

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Biomathématique

Thème

Contrôlabilité et stabilisabilité des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert

Présenté Par :

Mlle : BERREZOUK Halima

Devant le jury composé de :

Abdelkader BENAÏSSA	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Abderrahmane BENIANI	Pr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Mohammed HARIRI	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2025/2026

Remerciements

Avant tout ,je remercie Dieu le Tout Puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Mr.HARIRI ,pour sa disponibilité ,ses conseils avisés,son soutien et ses précieuses orientations tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr.Beniani et Mr.Benaissa pour l'intérêt à mon travail et de l'avoir examiné.

Je remercie mes parents ,pour leur contribution ,leur soutien , leur patience ,leurs conseils et leur aide durant la préparation de ce travail.

Enfin,je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude à tous mes enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période de mes études ; ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont apporté et l'assistance nécessaires et qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

R. Halima.

Dédicace

Je dédicace ce travail à ...

A mes chers parents pour tous leurs sacrifices, leur amour ,leur tendresse , leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A ma chère soeur et mon chère frère pour leur encouragements permanents et leur soutien moral.

A toute ma famille et à mes amis , pour leur soutien moral et leurs précieux conseils.

A tous ceux qui ont contribué ,de près ou de loin ,à la réalisation de ce mémoire.

R. Halima.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la contrôlabilité et de la stabilisabilité des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert. Ces notions occupent une place importante dans la théorie moderne du contrôle, en particulier dans l'étude des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles et des modèles infini-dimensionnels.

Dans un premier temps, nous rappelons les notions de base relatives aux espaces de Hilbert, aux opérateurs linéaires bornés et non bornés, aux opérateurs adjoints, aux projecteurs, aux bases hilbertiennes, aux opérateurs compacts et aux semi-groupes fortement continus. Ces outils permettent de formuler correctement les systèmes d'évolution abstraits.

Dans un deuxième temps, nous étudions les systèmes linéaires infini-dimensionnels de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0; \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur un espace de Hilbert X , B est l'opérateur de contrôle et u représente la commande. Nous présentons la notion de solution mild, qui est adaptée aux systèmes infini-dimensionnels lorsque les solutions classiques ne sont pas toujours disponibles.

Ensuite, nous analysons la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité approchée, l'opérateur de contrôlabilité, l'espace atteignable et les critères associés. Une attention particulière est accordée à la dualité entre contrôlabilité et observabilité, qui joue un rôle central dans l'étude des équations aux dérivées partielles contrôlées.

Enfin, nous abordons la stabilisabilité des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert. Nous présentons la stabilisation forte, la stabilisation exponentielle, la stabilisation par retour d'état et quelques critères spectraux. Une application numérique

sous MATLAB est proposée afin d'illustrer les notions étudiées à travers une approximation finie-dimensionnelle d'un système gouverné par un opérateur de type Laplacien.

Mots-clés : Espace de Hilbert, opérateur linéaire, semi-groupe, système infini-dimensionnel, contrôlabilité exacte, contrôlabilité approchée, observabilité, stabilisabilité, retour d'état, MATLAB.

Principales notations utilisées

Dans tout ce mémoire, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ et de la norme associée $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$. Lorsque le contexte ne prête pas à confusion, on notera simplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{et} \quad \| \cdot \|.$$

L'espace des commandes sera noté U , également supposé être un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ et de la norme $\| \cdot \|_U$.

On note $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, et plus généralement $\mathcal{L}(U, \mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de U dans $\mathcal{H}$.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, on note :

1. $D(A)$: le domaine de définition de A ;
2. $\ker(A)$: le noyau de A ;
3. $\text{Im}(A)$: l'image de A ;
4. A^* : l'adjoint de A ;
5. $\sigma(A)$: le spectre de A ;
6. $\rho(A)$: l'ensemble résolvant de A ;
7. $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$: la résolvante de A , pour $\lambda \in \rho(A)$;
8. I : l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$.

Si M est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, on note :

1. $\overline{M}$: l'adhérence de M ;
2. $M^\perp$: l'orthogonal de M dans $\mathcal{H}$;
3. P_M : le projecteur orthogonal sur M .

Une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ sera notée $(e_n)_{n \geq 1}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a alors

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

avec convergence dans $\mathcal{H}$.

Le symbole δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le semi-groupe fortement continu engendré par l'opérateur A sera noté $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Il vérifie

$$S(0) = I, \quad S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Le système linéaire de contrôle étudié dans ce mémoire est de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où

1. $x(t) \in \mathcal{H}$ désigne l'état du système à l'instant t ;
2. $u(t) \in U$ désigne la commande ;
3. $x_0 \in \mathcal{H}$ est l'état initial ;
4. $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu ;
5. B désigne l'opérateur de contrôle.

La solution mild associée au système est donnée par

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s) ds.$$

Pour un horizon de temps $T > 0$, on définit l'opérateur de contrôlabilité $\mathcal{C}_T$ par

$$\mathcal{C}_T u = \int_0^T S(T-s) B u(s) ds.$$

L'espace atteignable à l'instant T est noté

$$\mathcal{R}(T) = \text{Im}(\mathcal{C}_T).$$

Le système est dit exactement contrôlable sur $[0, T]$ si

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{H},$$

et approximativement contrôlable si

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{H}.$$

Lorsque cela a un sens, le grammien de contrôlabilité est défini par

$$W_T = \int_0^T S(t) B B^* S^*(t) dt.$$

La dualité entre contrôlabilité et observabilité s'exprime notamment par

$$\overline{\text{Im}(\mathcal{C}_T)} = \mathcal{H} \iff \ker(\mathcal{C}_T^*) = \{0\}.$$

Dans l'étude de la stabilisabilité, une loi de retour d'état est écrite sous la forme

$$u(t) = Kx(t),$$

où $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, U)$. Le système en boucle fermée devient alors

$$x'(t) = (A + BK)x(t).$$

On note $A_K = A + BK$ l'opérateur en boucle fermée, et $\{S_K(t)\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé. Le système est dit fortement stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S_K(t)x\| = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

et exponentiellement stable s'il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega > 0$ telles que

$$\|S_K(t)\| \leq M e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Enfin, lorsque cela est nécessaire, on utilisera une décomposition spectrale de la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_u,$$

où $\mathcal{H}_s$ désigne le sous-espace stable et $\mathcal{H}_u$ le sous-espace instable.

Table des matières

Introduction	11
1 Préliminaires	13
1.1 Espaces de Hilbert	13
1.1.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz	14
1.1.2 Orthogonalité et sous-espaces fermés	15
1.2 Opérateurs linéaires	15
1.2.1 Opérateurs linéaires bornés	15
1.2.2 Opérateurs linéaires non bornés	15
1.2.3 Semi-groupes fortement continus	18
2 Systèmes linéaires infini-dimensionnels	19
2.1 Modèle abstrait	19
2.1.1 Cas homogène	20
2.1.2 Solution classique	20
2.1.3 Solution mild	20
2.1.4 Formule de variation des constantes	22
2.2 Opérateur de contrôle	22
2.2.1 Opérateur de contrôle borné	22
2.2.2 Opérateur de contrôle non borné	23
3 Contrôlabilité	24
3.1 État final et opérateur de contrôlabilité	24
3.1.1 Espace atteignable	25
3.1.2 Contrôlabilité exacte	25
3.1.3 Contrôlabilité approchée	26
3.2 Critère dual avec l'observabilité	26
3.2.1 Observabilité	27
3.2.2 Cas fini-dimensionnel : critère de Kalman	28

4	Stabilisabilité	29
4.1	Stabilité et stabilisabilité forte	29
4.1.1	Stabilité exponentielle	29
4.1.2	Stabilisabilité exponentielle	30
4.1.3	Stabilisabilité forte	30
4.2	Lien entre contrôlabilité et stabilisabilité	31
4.2.1	Décomposition stable et instable	31
4.2.2	Critère spectral en dimension finie et infini	32
4.2.3	Stabilisation par retour d'état borné	33
5	Application	39
	Bibliographie	46

INTRODUCTION

La théorie du contrôle étudie la manière d'agir sur un système dynamique afin de lui imposer un comportement souhaité. Dans de nombreux problèmes issus de la physique, de la mécanique, de l'économie, de la biologie ou de l'ingénierie, l'évolution du système est décrite par une équation différentielle. Lorsque l'état du système dépend d'un nombre fini de variables, on parle de système fini-dimensionnel. Mais dans plusieurs situations, l'état dépend aussi d'une variable spatiale, comme la température dans une barre, la vibration d'une corde ou la distribution d'une concentration dans un domaine. Le système est alors décrit par une équation aux dérivées partielles, et son espace d'état devient un espace fonctionnel de dimension infinie.

Les espaces de Hilbert constituent un cadre naturel pour étudier ce type de systèmes. Ils possèdent une structure linéaire, une norme, un produit scalaire et des propriétés géométriques proches de celles de l'espace euclidien. Cette structure permet de généraliser plusieurs notions classiques de l'algèbre linéaire et de l'analyse, comme l'orthogonalité, la projection, l'adjoint d'un opérateur ou la décomposition suivant une base orthonormale.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux systèmes linéaires infini-dimensionnels écrits sous la forme abstraite

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0; \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

où X est un espace de Hilbert, $x(t) \in X$ est l'état du système, $u(t)$ est la commande, A est un opérateur linéaire généralement non borné et B est l'opérateur de contrôle. Dans ce cadre, l'opérateur A est souvent le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu. Cette approche permet de donner un sens rigoureux à la solution du système, même lorsque les dérivées classiques ne sont pas toujours disponibles.

Deux propriétés occupent une place centrale dans cette étude : la contrôlabilité et la stabilisabilité. La contrôlabilité exprime la possibilité de conduire un système d'un état initial donné vers un état final désiré en agissant sur la commande. Dans les espaces

infini-dimensionnels, on distingue principalement la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité approchée. La contrôlabilité exacte signifie que l'on peut atteindre exactement l'état final souhaité. La contrôlabilité approchée signifie que l'on peut approcher cet état avec une précision arbitraire. Cette distinction est propre aux espaces de dimension infinie, car certains ensembles peuvent être denses sans être égaux à tout l'espace.

La stabilisabilité, quant à elle, concerne la possibilité de rendre stable un système grâce à un choix convenable de la commande, souvent sous forme d'un retour d'état $u = Kx$. Un système peut ne pas être entièrement contrôlable mais rester stabilisable si les modes instables peuvent être contrôlés. Cette idée est très utile dans les applications, car elle permet de réduire l'étude aux composantes qui risquent de déstabiliser le système.

L'objectif de ce mémoire est donc de présenter une étude claire des notions de contrôlabilité et de stabilisabilité pour les systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert. Nous commençons par les outils d'analyse fonctionnelle nécessaires, puis nous présentons la formulation abstraite des systèmes linéaires infini-dimensionnels. Ensuite, nous étudions les critères de contrôlabilité et leur lien avec l'observabilité. Enfin, nous analysons la stabilisabilité et proposons une application numérique sous MATLAB afin d'illustrer les résultats théoriques.

Ce travail est organisé comme suit. Le premier chapitre est consacré aux préliminaires mathématiques. Le deuxième chapitre présente les systèmes linéaires infini-dimensionnels et la notion de solution mild. Le troisième chapitre traite la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité approchée et la dualité avec l'observabilité. Le quatrième chapitre est consacré à la stabilisabilité. Le cinquième chapitre propose une application numérique basée sur une approximation finie-dimensionnelle.

PRÉLIMINAIRES

L'étude des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert repose sur plusieurs notions fondamentales d'analyse fonctionnelle. Dans les systèmes fini-dimensionnels, l'état appartient généralement à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Dans les systèmes infini-dimensionnels, l'état appartient souvent à un espace de fonctions, comme $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ ou $H^2(\Omega)$. Ces espaces permettent de modéliser des phénomènes répartis dans l'espace, tels que la chaleur, les vibrations, la diffusion ou la propagation d'ondes.

Ce chapitre présente les notions nécessaires à la suite du mémoire : espaces de Hilbert, opérateurs bornés et non bornés, opérateurs adjoints, projecteurs, bases, compacité et semi-groupes d'opérateurs. Ces outils seront utilisés pour définir correctement les systèmes d'évolution abstraits et pour analyser leurs propriétés de contrôlabilité et de stabilisabilité.

1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.1. [13, 7] *Un espace vectoriel H sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est appelé espace préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K},$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in H$;
3. le produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable dans la convention adoptée ici ;
4. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

La norme associée au produit scalaire est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Un espace préhilbertien complet pour cette norme est appelé espace de Hilbert.

Exemple 1.1.2. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est un espace de Hilbert.

Exemple 1.1.3. *L'espace $L^2(a, b)$, constitué des fonctions mesurables f telles que*

$$\int_a^b |f(x)|^2, dx < +\infty,$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)}, dx.$$

Remarque 1.1.1. *Dans les applications aux équations aux dérivées partielles, $L^2(\Omega)$ est l'un des espaces les plus utilisés, car il permet de mesurer l'énergie quadratique d'un état. Par exemple, dans l'équation de la chaleur, l'état $x(t)$ peut représenter la température dans un domaine Ω , et l'espace d'état naturel peut être $L^2(\Omega)$.*

1.1.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1.4. *[9, 18]*

Pour tous $x, y \in H$, on a

$$||\langle x, y \rangle|| \leq ||x|| ||y||.$$

Démonstration

Si $y = 0$, le résultat est immédiat. Supposons $y \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leq |x - \lambda y|^2.$$

En développant,

$$|x - \lambda y|^2 = |x|^2 - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 |y|^2.$$

En choisissant

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2},$$

on obtient

$$0 \leq |x|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{|y|^2}.$$

Donc

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq |x|^2 |y|^2,$$

ce qui donne le résultat.

1.1.2 Orthogonalité et sous-espaces fermés

Deux éléments $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

On note alors $x \perp y$.

Si M est un sous-espace de H , son orthogonal est défini par

$$M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}.$$

1.2 Opérateurs linéaires

1.2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.1. [7] Soient X et Y deux espaces normés. Une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est dite bornée s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

La norme de T est donnée par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y . Lorsque $X = Y$, on écrit simplement $\mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.2.2. Pour un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est borné ;
2. T est continu sur X ;
3. T est continu en 0.

Exemple 1.2.3. Dans $\mathbb{R}^n$, toute application linéaire est bornée. En dimension infinie, ce résultat n'est plus vrai. Il existe des opérateurs linéaires non bornés, comme les opérateurs différentiels.

1.2.2 Opérateurs linéaires non bornés

[16, 9]

Les opérateurs non bornés apparaissent naturellement dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Par exemple, l'opérateur dérivée ou l'opérateur Laplacien ne sont pas définis sur tout l'espace L^2 , mais seulement sur des sous-espaces adaptés.

Définition 1.2.4. Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire non borné de X dans Y est une application linéaire

$$A : D(A) \subset X \rightarrow Y,$$

où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X , appelé domaine de A .

L'opérateur A n'est pas nécessairement défini sur tout X , et il n'existe pas toujours de constante $C > 0$ telle que

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in D(A).$$

Exemple 1.2.5. Considérons l'espace $X = L^2(0, 1)$. L'opérateur

$$Af = f'$$

défini sur

$$D(A) = H_0^1(0, 1)$$

est un opérateur non borné dans $L^2(0, 1)$.

Exemple 1.2.6. (Opérateur de Laplace).

Soit $X = L^2(0, 1)$. On définit

$$Af = f'',$$

avec

$$D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1).$$

Cet opérateur intervient dans l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Il est non borné dans $L^2(0, 1)$, mais il génère un semi-groupe fortement continu.

Définition 1.2.7. (Opérateur fermé)[16]

Un opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est dit fermé si, pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{dans } X$$

et

$$Ax_n \rightarrow y \quad \text{dans } Y,$$

alors

$$x \in D(A) \quad \text{et} \quad Ax = y.$$

Remarque 1.2.1. *Un opérateur fermé n'est pas forcément borné. En fait, plusieurs opérateurs différentiels utilisés en équations aux dérivées partielles sont non bornés mais fermés. Cette propriété est importante pour garantir une bonne formulation du problème d'évolution.*

Définition 1.2.8. (Opérateurs adjoints.) [16, 9] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. L'adjoint de A , noté A^* , est l'unique opérateur borné vérifiant

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Exemple 1.2.9. Si $H = \mathbb{R}^n$ et si A est représenté par une matrice M , alors l'adjoint A^* est représenté par la matrice transposée M^A . Dans le cas complexe, il est représenté par la matrice transposée conjuguée M^* .

Définition 1.2.10. [7, 9] Un opérateur borné $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint si

$$A = A^*.$$

Il est dit positif si

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

Remarque 1.2.2. Les opérateurs adjoints interviennent directement dans les critères de contrôlabilité. En particulier, la dualité entre contrôlabilité et observabilité fait intervenir l'opérateur adjoint A^* et l'opérateur B^* .

Bases hilbertiennes [7]

Définition 1.2.11. (Bases hilbertiennes.) Une famille $(e_n), n \geq 1$ d'éléments de H est dite orthonormale si

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm},$$

où

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & : n = m \\ 0 & : n \neq m. \end{cases}$$

Elle est appelée base hilbertienne de $\mathcal{H}$ si elle est orthonormale et si l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans H .

Théorème 1.2.12. *Si $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne de H , alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

avec convergence dans $\mathcal{H}$, et

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle x, e_n \rangle\|^2.$$

Cette dernière égalité est appelée identité de Parseval.

Exemple 1.2.13. *Dans $L^2(0, 1)$, la famille*

$$e_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n \geq 1,$$

est une base hilbertienne adaptée aux conditions de Dirichlet.

1.2.3 Semi-groupes fortement continus

L'étude des systèmes d'évolution abstraits repose sur les semi-groupes d'opérateurs. Ils généralisent l'exponentielle matricielle e^{tA} utilisée dans les systèmes linéaires finidimensionnels.

Définition 1.2.14. [2, 11]. *Soit $\mathcal{H} \subset X$ un espace de Banach. Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est appelée semi-groupe fortement continu, ou C_0 -semi-groupe, si :*

1. $S(0) = I$, où I est l'opérateur identité ;
2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, pour tous $t, s \geq 0$;
3. pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto S(t)x$ est continue de $[0, +\infty)$ dans X .

Définition 1.2.15. [2, 11] *Le générateur infinitésimal A du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est défini par*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},$$

pour tout $x \in D(A)$, où

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}.$$

SYSTÈMES LINÉAIRES INFINI-DIMENSIONNELS

Les systèmes dynamiques linéaires classiques [17, 4] sont souvent écrits sous la forme

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0,$$

où A et B sont des matrices. Dans ce cas, l'état $x(t)$ appartient à $\mathbb{R}^n$. Cependant, de nombreux phénomènes physiques sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dans ce cas, l'état n'est plus un vecteur fini, mais une fonction. L'espace d'état est alors un espace de Hilbert, et l'opérateur A est généralement non borné.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la formulation abstraite des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert, ainsi que la notion de solution mild obtenue grâce aux semi-groupes.

2.1 Modèle abstrait

Soient X et U deux espaces de Hilbert. L'espace X est appelé espace d'état, tandis que U est appelé espace de contrôle. On considère le système linéaire abstrait [7, 9, 18, 3]

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) & : t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

1. $x(t) \in X$ est l'état du système à l'instant t ;
2. $x_0 \in X$ est l'état initial ;
3. $u(t) \in U$ est la commande ;
4. $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire, en général non borné ;
5. $B : U \rightarrow X$ est l'opérateur de contrôle.

Dans ce mémoire, on suppose généralement que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X .

2.1.1 Cas homogène

Considérons d'abord le problème homogène

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Si A est une matrice, la solution est

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Dans le cadre infini-dimensionnel, l'exponentielle e^{tA} est remplacée par le semi-groupe $T(t)$. La solution s'écrit alors

$$x(t) = T(t)x_0.$$

2.1.2 Solution classique

Définition 2.1.1. [5, 10] Une fonction $x : [0, T] \rightarrow X$ est une solution classique du système (2.1)

si :

1. x est continue sur $[0, T]$;
2. $x(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T]$;
3. x est dérivable sur $[0, T]$;
4. l'équation $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est vérifiée pour tout $t \in [0, T]$;
5. $x(0) = x_0$.

Remarque 2.1.1. La solution classique exige une régularité forte. Dans les systèmes infini-dimensionnels, cette régularité n'est pas toujours garantie. C'est pour cette raison qu'on introduit la notion de solution mild.

2.1.3 Solution mild

Définition 2.1.2. [5, 10, 1] Supposons que A génère un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X , et que $B \in \mathcal{L}(U, X)$. Pour $u \in L^2(0, T; U)$, la solution mild du système est donnée par

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds.$$

La première partie $T(t)x_0$ représente l'évolution libre du système. La seconde partie

$$\int_0^t T(t-s)Bu(s), ds$$

représente l'effet de la commande appliquée entre 0 et t .

Théorème 2.1.3. (*Existence et unicité de la solution mild.*)

Soient X et U deux espaces de Hilbert. Supposons que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X , et que $B \in \mathcal{L}(U, X)$. Alors, pour tout $x_0 \in X$ et tout $u \in L^2(0, T; U)$, le système

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

admet une unique solution mild $x \in C([0, T]; X)$, donnée par

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s), ds.$$

Démonstration

Comme $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que

$$|T(t)| \leq Me^{\omega t}, \quad t \in [0, T].$$

Puisque B est borné, on a

$$|Bu(s)|_X \leq |B||u(s)|_U.$$

Ainsi, pour $t \in [0, T]$, l'intégrale

$$\int_0^t T(t-s)Bu(s), ds$$

est bien définie dans X . En effet,

$$\int_0^t |T(t-s)Bu(s)|_X ds \leq Me^{\omega T}|B| \int_0^t |u(s)|_U ds.$$

Comme $u \in L^2(0, T; U)$, on a aussi $u \in L^1(0, T; U)$ sur un intervalle borné. La formule définit donc une fonction continue de $[0, T]$ dans X . L'unicité découle de la propriété du semi-groupe et de la formule de variation des constantes. Ainsi, la solution mild existe et est unique.

2.1.4 Formule de variation des constantes

La formule

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s), ds$$

est appelée formule de variation des constantes. Elle constitue l'outil principal pour étudier la contrôlabilité. En effet, à l'instant final T , on obtient

$$x(T) = T(T)x_0 + \int_0^T T(T-s)Bu(s), ds.$$

La partie contrôlée de l'état final est donc

$$\int_0^T T(T-s)Bu(s), ds.$$

Cette expression conduit naturellement à la définition de l'opérateur de contrôlabilité.

2.2 Opérateur de contrôle

2.2.1 Opérateur de contrôle borné

Lorsque $B \in \mathcal{L}(U, X)$, on dit que l'opérateur de contrôle est borné. Ce cas est plus simple, car la commande agit directement dans l'espace d'état (X). La solution mild est bien définie pour toute commande $u \in L^2(0, T; U)$.

Exemple 2.2.1. Soit $X = L^2(0, 1)$. Considérons l'équation de la chaleur contrôlée par une force distribuée :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, \xi) = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}(t, \xi) + b(\xi)u(t),$$

avec les conditions

$$y(t, 0) = y(t, 1) = 0.$$

Dans ce cas,

$$Ay = y'', \quad D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1),$$

et

$$Bu = b(\xi)u.$$

Si $b \in L^2(0, 1)$, alors $B : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ est borné.

2.2.2 Opérateur de contrôle non borné

Dans plusieurs problèmes issus des équations aux dérivées partielles, la commande agit au bord du domaine. Par exemple, dans l'équation de la chaleur, on peut agir sur la température imposée à une extrémité de la barre. Dans ce cas, l'opérateur de contrôle n'est pas borné de U dans X . On doit alors utiliser des espaces extrapolés ou des notions plus fines de solutions.

Exemple 2.2.2. *Considérons l'équation de la chaleur sur $(0, 1)$ avec contrôle au bord :*

$$\begin{cases} y_t(t, \xi) = y_{\xi\xi}(t, \xi), & 0 < \xi < 1, \\ y(t, 0) = u(t), \\ y(t, 1) = 0. \end{cases}$$

Ici, la commande n'agit pas comme une force dans le domaine, mais à travers une condition au bord. Le modèle abstrait existe encore, mais l'opérateur B doit être interprété avec précaution.

Remarque 2.2.1. *Dans ce mémoire, pour garder une présentation accessible, l'essentiel de l'étude sera formulé dans le cas où B est borné. Toutefois, il est utile de mentionner le cas non borné, car il est très fréquent dans les applications aux équations aux dérivées partielles.*

Exemple 2.2.3. *(Exemple fondamental : équation de la chaleur)*

Soit $X = L^2(0, 1)$. On considère

$$\begin{cases} y_t(t, \xi) = y_{\xi\xi}(t, \xi) + b(\xi)u(t), & 0 < \xi < 1, \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, & t > 0, \\ y(0, \xi) = y_0(\xi). \end{cases}$$

On définit

$$Ay = y'', \quad D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1).$$

Alors A génère un semi-groupe fortement continu sur $L^2(0, 1)$. Si $b \in L^2(0, 1)$, l'opérateur de contrôle $B : \mathbb{R} \rightarrow L^2(0, 1)$ est donné par

$$Bu = bu.$$

La solution mild est

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)bu(s)ds.$$

Conclusion.

Ce chapitre a présenté le modèle abstrait des systèmes linéaires infini-dimensionnels. Le rôle du semi-groupe est de représenter l'évolution libre du système, tandis que l'opérateur B représente l'action de la commande. La formule de la solution mild donne un cadre solide pour l'étude de l'existence, de l'unicité et des propriétés de contrôlabilité. Le chapitre suivant sera consacré à la contrôlabilité exacte et approchée.

CONTRÔLABILITÉ

Introduction

La contrôlabilité est l'une des notions les plus importantes en théorie du contrôle. Elle répond à la question suivante : peut-on conduire un système d'un état initial vers un état final désiré en choisissant convenablement la commande ?

Dans les systèmes de dimension finie, la contrôlabilité est souvent caractérisée par le rang de la matrice de Kalman. Dans les espaces de Hilbert, la situation est plus délicate. La dimension infinie impose de distinguer la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité approchée. Cette distinction est nécessaire, car un sous-espace peut être dense dans un espace de Hilbert sans être égal à tout l'espace.

3.1 État final et opérateur de contrôlabilité

Considérons le système (1) tel que :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

où A génère un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X , et $B \in \mathcal{L}(U, X)$.

Pour $u \in L^2(0, T; U)$, l'état final est donné par

$$x(T) = T(T)x_0 + \int_0^T T(T-s)Bu(s)ds.$$

On définit l'opérateur de contrôlabilité par

$$W_T u = \int_0^T T(T-s)Bu(s)ds.$$

Ainsi,

$$x(T) = T(T)x_0 + W_T u.$$

3.1.1 Espace atteignable

Définition 3.1.1. [4] *L'espace atteignable à partir de 0 au temps T est défini par*

$$\mathcal{R}(T) = W_T u : u \in L^2(0, T; U).$$

Autrement dit,

$$\mathcal{R}(T) = \text{Im}(W_T).$$

Si l'état initial est x_0 , l'ensemble des états atteignables à l'instant T est

$$T(T)x_0 + \mathcal{R}(T).$$

Remarque 3.1.1. *L'étude de la contrôlabilité revient donc à étudier l'image de l'opérateur W_T . Si cette image est tout l'espace X , le système est exactement contrôlable. Si son adhérence est tout X , le système est approximativement contrôlable.*

3.1.2 Contrôlabilité exacte

Définition 3.1.2. [17, 4] *Le système est dit exactement contrôlable sur $[0, T]$ si, pour tout $x_0 \in X$ et tout $x_1 \in X$, il existe une commande $u \in L^2(0, T; U)$ telle que la solution vérifie*

$$x(T) = x_1.$$

En utilisant la formule de la solution mild, cette condition équivaut à

$$x_1 - T(T)x_0 \in \mathcal{R}(T).$$

Comme x_0 et x_1 sont arbitraires, le système est exactement contrôlable si et seulement si

$$\mathcal{R}(T) = X.$$

Proposition 3.1.3. *Le système est exactement contrôlable sur $[0, T]$ si et seulement si*

$$\text{Im}(W_T) = X.$$

Remarque 3.1.2. *La contrôlabilité exacte est une propriété forte. Dans les espaces infini-dimensionnels, elle est souvent difficile à obtenir, notamment pour les systèmes paraboliques comme l'équation de la chaleur. En revanche, elle peut être obtenue dans certains systèmes hyperboliques, comme l'équation des ondes, sous des conditions géométriques adaptées.*

3.1.3 Contrôlabilité approchée

Définition 3.1.4. *Le système est dit approximativement contrôlable sur $[0, T]$ si, pour tout $x_0 \in X$, tout $x_1 \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une commande $u \in L^2(0, T; U)$ telle que*

$$\|x(T) - x_1\|_X < \varepsilon.$$

Cette condition signifie que l'on peut approcher l'état final désiré avec une précision arbitraire.

Proposition 3.1.5. *Le système est approximativement contrôlable sur $[0, T]$ si et seulement si*

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = X.$$

Démonstration

Si le système est approximativement contrôlable, alors pour tout $x_1 \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que

$$\|T(T)x_0 + W_T u - x_1\| < \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $x_0 = 0$, on obtient que tout élément de X peut être approché par des éléments de $\mathcal{R}(T)$. Donc

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = X.$$

Réciproquement, si $\overline{\mathcal{R}(T)} = X$, alors pour tout $x_0, x_1 \in X$, l'élément

$$x_1 - T(T)x_0$$

peut être approché par un élément de $\mathcal{R}(T)$. Il existe donc $u \in L^2(0, T; U)$ tel que

$$\|W_T u - (x_1 - T(T)x_0)\| < \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\|x(T) - x_1\| < \varepsilon.$$

Ainsi, le système est approximativement contrôlable.

3.2 Critère dual avec l'observabilité

L'adjoint de W_T est donné par

$$(W_T^* z)(s) = B^* T^*(T - s)z.$$

Ainsi,

$$W_T^* z = 0$$

si et seulement si

$$B^*T^*(T-s)z = 0, \quad \text{pour presque tout } s \in [0, T].$$

En posant $r = T - s$, on obtient

$$B^*T^*(r)z = 0, \quad \text{pour presque tout } r \in [0, T].$$

Théorème 3.2.1. (*Critère de contrôlabilité approchée*)

Le système est approximativement contrôlable sur $[0, T]$ si et seulement si

$$\overline{B^*T^*(t)z} = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

implique

$$z = 0.$$

Remarque 3.2.1. *Cette condition signifie qu'il n'existe aucun état adjoint non nul invisible par l'observation $B^*T^*(t)z$. Si un mode du système adjoint est invisible, alors il existe une direction dans l'espace d'état qui ne peut pas être atteinte par la commande.*

3.2.1 Observabilité

Le système adjoint associé est donné par [14]

$$z'(t) = A^*z(t).$$

L'observation associée est

$$y(t) = B^*z(t).$$

La contrôlabilité du système direct est liée à l'observabilité du système adjoint. Une inégalité d'observabilité typique s'écrit

$$\|z\|^2 \leq C \int_0^T \|B^*T^*(t)z\|_U^2 dt.$$

Si une telle inégalité est vérifiée, alors le système direct possède une propriété forte de contrôlabilité.

Remarque 3.2.2. *Dans les équations aux dérivées partielles, la méthode de dualité est l'un des outils les plus utilisés. Elle permet de transformer un problème de contrôlabilité en un problème d'estimation d'observabilité.*

3.2.2 Cas fini-dimensionnel : critère de Kalman

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, le système

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]$$

est de rang n , c'est-à-dire

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = n.$$

Ce critère est simple et très utilisé en automatique. Dans les espaces de Hilbert, il n'existe pas de critère aussi simple dans tous les cas, mais les opérateurs W_T , G_T et les critères de dualité jouent un rôle analogue.

Exemple 3.2.2. *Supposons que A possède une base de vecteurs propres (e_n) dans X , avec*

$$Ae_n = \lambda_n e_n.$$

Supposons aussi que $U = \mathbb{R}$ et que

$$Bu = bu,$$

où

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n.$$

Alors la commande agit sur le mode e_n si $b_n \neq 0$. Si pour un certain n , on a $b_n = 0$, alors le mode correspondant ne peut pas être contrôlé directement. Dans plusieurs situations, une condition de type

$$b_n \neq 0, \quad \forall n \geq 1,$$

est liée à la contrôlabilité approchée.

Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons étudié la contrôlabilité des systèmes linéaires infini-dimensionnels. L'opérateur de contrôlabilité W_T permet de caractériser les états atteignables. La contrôlabilité exacte correspond à l'égalité $\text{Im}(W_T) = X$, tandis que la contrôlabilité approchée correspond à $\overline{\text{Im}(W_T)} = X$. Nous avons également présenté le Gramien de contrôlabilité et le critère de dualité avec l'observabilité. Ces outils seront utiles dans l'étude de la stabilisabilité au chapitre suivant.

STABILISABILITÉ

Introduction

La stabilisabilité est une notion proche de la contrôlabilité, mais elle répond à une autre question. Il ne s'agit pas forcément de conduire le système vers un état final donné en temps fini. Il s'agit plutôt de choisir une commande, souvent sous forme de retour d'état, afin que la solution tende vers zéro lorsque le temps devient grand.

Dans plusieurs applications, la contrôlabilité exacte est trop forte ou impossible à obtenir. En revanche, il peut suffire de stabiliser le système. C'est le cas lorsque les modes incontrôlables sont déjà stables et que seuls les modes instables doivent être contrôlés [8, 3].

4.1 Stabilité et stabilisabilité forte

Définition 4.1.1. [13, 12] Un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit *fortement stable* si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathcal{T}(t)x\| = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Cette définition signifie que chaque trajectoire libre du système tend vers zéro.

4.1.1 Stabilité exponentielle

Définition 4.1.2. [13, 12] Un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est dit *exponentiellement stable* s'il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La stabilité exponentielle implique la stabilité forte. En effet,

$$\|S(t)x\| \leq Me^{-\alpha t}\|x\| \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Remarque 4.1.1. *La stabilité exponentielle est plus forte que la stabilité forte, car elle donne une vitesse de décroissance uniforme.*

4.1.2 Stabilisabilité exponentielle

Considérons le système (1) de la forme

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Un retour d'état linéaire est une commande de la forme

$$u(t) = Kx(t),$$

où $K : \mathcal{H} \rightarrow U$ est un opérateur linéaire. En remplaçant $u(t)$ par $Kx(t)$, on obtient le système en boucle fermée

$$x'(t) = (A + BK)x(t).$$

L'objectif est de choisir K de sorte que l'opérateur $A + BK$ génère un semi-groupe stable.

Définition 4.1.3. [2]

Le système (A, B) est dit *exponentiellement stabilisable* s'il existe un opérateur de retour d'état $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, U)$ tel que $A + BK$ génère un semi-groupe exponentiellement stable. Autrement dit, il existe $M \geq 1$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\|S_K(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\{S_K(t)\}_{t \geq 0}$ est le semi-groupe engendré par $A + BK$.

4.1.3 Stabilisabilité forte

Définition 4.1.4. [12, 15]. Le système (A, B) est dit *fortement stabilisable* s'il existe un opérateur $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, U)$ tel que le semi-groupe $\{S_K(t)\}_{t \geq 0}$ engendré par $A + BK$ soit fortement stable, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S_K(t)x\| = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

4.2 Lien entre contrôlabilité et stabilisabilité

La contrôlabilité exacte implique souvent la possibilité de stabiliser le système. En dimension finie, si le couple (A, B) est contrôlable, alors on peut placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A + BK$. On peut donc choisir K pour que toutes les valeurs propres aient une partie réelle strictement négative [13, 12, 17, 4].

En dimension infinie, la situation est plus difficile. Cependant, l'idée générale reste la suivante :

1. Si tous les modes instables sont contrôlables, alors le système peut être stabilisable ;
2. si certains modes instables ne sont pas contrôlables, alors la stabilisation est impossible ;
3. les modes incontrôlables ne posent pas de problème s'ils sont déjà stables.

4.2.1 Décomposition stable et instable

Supposons que l'espace $\mathcal{H}$ puisse être décomposé sous la forme [13, 7]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_u,$$

où :

1. $\mathcal{H}_s$ est le sous-espace stable ;
2. $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace instable, de dimension finie.

Si la restriction du système au sous-espace instable est contrôlable, alors on peut choisir un retour d'état pour stabiliser les modes instables. Les modes stables restent déjà décroissants. Cette idée est souvent utilisée pour les systèmes paraboliques, où seul un nombre fini de modes peut être instable.

1. Lien entre contrôlabilité et stabilisabilité

1.1. Contrôlabilité

1. Permet de placer tous les pôles du système.
2. C'est une condition plus forte.
3. Tous les modes du système doivent être contrôlables.

1.2. Stabilisabilité

1. Permet de stabiliser le système.

2. C'est une condition plus faible.
3. Seuls les modes instables doivent être contrôlables.

Remarque 4.2.1.

$$\text{Contrôlabilité} \Rightarrow \text{Stabilisabilité}$$

mais la réciproque est fausse.

- *Un système contrôlable : on peut agir sur tous les modes du système.*
- *Un système stabilisable : on ne peut pas nécessairement agir sur tous les modes, mais on peut empêcher l'instabilité.*

2. Lien avec l'observabilité : dualité

Pour le système dual, on considère :

$$\dot{x}(t) = A^*x(t) + C^*u(t).$$

On a alors la relation suivante :

$$(A, B) \text{ stabilisable} \iff (A^*, B^*) \text{ détectable}.$$

Ainsi, la stabilisabilité est la version duale de la détectabilité.

4.2.2 Critère spectral en dimension finie et infini**Cas 1 : en dimension finie**

Pour un système fini-dimensionnel

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

le couple (A, B) est stabilisable si et seulement si

$$\text{rang}[\lambda I - A \quad B] = n$$

pour toute valeur propre λ de A telle que

$$\text{Re}(\lambda) \geq 0.$$

Ce critère est appelé critère de Hautus de stabilisabilité.

Remarque 4.2.2. *Le critère signifie que les modes associés aux valeurs propres instables ou non décroissantes doivent être contrôlables. Les modes associés aux valeurs propres de partie réelle strictement négative peuvent rester incontrôlables sans empêcher la stabilisation.*

Exemple 4.2.1. *Considérons le système fini-dimensionnel*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le premier mode est instable, car sa valeur propre est 1. Le deuxième mode est stable, car sa valeur propre est -2 . La commande agit sur le premier mode, donc le système est stabilisable.

En prenant

$$K = (-3 \quad 0),$$

$$\text{on obtient } A + BK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-3 \quad 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le système en boucle fermée est donc exponentiellement stable.

Cas 2 : infini-dimensionnel

Dans un espace de Hilbert, la stabilisabilité dépend du spectre de l'opérateur A , du semi-groupe engendré et de l'action de l'opérateur B . Si A possède une base de fonctions propres, on peut souvent analyser le système mode par mode.

Supposons que

$$Ae_n = \lambda_n e_n,$$

et que

$$Bu = bu, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n.$$

Si un mode e_n est instable, c'est-à-dire si

$$\operatorname{Re}(\lambda_n) \geq 0,$$

alors il doit être contrôlé. Une condition nécessaire naturelle est donc

$$b_n \neq 0$$

pour tout mode instable.

4.2.3 Stabilisation par retour d'état borné

Si $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, U)$, le retour d'état

$$u = Kx$$

est appelé retour d'état borné. Dans ce cas, BK est un opérateur borné de X dans X lorsque $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$. Si A génère un C_0 -semi-groupe, alors $A + BK$ génère également un C_0 -semi-groupe par le **théorème de perturbation bornée** [10].

On considère un système linéaire abstrait :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

où :

$$x(t) \in \mathcal{H}, \quad u(t) \in U.$$

Ici, $\mathcal{H} \subset X$ est un espace de Banach ou de Hilbert, U est l'espace des contrôles, $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur non borné générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, et :

$$B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$$

est un opérateur de contrôle borné. On applique un retour d'état borné :

$$u(t) = Kx(t),$$

avec :

$$K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, U).$$

Alors :

$$BK \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Le système en boucle fermée devient :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

L'opérateur :

$$A_K = A + BK$$

est appelé opérateur en boucle fermée.

Théorème 4.2.2. (*Théorème de perturbation bornée.*) [10] Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur borné. Alors l'opérateur :

$$A + F$$

avec domaine :

$$D(A + F) = D(A),$$

est aussi le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. De plus, si le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire s'il existe $M \geq 1$ et $\omega > 0$ tels que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

et si :

$$\|F\| < \frac{\omega}{M},$$

alors le semi-groupe engendré par $A + F$ est encore exponentiellement stable. Plus précisément :

$$\|S(t)\| \leq Me^{-(\omega - M\|F\|)t}, \quad t \geq 0.$$

Démonstration. Comme $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, le problème abstrait :

$$\dot{x}(t) = (A + F)x(t), \quad x(0) = x_0,$$

peut s'écrire sous la forme intégrale :

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Fx(s)ds.$$

Donc le semi-groupe $S(t)$ associé à $A + F$ vérifie :

$$S(t)x_0 = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)FS(s)x_0ds.$$

En prenant la norme, on obtient :

$$\|S(t)x_0\| \leq \|T(t)x_0\| + \int_0^t (\|T(t-s)\|, \|F\|, \|S(s)x_0\|)ds.$$

Comme :

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t},$$

on a :

$$\|S(t)x_0\| \leq Me^{-\omega t}\|x_0\| + M\|F\| \int_0^t e^{-\omega(t-s)}\|S(s)x_0\|ds.$$

On multiplie par $e^{\omega t}$. Alors :

$$e^{\omega t}\|S(t)x_0\| \leq M\|x_0\| + M\|F\| \int_0^t e^{\omega s}\|S(s)x_0\|ds.$$

Posons :

$$z(t) = e^{\omega t} \|S(t)x_0\|.$$

On obtient :

$$z(t) \leq M\|x_0\| + M\|F\| \int_0^t z(s)ds.$$

Par le lemme de Grönwall :

$$z(t) \leq M\|x_0\| e^{M\|F\|t}.$$

Donc :

$$e^{\omega t} \|S(t)x_0\| \leq M\|x_0\| e^{M\|F\|t}.$$

Ainsi :

$$\|S(t)x_0\| \leq M e^{-(\omega - M\|F\|)t} \|x_0\|.$$

Par conséquent :

$$\|S(t)\| \leq M e^{-(\omega - M\|F\|)t}.$$

Si :

$$\|F\| < \frac{\omega}{M},$$

alors :

$$\omega - M\|F\| > 0.$$

Donc le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable. Le théorème est démontré.

Exemple 4.2.3. On revient au système contrôlé :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

On choisit un retour d'état borné :

$$u(t) = Kx(t),$$

avec :

$$K \in \mathcal{L}(X, U).$$

Alors :

$$BK \in \mathcal{L}(X).$$

Le système en boucle fermée devient :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

On pose :

$$A_K = A + BK.$$

Théorème 4.2.4. (Théorème de stabilisation robuste)[5, 10, 4]. Supposons qu'il existe un retour d'état borné $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, U)$ tel que $A_K = A + BK$ engendre un semi-groupe exponentiellement stable $\{S_K(t)\}_{t \geq 0}$.

Autrement dit, il existe $M \geq 1$ et $\omega > 0$ tels que :

$$\|T_K(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Soit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une perturbation bornée du système. Si :

$$\|D\| < \frac{\omega}{M},$$

alors l'opérateur perturbé :

$$A_K + D = A + BK + D$$

engendre encore un semi-groupe exponentiellement stable. En particulier, le système perturbé :

$$\dot{x}(t) = (A + BK + D)x(t)$$

reste stable.

Démonstration. Comme $A_K = A + BK$ engendre un semi-groupe exponentiellement stable, on peut appliquer le théorème de perturbation bornée avec :

$$A_K \quad \text{à la place de } A,$$

et :

$$D \quad \text{à la place de } F.$$

Puisque $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'opérateur :

$$A_K + D$$

est une perturbation bornée de A_K . D'après le théorème précédent, si :

alors le semi-groupe associé à $A_K + D$ vérifie :

$$\|S_D(t)\| \leq M e^{-(\omega - M|D|)t}.$$

Comme :

$$\omega - M|D| > 0,$$

on obtient :

$$\|S_D(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Donc le système perturbé reste exponentiellement stable.

Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisabilité des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert. La stabilisation consiste à choisir une commande, souvent sous forme de retour d'état, afin que les trajectoires du système tendent vers zéro. Nous avons distingué la stabilisation forte et la stabilisation exponentielle. Nous avons également présenté l'idée spectrale selon laquelle seuls les modes instables doivent être contrôlés. Cette idée permet de comprendre le lien entre contrôlabilité et stabilisabilité.

APPLICATION

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer numériquement les notions de contrôlabilité et de stabilisabilité. Pour cela, nous considérons une approximation finie-dimensionnelle d'un système infini-dimensionnel de type parabolique. Le modèle continu peut être interprété comme une équation de la chaleur sur l'intervalle $(0, 1)$, avec conditions de Dirichlet homogènes.

L'équation continue est donnée par

$$\begin{cases} y_t(t, \xi) = y_{\xi\xi}(t, \xi) + b(\xi)u(t), & 0 < \xi < 1, \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, & t > 0, \\ y(0, \xi) = y_0(\xi). \end{cases}$$

Après discrétisation spatiale par différences finies, on obtient un système linéaire fini-dimensionnel

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

5.1. Discrétisation de l'opérateur de Laplace.

On divise l'intervalle $(0, 1)$ en $N + 1$ sous-intervalles de longueur

$$h = \frac{1}{N + 1}.$$

Les points intérieurs sont

$$\xi_i = ih, \quad i = 1, \dots, N.$$

L'approximation par différences finies de la dérivée seconde est

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}(\xi_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

On obtient alors la matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.2. Choix de l'opérateur de contrôle

On considère une commande scalaire $u(t) \in \mathbb{R}$. L'opérateur de contrôle est représenté par un vecteur colonne

$$B \in \mathbb{R}^{N \times 1}.$$

Par exemple, on peut choisir une commande agissant au milieu du domaine :

$$B_i = \begin{cases} 1, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0, \end{cases}$$

où i_0 est l'indice correspondant au point central.

5.3. Vérification de la contrôlabilité

En dimension finie, le système

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

est contrôlable si et seulement si

$$\text{rang} [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{N-1}B] = N.$$

On calcule donc la matrice de contrôlabilité

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{N-1}B]$$

et son rang.

5.4. Stabilisation par retour d'état

Pour stabiliser le système, on utilise une commande de la forme

$$u(t) = -Kx(t).$$

Le système en boucle fermée devient

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t).$$

On choisit K par placement de pôles ou par commande LQR. Dans cette application, on peut utiliser la commande LQR, qui consiste à minimiser le coût

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt,$$

où Q est une matrice symétrique positive et $R > 0$.

5.5. Algorithme 1 : construction du modèle discrétisé.

Les étapes

1. Choisir le nombre de points intérieurs N .
2. Calculer le pas $h = \frac{1}{(N+1)}$.
3. Construire la matrice de Laplace discrète A .
4. Construire le vecteur de contrôle B .
5. Calculer la matrice de contrôlabilité.
6. Vérifier le rang de cette matrice.

5.6. Code MATLAB : contrôlabilité

```

clc;
clear;
close all;

% Number of interior discretization points
N = 20;
h = 1/(N+1);

% Construction of the discrete Laplacian matrix
main_diag = -2*ones(N,1);
off_diag = ones(N-1,1);

A = (1/h^2)*(diag(main_diag) + diag(off_diag,1) + diag(off_diag,-1));

% Control vector: localized control at the middle node
B = zeros(N,1);
i0 = round(N/2);
B(i0) = 1;

% Controllability matrix
C = ctrb(A,B);

% Numerical rank
rank_C = rank(C);

% Display results
fprintf('Rank of the controllability matrix = %d\n', rank_C);
fprintf('Dimension of the system = %d\n', N);

if rank_C == N
    disp('The finite-dimensional approximation is controllable.');
```

La matrice A représente l'approximation par différences finies de l'opérateur de Laplace unidimensionnel avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Le vecteur B modélise une commande localisée agissant en un point intérieur de la grille, choisi ici comme le milieu du domaine spatial. Pour vérifier la contrôlabilité de l'approximation de dimension finie, nous calculons la matrice de contrôlabilité :

$$\mathcal{C} = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{N-1}B).$$

Le système est contrôlable si et seulement si :

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = N.$$

Pour la discrétisation choisie avec $N = 20$, le rang numérique de la matrice de contrôlabilité est égal à la dimension du système. Par conséquent, l'approximation de dimension finie est contrôlable.

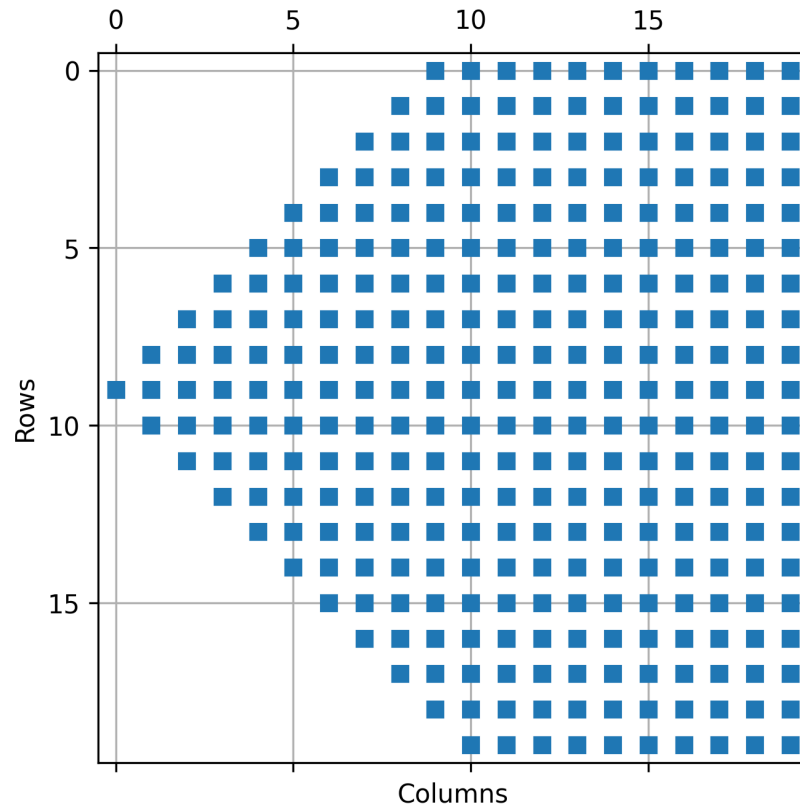


FIGURE 5.1 – La matrice de contrôlabilité

La figure 5.1 montre le motif de parcimonie de la matrice de contrôlabilité associée au système discrétisé. On observe que l'effet du contrôle, appliqué au point central, se propage progressivement vers les autres points du domaine grâce aux puissances successives de la matrice.

Cette propagation est due à la structure tridiagonale du Laplacien discret et traduit le caractère diffusif de l'équation de la chaleur. Ainsi, la figure illustre visuellement la capacité du contrôle localisé à influencer l'ensemble du système discret.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la contrôlabilité et la stabilisabilité des systèmes linéaires dans les espaces de Hilbert. Le point de départ a été la formulation abstraite des systèmes d'évolution de la forme

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0.$$

Cette formulation permet de traiter dans un même cadre des systèmes issus des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles.

Le premier chapitre a rappelé les notions d'analyse fonctionnelle nécessaires à cette étude. Les espaces de Hilbert, les opérateurs bornés et non bornés, les opérateurs adjoints, les projecteurs, les bases hilbertiennes, les opérateurs compacts et les semi-groupes fortement continus constituent les outils de base pour comprendre les systèmes infini-dimensionnels.

Le deuxième chapitre a présenté les systèmes linéaires infini-dimensionnels. Lorsque l'opérateur A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu, la solution du système peut être exprimée sous forme mild :

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds.$$

Cette formule est l'outil principal utilisé pour étudier les états atteignables.

Le troisième chapitre a été consacré à la contrôlabilité. Nous avons distingué la contrôlabilité exacte, caractérisée par

$$\text{Im}(W_T) = X,$$

et la contrôlabilité approchée, caractérisée par

$$\overline{\text{Im}(W_T)} = X.$$

Nous avons aussi présenté le Gramien de contrôlabilité et le critère dual d'observabilité. Cette dualité montre que l'étude de la contrôlabilité peut être ramenée à l'étude de l'observation du système adjoint.

Le quatrième chapitre a abordé la stabilisabilité. Nous avons présenté la stabilité forte, la stabilité exponentielle et la stabilisation par retour d'état. Nous avons montré que la stabilisabilité peut être comprise comme la possibilité de contrôler les modes instables du système. Ainsi, un système peut être stabilisable même s'il n'est pas exactement contrôlable, à condition que les modes incontrôlables soient déjà stables.

Le cinquième chapitre a proposé une application numérique sous MATLAB. Une approximation finie-dimensionnelle d'un système de type équation de la chaleur a été

construite. La contrôlabilité a été étudiée à l'aide de la matrice de Kalman, puis la stabilisation a été illustrée par une commande LQR. Les simulations montrent la différence entre le comportement en boucle ouverte et le comportement en boucle fermée.

En conclusion, la contrôlabilité et la stabilisabilité sont deux notions fondamentales pour comprendre et commander les systèmes dynamiques. Dans les espaces de Hilbert, leur étude nécessite des outils d'analyse fonctionnelle et de théorie des semi-groupes. Les résultats présentés dans ce mémoire constituent une base pour aborder des problèmes plus avancés, comme le contrôle des équations aux dérivées partielles, le contrôle optimal infini-dimensionnel, la stabilisation robuste et les systèmes à contrôle frontière.

Bibliographie

- [1] A. Bensoussan, Da Prato, G., Delfour, M. C., Mitter, S. K. Representation and Control of Infinite Dimensional Systems. Birkhäuser.(2007).
- [2] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer.(1983).
- [3] C.T. Chen. Linear System Theory and Design. Oxford University Press.(1999).
- [4] D. Russell. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. SIAM Review, 20(4), 639-739.
- [5] J. Zabczyk. Mathematical Control Theory : An Introduction. Birkhäuser.(1992).
- [6] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.(2011).
- [7] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.(2011).
- [8] H. K. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice Hall.(2002).
- [9] J. B.Conway. A Course in Functional Analysis. Springer.(1990).
- [10] J.L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Masson.(1988).
- [11] K.J. Engel, Nagel, R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer.(2000).
- [12] M.Hariri, Z. Bouteffal , N. Beghersa & M. Benabdallah. On the stability of a strongly stabilizing control for degenerate systems in Hilbert spaces. *Demonstratio Mathematica*, **56**,1,1–10, 2023.
- [13] M.Benabdallah and M.Hariri, On the stability of the quasi-linear implicit equations in Hilbert spaces. Kkayyam J.Math. **5**, no.1,105-112,2019, <https://doi.org/10.22034/kjm.2019.81222>.
- [14] M. Tucsnak, Weiss, G. Observation and Control for Operator Semigroups. Birkhäuser.. (2009).

- [15] R. F. Curtain, Zwart, H. J. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. Springer.(1995).
- [16] R. Triggiani. Controllability and observability in Banach space with bounded operators. SIAM Journal on Control, 13(2),(1975). 462-491.
- [17] V. Komornik. Exact Controllability and Stabilization : The Multiplier Method*. Wiley.(1994).
- [18] W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill.(1991).