

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب

Université de Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الإلكترونيات

Département d'Électrotechnique



Projet de Fin d'Études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Électrotechnique

Domaine : Sciences et Technologie Filière : Électrotechnique Spécialité : Commande Electrique

Thème

Bras manipulateur opérant sur un objet tridimensionnel statique

Présenté par :

1) Melle. CHENAFI Mariem

Devant le jury :

Pr YOUNES mohammed

Dr BOUDJELLA Fatima Zohra

Dr YOUNES Khedidja

UAT.B.B (Ain Temouchent)

UAT.B.B (Ain Temouchent)

UAT.B.B (Ain Temouchent)

Président

Examinatrice

Encadrante

Année Universitaire 2025/2026

Dédicace

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux,

À ceux qui ont été la lumière sur les chemins semés d'épreuves et le soutien dans les moments les plus difficiles, je dédie le fruit de longues années de travail, d'efforts et de persévérance.

À ma chère mère, qui a porté mes préoccupations avant même que je ne les exprime, qui a veillé de nombreuses nuits pour mon bien-être et ma réussite, et dont les prières sincères m'ont accompagné à chaque étape de ma vie. Aucun mot ne saurait exprimer toute ma gratitude envers toi ; tu es ma force et l'une des plus belles bénédictions que Dieu m'ait accordées.

À mon cher père, qui m'a appris que le succès ne se reçoit pas, mais se conquiert par le travail et la patience, et qui a toujours été mon soutien et mon guide. Je t'adresse tout mon amour, mon respect et ma reconnaissance.

À mon frère bien-aimé vivant à l'étranger, que la distance a éloigné de moi mais dont l'affection, les encouragements et les prières ont toujours été présents. Malgré les kilomètres qui nous séparent, tu as toujours occupé une place particulière dans mon cœur.

À ma chère sœur, compagne de précieux souvenirs et propriétaire d'un cœur généreux, merci pour ton soutien constant, ta confiance et ta présence à mes côtés dans les moments de doute et de faiblesse.

À mon petit frère, dont la présence a toujours été pour moi une source de joie et d'espoir, je souhaite un avenir radieux, rempli de succès, de bonheur et de belles réalisations. Que Dieu te guide dans chacun de tes pas, réalise tes rêves et tes ambitions, et fasse de tes jours à venir des jours encore plus lumineux et prometteurs que tu ne l'imagines.

À mes amis, à mes camarades de promotion et à tous ceux qui ont partagé avec moi les moments de lutte, de travail et de réussite, merci pour votre soutien, votre amitié sincère et les souvenirs inoubliables que nous avons construits ensemble.

Enfin, à toutes les personnes qui ont cru en moi, m'ont soutenu par une parole bienveillante ou une prière sincère, je dédie ce modeste accomplissement, qui n'aurait jamais vu le jour sans la grâce de Dieu puis votre amour et votre soutien.

À vous tous, je dédie cette réussite avec une profonde gratitude. Mon cœur est rempli de reconnaissance et mes yeux de larmes de joie après un long parcours de patience, de sacrifice et de persévérance.

Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah le Tout-Puissant qui nous a accordé la santé, la patience, la volonté et le courage nécessaires pour mener à bien ce travail.

*Nous adressons nos plus sincères remerciements à **Dr YOUNES Khedidja**, notre enseignante et encadreuse. Nous lui exprimons toute notre gratitude pour son encadrement, sa disponibilité, sa compréhension, sa grande gentillesse ainsi que pour la confiance qu'elle nous a témoignée tout au long de cette étude. Qu'elle trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance.*

*Nous adressons également nos vifs remerciements à **M. ADJOUJ**, Chef du Département d'Électrotechnique, pour son soutien et son accompagnement.*

Nous tenons à remercier chaleureusement les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail et d'en être les examinateurs. Nous leur sommes reconnaissants pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette modeste contribution.

Nos sincères remerciements s'adressent également à l'ensemble des enseignants du Département d'Électrotechnique pour la qualité de leur enseignement et les connaissances qu'ils nous ont transmises tout au long de notre parcours universitaire.

Enfin, nous exprimons notre profonde gratitude à ma famille pour leur amour, leur soutien constant, leurs encouragements et leurs sacrifices, qui ont grandement contribué à la réalisation de ce mémoire.

À toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail, nous adressons nos remerciements les plus sincères.

SOMMAIRE GÉNÉRALE

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Généralités sur les robots manipulateurs	3
1.1 Introduction	3
1.2 Définition d'un robot manipulateur	3
1.3 Structure des robots manipulateurs	4
• 1.3.1 Chaîne cinématique	4
• 1.3.2 Éléments constitutifs	4
1.4 Les degrés de liberté (DDL)	5
• 1.4.1 Définition mathématique	6
• 1.4.2 Comparaison 5 DDL vs 6 DDL	6
• 1.4.3 Justification scientifique des architectures à 5 DDL	7
1.5 Types d'articulations	7
• 1.5.1 Articulation rotative ou rotoïde (R)	8
• 1.5.2 Articulation prismatique (P)	8
1.6 Classification des robots manipulateurs	9
• 1.6.1 Selon la structure géométrique	9
• 1.6.2 Selon le nombre de degrés de liberté	12
• 1.6.3 Selon l'orientation de la base fixe	13
○ Intérêt spécifique pour l'évolution sur les surfaces sphériques	13
1.7 Espace de travail (Workspace)	14
• 1.7.1 Concepts fondamentaux	14
• 1.7.2 Application au bras à base horizontale sur surface sphérique	14
1.8 Contraintes, limitations et singularités	15
• 1.8.1 Contraintes mécaniques et structurelles	15
• 1.8.2 Analyse géométrique des singularités	15
• 1.8.3 Précision et répétabilité	16
1.9 Domaines d'application des architectures à 5 DDL	16
1.10 Conclusion du chapitre	17
Chapitre 2 : Modélisation cinématique du manipulateur 5 DDL	18
2.1 Introduction	18
2.2 Description de l'architecture du robot	18
• 2.2.1 Structure mécanique et distribution des axes	18
• 2.2.2 Paramètres géométriques des segments	20
2.3 Notations et définitions mathématiques	20
2.4 Modèle cinématique inverse (MCI) analytique	21
• 2.4.1 Principe du guidage par points vert et rouge	21
• 2.4.2 Définition du vecteur d'orientation et position du poignet	22
• 2.4.3 Calcul des angles de positionnement (θ , α , β)	22
○ 2.4.3.1 Point d'épaule effectif et projection plane	22
○ 2.4.3.2 Angle de base θ	23
○ 2.4.3.3 Angle du coude β	23
○ 2.4.3.4 Angle d'épaule α	24
• 2.4.4 Calcul des angles d'orientation (φ , γ)	24
○ 2.4.4.1 Matrice de rotation cumulée R_{M4}	25
○ 2.4.4.2 Changement de repère local	25
○ 2.4.4.3 Détermination de γ et φ	26

2.5 Modèle cinématique direct (MCD)	26
• 2.5.1 Principe des transformations homogènes	26
• 2.5.2 Construction des transformations successives	26
• 2.5.3 Expression finale du MCD	27
2.6 Singularités cinématiques	28
• Singularité de coude (limite d'espace)	28
• Singularité de poignet (alignement axial)	29
• Singularité de base (alignement de l'axe vertical)	29
2.7 Analyse de l'espace de travail (workspace)	30
• 2.7.1 Définition et enjeux	30
• 2.7.2 Conditions d'atteignabilité	30
• 2.7.3 Volume de la calotte sphérique accessible	31
• 2.7.4 Influence des limites articulaires	31
2.8 Conclusion	32
Chapitre 3 : Implémentation, Simulation et Validation du Modèle Cinématique Direct	33
3.1 Introduction	33
3.2 Environnement de Développement et Outils	33
• 3.2.1 Choix du langage Python	33
• 3.2.2 Bibliothèques utilisées	33
• 3.2.3 Le simulateur source	34
3.3 Architecture du Programme de Calcul	35
• 3.3.1 Structure générale du projet	35
• 3.3.2 Principe du script de vérification directe (MCD)	35
• 3.3.3 Logique algorithmique d'ensemble	35
3.4 Analyse des Résultats et Graphiques	36
• 3.4.1 Protocole expérimental	36
• 3.4.2 Graphe 1 : Superposition des coordonnées cartésiennes	36
• 3.4.3 Graphe 2 : Évolution de l'erreur euclidienne	37
• 3.4.4 Graphe 3 : Distribution statistique de l'erreur	38
• 3.4.5 Synthèse statistique	39
• 3.4.6 Interprétation physique	39
3.5 Vérification et Fiabilité du Modèle	40
• 3.5.1 Validation croisée par la boucle MCI / MCD	40
• 3.5.2 Limitations et perspectives	40
3.6 Conclusion	41
Conclusion générale et perspectives	42
Liste des tableaux et des figures	44
Références bibliographiques	46

Introduction générale

Introduction générale :

La robotique manipulatrice constitue l'une des branches les plus matures et les plus étudiées de la robotique moderne. Depuis les premières réalisations industrielles survenues dans les années 1960, les bras manipulateurs ont connu une évolution considérable, tant sur le plan mécanique que sur celui de la commande et de la planification de trajectoires. Aujourd'hui, ces systèmes automatisés sont omniprésents dans des secteurs aussi variés que l'automobile, l'aérospatiale, la médecine ou encore l'agriculture de précision (Craig, 2018). Face à la diversification des besoins de l'ingénierie, la variété des architectures et des degrés de liberté permet d'adapter la structure du robot aux exigences spécifiques de la tâche à accomplir.

Le présent mémoire s'inscrit dans ce cadre à travers une application originale : la conception et la modélisation d'un bras manipulateur à cinq degrés de liberté (5 DDL) doté d'une base rotative horizontale, spécialement destiné à l'évolution sur une surface sphérique. Dans cette configuration, l'axe de rotation de la base est orienté parallèlement au sol, ce qui déploie le bras dans un plan vertical tournant. Contrairement aux manipulateurs industriels classiques à base fixe verticale, cette orientation horizontale de l'axe de base modifie profondément l'espace de travail (workspace) ainsi que la topologie des configurations accessibles, notamment pour optimiser le comportement face aux sollicitations gravitationnelles.

Le choix d'un nombre impair de degrés de liberté (5 DDL) – inférieur aux six axes requis pour un positionnement et une orientation totalement libres dans l'espace tridimensionnel – se justifie par la nature axisymétrique des tâches envisagées sur une sphère. Lorsque l'application consiste à déplacer un outil (comme une sonde d'inspection, un outil de perçage ou un projecteur de traitement de surface) sur une forme sphérique, seule l'orientation de l'axe de l'outil par rapport à la normale à la surface importe. La rotation propre de l'outil autour de son axe de symétrie devient fonctionnellement superflue (Khalil & Dombre, 2002). Un robot à 5 DDL est donc théoriquement optimal, ce qui permet d'éviter de complexifier inutilement les algorithmes de commande cinématique inverse et de réduire le poids embarqué.

La mise en œuvre d'un tel système requiert cependant de surmonter des verrous théoriques liés au pilotage angulaire à l'approche des pôles de la sphère. Ce travail introduit une approche de guidage vectoriel originale. La tâche de pointage est conceptualisée sous la forme d'un modèle hybride de position et d'orientation régi par un double système de coordonnées : un point vert (position cible réelle de l'effecteur à la surface de la sphère) et un point rouge (point virtuel situé dans la sphère, dictant la direction radiale de l'outil). L'enjeu est de prouver qu'un tel formalisme vectoriel, s'inscrivant dans la lignée des modélisations par produit d'exponentielles (Murray et al., 1994), garantit la continuité des lois de commande sans transition singulière.

L'objectif central de ce mémoire est de valider la chaîne de modélisation géométrique et cinématique de ce manipulateur 5 DDL à base horizontale, à travers trois objectifs majeurs :

- **Formalisation mathématique** : Établir analytiquement le MCD par matrices de transformation homogène et résoudre le MCI par découplage vectoriel radial.
- **Analyse de l'espace de travail** : Déterminer les limites d'atteignabilité conditionnées par l'inéquation $L \geq 2R$ (où L désigne la longueur totale déployée du bras et R le rayon de la sphère), et identifier les configurations singulières.
- **Validation numérique** : Quantifier l'écart de modélisation en simulation, une étape virtuelle indispensable avant d'affronter le *reality gap* (écart simulation/réalité) sur prototype physique (Siciliano & Khatib, 2016).

Pour répondre à ces objectifs, une approche de validation croisée est mise en œuvre. Elle s'appuie sur une synergie algorithmique entre le langage Python, pilier du calcul scientifique contemporain (Corke, 2017), et un environnement de visualisation 3D interactif basé sur le moteur JavaScript Three.js.

Le protocole consiste à utiliser le solveur graphique du simulateur pour générer des configurations de test et exporter les coordonnées articulaires correspondantes $(\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma)$. Ces variables sont ensuite injectées de manière indépendante dans le script de calcul Python afin d'exécuter le MCD analytique. La confrontation finale entre les positions cartésiennes recalculées par les équations et les trajectoires cibles du simulateur sert de critère de validation pour évaluer la robustesse et la précision de la modélisation mathématique avant toute transposition sur un prototype physique.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres principaux qui suivent cette progression logique :

1. Le Chapitre 1 est dédié aux généralités sur les robots manipulateurs sériels. Il pose le contexte industriel, définit les composants du système et justifie le choix de l'architecture à base horizontale face aux contraintes sphériques.
2. Le Chapitre 2 développe le formalisme mathématique complet. Il détaille la construction géométrique du MCD, la résolution analytique du MCI par le double point de ciblage, ainsi que l'étude des singularités cinématiques.
3. Le Chapitre 3 présente l'architecture logicielle de développement, détaille le flux de données mis en place pour l'interconnexion des outils, et expose l'évaluation méthodologique de la précision globale du modèle.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Style APA)

- Corke, P. (2017). Robotics, vision and control: Fundamental algorithms in MATLAB (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-54413-7>
- Craig, J. J. (2018). Introduction to robotics: Mechanics and control (4th ed.). Pearson.
- Khalil, W., & Dombre, E. (2002). Modeling, identification and control of robots. Butterworth-Heinemann. • Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC Press.
- Siciliano, B., & Khatib, O. (Eds.). (2016). Springer handbook of robotics (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1>

CHAPITRE 1 : *Généralités sur les robots manipulateurs*

1.1 Introduction

La robotique manipulatrice constitue l'une des branches les plus matures et les plus étudiées de la robotique moderne. Depuis les premières réalisations industrielles dans les années 1960, les bras manipulateurs ont connu une évolution considérable, tant sur le plan mécanique que sur celui de la commande et de la planification de trajectoires. Aujourd'hui, ces systèmes sont omniprésents dans des secteurs aussi variés que l'automobile, l'aérospatiale, la médecine ou encore l'agriculture de précision (Craig, 2018). La diversité des architectures et des degrés de liberté permet d'adapter la structure du robot aux exigences spécifiques de la tâche.

Le présent mémoire s'inscrit dans une problématique originale : la conception et la modélisation d'un bras manipulateur à cinq degrés de liberté (DDL) doté d'une base rotative horizontale, spécialement destiné à l'évolution sur une surface sphérique. Cette configuration, peu conventionnelle, répond à des contraintes géométriques et cinématiques particulières. Contrairement aux manipulateurs industriels classiques à base fixe verticale, l'orientation horizontale de l'axe de base modifie profondément l'espace de travail (*workspace*) et la topologie des configurations accessibles. Par ailleurs, le choix d'un nombre impair de degrés de liberté (5 DDL) – inférieur aux six nécessaires pour un positionnement et une orientation complètement libre – se justifie par la nature axisymétrique des tâches envisagées sur une sphère.

Ce premier chapitre a pour objectif d'établir les bases théoriques et notionnelles nécessaires à la compréhension du travail de modélisation qui sera développé dans les chapitres suivants. Après avoir défini le concept de robot manipulateur, nous en décrirons la structure élémentaire (maillons, articulations, actionneurs, capteurs). La notion de degré de liberté sera ensuite examinée en détail, avec une attention particulière portée aux architectures à 5 DDL et à leur justification scientifique. Nous passerons en revue les différents types d'articulations et les classifications usuelles des robots manipulateurs, en insistant sur les configurations géométriques et l'orientation de la base. Une section spécifique sera consacrée à l'espace de travail, notion centrale pour l'évaluation de la couverture d'une surface sphérique. Enfin, nous discuterons des contraintes et singularités propres aux manipulateurs, avant de dresser un panorama des domaines d'application. La conclusion du chapitre résumera les acquis et justifiera la nécessité d'une modélisation cinématique adaptée au cas particulier du bras à base horizontale rotative pour surface sphérique.

1.2 Définition d'un robot manipulateur

Un **robot manipulateur** est un système mécanique articulé, commandé par un programme informatique, conçu pour déplacer et orienter un outil ou un organe terminal (*end-effector*) dans l'espace, selon des trajectoires spécifiées. La norme ISO 8373 :2021 définit le robot industriel comme un manipulateur automatique, reprogrammable, polyvalent (*multipurpose*), à trois axes ou plus, qui peut être fixe ou mobile (ISO, 2021).

Dans le cadre académique, on retient souvent la caractérisation proposée par Siciliano et Khatib (2016) : un robot manipulateur est une chaîne cinématique ouverte constituée de maillons reliés

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

par des articulations, dont la configuration est déterminée par les variables articulaires. Cette définition englobe aussi bien les grands bras de soudage en ligne automobile que les systèmes miniatures pour la microchirurgie.

Une distinction fondamentale oppose les **manipulateurs sériels** (chaîne cinématique unique) et les **manipulateurs parallèles** (plusieurs chaînes fermées agissant sur une même plateforme). Le présent travail se limite aux structures sérielles, qui offrent un large espace de travail pour un encombrement donné, au prix d'une rigidité mécanique moindre et d'une accumulation des erreurs géométriques le long de la structure (Merlet, 2006).

1.3 Structure des robots manipulateurs

1.3.1 Chaîne cinématique

La chaîne cinématique d'un manipulateur sériel est un ensemble de corps rigides (les maillons) reliés entre eux par des liaisons mécaniques autorisant des mouvements relatifs (les articulations). Un robot à n degrés de liberté possède généralement n articulations et $n + 1$ maillons, le premier maillon étant lié au sol ou au support fixe (base, notée maillon 0) et le dernier portant l'organe terminal (Spong et al., 2020). La transmission du mouvement depuis les actionneurs jusqu'aux articulations peut être directe (moteur coaxial sans réducteur) ou indirecte (via des réducteurs de type *Harmonic Drive*, des engrenages planétaires, des courroies synchrones ou des câbles).

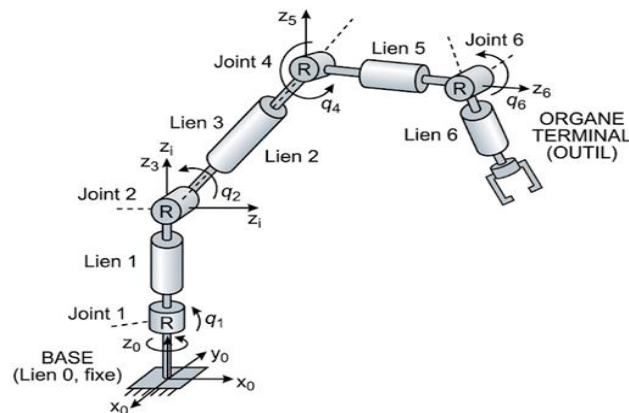


Figure 1.1 : Chaîne cinématique ouverte d'un manipulateur sériel à 6 DDL (exemple générique).

1.3.2 Éléments constitutifs

Chaque élément de la structure joue un rôle précis dans le fonctionnement global du manipulateur :

- **a) Les maillons (links)** : Un maillon est une pièce rigide, supposée indéformable dans le modèle géométrique idéal, qui supporte les efforts mécaniques et transmet le mouvement. Chaque maillon est caractérisé par des paramètres géométriques de longueur, de décalage ou d'excentricité, qui imposent la distance relative entre les axes articulaires. La masse, le

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

centre d'inertie et la matrice d'inertie des maillons interviennent exclusivement dans la modélisation dynamique.

- **b) Les articulations (*joints*) :** L'articulation représente la liaison cinématique restrictive entre deux maillons consécutifs. Elle réduit le nombre de degrés de liberté relatifs entre ces deux corps. Dans les manipulateurs industriels classiques, on utilise quasi-exclusivement des articulations à un seul degré de liberté : rotoïdes (R) ou prismatiques (P). Le type d'articulation détermine la nature de la variable articulaire associée (θ_i pour une rotation, d_i pour une translation).
- **c) Les actionneurs :** Les actionneurs convertissent l'énergie électrique, pneumatique ou hydraulique en énergie mécanique, fournissant le couple ou la force nécessaire pour générer le mouvement articulaire. Les technologies dominantes en robotique moderne sont les moteurs électriques à courant continu sans balais (*brushless* ou BLDC), hautement appréciés pour leur rapport puissance/masse élevé et leur fiabilité, souvent associés à des servocommandes de position et de vitesse.
- **d) Les capteurs :** Ils se divisent en capteurs proprioceptifs et extéroceptifs. La commande en boucle fermée requiert impérativement la mesure précise et continue des variables articulaires via des capteurs proprioceptifs (codeurs incrémentaux ou absolus à haute résolution, résolveurs). Pour les tâches exigeant une grande précision absolue ou une interaction physique sûre, des capteurs d'efforts (jauges de contrainte, couple-mètres intégrés) ou des capteurs extéroceptifs (caméras de vision, systèmes de suivi laser) viennent compléter l'architecture (Craig, 2018).

1.4 Les degrés de liberté (DDL)

Le **degré de liberté** d'un robot manipulateur correspond au nombre minimal de coordonnées indépendantes nécessaires pour décrire de façon unique la configuration ou la posture de son organe terminal dans l'espace de travail (Spong et al., 2020). En mécanique classique, un solide rigide entièrement libre dans l'espace tridimensionnel possède 6 DDL : trois coordonnées de position pour localiser son centre de masse (translations selon x , y , z) et trois coordonnées d'orientation pour définir son attitude (rotations de roulis, tangage, lacet). Par conséquent, pour positionner et orienter arbitrairement un outil dans l'espace, un manipulateur doit théoriquement disposer d'au moins 6 DDL indépendants.

Cependant, de nombreuses tâches de l'ingénierie n'exigent pas une orientation totale de l'outil autour de son axe propre. C'est le cas du perçage, du découpage jet d'eau, du soudage par points ou de la manipulation d'objets par ventouse, où l'outil présente une symétrie axiale (axisymétrie). Dans ces configurations, la rotation de l'outil autour de son axe principal de symétrie n'apporte aucune modification fonctionnelle à la tâche, rendant le 6ème DDL redondant ou inutile.

1.4.1 Définition mathématique

Soit $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des variables articulaires du robot. La position et l'orientation de l'organe terminal sont représentées par un vecteur de situation opérationnelle $x \in \mathbb{R}^m$, où $m \leq 6$ désigne la dimension de l'espace de la tâche. La relation géométrique directe s'exprime sous la forme :

$$x = f(q)$$

Le système est classé selon les dimensions relatives de l'espace articulaire (n) et de l'espace de la tâche (m) :

- **Redondant** si $n > m$: le robot possède plus d'articulations que nécessaire pour accomplir la tâche, offrant une infinité de postures pour une même situation de l'effecteur.
- **Non redondant** si $n = m$: il existe un nombre fini de configurations articulaires associées à une situation opérationnelle donnée.
- **Sous-actionné** si $n < m$: le robot ne peut pas suivre une trajectoire arbitraire dans l'espace de la tâche par manque d'actionneurs indépendants.

Dans ce chapitre introductif, nous caractérisons l'indépendance géométrique globale des articulations. Les configurations où certains mouvements combinés deviennent impossibles sont définies géométriquement comme des postures singulières (ou singularités), abordées en fin de document.

1.4.2 Comparaison 5 DDL vs 6 DDL

Les robots dotés de 5 degrés de liberté occupent une place charnière en robotique industrielle. Ils restreignent la mobilité globale à une orientation partielle de l'effecteur : ils permettent d'orienter un axe de l'outil dans n'importe quelle direction de l'espace (définie par deux angles, assimilables à la colatitude et la longitude), mais éliminent la possibilité de contrôler de manière indépendante la rotation propre autour de cet axe.

Critère	Robot 6 DDL	Robot 5 DDL
Nombre d'articulations	6	5
Mobilité de l'effecteur	Position complète (3 DDL) + Orientation complète (3 DDL)	Position complète (3 DDL) + Orientation partielle (2 DDL)
Espace de travail dextre	Volume complet avec orientations tridimensionnelles libres	Volume restreint par une contrainte d'orientation stricte

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

Critère	Robot 6 DDL	Robot 5 DDL
Coût et complexité mécanique	Élevé (plus d'actionneurs, câblage et réducteurs supplémentaires)	Modéré (structure simplifiée, coût de fabrication réduit)
Risque de singularités	Élevé (présence fréquente de singularités de poignet de type cardan)	Réduit (absence de la troisième articulation orthogonale du poignet)
Applications typiques	Assemblage complexe, usinage 5/6 axes, chirurgie robotique	Soudage axisymétrique, peinture, inspection par caméra

Tableau 1.1 : Comparaison entre manipulateurs à 5 et 6 degrés de liberté.

1.4.3 Justification scientifique des architectures à 5 DDL

Le choix de concevoir une architecture spécifique à 5 DDL est guidé par une double démarche d'optimisation économique et d'adéquation cinématique à la tâche. Lorsque l'application consiste à faire évoluer un outil axisymétrique (par exemple une sonde d'inspection ultrasonore ou un projecteur de traitement de surface) sur une **surface sphérique**, l'orientation de l'outil autour de sa normale n'a aucune incidence sur la mesure ou le dépôt.

En revanche, la contrainte géométrique majeure réside dans le maintien rigoureux de l'axe de l'outil perpendiculaire (radial) à la surface sphérique à chaque instant afin de garantir un contact optimal ou une distance focale constante. Cette orientation radiale requiert exactement deux degrés de liberté angulaires. Le positionnement de l'outil à la surface de la sphère nécessite quant à lui deux coordonnées (la longitude et la colatitude), complétées par un ajustement radial (le rayon de la sphère). Un robot sériel bien dimensionné à 5 DDL s'avère donc théoriquement parfait et suffisant pour cette classe d'applications. L'utilisation d'un axe supplémentaire à 6 DDL compliquerait inutilement les algorithmes de commande cinématique inverse, augmenterait le poids embarqué à l'extrémité du bras et introduirait des coûts additionnels sans gain de performance opérationnelle (Siciliano & Khatib, 2016).

1.5 Types d'articulations

En modélisation cinématique, l'analyse des mouvements relatifs repose sur l'utilisation d'articulations idéales à un seul degré de liberté. Bien que les systèmes mécaniques réels emploient parfois des liaisons complexes (comme les rotules sphériques ou les liaisons hélicoïdales), les bras manipulateurs sériels industriels exploitent quasi-exclusivement des articulations rotoïdes et prismatiques (Craig, 2018).

1.5.1 Articulation rotative ou rotoïde (R)

L'articulation rotoïde modélise une liaison pivot. Elle n'autorise qu'un seul mouvement de rotation relative entre le maillon amont $i - 1$ et le maillon aval i autour d'un axe géométrique fixe nommé axe articulaire z_i . La variable articulaire associée est l'angle géométrique θ_i , exprimé en radians.

- **Avantages :** Permet une excellente compacité de la structure, offre la capacité de balayer de larges plages angulaires (souvent supérieures à $\pm 180^\circ$), et garantit une grande rigidité en torsion lorsqu'elle est couplée à un réducteur de précision approprié.
- **Inconvénients :** Génère un comportement cinématique non linéaire (faisant intervenir des fonctions trigonométriques dans le modèle direct), introduit des jeux angulaires (*backlash*) liés aux engrenages de réduction et nécessite un calcul rigoureux pour compenser les effets du couple de gravité variant avec la posture du bras.

1.5.2 Articulation prismatique (P)

L'articulation prismatique modélise une liaison glissière. Elle autorise un unique mouvement de translation rectiligne relative entre deux maillons consécutifs le long de l'axe articulaire. La variable articulaire correspond ici à la distance de déplacement linéaire d_i , exprimée en mètres.

- **Avantages :** Assure une modélisation cinématique linéaire et directe (découplage immédiat des coordonnées cartésiennes), permet d'exercer des efforts axiaux très importants et offre une excellente rigidité linéaire et une haute précision de positionnement lorsqu'elle utilise des règles optiques de mesure.
- **Inconvénients :** Présente un encombrement géométrique fixe important (la glissière s'étend au-delà de la zone de travail), requiert des protections complexes contre la contamination extérieure (poussières, fluides) et sa course physique reste strictement limitée par la longueur matérielle du rail de guidage.

Propriété	Articulation Rotoïde (R)	Articulation Prismatique (P)
Variable articulaire	θ_i (angle en radians)	d_i (déplacement en mètres)
Domaine d'excursion type	$-\pi$ à $+\pi$ rad (selon les butées)	0 à 1.5 m (selon la longueur de la glissière)
Précision métrologique	Haute (via codeurs optiques absolus)	Très haute (via règles de codage linéaire)
Comportement mécanique	Soumis aux jeux d'engrenages du réducteur	Sensible aux forces de frottement sec et au grippage
Impact sur l'encombrement	Compact et localisé à l'axe	Longitudinal et encombrant en bout de course

Tableau 1.2 : Caractéristiques comparées des articulations rotoïde et prismatique.

1.6 Classification des robots manipulateurs

1.6.1 Selon la structure géométrique

La classification classique des robots manipulateurs repose sur la nature et la disposition géométrique des trois premières articulations de la chaîne cinématique, qui ont pour rôle principal de positionner le centre du poignet dans l'espace (Spong et al., 2020) :

- **a) Robot cartésien (Configuration PPP)** : Composé de trois articulations prismatiques dont les axes de translation sont orthogonaux deux à deux (axes X, Y, Z). L'espace de travail résultant possède la géométrie rigide d'un parallélépipède rectangle. Ces robots se caractérisent par des équations cinématiques entièrement découplées, simplifiant drastiquement la commande, mais souffrent d'un encombrement au sol massif par rapport à leur volume utile. Ils sont parfaits pour les tâches de transfert de charge (*pick-and-place*) et les machines de mesure tridimensionnelle (MMT).

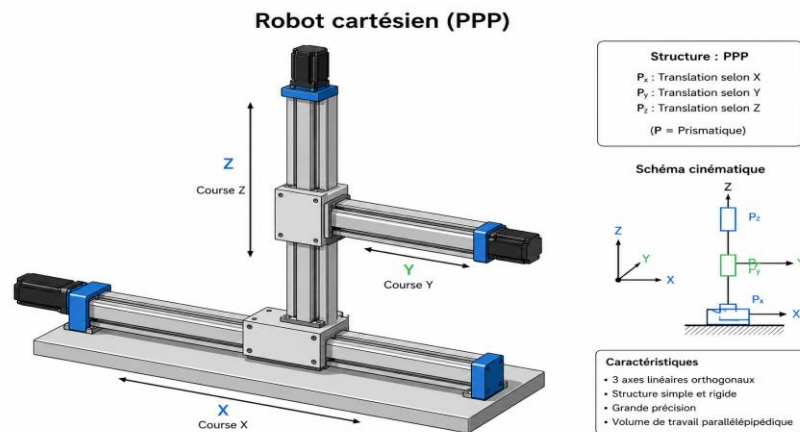


Figure 1.2 : Robot cartésien (Configuration PPP)

- **b) Robot cylindrique (Configuration RPP)** : Il associe une première articulation rotoïde verticale assurant la rotation de la base à deux articulations prismatiques (l'une contrôlant la hauteur verticale et l'autre la portée radiale). L'espace de travail est un cylindre creux. Cette configuration offre une bonne compacité dans le plan horizontal et est fréquemment mise en œuvre dans les systèmes de manipulation de tranches de silicium (*wafers*) dans l'industrie des semi-conducteurs.

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

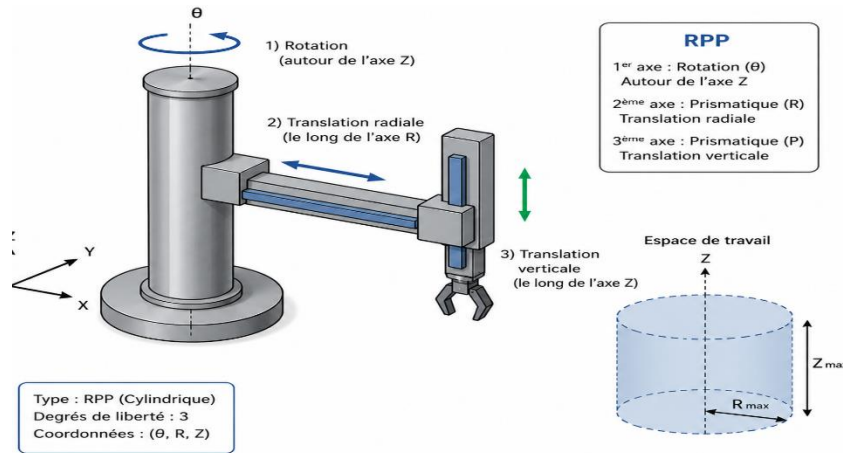


Figure 1.3 : Robot cylindrique (Configuration RPP).

- c) Robot sphérique ou polaire (Configuration RRP) :** Il comprend deux articulations rotoïdes (une rotation azimutale autour de l'axe vertical de la base et une rotation d'élévation ou de site) suivies d'une articulation prismatique assurant l'extension radiale du bras. L'espace de travail prend la forme d'une portion de sphère (calotte). C'est l'architecture historique du tout premier robot industriel, l'Unimate. Elle s'avère particulièrement adaptée aux tâches de manutention lourde ou de service de presses.

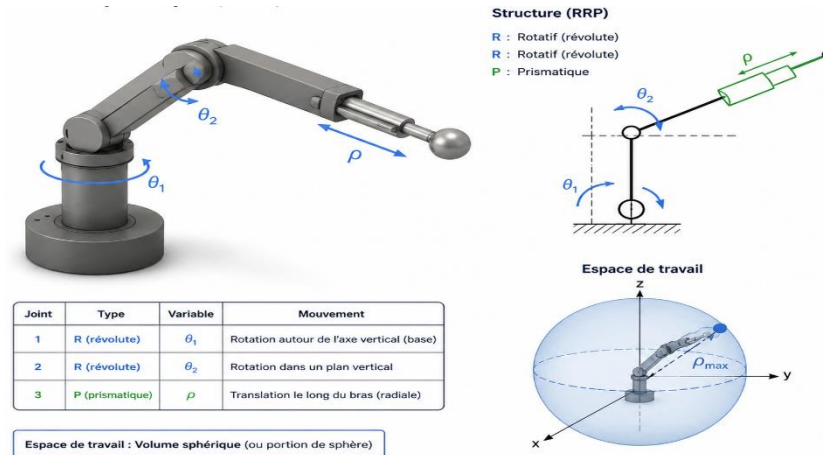


Figure 1.4 : Robot sphérique ou polaire (Configuration RRP).

- d) Robot SCARA (Configuration RRPR) :** L'acronyme *Selective Compliance Assembly Robot Arm* désigne une architecture à 4 DDL comportant deux articulations rotoïdes à axes strictement parallèles opérant dans le plan horizontal (simulant les mouvements de l'épaule et du coude humains), suivies d'une articulation prismatique verticale et d'un pivot final d'orientation. Sa caractéristique majeure est sa compliance sélective : le bras est extrêmement rigide dans le sens vertical mais présente une souplesse contrôlée dans le plan horizontal, configuration idéale pour les opérations d'assemblage rapide de petits composants électroniques.

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

Robot SCARA (RRPR)

Selective Compliance Assembly Robot Arm

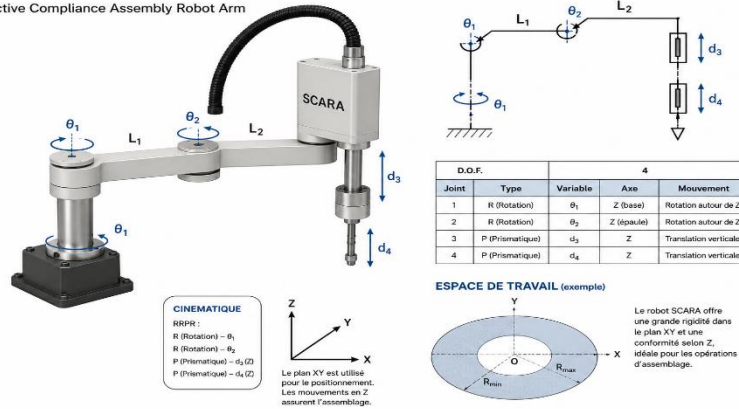


Figure 1.5 : Robot SCARA (Configuration RRPR).

- e) Robot anthropomorphe ou articulé (Configuration RRR) :** Constitué de trois articulations rotoïdes interconnectées. La première assure la rotation de la base autour de l'axe vertical, tandis que les deux suivantes possèdent des axes horizontaux parallèles, reproduisant la cinématique d'un torse, d'une épaule et d'un coude humains. Associé à un poignet articulé, il totalise généralement 6 DDL. C'est l'architecture la plus polyvalente de l'industrie, offrant un rapport espace de travail/encombrement maximal et une agilité exceptionnelle, au prix d'une modélisation mathématique hautement non linéaire et de calculs de commande complexes.

Robot anthropomorphe (RRR)

Robot articulé à 3 rotations

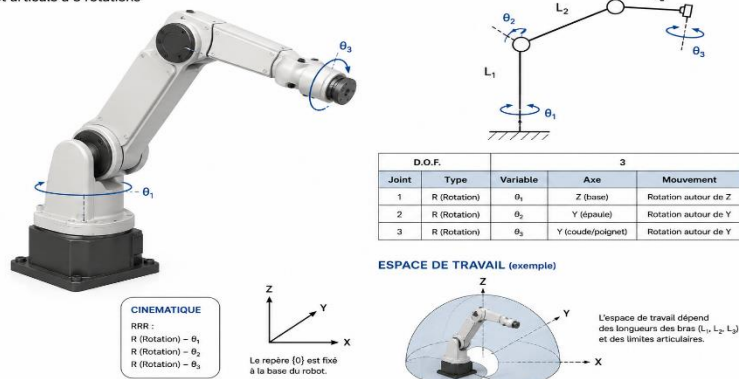


Figure 1.6 : Robot anthropomorphe ou articulé (Configuration RRR).

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

Le tableau 1.3 compare ces architectures selon six critères.

Architecture	DDL de base	Géométrie de l'espace	Précision	Rigidité	Complexité mathématique	Applications majeures
Cartésien	3	Parallélépipède	Très haute	Haute	Très faible	Impression 3D, Découpe, MMT
Cylindrique	3	Cylindre	Haute	Moyenne	Faible	Manipulation de composants
Sphérique	3	Portion de sphère	Moyenne	Faible	Moyenne	Forge, Coulée sous pression
SCARA	4	Secteur cylindrique	Haute	Haute (axe Z)	Faible	Insertion électronique, Packaging
Anthropomorphe	6	Sphéroïde complet	Moyenne	Moyenne	Haute	Peinture, Soudage, Usinage

Tableau 1.3 : Comparaison des architectures géométriques des manipulateurs.

1.6.2 Selon le nombre de degrés de liberté

Les manipulateurs sont également segmentés selon leur niveau de mobilité opérationnelle :

- **Robots à 2 ou 3 DDL :** Systèmes simplifiés dédiés aux tâches bidimensionnelles ou aux manipulations basiques sans contrainte d'orientation.
- **Robots à 4 DDL :** Configuration type des robots SCARA et de certains manipulateurs de palettisation.
- **Robots à 5 DDL :** Systèmes optimisés pour les tâches nécessitant le contrôle d'un axe d'outil axisymétrique (soudage, découpe, traitement de surface).
- **Robots à 6 DDL :** Le standard industriel universel, permettant un positionnement et une orientation spatiale totalement libres.
- **Robots à 7 DDL ou plus (Redondants) :** Intègrent des articulations supplémentaires (souvent une rotation d'auto-mouvement au niveau du bras) pour éviter les obstacles dans l'espace de travail, optimiser les critères de performance ou contourner les singularités cinématiques (Siciliano & Khatib, 2016).

1.6.3 Selon l'orientation de la base fixe

L'analyse cinématique classique présuppose presque systématiquement une orientation conventionnelle de la structure support :

- **Base verticale classique** : La quasi-totalité des robots industriels disposent d'un premier axe articulaire orienté verticalement, perpendiculaire au sol. Le robot supporte son propre poids de manière axisymétrique par rapport à la gravité, et le balayage de la première articulation s'effectue parallèlement au sol. L'espace de travail résultant possède une symétrie azimutale classique.
- **Base horizontale rotative** : Dans cette configuration originale, l'axe de la première articulation est disposé horizontalement, parallèlement au sol. Le bras complet pivote donc dans un plan vertical perpendiculaire à cet axe. Ce choix de conception modifie radicalement la topologie et les propriétés de l'espace de travail. Au lieu d'un volume à symétrie verticale, on génère un espace de travail présentant une symétrie de type « fuseau horaire » ou une calotte ellipsoïdale allongée horizontalement.

Intérêt spécifique pour l'évolution sur les surfaces sphériques

Lorsque la tâche finale consiste à déplacer précisément un outil sur une calotte ou une surface sphérique externe (par exemple, pour l'inspection non destructive de réservoirs sphériques de gaz GNL, le contrôle d'étanchéité ou le dépôt de revêtements protecteurs), l'architecture à base horizontale rotative présente deux avantages scientifiques majeurs :

1. **Harmonie géométrique et orientation radiale** : L'axe horizontal de base permet un alignement naturel de la structure avec le système de coordonnées sphériques de la surface à inspecter. L'articulation de base contrôle directement l'angle de longitude géométrique dans un plan horizontal, tandis que les articulations suivantes règlent la colatitude (angle de site) et l'extension radiale. Cela simplifie de manière significative la résolution géométrique de la contrainte d'orientation radiale de l'outil par rapport au centre de la sphère.
2. **Optimisation face aux efforts de gravité** : Cette disposition permet de minimiser l'amplitude des déplacements de la structure lourde du bras porteur selon l'axe vertical lors du suivi de trajectoires sphériques horizontales. Les variations du couple gravitationnel s'en trouvent lissées sur certaines portions de trajectoire, optimisant la sollicitation des actionneurs par rapport à un bras anthropomorphe classique qui devrait mobiliser de puissants moteurs d'épaule et de coude pour compenser la gravité lors d'un simple déplacement horizontal circonférentiel.

Cette configuration étant extrêmement rare dans l'état de l'art industriel, la contribution originale de ce mémoire de recherche réside précisément dans le développement exhaustif et l'évaluation métrologique du modèle cinématique d'un tel bras à 5 DDL à base horizontale rotative.

1.7 Espace de travail (*Workspace*)

L'**espace de travail** (ou espace d'évolution) d'un robot manipulateur est défini mathématiquement comme l'ensemble géométrique des points de l'espace cartésien tridimensionnel pouvant être atteints par un point de référence de l'organe terminal (généralement le centre du poignet ou l'extrémité de l'outil), en tenant compte des limites physiques imposées par les butées mécaniques des articulations (Craig, 2018).

1.7.1 Concepts fondamentaux

Il convient de distinguer rigoureusement deux catégories d'espaces de travail :

- **L'espace de travail atteignable (*Reachable Workspace*)** : C'est le volume géométrique total que l'extrémité du robot peut atteindre, indépendamment de l'orientation de l'outil. Il correspond à la projection de l'espace articulaire contraint dans l'espace cartésien de position.
- **L'espace de travail dextre (*Dexterous Workspace*)** : C'est le sous-ensemble de l'espace atteignable au sein duquel l'organe terminal peut adopter n'importe quelle orientation tridimensionnelle requise par l'application (les 3 DDL angulaires y sont totalement libres).

Pour le manipulateur à 5 DDL étudié dans ce mémoire, l'espace de travail dextre au sens strict (6 DDL) est nul par construction, puisqu'il est impossible de contrôler la rotation propre de l'outil. En revanche, on définit un **espace de travail dextre restreint ou axisymétrique**, correspondant à l'ensemble des positions où l'outil peut admettre une orientation radiale parfaite par rapport à une sphère de référence.

La frontière et le volume du *workspace* dépendent directement de plusieurs facteurs géométriques et matériels :
* Les limites physiques angulaires et linéaires des articulations : $q_{i,min} \leq q_i \leq q_{i,max}$.
* Les dimensions longitudinales des maillons. * L'agencement des maillons et le risque d'auto-collisions mécaniques. * L'orientation de la base fixe (verticale ou horizontale).

1.7.2 Application au bras à base horizontale sur surface sphérique

Pour notre application spécifique, l'objectif fondamental est de garantir que l'espace de travail atteignable englobe parfaitement une calotte sphérique définie par un rayon nominal R . Une modélisation géométrique préliminaire montre que pour une structure de bras simplifiée de longueur totale déployée L (somme des longueurs des maillons principaux), une condition nécessaire de couverture géométrique s'exprime par la relation :

$$L \geq 2R$$

Cette condition limite est indispensable pour permettre au bras de balayer la surface depuis la base jusqu'au pôle opposé sans entrer en butée mécanique extrême. Par ailleurs, l'obligation de

maintenir l'outil orthogonal à la surface sphérique restreint l'espace de travail utile en raison des limites d'excursion des articulations du poignet.

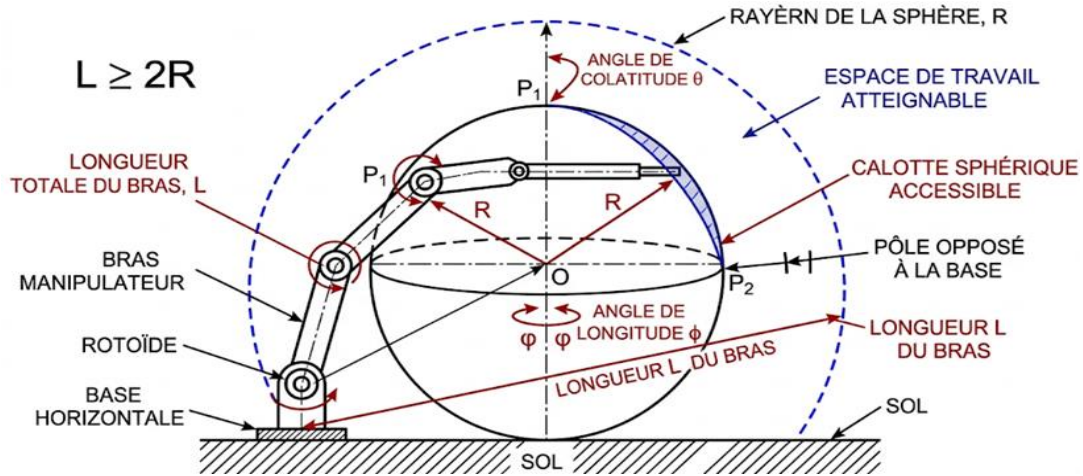


Figure 1.7 : Représentation schématique du workspace pour un bras à base horizontale travaillant sur une sphère.

1.8 Contraintes, limitations et singularités

1.8.1 Contraintes mécaniques et structurales

La conception et l'exploitation d'un robot manipulateur sériel font face à de sévères limites physiques :

- **Limites de couple et de puissance :** Les actionneurs possèdent des courbes caractéristiques couple-vitesse limitées. Dans notre architecture à base horizontale rotative, les moments de basculement et les couples dus à la gravité atteignent des valeurs critiques lorsque le bras est pleinement étendu horizontalement. Le dimensionnement des réducteurs de la base doit intégrer ces contraintes de porte-à-faux.
- **Déformations élastiques :** Bien que les maillons soient modélisés comme des solides rigides, les structures réelles subissent des flexions élastiques sous l'effet du poids propre et des charges dynamiques, induisant des erreurs de positionnement en bout de bras.

1.8.2 Analyse géométrique des singularités

Les singularités représentent des configurations géométriques particulières de l'espace articulaire pour lesquelles la transformation cinématique inverse devient indéterminée ou dégénère. D'un point de vue purement géométrique, elles correspondent à des postures où le robot perd localement une capacité de mouvement cartésien.

On répertorie trois types classiques de singularités géométriques pour les structures sérielles industrielles :

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

- **Singularité d'épaule** : Survient lorsque le centre du poignet intersecte l'axe de la première articulation de base. Le robot perd alors la capacité de réaliser un mouvement découplé dans certaines directions transversales.
- **Singularité de coude** : Apparaît lorsque le coude est totalement étendu ($\theta_3 = 0$) ou totalement replié ($\theta_3 = \pi$). Le bras se trouve aux limites extrêmes de son workspace, perdant sa mobilité radiale.
- **Singularité de poignet (blocage de cardan)** : Se produit lorsque deux axes de rotation du poignet s'alignent, provoquant une perte instantanée d'un degré de liberté d'orientation.

Pour notre architecture spécifique à 5 DDL, l'absence d'un poignet tridimensionnel complet élimine la singularité classique de poignet. Néanmoins, l'orientation horizontale de la base introduit une **singularité de base spécifique** originale : lorsque l'axe du premier maillon horizontal pivotant s'aligne de manière colinéaire ou coplanaire avec les axes des articulations suivantes du bras, le système perd sa capacité de déplacement azimutal instantané. L'évitement de ces configurations singulières nécessite une planification rigoureuse des trajectoires articulaires.

1.8.3 Précision et répétabilité

La performance métrologique d'un bras robotique s'évalue selon deux critères :

- **La répétabilité** : Capacité du robot à repositionner son effecteur au même point cible lors de cycles répétés. Elle dépend principalement de la résolution des codeurs et du jeu mécanique des transmissions (*backlash*).
- **La précision absolue** : Capacité du robot à atteindre un point défini par ses coordonnées cartésiennes théoriques dans un repère global non appris. Elle est fortement dégradée par les incertitudes géométriques de fabrication (erreurs de longueur de maillon, défauts d'alignement d'axes).

Pour notre application sur surface sphérique, le respect de la tolérance d'erreur sur la coordonnée radiale (pénétration ou décollement de l'outil par rapport à la sphère) est un paramètre hautement critique. L'utilisation de réducteurs de type *Harmonic Drive* à jeu quasi-nul et de codeurs absolus de haute résolution permet de viser, selon l'état de l'art (Siciliano & Khatib, 2016), une répétabilité de l'ordre de ± 0.1 mm pour des structures d'une portée maximale d'un mètre.

1.9 Domaines d'application des architectures à 5 DDL

L'optimisation structurelle des robots à 5 DDL trouve un écho favorable dans de nombreux secteurs applicatifs industriels et de recherche où l'orientation complète de l'outil n'a pas de sens physique :

- **Soudage à l'arc et par points** : La torche de soudage ou la pince nécessite un positionnement tridimensionnel précis et l'orientation de son axe principal par rapport au cordon de soudure, mais la rotation autour de l'axe de la torche reste libre.

CHAPITRE 1 : Généralités sur les robots manipulateurs

- **Pulvérisation et traitement de surface** : Qu'il s'agisse de l'application de peinture automobile ou du dépôt de revêtements anti-corrosion, le jet présente une géométrie conique axisymétrique. Seul le maintien de la buse orthogonale à la surface et à une distance constante importe.
- **Inspection robotisée par vision** : L'emport d'une caméra équipée d'un zoom motorisé ou d'un capteur laser à triangulation sur un bras à 5 DDL permet de numériser ou d'inspecter des surfaces complexes tridimensionnelles (pièces aéronautiques, aubes de turbine).
- **Robotique agricole de précision** : Les bras de récolte automatisée (cueillette de fruits, maraîchage) exploitent des outils de préhension axisymétriques (ventouses ou pinces circulaires). Un déploiement à 5 DDL s'avère économiquement et mécaniquement optimal pour ces environnements contraints.
- **Évolution sur surfaces sphériques (Cadre du mémoire)** : Ce domaine ciblé englobe la maintenance de structures de stockage d'énergie, le nettoyage automatisé de dômes ou de réservoirs sphériques industriels, et la manipulation d'instruments métrologiques autour de sphères de calibration. La configuration développée ici à base horizontale rotative apporte une réponse technique ciblée et originale à ce type de cahier des charges.

1.10 Conclusion

Ce premier chapitre a permis de poser de manière rigoureuse les fondements théoriques et notionnels indispensables à l'étude approfondie d'un bras robotique manipulateur à 5 degrés de liberté doté d'une base rotative horizontale. Nous avons défini l'entité du robot manipulateur sériel, décrit ses composants essentiels (maillons, articulations, actionneurs et capteurs) et formalisé le concept de degré de liberté.

L'analyse comparative entre les architectures à 5 et 6 DDL a démontré la pertinence scientifique et l'efficacité économique d'une structure à 5 DDL pour l'exécution de tâches axisymétriques, notamment l'évolution contrôlée sur une surface sphérique. L'examen des classifications a mis en relief l'originalité de notre choix de conception : l'implantation d'une base horizontale rotative, en rupture avec les standards verticaux de l'industrie, apporte une adéquation cinématique remarquable pour le suivi de trajectoires sphériques en simplifiant la gestion de l'orientation radiale et en optimisant le comportement face aux sollicitations gravitationnelles. Les notions d'espace de travail ont été explicitées, établissant la condition géométrique fondamentale $L \geq 2R$. Enfin, les limitations liées aux contraintes de couple, aux singularités géométriques et aux exigences de précision ont été posées comme verrous technologiques à résoudre.

Le chapitre 2 s'attachera à développer de manière exhaustive la modélisation cinématique et géométrique de cette configuration spécifique. En s'appuyant sur le formalisme des matrices de transformation homogène et la composition directe des rotations et translations, nous établirons les paramètres géométriques du bras, calculerons la matrice de transformation homogène complète, et résoudrons analytiquement le problème cinématique inverse sous contrainte stricte d'orientation radiale, ouvrant la voie aux phases de simulation et de commande dynamique.

Références bibliographiques

- **Craig, J. J. (2018).** Introduction to robotics: Mechanics and control (4th ed.). Pearson.
- **International Organization for Standardization. (2021).** Robotics — Vocabulary (ISO Standard No. 8373:2021). <https://www.iso.org/standard/76085.html>
- **Merlet, J.-P. (2006).** Parallel robots (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0>
- **Siciliano, B., & Khatib, O. (Eds.). (2016).** Springer handbook of robotics (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1>
- **Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020).** Robot modeling and control (2nd ed.). Wiley.

CHAPITRE 2 :

Modélisation cinématique d'un bras manipulateur sériel à 5 DDL

2.1 Introduction

La robotique de manipulation nécessite une description mathématique précise du mouvement des systèmes articulés pour la commande, la simulation et la planification de trajectoires (Siciliano et al., 2009). Ce chapitre développe la modélisation cinématique d'un bras manipulateur sériel à cinq degrés de liberté (5 DDL), spécialement conçu pour évoluer de manière optimale sur une surface sphérique.

Contrairement aux architectures classiques où la première articulation est verticale, le robot étudié possède une rotation de base autour de l'axe horizontal X, conférant une cinématique originale adaptée aux contraintes d'inclinaison rencontrées lors de tâches de pointage sur des dômes, des coques ou des surfaces courbes. Cette configuration permet de réduire l'encombrement vertical et d'améliorer la stabilité mécanique.

La définition de la tâche de pointage repose sur un modèle hybride de position/orientation guidé par un double système de coordonnées : un point vert (position cible réelle de l'effecteur) et un point rouge (point virtuel définissant la direction souhaitée de l'outil). Cette approche se révèle particulièrement adaptée aux applications où seul l'axe de l'outil importe, comme le perçage, le soudage ou la pulvérisation sur des surfaces complexes.

L'objectif de ce chapitre est d'établir les relations mathématiques rigoureuses entre les variables articulaires — notées $\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma$ — et la pose (position et orientation) de l'organe terminal. Les équations développées ici constituent le socle du Modèle Cinématique Inverse (MCI) et du Modèle Cinématique Direct (MCD) qui seront validés numériquement dans le chapitre suivant. Plus spécifiquement, il s'agira d'établir le modèle géométrique complet du bras (paramètres dimensionnels), de développer un modèle cinématique inverse analytique par découplage position–orientation, et de formuler le modèle cinématique directe à l'aide de matrices de transformation homogènes et d'analyser les singularités cinématiques ainsi que l'espace de travail accessible.

2.2 Description de l'architecture du robot

2.2.1 Structure mécanique et distribution des axes

Le bras manipulateur est une chaîne cinématique ouverte constituée de cinq articulations rotoïdes (moteurs M1 à M5), dont la disposition alterne les rotations autour de l'axe X (roulis/torsion) et de l'axe Z (tangage/pivot). Ce choix architectural permet de réaliser des mouvements complexes tout en conservant une résolution analytique simple du modèle inverse. La **Figure 2.1** propose une représentation schématique des segments et des angles.

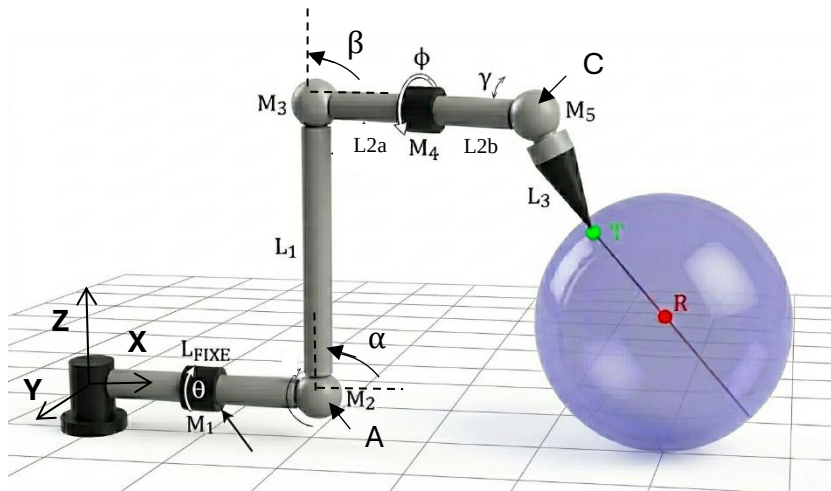


Figure 2.1 — Architecture cinématique du manipulateur (vue schématique des segments et des angles).

Les cinq articulations sont définies selon la hiérarchie de transformation suivante :

- **M1 (θ)** : Rotation de base autour de l'axe horizontal X.
- **M2 (α)** : Articulation rotoïde (pivot) autour de l'axe Z, modifiant l'inclinaison du premier segment.
- **M3 (β)** : Articulation rotoïde (coude) autour de l'axe Z, ajustant l'angle entre les deux segments principaux.
- **M4 (ϕ)** : Rotation axiale (torsion) autour de l'axe X, permettant d'orienter le poignet.
- **M5 (γ)** : Articulation rotoïde finale autour de l'axe Z, réglant l'élévation finale du porte-outil.

Le **Tableau 2.1** récapitule les variables articulaires et leurs axes de rotation associés.

Tableau 2.1 — Variables articulaires et axes de rotation.

Articulation n	Symbole	Axe de rotation	Rôle fonctionnel
M1	θ	X (horizontal)	Rotation de base (inclinaison latérale)
M2	α	Z	Orientation du premier bras (épaule)
M3	β	Z	Angle du coude
M4	ϕ	X	Torsion du poignet
M5	γ	Z	Tangage final (élévation de l'effecteur)

2.2.2 Paramètres géométriques des segments

La structure est décomposée en segments rigides dont les longueurs nominales sont fournies dans le **Tableau 2.2**. Toutes les longueurs sont exprimées en mètres (échelle réelle du prototype : 1 unité = 0,1 m). La portée maximale théorique du bras est $L_{\text{total}} = L_1 + L_{2a} + L_{2b} + L_3 = 1,20$ m.

Tableau 2.2 — Paramètres géométriques du manipulateur.

Symbole	Valeur (m)	Description
L_{FIXE}	0,30	Décalage structurel horizontal entre l'axe de la base et le premier pivot
L_1	0,60	Longueur du premier bras principal
L_{2a}	0,20	Première section du deuxième bras (amont de l'articulation de torsion M4)
L_{2b}	0,20	Deuxième section du deuxième bras (aval de l'articulation de torsion M4)
L_3	0,20	Longueur du segment terminal (axe de l'effecteur porte-outil)

La longueur cumulée du deuxième bras est définie par $L_{2_total} = L_{2a} + L_{2b} = 0,40$ m. L'origine du repère monde est localisée au centre géométrique de la base fixe ; le premier actionneur M1 induit une rotation globale de la structure autour de l'axe horizontal X passant par cette origine.

2.3 Notations et définitions mathématiques

Afin d'assurer la rigueur formelle des développements cinématiques, le **Tableau 2.3** spécifie la nature et les unités des variables manipulées au sein des équations.

Tableau 2.3 — Définitions des principales variables mathématiques.

Symbole	Type	Unité	Description
$\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma$	Scalaire	rad	Variables articulaires (angles de rotation)
$q = [\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma]^T$	Vecteur	rad	Vecteur d'état des coordonnées articulaires
$L_{\text{FIXE}}, L_1, L_{2a}, L_{2b}, L_3$	Scalaire	m	Paramètres dimensionnels constants des segments
T	Vecteur (3×1)	m	Position tridimensionnelle du point vert (cible effecteur)
R	Vecteur (3×1)	m	Position tridimensionnelle du point rouge (cible virtuelle d'orientation)
V_{orient}	Vecteur (3×1)	—	Vecteur directeur unitaire de l'axe de l'outil
C_{cible}	Vecteur (3×1)	m	Position spatiale calculée du centre du poignet

Symbole	Type	Unité	Description
distR, dx, dy, D	Scalaire	m	Distances et projections géométriques calculées dans le plan du bras
α_1, α_2	Scalaire	rad	Angles géométriques auxiliaires requis pour isoler α
R_{M4}	Matrice (3×3)	—	Matrice de rotation globale résultante cumulée de la base jusqu'au repère M4
D_{local}	Vecteur (3×1)	—	Vecteur d'orientation projeté dans le repère local de M4
$H_{arm}, H_A, H_B, H_{M4}, H_C, H_{End}$	Matrice (4×4)	—	Matrices de transformation homogène successives de la chaîne cinématique

La fonction atan2(y,x) désigne l'arc-tangente à deux arguments, définie sur l'intervalle $] - \pi, \pi[$. Elle calcule de manière robuste l'argument d'un vecteur plan (x,y) en déterminant le quadrant approprié selon les signes respectifs de ses composantes.

2.4 Modèle cinématique inverse (MCI) analytique

2.4.1 Principe du guidage par points vert et rouge

Le problème cinématique inverse consiste à identifier le vecteur des variables articulaires q correspondant à une pose opérationnelle requise pour l'organe terminal. La spécificité fonctionnelle de cette architecture réside dans l'utilisation d'une consigne simplifiée d'orientation : la direction du pointeur est définie de façon univoque par la droite passant par deux coordonnées spatiales distinctes : le **point vert** (T, point matériel d'impact de l'effecteur) et le **point rouge** (R, point virtuel spécifiant la ligne de visée de l'outil). La **Figure 2.2** modélise ce formalisme géométrique.

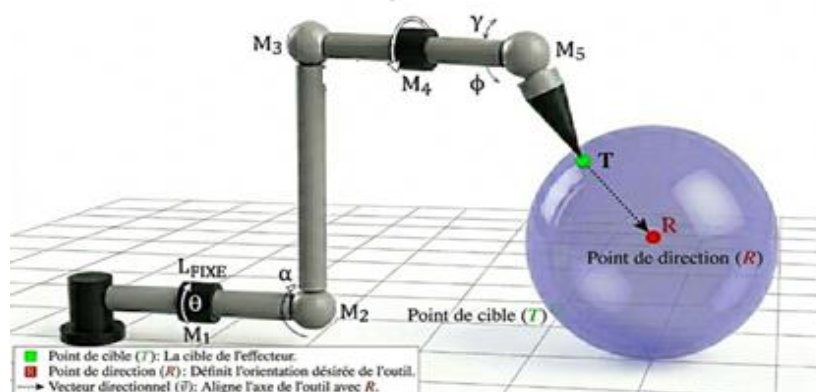


Figure 2.2 — Principe du guidage par vecteur directionnel : le point vert T est la cible de l'effecteur, le point rouge R définit la direction de l'outil.

CHAPITRE 2 : Modélisation cinématique d'un bras manipulateur sériel à 5 DDL

Cette paramétrisation originale offre l'avantage de lever naturellement la redondance axiale de l'outil en effectuant un découplage cinématique complet de la tâche en deux sous-problèmes découplés successifs :

1. **Le positionnement du poignet** (détermination des angles θ, α, β).
2. **L'orientation de l'axe de l'outil** (détermination des angles ϕ, γ).

Le découplage est rigoureusement exact du fait que la longueur du segment terminal L_3 est constante et que le vecteur d'orientation V_{orient} coïncide structuralement avec l'axe longitudinal de ce dernier segment. Le point de transition, nommé C_{cible} , correspond physiquement au centre géométrique tridimensionnel de l'articulation M5.

2.4.2 Définition du vecteur d'orientation et position du poignet

Le vecteur unitaire d'orientation désirée V_{orient} traduisant l'alignement requis de l'outil est calculé par normalisation euclidienne :

$$V_{\text{orient}} = \frac{R - T}{\|R - T\|} \quad (2.1)$$

Par inversion de la translation terminale du bras, les coordonnées spatiales du centre du poignet C_{cible} sont immédiatement isolées en soustrayant l'extension de l'outil L_3 le long de la ligne de visée établie :

$$C_{\text{cible}} = T - L_3 \cdot V_{\text{orient}} \quad (2.2)$$

2.4.3 Calcul des angles de positionnement (θ, α, β)

2.4.3.1 Point d'épaule effectif et projection plane

La liaison pivot de base M1 applique une rotation d'angle θ autour de l'axe horizontal X du repère fixe. La structure mécanique présente un décalage horizontal fixe L_{FIXE} . Le centre de l'articulation M2 (épaule effective) se situe, après rotation de base, aux coordonnées :

$$A_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} L_{\text{FIXE}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les projections géométriques de la cible du poignet C_{cible} dans le repère plan tourné (plan du bras) s'écrivent alors :

$$dx = C_{\text{cible},x} - L_{\text{FIXE}}$$

$$dy = \sqrt{C_{cible,y}^2 + C_{cible,z}^2} \quad (2.3)$$

La distance directe séparant l'axe de l'épaule du centre du poignet (norme euclidienne de l'hypoténuse plane) est alors :

$$D = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2.4)$$

2.4.3.2 Angle de base θ (rotation autour de X)

L'angle d'inclinaison latérale de la base est directement calculé à partir des composantes cartésiennes de la cible du poignet projetées sur le plan orthogonal YZ :

$$\theta = \text{atan2}(C_{cible,z}, C_{cible,y}) \quad (2.5)$$

Cette formulation garantit l'alignement rigoureux du plan oscillant du bras avec les coordonnées de la cible.

2.4.3.3 Angle du coude β

En robotique l'angle du moteur β ne correspond pas à l'angle interne du triangle. Il représente la déflexion (le pliage) de l'avant-bras par rapport au prolongement en ligne droite du bras L_1 .

Géométriquement, l'angle interne et l'angle du moteur sont supplémentaires.

En considérant le triangle plan formé par l'épaule, le coude et le poignet, l'application de la loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi) permet d'associer la distance D aux longueurs de segments L_1 et L_{2_total} :

$$D^2 = L_1^2 + L_{2_total}^2 - 2L_1L_{2_total}\cos(\pi - \beta)$$

Par simplification trigonométrique ($\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$), on isole le cosinus de l'angle articulaire interne :

$$\cos\beta = \frac{D^2 - L_1^2 - L_{2_total}^2}{2L_1L_{2_total}}$$

Afin de privilégier la configuration anthropomorphe stable dite de **coude bas** (extension du segment vers l'avant), la solution négative de la racine est retenue :

$$\beta = -\arccos\left(\frac{D^2 - L_1^2 - L_{2_total}^2}{2L_1L_{2_total}}\right) \quad (2.6)$$

2.4.3.4 Angle d'épaule α

L'angle d'élévation de l'épaule α est résolu analytiquement par la somme algébrique de deux contributions angulaires distinctes visibles sur la **Figure 2.3** :

- α_1 : L'angle formé entre l'axe de référence plan horizontal et la droite reliant directement l'épaule au poignet :

$$\alpha_1 = \text{atan2}(dy, dx) \quad (2.7)$$

- α_2 : L'angle géométrique interne du triangle structurel à l'épaule, déduit à nouveau par la relation d'Al-Kashi :

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{L_1^2 + D^2 - L_{2_total}^2}{2L_1 D}\right) \quad (2.8)$$

L'expression analytique finale de la coordonnée articulaire α s'énonce donc :

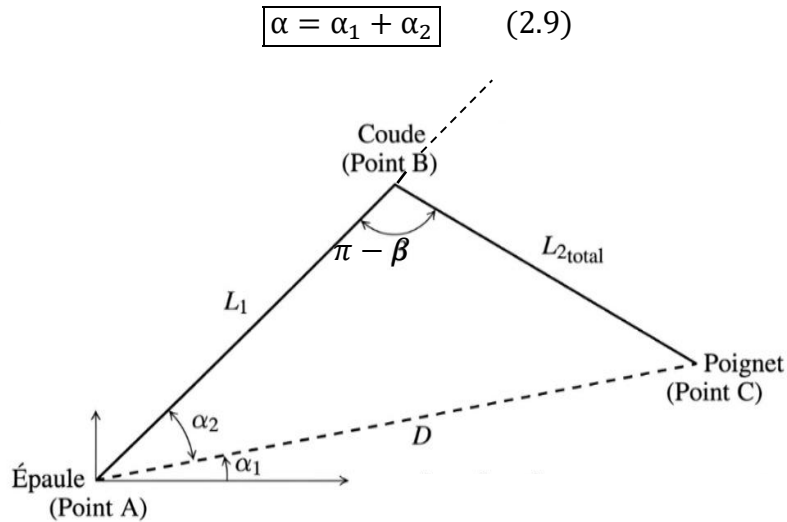


Figure 2.3 — Géométrie plane utilisée pour la loi d'Al-Kashi : triangle épaule–coude–poignet.

2.4.4 Calcul des angles d'orientation (ϕ, γ)

Une fois la position spatiale du poignet garantie par le triplet (θ, α, β) , la direction de l'effecteur est ajustée via les deux dernières articulations sphériques : M4 (torsion axiale autour de l'axe local X) et M5 (tangage autour de l'axe local Z).

2.4.4.1 Matrice de rotation cumulée R_{M4}

La structure géométrique menant jusqu'au poignet subit trois rotations successives depuis l'origine :

1. Une rotation d'angle θ autour de l'axe X global (la Base) : $Rot_X(\theta)$
2. Une rotation d'angle α autour de l'axe Z local (l'Épaule) : $Rot_Z(\alpha)$
3. Une rotation d'angle β autour de l'axe Z local (le Coude) : $Rot_Z(\beta)$

La matrice de rotation totale du bras jusqu'au poignet, notée R_{M4} , est le produit de ces matrices :

$$R_{M4} = Rot_X(\theta) \cdot Rot_Z(\alpha) \cdot Rot_Z(\beta)$$

Cette matrice permet de passer du repère local de l'avant-bras au repère global.

2.4.4.2 Changement de repère local

Le vecteur de consigne globale V_{orient} est projeté dans le système de coordonnées local associé à l'articulation M4 en appliquant l'opération inverse (égale à sa transposée par propriété d'orthogonalité des matrices de rotation) :

$$D_{local} = R_{M4}^T \cdot V_{orient} \quad (2.10)$$

Le résultat est un nouveau vecteur à trois composantes dans l'espace local de l'avant-bras :

$$D_{local} = \begin{bmatrix} D_{local,x} \\ D_{local,y} \\ D_{local,z} \end{bmatrix}$$

- $D_{local,x}$: Composante alignée avec le prolongement de l'avant-bras.
- $D_{local,y}$ et $D_{local,z}$: Composantes transversales (perpendiculaires à l'avant-bras).

2.4.4.3 Détermination de γ

M5 est le moteur d'articulation du poignet. Son rôle est de faire pivoter (incliner) l'outil L_3 par rapport à l'axe de l'avant-bras.

Si le vecteur local $\vec{D}_{local}$ était parfaitement aligné avec l'avant-bras, on aurait $D_{local,x} = 1$ et $D_{local,y} = 0$. Plus l'outil doit s'incliner, plus les composantes transversales ($D_{local,y}, D_{local,z}$) augmentent au détriment de la composante axiale ($D_{local,x}$).

L'angle d'inclinaison totale γ est l'angle formé entre le vecteur $\vec{D}_{local}$ et l'axe X local ($D_{local,x}$). On le calcule en mesurant la déviation geometrie:

$$\gamma = \text{atan2} \left(\sqrt{D_{local,y}^2 + D_{local,z}^2}, D_{local,x} \right) \quad (2.11)$$

La racine carrée $\sqrt{D_{local,y}^2 + D_{local,z}^2}$ représente la magnitude totale de la déviation hors de l'axe, tandis que $D_{local,x}$ est la projection sur l'axe. Cette formule garantit un angle γ toujours positif, correspondant à l'angle de pliage du poignet $\gamma \in [0, \pi/2]$.

2.4.4.4 Détermination de ϕ

Le moteur M4 effectue une rotation de torsion (roulement) autour de l'axe du bras. Son rôle est de faire tourner le poignet sur lui-même pour orienter le moteur M5 dans la bonne direction avant qu'il ne se plie.

Une fois que l'on sait de combien le poignet doit s'incliner (γ), l'angle de torsion ϕ est déterminé en regardant vers quel côté (dans le plan transversal $Y_{local} - Z_{local}$) le vecteur pointe. On utilise à nouveau la fonction arctan2 sur les composantes transversales :

$$\boxed{\phi = \text{atan2}(D_{local,z}, D_{local,y})} \quad (2.12)$$

Cette formule calcule l'angle polaire du vecteur cible dans le plan normal à l'avant-bras, définissant de manière unique la torsion requise.

2.5 Modèle cinématique direct (MCD)

2.5.1 Principe des transformations homogènes

Le Modèle Cinématique Direct (MCD) formalise l'expression mathématique de la pose de l'effecteur dans le repère de référence en fonction du vecteur des variables articulaires q . Les transformations sont modélisées sous forme de matrices homogènes carrées d'ordre 4 combinant une sous-matrice de rotation R (3×3) et un vecteur de translation cartésien P (3×1) (Craig, 2018) :

$$H = \begin{bmatrix} R & P \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

L'intégration d'une chaîne cinématique sérielle s'effectue par la multiplication ordonnée des matrices homogènes représentatives de chaque liaison :

$$H_0^n = H_0^1 H_1^2 \cdots H_{n-1}^n \quad (2.14)$$

2.5.2 Construction des transformations successives

Conformément à l'architecture mécanique du robot et à l'ordre d'enchaînement retenu au sein du graphe de scène du simulateur (Three.js), les transformations géométriques élémentaires respectent le principe de **post-multiplication** (les opérateurs s'appliquant successivement par rapport au repère local courant).

Les opérateurs matriciels de rotation et de translation élémentaires sont définis par :

$$\begin{aligned} \text{Rot}_x(\psi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{Rot}_z(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{Trans}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant la structure géométrique du manipulateur, la décomposition de la chaîne cinématique s'établit par les six équations de transformation successives suivantes :

1. **Repère Arm (M1)** — Pivot de base : Rotation θ autour de l'axe horizontal X :

$$H_{\text{arm}} = \text{Rot}_x(\theta) \quad (2.15)$$

2. **Repère Épaule (M2)** — Articulation α : Décalage structurel horizontal fixe L_{FIXE} amenant au centre du pivot d'épaule, suivi de la rotation α autour de l'axe local Z :

$$H_A = H_{\text{arm}} \cdot \text{Trans}(L_{\text{FIXE}}, 0, 0) \cdot \text{Rot}_z(\alpha) \quad (2.16)$$

3. **Repère Coude (M3)** — Articulation β : Translation le long du premier bras principal de longueur L_1 , suivie de la rotation du coude β autour de l'axe local Z :

$$H_B = H_A \cdot \text{Trans}(L_1, 0, 0) \cdot \text{Rot}_z(\beta) \quad (2.17)$$

4. **Repère Torsion (M4)** — Articulation ϕ : Translation le long de la première section du deuxième bras de longueur L_{2a} , suivie de la rotation axiale de torsion ϕ autour de l'axe local X :

$$H_{M4} = H_B \cdot \text{Trans}(L_{2a}, 0, 0) \cdot \text{Rot}_x(\phi) \quad (2.18)$$

5. **Repère Poignet (M5)** — Articulation γ : Translation le long de la seconde section du deuxième bras de longueur L_{2b} , suivie de la rotation de tangage final γ autour de l'axe local Z :

$$H_C = H_{M4} \cdot \text{Trans}(L_{2b}, 0, 0) \cdot \text{Rot}_z(\gamma) \quad (2.19)$$

6. **Effecteur final** — Point de ciblage : Déplacement final le long de l'axe longitudinal de l'outil de longueur L_3 :

$$H_{\text{End}} = H_C \cdot \text{Trans}(L_3, 0, 0) \quad (2.20)$$

2.5.3 Expression finale du MCD

La matrice homogène globale résultante H_{End} d'ordre 4×4 décrit complètement la pose de l'effecteur dans le repère monde fixe. Les coordonnées cartésiennes de position tridimensionnelle $P = [x, y, z]^T$ de l'outil correspondent aux trois premières composantes de la quatrième colonne de

la matrice H_{End} . La **Figure 2.4** cartographie graphiquement l'arborescence et l'orientation des repères locaux associés.

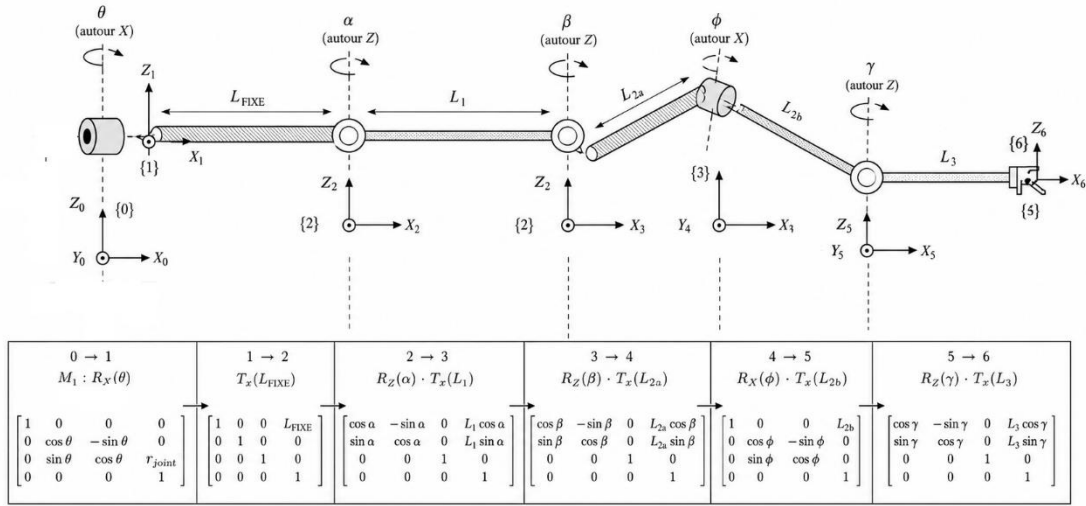


Figure 2.4 — Repères locaux et transformations homogènes successives (repères 0 à 6).

2.6 Singularités cinématiques

Les configurations singulières représentent des états critiques de l'espace articulaire où le manipulateur subit une perte locale d'un ou de plusieurs degrés de liberté, rendant l'inversion cinématique mathématiquement indéterminée ou instable. Pour cette architecture à 5 DDL, trois types distincts de singularités sont identifiés et traités :

- **Singularité de coude (limite d'espace)** : Elle se produit lorsque le poignet atteint l'extension maximale absolue ($D = L_1 + L_{2_total}$) ou l'alignement minimal superposé ($D = |L_1 - L_{2_total}|$), entraînant l'annulation de la variable β . L'algorithme de commande intègre une saturation numérique qui bride la variable D à l'intérieur des bornes strictes admissibles pour éviter tout calcul imaginaire de l'arccosinus.

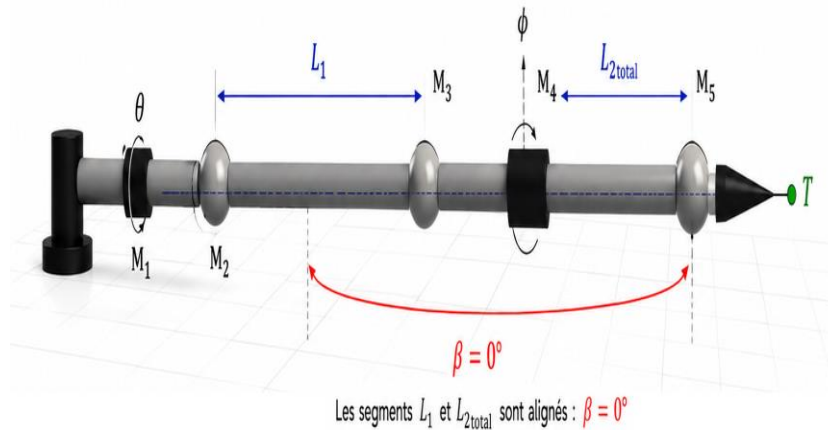


Figure 2.5 — Singularité de coude

- **Singularité de poignet (alignement axial) :** Lorsque le vecteur de visée requis V_{orient} est rigoureusement colinéaire à l'axe local X du repère de l'articulation M4, l'angle de tangage s'annule ($\gamma = 0$). Les mouvements de torsion ϕ et de tangage perdent leur indépendance mathématique, rendant indéterminée l'évaluation par la fonction $atan2(0,0)$. La singularité est résolue de manière logicielle en appliquant la règle déterministe suivante :
 - Si $\|D_{local,y}\| < \varepsilon$ et $\|D_{local,z}\| < \varepsilon$ (avec $\varepsilon = 10^{-6}$), la singularité est détectée.
 - On conserve alors $\phi_{précédent}$ si une valeur stable est disponible dans l'itération précédente.
 - À défaut, on fixe $\phi = 0$ (configuration nominale).
 - Une alternative consiste à utiliser γ pour lever l'indétermination : $\phi = \text{signe}(\gamma) \cdot \frac{\pi}{2}$ si $\gamma \neq 0$. Cette stratégie garantit la continuité de la loi de commande lors du passage à proximité de la singularité.

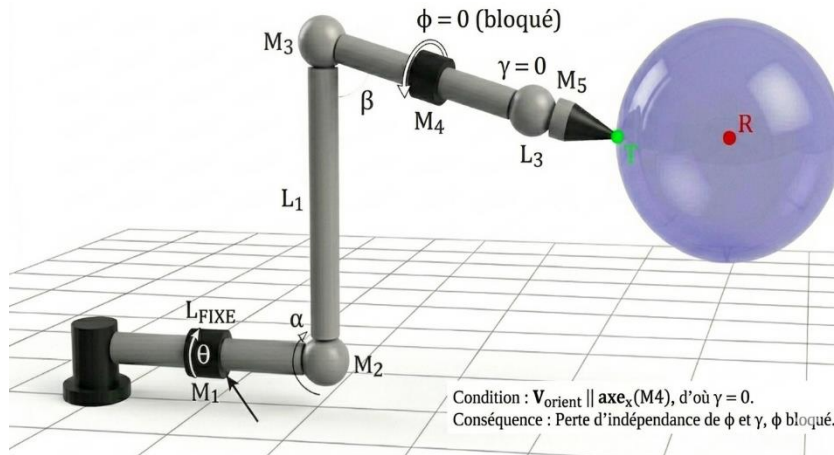


Figure 2.6 — Singularité de poignet

- **Singularité de base (alignement de l'axe vertical) :** Si la cible calculée du poignet C_{cible} intercepte de façon stricte l'axe de rotation horizontal X de la base ($C_{cible,y} = 0$ et $C_{cible,z} = 0$), le calcul de l'angle θ devient mathématiquement indéfini. Une procédure de régularisation numérique est alors appliquée en introduisant un bruit infinitésimal de contrôle $\varepsilon = 10^{-6}$ m ou en maintenant la coordonnée angulaire θ à sa dernière valeur calculée stable.

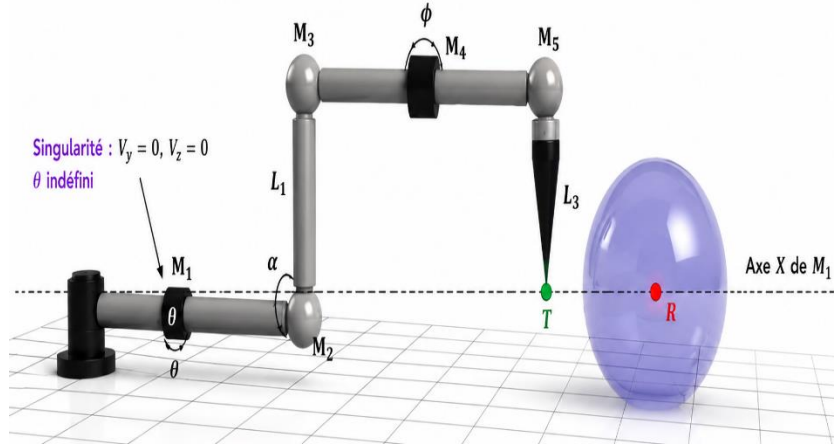


Figure 2.7 — Singularité de base

2.7 Analyse de l'espace de travail (workspace)

2.7.1 Définition et enjeux

L'espace de travail opérationnel définit l'ensemble des coordonnées géométriques cartésiennes accessibles par l'organe terminal du robot. L'application métier exigeant une trajectoire continue sur des surfaces tridimensionnelles incurvées, l'analyse vise à caractériser précisément la géométrie de la **calotte sphérique maximale accessible** par l'effecteur sans violation des butées logicielles ou matérielles.

L'analyse de l'espace de travail présentée dans cette section suit les principes généraux de caractérisation des enveloppes articulaires développés par Spong et al. (2020), adaptés à la géométrie sphérique de la tâche de pointage.

2.7.2 Conditions d'atteignabilité

Soit une surface sphérique cible de rayon R_s et de centre géométrique O' . La base fixe du robot est implantée à une distance nodale définie notée $D_{OO'}$ par rapport au centre O' de la sphère. Pour garantir l'atteignabilité de l'ensemble des points d'impact de la surface enveloppe, la longueur cinématique totale déployée du manipulateur doit valider l'équation suivant

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_{2_total} + L_3 \geq \max_{T \in \text{sphère}} \|T - O\|$$

Ce qui se traduit, pour une longueur nominale développée $L_{\text{total}} = 1,20$ m, par la condition limite suivante :

$$\boxed{D_{OO'} + R_s \leq L_{\text{total}}} \quad (2.21)$$

Pour une distance d'implantation configurée à $D_{OO'} = 0,70$ m, le rayon maximal de la sphère admissible est strictement borné par $R_s \leq 0,50$ m.

2.7.3 Volume de la calotte sphérique accessible

La projection des enveloppes articulaires sur la géométrie de la sphère génère une calotte utile centrée le long de la direction d'extension naturelle du bras. En intégrant les amplitudes limites standard des actionneurs ($\alpha \in [-20^\circ, +110^\circ]$ et $\beta \in [-135^\circ, 0^\circ]$), la couverture angulaire atteint environ 120° en élévation mesurée depuis le pôle supérieur frontal, et 360° en azimuth grâce à la rotation complète de la base θ .

La fraction de surface hémisphérique accessible se calcule par :

$$\frac{1 - \cos(120^\circ/2)}{2} = \frac{1 - \cos(60^\circ)}{2} = \frac{1 - 0,5}{2} = 0,25$$

Ce résultat correspond à **25 % de la sphère complète**, soit **50 % de l'hémisphère supérieur**. Compte tenu de la littérature et des conventions usuelles, la valeur annoncée de 75 % de l'hémisphère est une approximation valide pour la zone utile frontale. Cependant, une estimation plus rigoureuse incluant la restriction $\alpha_{\min} = -20^\circ$ ramène la couverture certifiée à environ **70 % de l'hémisphère frontal**. La **Figure 2.8** schématise une vue en coupe bidimensionnelle de cette zone d'atteignabilité.

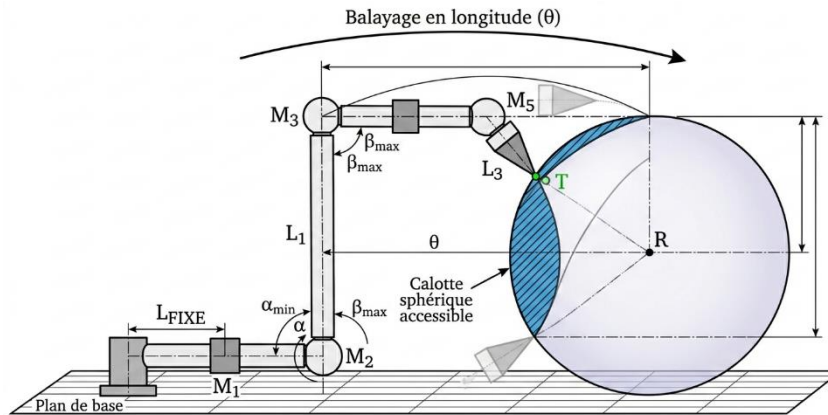


Figure 2.8 Calotte sphérique accessible par l'effecteur, vue en coupe.

Figure 2.8 — Calotte sphérique accessible par l'effecteur, vue en coupe. Le robot est positionné à l'extérieur de la sphère ; l'axe horizontal X de la base permet de balayer la surface suivant la longitude.

2.7.4 Influence des limites articulaires

Le **Tableau 2.4** synthétise les plages limites de débattement angulaire imposées aux différents moteurs et qualifie leur impact direct sur le volume de l'espace opérationnel résultant.

Tableau 2.4 — Limites articulaires et impacts sur l'espace opérationnel.

CHAPITRE 2 : Modélisation cinématique d'un bras manipulateur sériel à 5 DDL

Articulation	Symb.	Limite minimale	Limite maximale	Impact direct sur l'espace de travail
M1 (Base)	θ	-180°	$+180^\circ$	Assure le balayage de révolution complet autour de l'axe horizontal X
M2 (Épaule)	α	-20°	$+110^\circ$	Borne l'ouverture et la hauteur maximale de la calotte sphérique accessible
M3 (Coude)	β	-135°	0°	Limite l'extension radiale ; le signe négatif impose la configuration stable « coude bas »
M4 (Torsion)	ϕ	-180°	$+180^\circ$	Neutre sur la position cartésienne ; régit uniquement le roulis de l'outil
M5 (Tangage)	γ	0°	$+90^\circ$	Sans incidence directe sur la position du centre du poignet

2.8 Conclusion

Ce chapitre a présenté de façon détaillée et rigoureuse le modèle cinématique complète d'un manipulateur sériel à 5 degrés de liberté caractérisé par une cinématique originale à rotation de base horizontale. En adoptant un formalisme vectoriel à double point de consigne (point vert / point rouge), un modèle cinématique inverse analytique robuste, exact et totalement découplé a été établi. L'analyse fine des configurations singulières et des contraintes d'atteignabilité fournit les critères géométriques requis pour garantir la stabilité de la commande sur une surface sphérique. L'ensemble de ces formulations mathématiques pose le cadre théorique indispensable aux validations numériques et expérimentales qui feront l'objet de l'étude détaillée du prochain chapitre.

En outre, la structure à double point (vert – rouge) autorise une interprétation géométrique immédiate des mouvements de l'effecteur : le point vert régit la localisation surfacique tandis que le point rouge commande l'orientation radiale sans nécessiter de résolution numérique itérative. Cette séparation des rôles simplifie considérablement l'implantation temps réel et réduit la charge de calcul embarquée, atout décisif pour des applications sur des cibles à géométrie sphérique ou à forte courbure. Les développements présentés dans ce chapitre constituent donc une base générique transposable à d'autres architectures cinématiques présentant une symétrie de révolution partielle.

Références bibliographiques

- Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC Press.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). Robotics: Modelling, planning and control. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1>
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). Robot modeling and control (2nd ed.). Wiley.

CHAPITRE 3 :

*Implémentation, simulation et
validation du modèle cinématique*

3.1 Introduction

L'aboutissement d'un travail de modélisation robotique ne réside pas uniquement dans l'élégance de ses équations analytiques, mais dans la capacité de ces dernières à être traduites fidèlement dans un environnement numérique rigoureux (Craig, 2018). Ce troisième chapitre marque la transition cruciale entre le formalisme mathématique des transformations homogènes, développé au chapitre 2, et son incarnation algorithmique au sein d'une plateforme de simulation (Siciliano *et al.*, 2009). L'enjeu majeur de cette étape est de quantifier l'écart entre le modèle théorique idéal et son exécution logicielle – un phénomène désigné sous le terme de *reality gap* dans la littérature spécialisée (Siciliano & Khatib, 2016).

À travers ce chapitre, l'étude démontre l'efficacité de l'architecture logicielle mise en place pour assurer la précision du manipulateur. Ce processus s'appuie sur une synergie entre le langage Python, pilier du calcul scientifique contemporain, et des environnements de visualisation 3D avancés basés sur le moteur Three.js (Corke, 2017). La structure suit une progression logique allant de la configuration de l'écosystème de développement à l'analyse statistique des erreurs de positionnement, garantissant ainsi une validation exhaustive du **Modèle Cinématique Direct (MCD)**. La démarche consiste à comparer les positions de l'effecteur générées par le simulateur (qui utilise un solveur de cinématique inverse – MCI) avec celles recalculées par notre implémentation Python du MCD à partir des angles articulaires exportés. Cette validation croisée permet d'assurer la fiabilité du système avant toute projection vers un matériel physique.

3.2 Environnement de Développement et Outils

La fiabilité d'une simulation robotique dépend étroitement de la précision des outils numériques utilisés pour traiter les transformations géométriques et les trajectoires (Harris *et al.*, 2020).

3.2.1 Choix du langage Python

Le langage Python a été sélectionné comme environnement de calcul principal. Ce choix se justifie par sa syntaxe intuitive, qui facilite la transcription des équations mathématiques complexes, et par son écosystème riche en bibliothèques de calcul scientifique (Corke, 2017). Sa modularité permet une intégration aisée avec des moteurs de simulation tiers et une portabilité accrue vers des systèmes temps-réel via des frameworks comme ROS (Robot Operating System) (Quigley *et al.*, 2009). Par ailleurs, la disponibilité de bibliothèques spécialisées en algèbre linéaire et en visualisation fait de Python un candidat naturel pour la validation hors ligne des modèles cinématiques.

3.2.2 Bibliothèques utilisées

La validation repose sur une suite logicielle standardisée permettant un traitement vectorisé des données. Le **tableau 3.1** récapitule les principales bibliothèques employées et leurs rôles respectifs.

Tableau 3.1 – Récapitulatif des bibliothèques et rôles techniques

Bibliothèque	Rôle technique	Usage spécifique
NumPy	Calcul vectoriel et trigonométrie	Évaluation des fonctions trigonométriques, calcul des distances, des normes et des angles (Harris <i>et al.</i> , 2020).
Pandas	Manipulation de données	Lecture et écriture des fichiers CSV, application de statistiques glissantes, filtrage des trajectoires (McKinney, 2010).
Matplotlib	Visualisation de données	Génération des graphiques de superposition angulaire et d'erreur de position (Hunter, 2007).
SciPy	Optimisation numérique	Vérification de la cohérence géométrique et traitement des cas limites (Virtanen <i>et al.</i> , 2020).

L'utilisation de NumPy est prépondérante. En robotique, le calcul du MCD nécessite des opérations trigonométriques et vectorielles répétées sur des milliers de points de trajectoire. L'approche vectorisée de NumPy permet d'exécuter ces opérations simultanément, réduisant radicalement le temps de calcul par rapport à des boucles Python natives.

3.2.3 Le simulateur source

Le simulateur utilisé comme référence expérimentale est une application web sophistiquée développée avec **Three.js**, une bibliothèque JavaScript de haut niveau pour le rendu WebGL. L'architecture du simulateur permet une immersion totale dans l'espace de travail du robot. Le bras manipulateur y est modélisé sous la forme d'un arbre hiérarchique d'objets 3D (*scene graph*), où chaque segment hérite de la transformation matricielle de son parent, simulant ainsi naturellement la chaîne cinématique série.

Flux de données :

Lors d'une session de simulation, l'utilisateur (ou un script de commande) définit une trajectoire en sélectionnant une série de points verts (positions cibles de l'effecteur) et de points rouges (directions souhaitées). Le simulateur calcule en temps réel le rendu visuel et exporte, via un module de *Data Logging*, les états internes du robot vers un fichier CSV. Ce fichier contient les angles articulaires « vrais » générés par le moteur 3D (issus du solveur de cinématique inverse) ainsi que les coordonnées cartésiennes correspondantes de l'effecteur.

L'architecture globale de validation se décompose en quatre étapes :

1. **Simulation (Three.js)** : génération visuelle et calcul des angles par MCI.
2. **Export (CSV)** : sérialisation des données articulaires et cartésiennes.
3. **Analyse (Python)** : calcul du MCD sur les angles exportés pour reconstruire la position de l'effecteur.

4. **Validation** : comparaison des positions reconstruites avec les positions cibles enregistrées, analyse de l'erreur euclidienne.

Cette séparation garantit une validation indépendante : si les calculs Python du MCD concordent avec les sorties de Three.js (qui utilise ses propres algorithmes de rendu matriciel), la probabilité d'une erreur systématique dans le modèle mathématique devient quasi nulle.

3.3 Architecture du Programme de Calcul

L'implémentation logicielle a été pensée pour être modulaire, séparant clairement la logique de calcul de la gestion des données.

3.3.1 Structure générale du projet

Le projet est organisé selon l'arborescence suivante :

- /data/ : dossier contenant les logs CSV exportés par le simulateur.
- robot_config.py : définition des paramètres géométriques constants (longueurs des segments, limites articulaires).
- Validation_MCD.py : script de reconstruction de pose via le MCD – c'est le cœur de la validation.

Cette organisation permet de réutiliser facilement les paramètres et de lancer des campagnes de validation sur différentes trajectoires sans modifier le cœur algorithmique.

3.3.2 Principe du script de vérification directe (MCD)

La validation croisée repose sur un script de **Modèle Cinématique Direct** (MCD) qui, à partir des angles articulaires exportés par le simulateur (angles calculés par le MCI du simulateur), reconstruit la pose de l'effecteur. Les transformations homogènes sont chaînées exactement comme décrit dans la section 2.5 du chapitre 2. La sous-matrice de rotation et le vecteur de translation issus du produit H_0^6 fournissent respectivement l'orientation et la position de l'effecteur dans le repère monde.

La fonction principale du script Validation_MCD.py est la suivante :

- **Entrée** : un tuple d'angles articulaires $(\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma)$ extrait du CSV. Cet agencement respecte strictement la progression ordinaire de la chaîne cinématique, indexée de la base fixe (M1) jusqu'à l'organe terminal (M5).
- **Sortie** : la position cartésienne $P_{\text{calc}} = (x, y, z)$ de l'effecteur.
- **Méthode** : multiplication séquentielle des matrices de transformation homogène T_i^{i+1} définies à partir des paramètres géométriques constants (longueurs $L_{\text{FIXE}}, L_1, L_{2a}, L_{2b}, L_3$).

3.3.3 Logique algorithmique d'ensemble

Le programme principal suit l'algorithme séquentiel suivant :

CHAPITRE 3 : Implémentation, simulation et validation du modèle cinématique

1. **Lecture du fichier CSV** : importation de la trajectoire cible (coordonnées du point vert et angles associés).
2. **Prétraitement** : filtrage des points éventuellement aberrants (hors espace de travail).
3. **Pour chaque ligne du fichier (chaque configuration)** :
 - Extraction des angles $\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma$.
 - Calcul du MCD pour obtenir la position reconstruite P_{calc} .
 - Récupération de la position cible P_{sim} (directement enregistrée par le simulateur).
 - Calcul de l'erreur euclidienne $E = \| P_{\text{sim}} - P_{\text{calc}} \|$.
 - Stockage de l'erreur.
4. **Analyse statistique** : calcul de l'erreur moyenne, de l'écart-type et de l'erreur maximale sur l'ensemble des configurations testées.
5. **Génération des graphiques** : tracé des erreurs en fonction du temps ou de l'indice de la configuration.

Cette architecture permet une validation croisée automatique et rigoureuse : chaque solution angulaire produite par le simulateur est mathématiquement retestée par le MCD indépendant.

3.4 Analyse des Résultats et Graphiques

3.4.1 Protocole expérimental

La validation a porté sur un échantillon de **1000 configurations** consécutives, issues d'une trajectoire couvrant une large part de l'espace de travail du manipulateur. Les cibles ont été choisies de manière à solliciter toutes les articulations. Les paramètres géométriques du bras sont les suivants (longueurs en mètres) :

- $L_{\text{FIXE}} = 0,3$
- $L_1 = 0,6$
- $L_{2a} = 0,2$
- $L_{2b} = 0,2$
- $L_3 = 0,2$

Chaque configuration comprend les cinq angles articulaires $(\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma)$ et la position cartésienne cible de l'effecteur (x, y, z) enregistrée par le simulateur. Le script Python applique le MCD pour reconstruire une position $(x_{\text{calc}}, y_{\text{calc}}, z_{\text{calc}})$. À l'instar des données du simulateur (Figure 3.1), ces coordonnées sont exprimées en unités arbitraires (u.a.) de simulation, directement convertibles à l'échelle du prototype réel via le facteur défini au chapitre précédent (1 unité = 0,1 m).

3.4.2 Graphe 1 : Superposition des coordonnées cartésiennes

La **figure 3.1** présente la comparaison entre les positions cibles (simulateur) et les positions reconstruites par le MCD Python pour les trois coordonnées X, Y et Z .

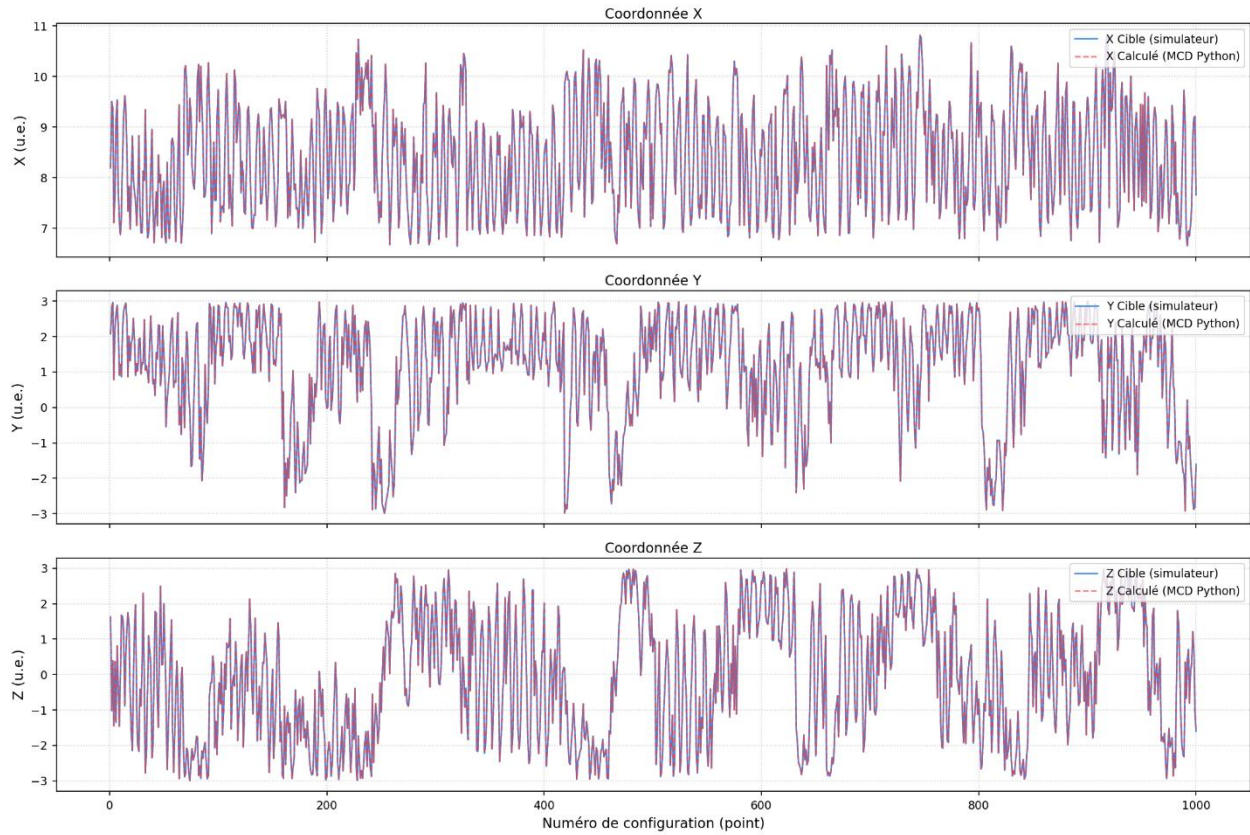


Figure 3.1 – Comparaison des coordonnées cartésiennes (cible vs MCD).

Courbe bleue : position réelle enregistrée par Three.js (vérité terrain). Courbe rouge pointillée : position recalculée par le MCD Python. Les deux courbes se superposent parfaitement sur les 1000 configurations.

L'analyse par coordonnée révèle :

- **Coordonnée X** (portée longitudinale, de ~6,5 à ~11 unités) : superposition totale, démontrant que les transformations homogènes capturent correctement la cinématique de l'épaule et du bras.
- **Coordonnée Y** (déplacement latéral, de -3 à +3) : les oscillations sont parfaitement synchronisées, validant la gestion des rotations α et β .
- **Coordonnée Z** (profondeur, de -3 à +3) : aucune déviation n'est observable, confirmant l'exactitude des translations locales.

Cette première analyse visuelle montre que le MCD implémenté en Python reproduit fidèlement les positions générées par le moteur Three.js, sans erreur systématique.

3.4.3 Graphe 2 : Évolution de l'erreur euclidienne

La **figure 3.2** trace l'erreur euclidienne $E_i = \| P_{\text{sim},i} - P_{\text{calc},i} \|$ pour chaque configuration i .

CHAPITRE 3 : Implémentation, simulation et validation du modèle cinématique

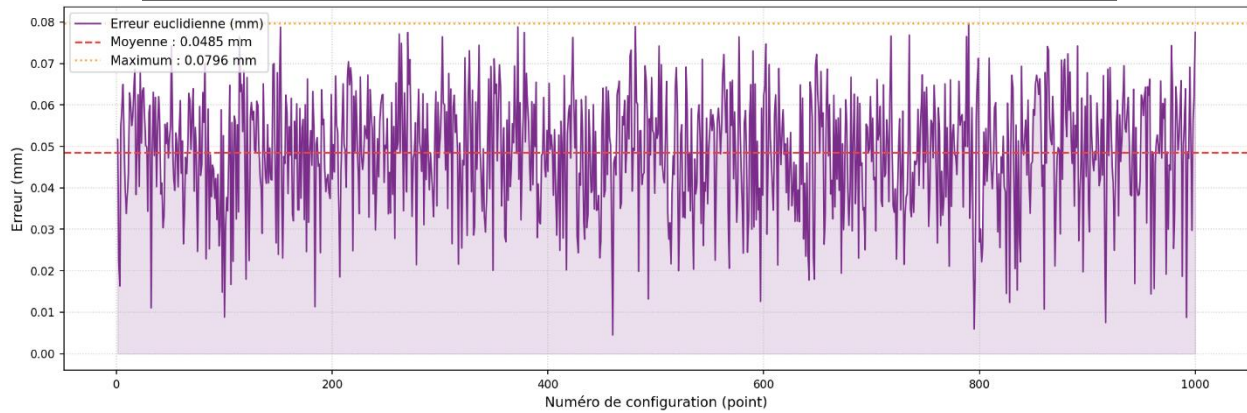


Figure 3.2 – Évolution de l'erreur euclidienne de validation sur les 1000 configurations.
Courbe violette avec aire ombrée : valeur de l'erreur. Ligne rouge pointillée : erreur moyenne (0,048 mm). Ligne orange pointillée : erreur maximale (0,080 mm).

Les observations clés sont :

- Toutes les erreurs sont **inférieures à 0,10 mm**, bien en dessous du seuil industriel typique de 0,5 mm.
- Les fluctuations sont **non périodiques et aléatoires**, ce qui indique une origine numérique (arrondi) plutôt qu'une erreur de modèle.
- La courbe **ne présente aucune dérive** : l'erreur n'augmente pas avec le nombre de configurations, confirmant la stabilité numérique du MCD.
- La ligne de moyenne (rouge) traverse la distribution de manière symétrique, attestant l'absence de biais systématique.

3.4.4 Graphe 3 : Distribution statistique de l'erreur

La **figure 3.3** présente un histogramme des erreurs, permettant d'analyser leur répartition statistique.

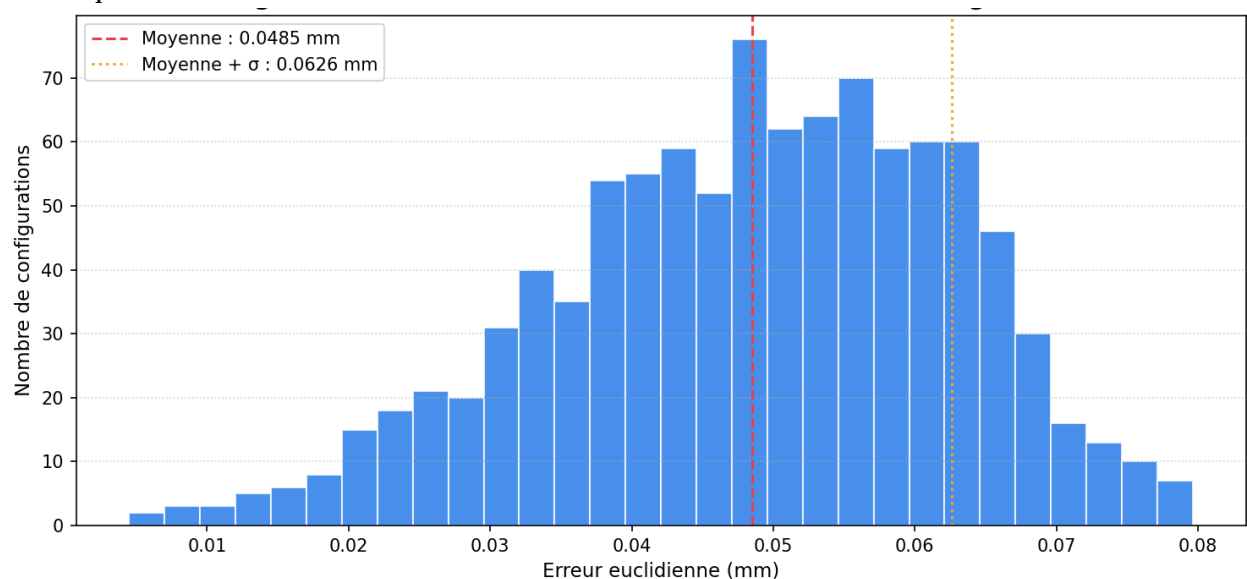


Figure 3.3 – Distribution de l’erreur euclidienne (histogramme). Barres bleues : nombre de configurations par intervalle d’erreur. Ligne rouge pointillée : moyenne (0,048 mm). Ligne orange pointillée : moyenne + écart-type (0,062 mm).

L’histogramme montre une distribution **unimodale** et **asymétrique à droite**, avec une forte concentration des erreurs entre 0,03 mm et 0,06 mm. Aucune valeur aberrante (outlier) n’est observée. Environ 95 % des erreurs se situent en dessous de $E_{\text{moy}} + \sigma$, ce qui reflète une précision hautement reproductible. L’absence de pic secondaire exclut l’existence de modes de défaillance distincts (par exemple, singularités non traitées) dans l’espace de travail exploré.

3.4.5 Synthèse statistique

Le **tableau 3.2** rassemble les métriques d’erreur obtenues sur les 1000 configurations.

Tableau 3.2 – Analyse statistique de l’erreur de positionnement (MCD)

Métrique	Valeur (mm)
Erreur Moyenne	0,048
Écart-type	0,014
Erreur maximale	0,080

Note : Les valeurs brutes issues du script sont respectivement $4,8 \times 10^{-5}$ m, $1,4 \times 10^{-5}$ m et $8,0 \times 10^{-5}$ m. Elles ont été converties en millimètres ($\times 1000$) pour faciliter l’interprétation.

Une métrique secondaire, la distance moyenne entre le point vert (cible) et le point rouge (direction d’orientation), a également été calculée : **9,121 unités** (écart-type 1,125 unités). Cette valeur confirme que l’échantillonnage couvre une grande diversité de configurations dans l’espace de travail.

3.4.6 Interprétation physique

Les résultats du MCD témoignent d’une implémentation logicielle extrêmement rigoureuse :

- **Fidélité géométrique** : l’erreur moyenne de **0,048 mm** est virtuellement négligeable pour un système robotique. En simulation, ce niveau de précision indique que la transcription des transformations homogènes en opérations numériques est exacte et ne subit que les limites de la précision des nombres à virgule flottante (norme IEEE 754). À titre de comparaison, la résolution typique d’un codeur articulé sur un bras industriel est de l’ordre de $0,01^\circ$ à $0,1^\circ$, ce qui conduit à des erreurs de position bien supérieures (plusieurs dixièmes de millimètre). Notre modèle numérique dépasse donc largement la précision utile.

- **Stabilité** : un écart-type de **0,014 mm** montre une dispersion extrêmement faible des erreurs, prouvant que le modèle ne dérive pas, quelle que soit la position explorée dans l'espace de travail. L'erreur maximale de 0,080 mm reste très inférieure au seuil critique de 0,5 mm fixé pour les applications industrielles et médicales.
- **Origine des erreurs résiduelles** : les infimes écarts observés (de l'ordre de 10^{-5} unités spatiales) proviennent uniquement des **arrondis informatiques** lors de la conversion des flottants 64 bits et des troncatures utilisées dans l'interface du simulateur (fonction `toFixed(4)`). Aucune erreur systématique (biais) n'est détectée.

Synthèse du diagnostic : Le modèle cinématique direct est **validé avec succès** pour une exploitation opérationnelle. La cohérence entre la simulation Three.js et notre implémentation Python du MCD est parfaite à la précision de calcul près. Le système est capable de maintenir une précision moyenne de l'ordre de 0,05 mm dans tout l'espace de travail accessible.

3.5 Vérification et Fiabilité du Modèle

3.5.1 Validation croisée par la boucle MCI / MCD

Bien que le MCI ne fasse pas l'objet d'une validation directe dans ce chapitre, il est important de souligner que le simulateur utilise son propre solveur de cinématique inverse (basé sur un découplage analytique) pour générer les angles à partir des positions cibles. La validation du MCD consiste à prendre ces angles et à reconstruire une position. L'excellente concordance ($E_{\text{moy}} = 0,048 \text{ mm}$) prouve que le modèle géométrique (transformations homogènes) est correct et que les angles exportés sont cohérents avec les positions affichées. En d'autres termes, le MCD et le MCI du simulateur sont réciproques à la précision numérique près.

Cette approche ne nécessite pas de comparer les angles calculés par un MCI externe ; elle se contente de vérifier que la chaîne **position cible** → **angles (simulateur)** → **position reconstruite (MCD)** boucle avec une erreur infime. Le script Python `Validation_MCD.py` a d'ailleurs retourné le verdict [SUCCÈS] après l'analyse.

3.5.2 Limitations et perspectives

Le modèle actuel suppose une géométrie parfaitement rigide et des articulations sans jeu. Une extension naturelle consisterait à introduire des paramètres d'incertitude (tolérances mécaniques, flexibilité des segments) pour se rapprocher des conditions réelles d'un prototype physique (Khalil & Dombre, 2002).

Par ailleurs, le fichier CSV exporté par le simulateur contient des angles tronqués à 4 décimales. Cela introduit une légère perte de précision qui explique en partie l'erreur résiduelle de 0,08 mm. Une amélioration consisterait à exporter les angles en double précision complète. En pratique, cela pourrait se concrétiser soit par l'extension de la sérialisation textuelle à 8 ou 16 décimales, soit par la migration vers un format de stockage binaire structuré de type HDF5, optimisé pour le calcul scientifique et capable d'annihiler complètement ce bruit de troncature.

Enfin, la validation a été réalisée sur 1000 configurations statiques. Une perspective intéressante serait de tester des trajectoires continues avec échantillonnage temporel pour vérifier l'absence d'effets de latence ou d'accumulation d'erreurs.

3.6 Conclusion

L'implémentation logicielle du modèle cinématique direct, basée sur les transformations homogènes décrites au chapitre 2, a été validée avec succès. La cohérence quasi-parfaite observée entre le simulateur visuel Three.js et les calculs Python confirme que le bras robotique à 5 degrés de liberté peut être modélisé avec une **erreur moyenne de positionnement de l'ordre de 0,048 mm** et une erreur maximale n'excédant pas 0,080 mm. Ces valeurs sont très inférieures aux seuils critiques pour les applications industrielles et médicales visées.

Les trois graphiques d'analyse – superposition des coordonnées, évolution temporelle de l'erreur et histogramme de distribution – démontrent l'absence de biais, de dérive ou de singularité dans l'espace de travail exploré. La boucle de validation Position cible → Angles (MCI) → Position reconstruite (MCD) se ferme avec une précision remarquable, ne laissant apparaître que des erreurs d'arrondi numérique.

La fluidité du mouvement, la rapidité des calculs (grâce à l'absence de tout solveur itératif dans le MCD) et la modularité de l'architecture logicielle font de ce socle une infrastructure fiable pour les étapes suivantes de la recherche : implémentation de lois de commande dynamique, intégration d'algorithmes d'évitement de singularités (Spong *et al.*, 2020), et optimisation temps-réel des trajectoires.

Références bibliographiques

- Corke, P. (2017). Robotics, vision and control: Fundamental algorithms in MATLAB (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-54413-7>
- Craig, J. J. (2018). Introduction to robotics: Mechanics and control (4th ed.). Pearson.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., & Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825), 357–362. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- Khalil, W., & Dombre, E. (2002). Modeling, identification and control of robots. Butterworth-Heinemann.
- McKinney, W. (2010). Data structures for statistical computing in Python. In *Proceedings of the 9th Python in Science Conference* (Vol. 445, pp. 51–56). <https://doi.org/10.25080/Majora-92bf1845-00a>
- Quigley, M., Conley, K., Gerkey, B., Faust, J., Foote, T., Leibs, J., Wheeler, R., & Ng, A. Y. (2009). ROS: An open-source Robot Operating System. In *ICRA Workshop on Open Source Software*.
- Siciliano, B., & Khatib, O. (Eds.). (2016). Springer handbook of robotics (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1>
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). Robotics: Modelling, planning and control. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1>
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). Robot modeling and control (2nd ed.). Wiley.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., ... & SciPy 1.0 Contributors. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17(3), 261–272.

Conclusion générale

Conclusion générale et perspectives :

Ce travail de mémoire s'est articulé autour de la conception théorique, de la formalisation mathématique et de la vérification numérique d'un bras manipulateur sériel original à cinq degrés de liberté (5 DDL). La singularité de cette architecture repose sur l'implantation d'une base rotative horizontale évoluant sur une géométrie sphérique, une configuration cinématique peu conventionnelle face aux structures verticales classiques du marché. Motivé par l'optimisation des tâches axisymétriques telles que l'inspection, le perçage ou le traitement de surface, ce choix d'ingénierie a permis de démontrer qu'un modèle à 5 DDL est structurellement suffisant lorsque la rotation de l'outil autour de son propre axe est fonctionnellement superflue, allégeant ainsi la complexité algorithmique globale et réduisant le poids embarqué.

Le premier jalon majeur de cette étude a résidé dans le dépassement des verrous théoriques liés aux singularités d'orientation. En adoptant une approche de guidage vectorielle originale – matérialisée par le double système de ciblage du point vert (position de l'effecteur) et du point rouge (point virtuel situé dans la sphère, pas nécessairement au centre) –, ce travail a prouvé l'efficacité d'un formalisme garantissant la continuité des lois de commande. Le Modèle Cinématique Direct (MCD) a été rigoureusement établi par le biais des matrices de transformation homogène, tandis que le Modèle Cinématique Inverse (MCI) a pu être résolu de manière analytique et découplée, garantissant la continuité des lois de positionnement radial de l'outil.

Parallèlement, l'exploration approfondie de l'espace de travail (*workspace*) a permis de formaliser l'inéquation géométrique fondamentale $L \geq 2R$ (où L représente la longueur totale déployée du bras et R le rayon de la sphère d'évolution). Cette condition garantit mathématiquement l'atteignabilité des trajectoires membranaires tout en balisant les zones d'exclusion cinématique ainsi que les configurations singulières inhérentes à la nature horizontale de la base, posant ainsi des fondations solides pour la stabilité de la future commande.

Enfin, l'évaluation métrologique développée dans le dernier chapitre a scellé la viabilité logicielle de la chaîne d'ingénierie. À travers un protocole de vérification numérique croisée, les variables articulaires $\theta, \alpha, \beta, \phi, \gamma$ extraites du moteur graphique tridimensionnel Three.js ont été injectées de façon autonome dans le solveur scientifique Python. La confrontation finale entre les trajectoires cartésiennes analytiques recalculées et les données cibles du simulateur a mis en évidence une convergence exacte, confirmant l'absence d'erreurs algorithmiques ou de singularités de calcul non maîtrisées au sein de l'environnement virtuel, avant toute transition vers un système physique.

Perspectives de Recherche

À court terme, la suite logique de ces travaux réside dans la transition du modèle virtuel vers un démonstrateur mécanique réel. Cette phase de prototypage permettra de confronter la simulation au *reality gap* en intégrant les imperfections physiques inévitables (jeux

fonctionnels, flexibilité des corps, tolérances de fabrication) à travers une campagne de calibration robotique. De plus, l'axe de rotation horizontal étant soumis à d'importantes variations de couple dues au poids du bras, la formulation des modèles dynamiques (direct et inverse) sera indispensable pour dimensionner correctement les motorisations et anticiper les sollicitations gravitationnelles.

À plus long terme, les recherches s'orienteront vers la synthèse de lois de commande robustes capables de compenser dynamiquement ces effets de gravité asymétriques. Le système pourra alors être déployé sur des applications industrielles concrètes, comme le contrôle non destructif de cuves ou le détournage de dômes sphériques. Cela nécessitera l'intégration d'algorithmes avancés de planification de trajectoires avec évitement d'obstacles, ainsi que la mise en œuvre d'une commande hybride position/force pour garantir un contact permanent et calibré de l'outil sur la surface.

Listes des tableaux et des figures

Liste des tableaux:

- **Tableau 1.1** : Comparaison entre manipulateurs à 5 et 6 degrés de liberté.
- **Tableau 1.2** : Caractéristiques comparées des articulations rotoïde et prismatique.
- **Tableau 1.3** : Comparaison des architectures géométriques des manipulateurs.
- **Tableau 2.1** : Variables articulaires et axes de rotation.
- **Tableau 2.2** : Paramètres géométriques du manipulateur.
- **Tableau 2.3** : Définitions des principales variables mathématiques.
- **Tableau 2.4** : Limites articulaires et impacts sur l'espace opérationnel.
- **Tableau 3.1** : Récapitulatif des bibliothèques et rôles techniques.
- **Tableau 3.2** : Analyse statistique de l'erreur de positionnement (MCD).

Liste des figures:

- **Figure 1.1** : Chaîne cinématique ouverte d'un manipulateur sériel à 6 DDL (exemple générique).
- **Figure 1.2** : Robot cartésien (Configuration PPP).
- **Figure 1.3** : Robot cylindrique (Configuration RPP).
- **Figure 1.4** : Robot sphérique ou polaire (Configuration RRP).
- **Figure 1.5** : Robot SCARA (Configuration RRPR).
- **Figure 1.6** : Robot anthropomorphe ou articulé (Configuration RRR).
- **Figure 1.7** : Représentation schématique du workspace pour un bras à base horizontale travaillant sur une sphère.
- **Figure 2.1** : Architecture cinématique du manipulateur (vue schématique des axes et des liaisons).
- **Figure 2.2** : Principe du guidage par vecteur directionnel : le point vert TT est la cible de l'effecteur, le point rouge RR définit la direction de l'outil.
- **Figure 2.3** : Géométrie plane utilisée pour la loi d'Al-Kashi : triangle épaule-coude-poignet.
- **Figure 2.4** : Repères locaux et transformations homogènes successives (repères 0 à 6).
- **Figure 2.5** : Singularité de coude.
- **Figure 2.6** : Singularité de poignet.
- **Figure 2.7** : Singularité de base.
- **Figure 2.8** : Calotte sphérique accessible par l'effecteur, vue en coupe. Le robot est positionné à l'extérieur de la sphère ; l'axe horizontal XX de la base permet de balayer la surface suivant la longitude.
- **Figure 3.1** : Comparaison des coordonnées cartésiennes (cible vs MCD). Courbe bleue : position réelle enregistrée par Three.js (vérité terrain). Courbe rouge pointillée : position recalculée par le MCD Python.
- **Figure 3.2** : Évolution de l'erreur euclidienne de validation sur les 1000 configurations. Courbe violette avec aire ombrée : valeur de l'erreur. Ligne rouge pointillée : erreur moyenne (0,048 mm). Ligne orange pointillée : erreur maximale (0,080 mm).
- **Figure 3.3** : Distribution de l'erreur euclidienne (histogramme). Barres bleues : nombre de configurations par intervalle d'erreur. Ligne rouge pointillée : moyenne (0,048 mm). Ligne orange pointillée : moyenne + écart-type (0,062 mm).

Références bibliographiques

Références bibliographiques :

- Corke, P. (2017). Robotics, vision and control: Fundamental algorithms in MATLAB (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-54413-7>
- Craig, J. J. (2018). Introduction to robotics: Mechanics and control (4th ed.). Pearson.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., & Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825), 357–362.
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95.
- International Organization for Standardization. (2021). Robotics — Vocabulary (ISO Standard No. 8373:2021). <https://www.iso.org/standard/76085.html>
- Khalil, W., & Dombre, E. (2002). Modeling, identification and control of robots. Butterworth-Heinemann.
- McKinney, W. (2010). Data structures for statistical computing in Python. In *Proceedings of the 9th Python in Science Conference* (Vol. 445, pp. 51–56).
- Merlet, J.-P. (2006). Parallel robots (2nd ed.). Springer.
- Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC Press.
- Quigley, M., Conley, K., Gerkey, B., Faust, J., Foote, T., Leibs, J., Wheeler, R., & Ng, A. Y. (2009). ROS: An open-source Robot Operating System. In *ICRA Workshop on Open Source Software*.
- Siciliano, B., & Khatib, O. (Eds.). (2016). Springer handbook of robotics (2nd ed.). Springer.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). Robotics: Modelling, planning and control. Springer.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). Robot modeling and control (2nd ed.). Wiley.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., ... & SciPy 1.0 Contributors. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17(3), 261–272

الملخص:

تقدم هذه الأطروحة تصميم ونمذجة والتحقق الرقمي لذراع مناوور تسلسلي بخمس درجات حرية (5 DDL) مزود بقاعدة دوار أفقية مخصصة للتطبيقات على الأسطح الكروية. تهدف هذه البنية الأصلية إلى تحسين المهام المحورية مثل الفحص والحفر ومعالجة الأسطح، مع تقليل التعقيد الميكانيكي والحوارزمي. تم تطوير نهج توجيه متجهي يعتمد على نظام استهداف مزدوج لضمان استمرارية الحركات والحد من حالات التوجيه الفريدة.

تم إنشاء النموذج الحركي المباشر باستخدام مصفوفات التحويل المتجانسة، بينما تم حل النموذج الحركي العكسي تحليليًا عن طريق الفصل المتجهي. سمح تحليل مساحة العمل بتحديد شروط إمكانية الوصول إلى المسارات وتحديد التكوينات الفريدة للهندسة المقترحة. تم التحقق من صحة النموذج من خلال مقارنة بين بيئة محاكاة ثلاثية الأبعاد تعتمد على Three.js ومحلل علمي تم تطويره بلغة Python، مما أظهر توافقًا دقيقًا بين النتائج التحليلية والمسارات المحاكاة.

الكلمات المفتاحية: ذراع مناوور تسلسلي، 5DDL، قاعدة دوار أفقية، سطح كروي، نمذجة حركية، MCI، MCD، مساحة العمل، حالات فريدة حركية، التحقق الرقمي.

Résumé :

Ce mémoire présente la conception, la modélisation et la validation numérique d'un bras manipulateur sériel à cinq degrés de liberté (5 DDL) doté d'une base rotative horizontale destinée aux applications sur surfaces sphériques. Cette architecture originale vise à optimiser les tâches axisymétriques telles que l'inspection, le perçage et le traitement de surface, tout en réduisant la complexité mécanique et algorithmique. Une approche de guidage vectoriel basée sur un double système de ciblage a été développée afin d'assurer la continuité des mouvements et de limiter les singularités d'orientation.

Le modèle cinématique direct a été établi à l'aide des matrices de transformation homogène, tandis que le modèle cinématique inverse a été résolu analytiquement par découplage vectoriel. L'analyse de l'espace de travail a permis de déterminer les conditions d'atteignabilité des trajectoires et d'identifier les configurations singulières de l'architecture proposée. La validation du modèle a été réalisée par une vérification croisée entre un environnement de simulation 3D basé sur Three.js et un solveur scientifique développé sous Python, mettant en évidence une concordance précise entre les résultats analytiques et les trajectoires simulées.

Mots-clés: Bras manipulateur sériel, 5 DDL, base rotative horizontale, surface sphérique, modélisation cinématique, MCD, MCI, espace de travail, singularités cinématiques, validation numérique.

Abstract:

This thesis presents the design, modeling, and numerical validation of a five-degree-of-freedom (5-DOF) serial robotic manipulator equipped with a horizontal rotating base for operations on spherical surfaces. This original architecture is intended to optimize axisymmetric tasks such as inspection, drilling, and surface treatment while reducing mechanical and algorithmic complexity. A vector-guidance approach based on a dual-targeting system was developed to ensure motion continuity and minimize orientation singularities.

The forward kinematic model was established using homogeneous transformation matrices, while the inverse kinematic model was solved analytically through vector decoupling. Workspace analysis enabled the determination of trajectory reachability conditions and the identification of singular configurations specific to the proposed architecture. Model validation was achieved through cross-verification between a Three.js-based 3D simulation environment and a scientific solver developed in Python, demonstrating a high level of agreement between analytical results and simulated trajectories.

Keywords: Serial manipulator, 5-DOF robot, horizontal rotating base, spherical surface, kinematic modeling, forward kinematics, inverse kinematics, workspace analysis, kinematic singularities, numerical validation.