement on va donc restreindre l'ensemble de départ où la fonction cos est strictement monotone. Dès qu'elle commence à changer de monotonie, on pose les limites du domaine.
Il est donc naturel de choisir la fonction cosinus définie par :

$$\begin{array}{rcl} \cos : [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

Dans ce cas là, la fonction cosinus est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc cosinus que l'on note arccos et que l'on définit par :

$$\begin{array}{rcl} \arccos : [-1, 1] & \to & [0, \pi] \\ x & \mapsto & \arccos(x). \end{array}$$

Remarque Comme la fonction cosinus, la fonction arc cosinus est strictement décroissante. Noter qu'elle n'est ni paire ni impaire.

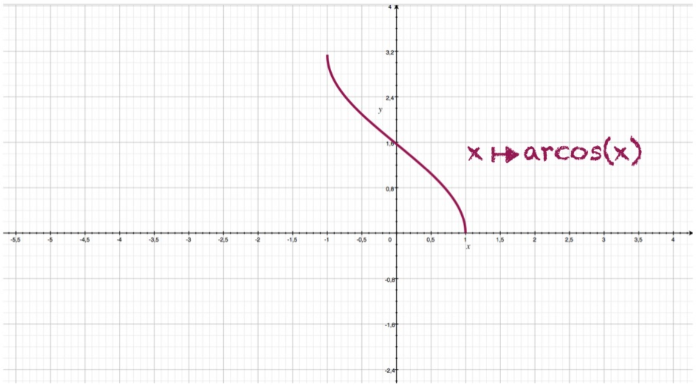
Remarque Il est important de souligner ici aussi qu'étant donné que la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\arccos(x)) = x,$$

d'un autre côté, comme sin est à valeurs dans $[-1, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction arccos est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Mais attention,

$$\arccos(\cos(x)) = x, \text{ seulement sur } [0, \pi].$$

Si l'on prolonge ce domaine, la fonction arccos n'est plus bijective.



Fonction arc cosinus

6.11.6 Réciproque de la fonction tangente : la fonction arc tangente

La fonction tangent tan : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ n'est évidemment pas bijective. Il faut donc restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de telle sorte qu'elle le soit. Intuitivement on va donc restreindre l'ensemble de départ où la fonction tan est strictement monotone et surjective. Dès que l'on passe les asymptotes verticales, la fonction ne devient plus surjective.
Il est donc naturel de choisir la fonction tangente définie par :

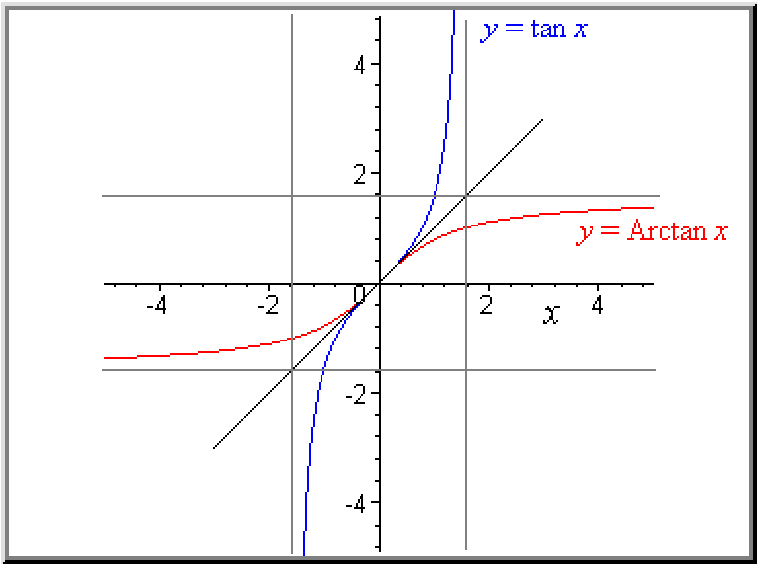
$$\begin{array}{rcl} \tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x). \end{array}$$

Dans ce cas là, la fonction tangente est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc tangente que l'on note arctan et que l'on définit par :

$$\begin{array}{rcl} \tan : \mathbb{R} & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \arctan(x). \end{array}$$

Remarque Comme la fonction tangente, la fonction arc tangente est :

1. strictement croissante,
2. impaire,



Propriété 6.11.2. *(Propriétés d'arc sinus, arc cosinus et arc tangente)*

1. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$
$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$
2. *Pour tout* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$$\arcsin(\sin(x)) = x.$$
3. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$
$$\cos(\arccos(x)) = x.$$
4. *Pour tout* $x \in [0, \pi]$
$$\arccos(\cos(x)) = x.$$
5. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$
$$\tan(\arctan(x)) = x.$$
6. *Pour tout* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$$\arctan(\tan(x)) = x.$$
7. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$
8. *Pour tout* x *réel strictement positif*
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$
9. *Pour tout* x *réel strictement négatif*
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Bibliographie

[1] K. Allab, *Eléments d'Analyse*, OPU, Alger, 1984.

[2] Y. Bougrov et S. Nikolski, *Cours de Mathématiques Supérieures*, Editions Mir, Moscou, 1983.

[3] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo et F. Boschet, *Cours d'analyse,* Librairie Armand Colin, Paris, 1976.

[4] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques,* tome 2, Edition Dunod, 1978.

[5] J. M. Monier, *Analyse PCSI-PTSI*, Dunod, Paris 2003.

[6] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.