

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Génie Mécanique



Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master

Master
Domaine: Science et Technologie
Filière: Génie Mécanique
Spécialité: Construction Mécanique

Theme

Comportement dynamique d'un tube fonctionnellement gradué

Présenté Par :

Mlle BOUHAMIDI AMIRA

Mr TALHA Zakaria

Devant le jury composé de :

Mr OUARI Mohamed Amine	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mr SAIMI Ahmed	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadreur
Mr ASSEM Hassen	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Co-Encadreur
Mr Hachemi Mohammed	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur

Academic Year 2024/2025

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes parents, pour leur amour inconditionnel, leur soutien moral et leurs sacrifices qui m'ont permis d'arriver jusqu'ici. À ma famille, pour leur encouragement constant et leur présence réconfortante tout au long de ce parcours. À mes enseignants et encadrants, pour leur précieux savoir, leurs conseils et leur patience. À mes amis, pour leur compréhension, leur soutien et leurs encouragements, dans les moments de doute comme dans ceux de réussite.

À tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail, je leur exprime ma profonde gratitude.

– *BOUHAMIDI AMIRA*
– *TELHA ZAKARIA*

Remerciement

Avant tout, Nous adressons nos plus sincères sentiments de reconnaissance et de remerciement envers le bon DIEU, le clément et le miséricordieux, lequel nous a accordé la force et le courage de mener à bien ce modeste travail. Au terme de ce modeste travail, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos vifs remerciements : A Dr. SAIMI Ahmed ; notre encadreur, pour son soutien et son enthousiasme tout au long de ce projet de fin d'étude et pour son assistance qui a permis que cette aventure stimulante se concrétise. Aux membres de jury Dr. OUARI Mohamed Amine et Dr. Hachemi Mohammed pour avoir accepté d'expertiser notre travail. Nous remercions aussi notre Co-encadreur Dr. ASSEM Hassen pour les conseils et leur aide précieuse. nous serions par arrivés à ce niveau. Aux enseignants du département de génie mécanique et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Abstract

In this thesis, an in-depth numerical study is conducted on the free vibrational analysis and static bending of tubes made from functionally graded materials (FGM), taking into account porosity properties under the influence of thermal variations. The power-law is used to model the gradation of FGM materials, while a nonlinear temperature distribution is adopted to better reflect real-world conditions. This work is based on two classical beam theories: Euler-Bernoulli theory and Timoshenko theory, allowing for a comparative analysis of mechanical behavior. The equations of motion are derived by applying Lagrange's principle through two distinct methods: a numerical method based on classical finite elements and an analytical approach using the Galerkin method. The natural frequencies are then calculated by solving the eigenvalue problem, considering various influencing parameters such as the FGM tube geometry, the power-law index associated with material gradation, temperature variations, porosity index, and different combinations of FG materials. This research aims to provide a deeper understanding of the vibrational and mechanical performance of FGM structures in complex environments.

keywords: FG materials, Free vibrations, Static bending, Beam theory, Finite element method, Galerkin method, Porosity, Nonlinear thermal distribution.

Résumé

Dans le cadre de cette thèse, une étude numérique approfondie est menée sur l'analyse vibratoire libre et la flexion statique des tubes en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), intégrant des propriétés de porosité sous l'influence des variations thermiques. La loi de puissance est utilisée pour modéliser la graduation des matériaux FGM, tandis qu'une distribution non linéaire de la température est adoptée pour mieux refléter les conditions réelles. Ce travail repose sur deux théories des poutres classiques : la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko, permettant ainsi une analyse comparative des comportements mécaniques. Les équations de mouvement sont dérivées en appliquant le principe de Lagrange à travers deux méthodes distinctes : une méthode numérique basée sur les éléments finis classiques et une méthode analytique fondée sur l'approche de Galerkin. Les fréquences naturelles sont ensuite calculées en résolvant le problème aux valeurs propres, tout en prenant en compte divers paramètres influents, tels que la géométrie du tube FGM, l'indice de puissance associé à la loi de graduation, les variations de température, l'indice de porosité, ainsi que différentes combinaisons de matériaux FG. Cette recherche vise à fournir une compréhension approfondie des performances vibratoires et mécaniques des structures FGM dans des environnements complexes.

mots-clés: Matériaux FG, Vibrations libres, Flexion statique, Théorie des poutres, Méthode des éléments finis, Méthode de Galerkin, porosité, Distribution thermique non linéaire.

مُلخّص

في إطار هذه الأطروحة، تم إجراء دراسة عديدة معمقة حول التحليل الاهتزازي الحر والانحناء الاستاتيكي للأنابيب المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفياً (ذج)، مع الأخذ بعين الاعتبار خصائص المسامية تحت تأثير التغيرات الحرارية. تم استخدام قانون القوة لنمذجة التدرج في المواد ذج، في حين تم اعتماد توزيع غير خطي لدرجات الحرارة لعكس الظروف الحقيقية بشكل أفضل. يستند هذا العمل إلى نظريتين كلاسيكيتين للعوارض: نظرية أويلربرنولي ونظرية تيموشينكو، مما يتيح إجراء تحليل مقارن للسلوك الميكانيكي. تم استخلاص معادلات الحركة باستخدام مبدأ لاغرانج من خلال طريقتين مختلفتين: طريقة عددية تعتمد على العناصر المحدودة التقليدية وطريقة تحليلية تستند إلى نهج غاليركين. تم حساب الترددات الطبيعية بعد ذلك عن طريق حل مشكلة القيم الذاتية، مع مراعاة مجموعة من العوامل المؤثرة مثل هندسة الأنبوب ذج، ومعامل القدرة المرتبط بتدرج المادة، والتغيرات في درجات الحرارة، ومعامل المسامية، بالإضافة إلى مجموعات مختلفة من مواد ذج. تهدف هذه الدراسة إلى تقديم فهم عميق للأداء الاهتزازي والميكانيكي للهياكل ذج في بيئات معقدة.

الكلمات المفتاحية: المواد ذات الخصائص المتدرجة، الاهتزازات الحرة، الانحناء الساكن، نظرية

العوارض، طريقة العناصر المنتهية، طريقة غاليركين، المسامية، التوزيع الحراري غير الخطي

Table des matières

Dédicace	iii
Remerciement	iv
Abstract	v
Table des matières	viii
List of Figures	xi
List of Tables	xiv
Introduction Générale	1
1 Contexte et Motivation	1
2 État de l'Art	2
3 Objectifs de la Thèse	3
Chapitre I: Généralités sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués	
1 Introduction	6
2 Définition	7
3 Domaines d'applications	7
3.1 Aerospace	7
3.2 Médecine	8
3.3 Défense	8
3.4 Énergie nucléaire	8
3.5 Optoélectronique	8
3.6 Articles de sports	9
4 Composition et Propriétés des FGM	9
5 Loi de Distribution des Propriétés Matériaux FG	10
5.1 Loi de puissance (Power Law)	10
5.2 Propriétés Thermomécaniques des Matériaux à Gradient de Fonction (FG)	11

5.2.1	Matériaux Utilisés et Coefficients Thermiques	12
5.2.2	Modélisation du Comportement Thermomécanique	12
5.2.3	Distribution Thermique et Modélisation	13
5.3	Porosité sur les matériaux à gradients fonctionnels	14
5.3.1	Modèle de porosité uniforme	14
5.3.2	Modèle de porosité non uniforme	15
5.3.3	Effets de la porosité sur les propriétés des FGM	16
6	Conclusion	17
Chapitre II: Théorie des poutres18		
1	Introduction	19
2	Équations générales de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation	19
2.1	Énergie cinétique	19
2.2	Énergie de déformation	19
3	Hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres	20
4	Théorie d'Euler-Bernoulli pour une poutre cylindrique	21
4.1	Hypothèses de base	21
4.2	Énergie cinétique selon Euler-Bernoulli	23
4.3	Énergie de déformation selon Euler-Bernoulli	24
5	Théorie des poutres de Timoshenko	24
5.1	Hypothèses de base	24
5.2	Énergie cinétique selon Timoshenko	26
5.3	Énergie de déformation selon Timoshenko	26
5.4	Vecteur de travail virtuel	27
5.5	Conclusion	27
Chapitre III: Formulation de l'équation du mouvement29		
1	Introduction	30
2	Discrétisation par la Méthode des Éléments Finis	30
2.1	Définition des Fonctions de Forme	31
2.2	Propriétés des Fonctions de Forme	31
3	Discrétisation de l'équation de mouvement par la méthode des éléments finis	32
3.1	MEF via la théorie d'Euler-Bernoulli	32
4	MEF via la théorie de Timoshenko	34
5	Discrétisation de l'équation de mouvement par la méthode de Galerkin	36
5.1	Galerkin via la théorie d'Euler-Bernoulli	36
6	Galerkin via la théorie de Timoshenko	38

7	Résolution de l'équation de mouvement	40
8	Conclusion	41
Chapitre IV: Résultats et Discussions42		
1	Introduction	43
2	Etude de Convergence	43
3	Convergence des Fréquences Propres et de la Flexion Statique	47
3.1	Tableau 3 : Éléments finis via Timoshenko	47
3.2	Tableau 4 : Éléments finis via Euler-Bernoulli	47
3.3	Tableau 5 : Méthode analytique de Galerkin	47
4	Comparaison entre les Modèles de Timoshenko et Euler-Bernoulli	48
4.1	Fréquences Propres	48
4.2	Déflexion Statique	48
4.3	Nombre Optimal d'Éléments	49
5	Validation	49
5.1	Validation de la variation des propriétés des matériaux FG dans la direction radiale	49
5.2	Validation avec un tube cylindrique FG	50
6	Étude paramétrique	53
6.1	Influence des Condition aux limites	54
7	Influence des paramètres géométriques	54
7.1	Effet du Rapport L/D	54
7.2	Effet du l'indice de porosité e_p	59
7.3	Effet du variation de température interne	63
Conclusion générale		71
Références		74

List of Figures

1	History of engineering materials leading to FGM development	7
2	Illustration of FGM	7
3	Section lateral d'une ailette d'une turbine	8
4	Prothese échafaudage poreux à gradient fonctionnel	8
5	Variation du module de Young des matériaux FG en fonction de l'indice de volume fractionnaire k dans la direction radiale	11
6	Variation de la densité du matériau FG en fonction de l'indice de volume fractionnaire k dans la direction radiale	11
7	Profil de distribution de température utilisant une distribution de température non linéaire dans SS-Al ₂ O ₃	13
8	Variation du module de Young des matériaux FG en fonction de l'indice de volume fractionnaire k dans la direction radiale (300K-1500K) FG SS-Al ₂ O ₃	14
9	Représentation schématique d'une section transversale poreuse uniforme	15
10	Représentation schématique d'une section transversale poreuse non uniforme	16
11	Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oy selon d'Euler Bernoullie	21
12	Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oz selon d'Euler Bernoullie	22
13	Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oz selon Timoshenko	25

14	Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oz selon Timoshenko	25
15	fonctions de formes pour un élément fini	32
16	Convergence des fréquences par la méthode des éléments finis via Timoshenko	45
17	Convergence de la déflexion de milieu par la méthode des éléments finis via Timoshenko	45
18	Convergence des fréquences par la méthode des éléments finis via Euler Bernoulli	46
19	Convergence de la déflexion de milieu par la méthode des éléments finis via Euler Bernoulli	46
20	Variation du module de Young pour différentes valeurs de k lorsque $T_m = 300$ K et $T_c = 900$ K pour un tube FG SS- ZrO_2	50
21	Variation du module de Young le long de la direction radiale pour différentes valeurs de k pour un arbre Al_2O_3 FG à température ambiante	50
22	Premiers modes de vibration selon deux types de conditions aux limites (appui-appui) et (encastrement-encastrement) avec $k=1$ (SUS304- Al_2O_3) a température ambient 300 K et $e_p = 0$	54
23	Représentation graphique des fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre	56
24	Représentation graphique des déflexions statiques en fonction du rapport longueur/diamètre	56
25	Représentation graphique des fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité	61
26	Représentation graphique des déflexions statiques en fonction du l'indice de porosité	61
27	Fréquences naturelles en fonction du température interne (100 % SUS304)	66
28	Déflexions statiques en fonction du température interne (100 % SUS304)	66

29	Fréquences naturelles en fonction du température interne (<i>SUS304</i> – <i>Al₂O₃</i> , $k = 1$)	67
30	Fréquences naturelles en fonction du température interne (<i>SUS304</i> – <i>Ni</i> , $k = 1$)	67
31	Fréquences naturelles en fonction du température interne (<i>SUS304</i> – <i>ZrO₂</i> , $k = 1$)	68

List of Tables

1	Coefficients de Température	12
2	Conditions aux limites pour la méthode de Galerkin	36
3	Convergence des fréquences et la flexion statique par la méthode des éléments finis via Timoshenko	44
4	Convergence des fréquences et la flexion statique par la méthode des éléments finis via Euler Bernoulli	44
5	fréquences et la flexion statique par la méthode analytique de Galerkin	45
6	Variation des fréquences fondamentales (Hz) pour un tube cylindrique FG simplement supporté	51
7	Fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (<i>SUS304 – Al₂O₃</i>)	54
8	Déflexion statique en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (<i>SUS304 – Al₂O₃</i>)	55
9	Fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (<i>SUS304-Ni</i>)	55
10	Déflexion statique en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (<i>SUS304-Ni</i>)	55
11	Fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (<i>SUS304- ZrO₂</i>)	55
12	Déflexion statique en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (<i>SUS304- ZrO₂</i>)	56

13	Fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité, avec $L/D=20$ (SUS304- Al_2O_3)	59
14	Déflexion statique naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $L/D=20$ (SUS304- Al_2O_3)	59
15	Fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)	60
16	Déflexion statique naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)	60
17	Fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité, avec $L/D=20$ (SUS304- ZrO_2)	60
18	Déflexion statique naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $L/D=20$ (SUS304- ZrO_2)	60
19	Fréquences naturelles en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304- Al_2O_3)	63
20	Déflexion statique en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304- Al_2O_3)	63
21	Fréquences naturelles en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)	64
22	Déflexion statique en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)	64
23	Fréquences naturelles en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304- ZrO_2)	65
24	Déflexion statique en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304- ZrO_2)	65

Introduction Générale

1 Contexte et Motivation

Les structures tubulaires jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines d'ingénierie, allant de l'aérospatial au biomédical en passant par le génie civil et les industries pétrolières. Leur géométrie permet une combinaison optimale de légèreté, résistance mécanique et capacité à transporter des fluides ou à supporter des charges externes. Cependant, dans des environnements complexes, tels que ceux soumis à des sollicitations thermiques ou dynamiques intenses, les matériaux homogènes traditionnels montrent rapidement leurs limites. Ces matériaux, bien qu'efficaces dans des conditions standard, sont souvent incapables de répondre aux exigences croissantes en termes de performance, durabilité et adaptabilité [1]. Face à ces défis, les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) ont émergé comme une solution prometteuse pour l'optimisation des performances mécaniques et thermiques. Les FGM se caractérisent par une variation continue et contrôlée de leurs propriétés matérielles, permettant ainsi une transition fluide entre différentes phases du matériau. Cette graduation offre des avantages significatifs, notamment une meilleure résistance aux gradients thermiques, une réduction des concentrations de contraintes et une amélioration globale de la fiabilité des structures [2]. Par exemple, dans les applications aérospatiales, les FGM sont utilisés pour concevoir des panneaux résistants aux températures extrêmes tout en restant

légers [3]. Dans ce contexte, l'étude du comportement dynamique et statique des tubes poreux en FGM sous l'effet de la température s'impose comme une problématique cruciale. Les tubes poreux en FGM combinent les avantages des matériaux gradués avec ceux des structures poreuses, offrant ainsi un compromis optimal entre légèreté et robustesse. L'analyse de leur comportement sous diverses conditions de chargement permet non seulement de mieux comprendre leur réponse mécanique mais aussi de proposer des conceptions innovantes pour des applications exigeantes [4].

2 État de l'Art

De nombreuses études ont été menées pour analyser le comportement dynamique et statique des structures en FGM. Ces travaux se concentrent généralement sur des configurations variées, telles que les plaques, les coques et les poutres, en utilisant des approches analytiques, numériques ou expérimentales. Parmi les méthodes analytiques, les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont couramment employées pour modéliser les déformations et les vibrations des structures élancées. Ces approches fournissent des résultats rapides et précis pour des cas simplifiés mais peuvent être limitées dans des situations complexes impliquant des effets thermiques ou des variations importantes des propriétés matérielles [5]. D'un point de vue numérique, la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode de Galerkin sont largement utilisées pour résoudre des problèmes plus complexes où les hypothèses simplificatrices ne sont pas applicables. La MEF est particulièrement appréciée pour sa flexibilité et sa capacité à traiter des géométries complexes, tandis que la méthode de Galerkin, basée sur une formulation variationnelle, est souvent privilégiée pour sa précision dans la résolution des équations différentielles [6]. En revanche, les études expérimentales restent rares en raison des difficultés liées

à la fabrication et à la caractérisation des matériaux fonctionnellement gradués. Cependant, elles jouent un rôle essentiel pour valider les modèles théoriques et numériques proposés. Par exemple, des études expérimentales récentes ont montré que la porosité dans les FGM peut influencer de manière significative leur comportement mécanique, notamment en réduisant leur rigidité tout en augmentant leur capacité d'amortissement [7]. Malgré les avancées réalisées, il existe encore un manque de consensus sur les meilleures approches pour modéliser les tubes poreux en FGM, en particulier lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations thermomécaniques complexes.

3 Objectifs de la Thèse

Cette thèse vise à combler certaines lacunes identifiées dans la littérature en proposant une analyse approfondie du comportement dynamique et statique d'un tube poreux en FGM sous l'effet de la température. Les objectifs spécifiques de cette recherche sont les suivants :

- 1- Développer un modèle dynamique pour un tube en FGM en utilisant deux théories des poutres : Euler-Bernoulli et Timoshenko. Ces approches complémentaires permettront de capturer les nuances du comportement mécanique du tube en fonction de sa géométrie et des conditions de chargement [8].
- 2- Étudier l'influence de la distribution des matériaux, de la porosité et de la température sur la dynamique du tube. Pour cela, la gradation du matériau sera décrite par une loi de puissance, qui modélise la variation continue des propriétés matérielles dans l'épaisseur du tube [9].
- 3- Comparer différentes méthodes de résolution : la méthode des éléments finis classique et la méthode de Galerkin. Cette comparaison permettra

d'évaluer les performances respectives de ces approches dans le cadre de notre étude et de valider nos résultats [10].

- 4- Valider les résultats obtenus par des comparaisons avec des études existantes ou des simulations numériques. Cette étape est cruciale pour garantir la fiabilité et la pertinence de notre modèle [11].

En somme, cette thèse ambitionne de fournir une compréhension approfondie du comportement des tubes poreux en FGM sous l'effet de la température, tout en proposant des solutions innovantes pour relever les défis technologiques actuels. Les résultats obtenus contribueront à enrichir la littérature scientifique et à guider le développement de nouvelles conceptions optimisées dans divers domaines d'application. Cette thèse est structurée en quatre chapitres, chacun abordant une facette spécifique du problème. Le premier chapitre présente une introduction générale aux Matériaux Fonctionnellement Gradués, en mettant l'accent sur leurs propriétés, leur fabrication et leurs applications potentielles. Le deuxième chapitre explore les fondements théoriques des théories des poutres, en comparant les hypothèses et les limites des approches d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Le troisième chapitre est consacré à la formulation mathématique des équations du mouvement par deux différentes méthodes : la méthode des éléments finis et la méthode de Galerkin. Enfin, le quatrième chapitre analyse les résultats obtenus à partir des simulations numériques, en discutant leur signification physique et leur pertinence pratique.

*Chapitre I: Généralités sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués

1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) représentent une classe innovante de matériaux dont les propriétés physiques, mécaniques ou chimiques varient continûment dans l'espace selon un gradient prédéfini. Contrairement aux matériaux traditionnels à structure homogène, les FGM sont conçus pour optimiser des performances spécifiques en répondant à des contraintes techniques complexes, comme la résistance aux hautes températures, la réduction des contraintes thermiques ou la manipulation de propriétés optiques. Ce chapitre explore leurs définitions, historique, applications, typologies et propriétés, avec une attention particulière portée à l'impact de la porosité sur leur comportement mécanique.

Ces dernières années, la recherche scientifique s'est développée en utilisant des matériaux céramiques pour répondre aux besoins croissants du secteur de l'ingénierie mécanique sous l'effet des températures, ces nouveaux matériaux ayant une bonne caractéristique de résistance aux températures élevées. Cependant, en raison de leur faible dureté, les céramiques seules ont des applications limitées dans l'industrie mécanique. Les matériaux FG sont un nouveau type de matériau composite qui a récemment piqué l'intérêt des chercheurs scientifiques et industriels. Ces matériaux ne sont pas homogènes, composés de plusieurs couches de mélanges progressifs de composants, dont la plupart sont en céramique et en métal. Les constituants en céramique peuvent supporter des températures élevées en raison de leurs qualités de barrière thermique, tandis que le métal permet d'obtenir les performances des capacités mécaniques les plus élevées des matériaux FG. Un groupe de scientifiques japonais a inventé le terme FGM au milieu des années 1980. [12]. Depuis lors, de nombreux travaux ont été consacrés au développement de ces matériaux, qui sont extrêmement résistants aux changements de température. [13, 14], Les matériaux FG ont été initialement proposés comme matériau réfractaire léger et à haute température pour les constructions aérospatiales, les réacteurs à fusion et les moteurs. Le concept de FGM, la modélisation mathématique, les méthodes de fabrication, l'évaluation des matériaux, les applications, les procédures d'assemblage dans FGM, la caractérisation des procédés et les considérations de conception sont tous abordés dans [15].

2 Définition

Un matériau fonctionnellement gradué (FGM) est caractérisé par une variation continue et contrôlée d'au moins une de ses propriétés (composition, microstructure, porosité, température) dans une ou plusieurs directions spatiales. Cette graduation peut être linéaire, exponentielle, polynomiale ou suivre une fonction sigmoïdale, selon les besoins du design. Les FGM combinent souvent des phases hétérogènes (comme des céramiques et des métaux) pour exploiter les avantages de chaque matériau tout en minimisant les incompatibilités.

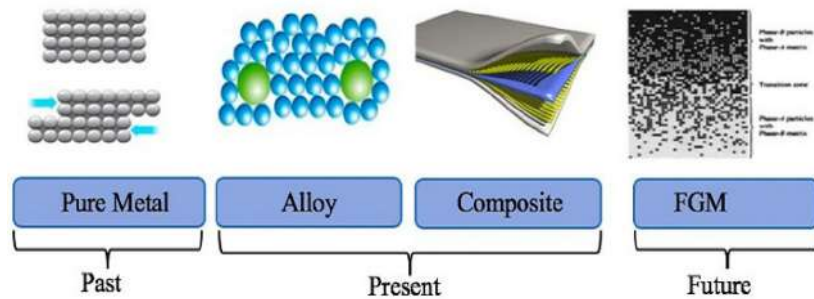


Figure 1: History of engineering materials leading to FGM development

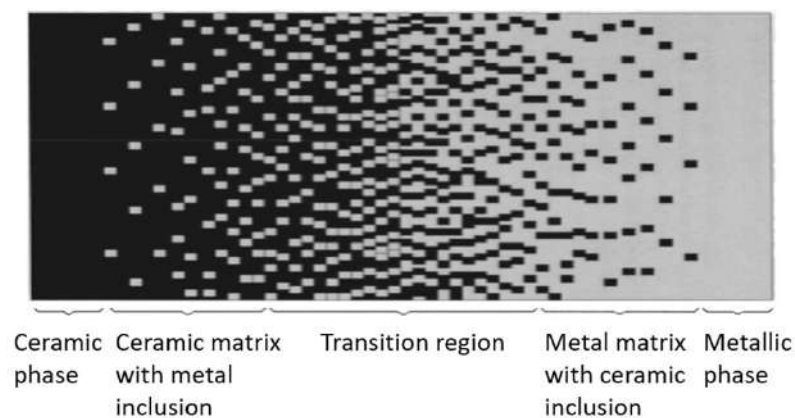


Figure 2: Illustration of FGM

3 Domaines d'applications

3.1 Aerospace

Les FGM sont utilisés dans les moteurs à réaction pour atténuer les gradients thermiques : une face extérieure en céramique (haute résistance thermique) est graduellement substituée par un alliage métallique intérieur (bonne conductivité). Exemple : revêtements de turbines à gaz de la NASA.



Figure 3: Section laterale d'une ailette d'une turbine

3.2 Médecine

Les implants osseux FGM (comme le titane gradué en hydroxyapatite) favorisent l'osseointégration en mimant la transition entre l'os cortical et spongieux. Les prothèses dentaires FGM réduisent les micro-déchirures par modulation de la dureté.

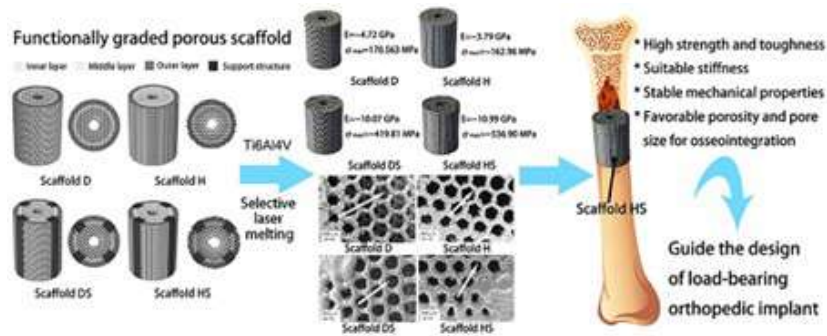


Figure 4: Protèse échafaudage poreux à gradient fonctionnel

3.3 Défense

Les blindages FGM absorbent l'énergie des projectiles via des gradients de densité (ex. composites céramique/titanium). Leur capacité à se fracturer de manière contrôlée limite la propagation des dégâts.

3.4 Énergie nucléaire

Les gaines de combustible nucléaire FGM (zirconium gradué en béryllium) améliorent la conduction thermique tout en résistant à l'oxydation. Les échangeurs de chaleur à gradients de porosité optimisent le transfert de chaleur.

3.5 Optoélectronique

Les couches minces FGM (ex. silicium graduation en dioxyde de titane) contrôlent la réfraction de la lumière, applications en photovoltaïque et capteurs optiques.

3.6 Articles de sports

Les raquettes de tennis FGM concentrent la rigidité au point de contact et la flexibilité au manche, améliorant l'élasticité sans perte de précision.

4 Composition et Propriétés des FGM

Les formes de gradation exactes du matériau FG ne sont pas disponibles. Cependant, il existe différentes lois mathématiques qui peuvent être utilisées pour représenter la distribution de la fraction volumique dans le matériau FG. Les propriétés du matériau varient en fonction de la distribution de la fraction volumique comme le montre la figure 5 [16] qui montre la microstructure graduée en continu d'un matériau FG. Dans le cas d'un arbre FG, la fraction volumique varie dans la direction radiale [17] comme le montre la figure 6. La première couche intérieure de l'arbre est composée uniquement de métal, à mesure que l'on se déplace vers la direction radiale extérieure, le volume fractionnaire du métal diminue et celui de la céramique augmente. Ainsi, la couche extérieure est composée à 100 % de céramique, ce qui donne d'excellentes propriétés de résistance à la température. La dépendance de la position est obtenue à l'aide du modèle de Voigt, qui donne une règle simple pour les matériaux composites. Les propriétés du matériau pour chaque couche sont exprimées dans l'équation 1.1.

$$P_i = P_c V_c + P_m V_m \quad (1.1)$$

Où P_c et P_m sont les propriétés matérielles de la céramique et du métal, respectivement, et V_c et V_m font référence à la fraction volumique de la céramique et du métal, respectivement. Différents modèles mathématiques ont été développés au fil des années par les chercheurs pour prédire avec précision la distribution. Il s'agit notamment de la loi de puissance, de la loi exponentielle, de la loi sigmoïde et du schéma de Mori-Tanaka, qui sont les lois les plus largement utilisées pour la gradation des matériaux FG. Cependant, la majorité des travaux antérieurs ont utilisé la gradation de la loi de puissance dans le cas des poutres cylindrique FG.

5 Loi de Distribution des Propriétés Matériaux FG

5.1 Loi de puissance (Power Law)

La loi de puissance est le modèle le plus couramment utilisé pour caractériser la gradation des matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials - FGM). Ce modèle bien établi est largement employé pour simuler le comportement mécanique et thermique des plaques, des arbres et d'autres composants en matériaux fonctionnellement gradués [18].

L'expression générale de la gradation selon la loi de puissance est donnée par l'équation suivante :

$$P(r) = [P_c - P_m] \left(\frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right)^k + P_m \quad (1.2)$$

Où :

- * $P(r)$ représente les propriétés du matériau variant radialement, telles que le module d'élasticité (E), le coefficient de Poisson (ν), la conductivité thermique (K), la densité (ρ) et le coefficient de dilatation thermique (α).
- * P_m et P_c sont respectivement les propriétés thermo dépendantes du matériau dans les zones riches en métal et en céramique. Ces propriétés sont obtenues en résolvant l'équation différentielle de la conduction thermique aux températures caractéristiques du métal et de la céramique.
- * R_o et R_i sont respectivement les rayons extérieur et intérieur du cylindre.
- * k est l'indice de gradation qui contrôle la répartition des propriétés du matériau dans la structure.

Cette fraction volumique joue un rôle crucial dans la distribution progressive des phases métallique et céramique dans la structure du matériau.

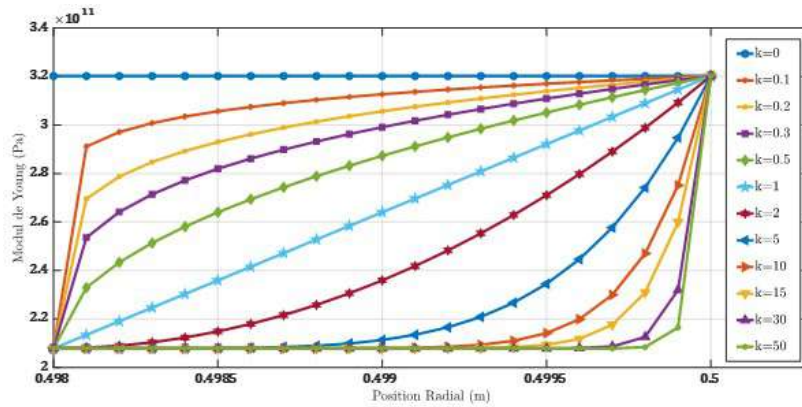


Figure 5: Variation du module de Young des matériaux FG en fonction de l'indice de volume fractionnaire k dans la direction radiale

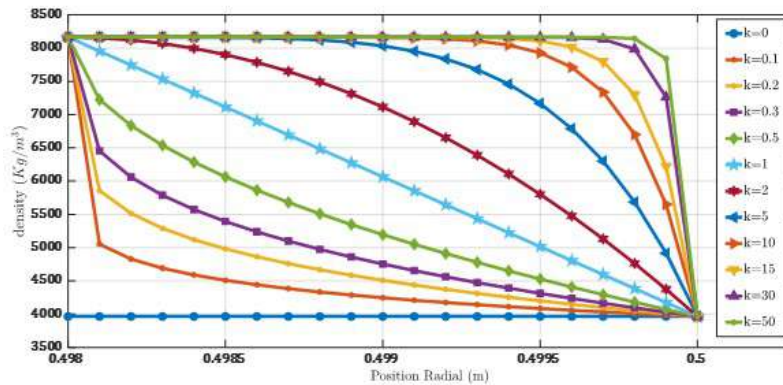


Figure 6: Variation de la densité du matériau FG en fonction de l'indice de volume fractionnaire k dans la direction radiale

Les figures 5 à 6 montrent les variations de température, de module de Young et de densité respectivement pour l'indice de fraction volumique. La variation des propriétés des matériaux FG peut être observée dans les courbes des figures 7 à 9 qui montrent le module de Young et la densité. Selon la loi de puissance, ces propriétés sont fonction de l'indice de gradation de la fraction volumique, qui peut varier dans la direction radiale de l'arbre. $k=0$ signifie que l'arbre est en céramique pure, $k=1$ signifie que l'arbre est en métal pur $k=1$ indique une gradation linéaire.

5.2 Propriétés Thermomécaniques des Matériaux à Gradient de Fonction (FG)

Les matériaux à gradient de fonction (FG) sont principalement conçus pour résister à des variations thermiques importantes. Leurs propriétés physiques et mécaniques varient en fonction de la température, influençant ainsi leur comportement global. Dans

la plupart des applications impliquant des arbres FG, la couche externe en céramique est exposée à des températures plus élevées que le noyau interne métallique. Cette variation thermique entraîne une gradation radiale des propriétés matérielles de l'arbre. Les propriétés dépendantes de la température des matériaux FG ont été proposées par [19] et sont exprimées par l'équation 1.3 :

$$P_j = P_0 \left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3 \right) \quad (1.3)$$

Où P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 sont les coefficients de température (en Kelvin) correspondant à chaque matériau constituant la gradation volumique des matériaux FG [18].

5.2.1 Matériaux Utilisés et Coefficients Thermiques

Dans cette étude, différentes combinaisons de matériaux FG ont été examinées. Le matériau interne est un acier inoxydable SUS304, tandis que les matériaux externes céramiques sont le Nickel, (Alumine), et le Zircon (ZrO_2). Les coefficients de température de ces matériaux sont extraits des travaux de [18] et sont présentés dans le tableau 1.

Table 1: Coefficients de Température

Materials	Property	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
SUS304	E (Pa)	0	201.04e9	$3.079e - 4$	$-6.534e - 7$	0
	K (W/mK)	0	15.379	$-1.264e - 3$	$2.092e - 6$	$-7.223e - 10$
	ν	0	0.3262	$-2.002e - 4$	$3.797e - 7$	0
Ni	E (Pa)	0	223.95e9	$-2.794e - 4$	$-3.998e - 9$	0
	K (W/mK)	0	58.754	$-4.614e - 4$	$6.670e - 7$	$-1.523e - 10$
	ν	0	0.3100	0	0	0
Al_2O_3	E (Pa)	0	349.54e9	$-3.8532e - 4$	$4.0269e - 7$	$-1.6734e - 10$
	K (W/mK)	-1123.6	-14.087	0.00044	0	0
	ν	0	0.26	0	0	0
ZrO_2	E (Pa)	0	244.27e9	$-1.371e - 3$	$1.214e - 6$	$-3.681e - 10$
	K (W/mK)	0	1.7000	$1.276e - 4$	$6.648e - 8$	0
	ν	0	0.2882	$1.133e - 4$	0	0

5.2.2 Modélisation du Comportement Thermomécanique

La réponse des matériaux FG aux effets thermomécaniques peut être prédictelement modélisée en utilisant différentes méthodes de distribution de température, telles que la distribution non linéaire. Parmi les propriétés affectées par la température, on retrouve le module d'Young, le coefficient de Poisson et la conductivité thermique, tandis que la

densité reste invariable. Dans le cas d'un cylindre solide symétrique, et en supposant l'absence de génération de chaleur interne, la résolution numérique de l'équation de conduction thermique différentielle avec les conditions aux limites appropriées donne les profils de distribution radiale de la température :

$$\frac{d}{dr} \left(rK(r, T) \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Cette analyse est essentielle pour comprendre le comportement des matériaux FG soumis à des environnements thermiques extrêmes.

5.2.3 Distribution Thermique et Modélisation

La distribution non linéaire de la température dans les matériaux FG repose sur une gradation par loi de puissance. Cette distribution satisfait l'équation (3) sous certaines conditions aux limites et en prenant en compte les sept premiers termes du développement en série de Taylor [20]:

$$T(r(x)) = T_m + (T_c + T_m) \Gamma(x) \quad (1.5)$$

Avec

$$\Gamma(x) = \frac{\left[\sum_{j=0}^5 \left(\frac{(-1)^j}{j^{k+1}} \left(\frac{K_{cm}}{K_m} \right)^j \left(\frac{r(x)-R_i(x)}{R_o(x)-R_i(x)} \right)^{jk+1} \right) \right]}{\left[\sum_{j=0}^5 \left(\frac{(-1)^j}{j^{k+1}} \left(\frac{K_{cm}}{K_m} \right)^j \right) \right]} \quad (1.6)$$

Où $K_{cm} = K_c - K_m$, avec K_c et K_m représentant respectivement la conductivité thermique des régions riches en céramique et en métal à une température donnée.

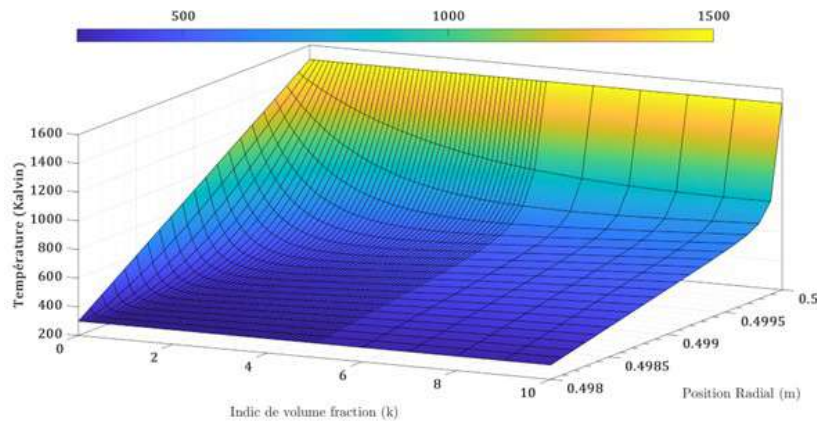


Figure 7: Profil de distribution de température utilisant une distribution de température non linéaire dans SS-Al₂O₃

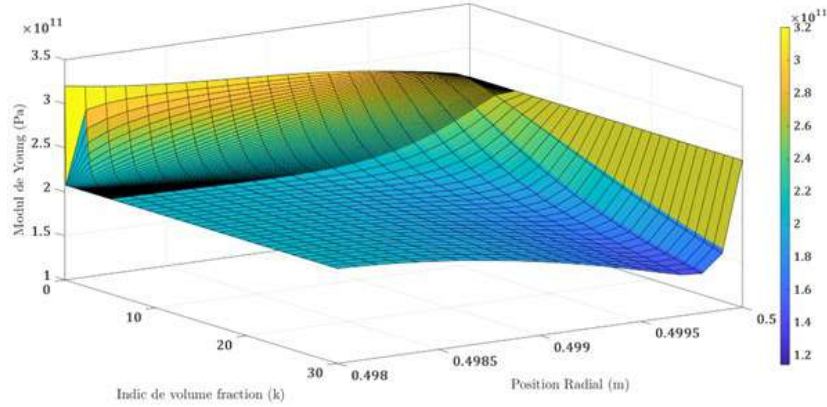


Figure 8: Variation du module de Young des matériaux FG en fonction de l'indice de volume fractionnaire k dans la direction radiale (300K-1500K) FG SS-Al₂O₃

5.3 Porosité sur les matériaux à gradients fonctionnels

Les matériaux à gradients fonctionnels (FGM) sont des composites dont les propriétés varient progressivement dans l'espace afin d'optimiser les performances mécaniques, thermiques ou électriques. L'une des caractéristiques essentielles influençant leur comportement est la porosité, qui peut être introduite intentionnellement ou être le résultat du procédé de fabrication. Dans les structures cylindriques en FGM, la distribution de la porosité selon la direction radiale joue un rôle clé dans la réponse mécanique et thermique du matériau. Deux modèles principaux sont couramment utilisés pour décrire cette distribution : 1. La porosité uniforme 2. La porosité non-uniforme Ces modèles, proposés par [21], permettent de quantifier l'évolution de la porosité et d'étudier son influence sur les propriétés physiques du matériau.

5.3.1 Modèle de porosité uniforme

Dans ce modèle, la porosité est répartie de manière homogène à travers l'épaisseur radiale du matériau. Elle est exprimée par l'équation suivante :

$$P(r, e, T) = [P_c(T) - P_m(T)] \left(\frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right)^k + P_m(T) - [P_c(T) - P_m(T)] \frac{e_p}{2} \quad (1.7)$$

d'où e_p est l'indice de porosité, supposé faible $e_p \ll 1$.

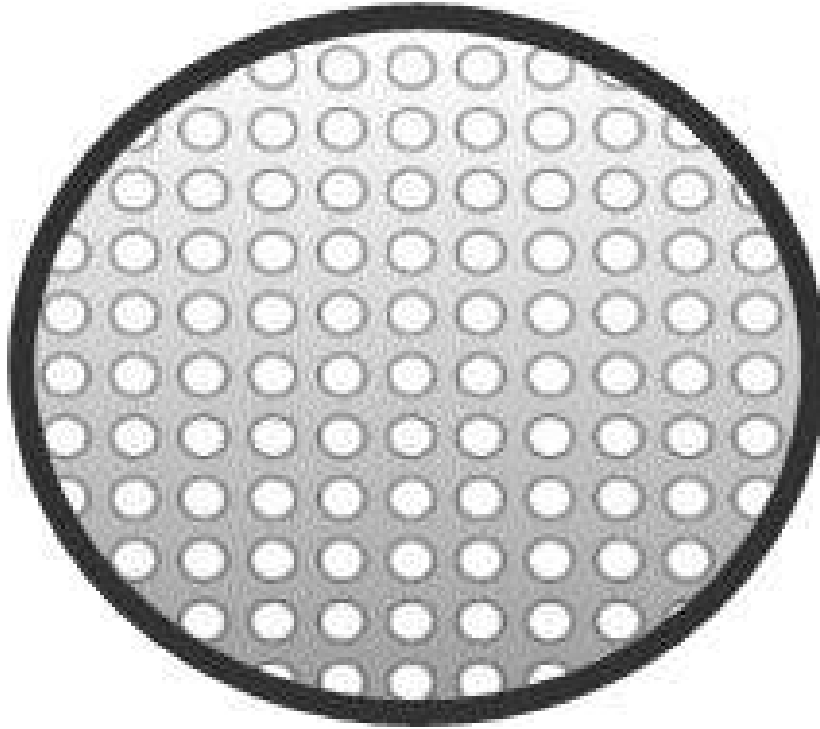


Figure 9: Représentation schématique d'une section transversale poreuse uniforme

Ce modèle reflète une distribution régulière de la porosité, ce qui simplifie son intégration dans les analyses mécaniques et thermiques des structures FGM.

5.3.2 Modèle de porosité non uniforme

Dans certaines applications, la porosité peut se concentrer autour d'une zone médiane du matériau, créant une répartition non uniforme. Ce type de distribution suit l'équation suivante :

$$P(r, e, T) = [P_c(T) - P_m(T)] \left(\left(\frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right)^k - \left(1 - \frac{2|R_o|}{r} \right) \frac{e_p}{2} \right) + P_m(T) \quad (1.8)$$

Dans ce cas, la porosité est plus élevée dans une région spécifique du matériau, formant une répartition inégale qui peut influencer :

- La répartition des contraintes dans la structure
- La résistance thermique et les flux de chaleur
- La propagation des fissures et la durabilité du matériau

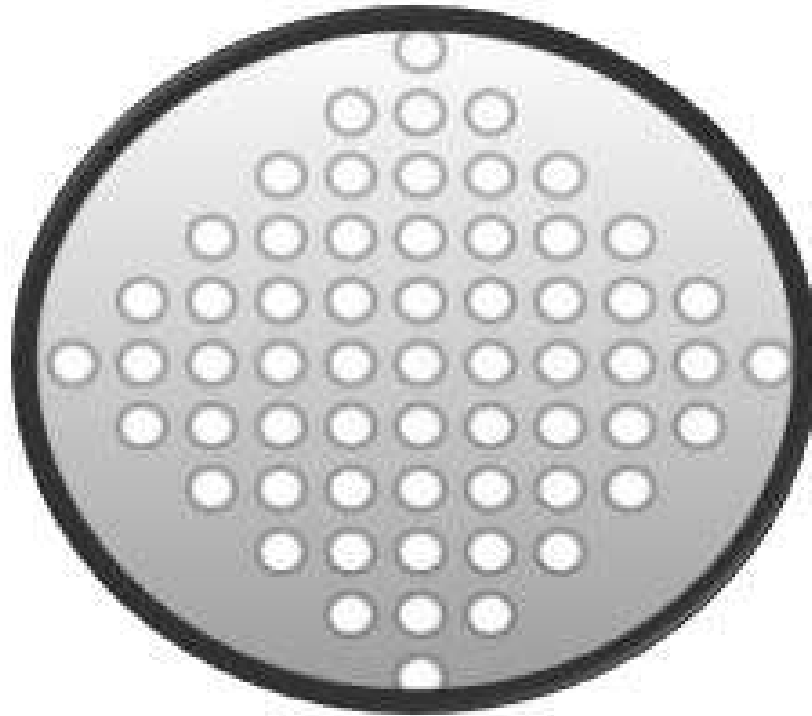


Figure 10: Représentation schématique d'une section transversale poreuse non uniforme

5.3.3 Effets de la porosité sur les propriétés des FGM

a Influence sur les propriétés mécaniques

- Une porosité élevée réduit la rigidité (E) et la résistance mécanique du matériau.
- Une répartition homogène permet un comportement plus prévisible, tandis qu'une porosité inégale peut créer des zones de faiblesse.
- L'indice de gradation k joue un rôle dans la transition entre les zones riches en céramique et en métal, influençant la déformation sous contrainte.

b Influence sur la conductivité thermique

- Une augmentation de la porosité réduit la conductivité thermique (K), affectant la dissipation de chaleur.
- Les zones à forte porosité peuvent servir d'isolants thermiques, mais peuvent aussi provoquer des concentrations locales de chaleur.

c Influence sur la densité et la masse spécifique

- Une structure plus poreuse est généralement plus légère, ce qui peut être un

avantage pour les applications aéronautiques ou spatiales.

- Toutefois, une densité plus faible peut compromettre la résistance aux charges dynamiques.

d Applications et implications industrielles Les modèles de porosité des FGM trouvent des applications dans divers domaines :

- Aéronautique et spatial : Réduction de poids et amélioration de la résistance thermique dans les moteurs et structures portantes.
- Industrie biomédicale : Implants osseux avec une porosité contrôlée pour améliorer l'ostéointégration.
- Énergie : Revêtements thermiques de turbines et barrières thermiques avec une répartition optimisée de la porosité.

La porosité dans les matériaux à gradients fonctionnels est un paramètre essentiel qui influence leurs propriétés mécaniques, thermiques et physiques. Selon sa distribution, elle peut améliorer ou limiter les performances du matériau. Les modèles de porosité uniforme et non uniforme permettent de mieux comprendre et de prédire l'impact de cette caractéristique sur les FGM. L'optimisation de ces paramètres est cruciale pour développer des matériaux plus résistants et adaptés aux exigences industrielles modernes.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les matériaux à gradient de propriétés (FGM), en mettant l'accent sur leurs caractéristiques, leurs applications, ainsi que leur évolution historique et leur développement. Nous avons également introduit la loi de puissance, qui permet de modéliser la variation des propriétés matérielles des FGM selon la direction radiale des tubes. Enfin, nous avons abordé la notion de porosité sur les matériaux FG et proposé deux modèles de distribution de porosité pour étudier son influence sur les propriétés mécaniques des matériaux.

*Chapitre II: Théorie des poutres

1 Introduction

Les poutres cylindriques sont des structures largement utilisées dans divers domaines de l'ingénierie, notamment en génie civil, mécanique et aérospatial. Leur géométrie particulière offre une combinaison unique de résistance et de légèreté, ce qui les rend adaptées à des applications où la répartition des charges et la flexion jouent un rôle crucial. Dans ce chapitre, nous explorerons deux théories fondamentales pour l'analyse des poutres cylindriques : la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko. Nous commencerons par établir les équations générales régissant l'énergie cinétique et l'énergie de déformation, puis nous appliquerons ces concepts à chaque théorie. Enfin, nous conclurons en mettant en lumière les différences entre ces deux approches.

2 Équations générales de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation

2.1 Énergie cinétique

L'expression générale de l'énergie cinétique T d'une poutre cylindrique est définie comme l'énergie associée au mouvement de ses particules constitutives. Pour une poutre de longueur L , de section transversale $A=dydz$, et de densité volumique ρ , l'énergie cinétique s'exprime comme :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left(\dot{u}_1^2(x, y, z, t) + \dot{u}_2^2(x, y, z, t) + \dot{u}_3^2(x, y, z, t) \right) dydzdx \quad (2.1)$$

Où : $u_1^2(r, \theta, x, t)$, $u_2^2(r, \theta, x, t)$, $u_3^2(r, \theta, x, t)$ représentent respectivement les déplacements axiaux, transversaux et longitudinaux ;

$\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ désignent leurs dérivées temporelles.

2.2 Énergie de déformation

L'énergie de déformation U stockée dans une poutre soumise à des efforts internes est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dydzdx \quad (2.2)$$

D'où : σ_{ij} et ε_{ij} représentant le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations respectivement.

La relation contrainte-déformation dans une poutre découle de la loi de Hooke

généralisée. Pour un matériau, la contrainte σ_{ij} et la déformation ε_{ij} sont liées par :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

Avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker delta

D'où :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \quad (2.5)$$

Par conséquent, μ et λ sont les constantes de Lamé et ν est le coefficient de Poisson. Le tenseur des déformations est déduit par l'équation suivant :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6)$$

Les indices $i=1,2,3$ et $j=1,2,3$ représentant les coordonnées x, y, z

3 Hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres

La théorie des poutres repose sur l'hypothèse de Navier, également appelée hypothèse de Navier-Bernoulli ou Navier-Timoshenko, qui stipule que : « Toute section droite de la configuration initiale reste plane et rigide durant la déformation » Cette hypothèse peut également s'exprimer de manière équivalente comme suit : « La section droite se déplace comme un solide indéformable. »

Hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko

- **Hypothèse d'Euler-Bernoulli** : La section droite reste plane, indéformable et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation. De plus, la déformation transversale est supposée nulle.

- **Hypothèse de Timoshenko** : La section droite reste indéformable mais n'est plus perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (rotation de la section). Contrairement au modèle d'Euler-Bernoulli, l'effet de cisaillement est pris en compte et n'est pas négligé.

Remarques importantes

1. L'hypothèse de Navier impose uniquement le maintien de la planarité de la section, sans contrainte de perpendicularité par rapport à la ligne moyenne.
2. Cette hypothèse ne suffit pas à déterminer complètement l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses complémentaires sont nécessaires pour relier les contraintes généralisées (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes locales en tout point de la section.

Application dans cette étude

Dans ce travail, nous utilisons les modèles classiques d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

4 Théorie d'Euler-Bernoulli pour une poutre cylindrique

4.1 Hypothèses de base

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est une approche classique utilisée pour modéliser le comportement mécanique des poutres soumises à des charges. Elle repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices, notamment : 1. Les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre après déformation.

2. Les effets de cisaillement transverse sont négligés.
3. Les déformations sont petites.

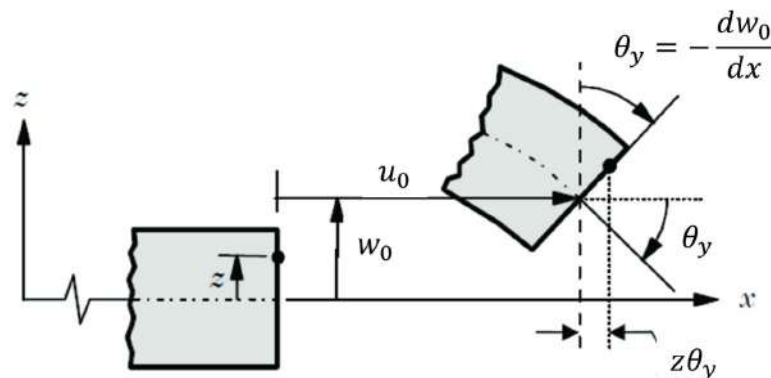


Figure 11: Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oy selon d'Euler Bernoullie

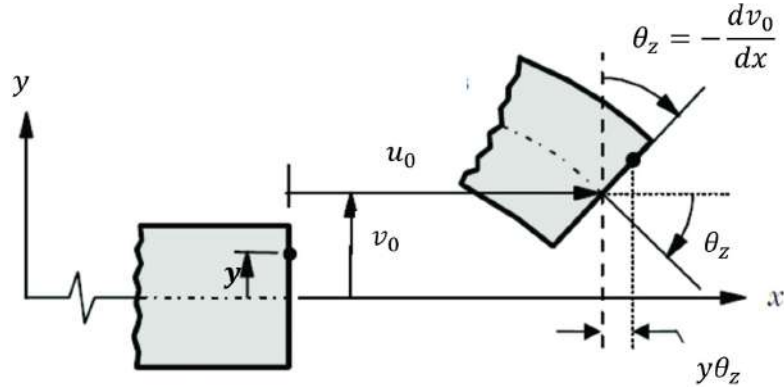


Figure 12: Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oz selon d'Euler Bernoullie

Dans cette théorie, le champ de déplacement est décrit dans un référentiel cartésien (x,y,z) , où x est l'axe longitudinal de la poutre, et y et z sont les axes transversaux. Les composantes du déplacement (u,v,w) représentent respectivement les déplacements selon les directions x , y , et z . Voici une analyse détaillée du champ de déplacement donné :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{dw_0}{dx}(x, t) - y \frac{dv_0}{dx}(x, t) \\ v(x, z, t) = v_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Où :

- $u_0(x, t)$ est le déplacement axial de la ligne neutre de la poutre (axe central de la poutre située à $y = 0$ et $z = 0$).

- $-\frac{dw_0}{dx}(x, t)$ est la rotation de la section transversale autour de l'axe y , due à la flexion selon z . Cette rotation est proportionnelle à la dérivée spatiale du déplacement transversal $w_0(x, t)$.

- $-\frac{dv_0}{dx}(x, t)$ est la rotation de la section transversale autour de l'axe z , due à la flexion selon y . Cette rotation est proportionnelle à la dérivée spatiale du déplacement transversal $v_0(x, t)$.

- $v_0(x, t)$ est le déplacement transversal de la ligne neutre de la poutre dans la direction y .

- $w_0(x, t)$ est le déplacement transversal de la ligne neutre de la poutre dans la direction z .

Interprétation physique :

- Le terme $u_0(x, t)$ reflète un mouvement axial global de la poutre.
- Les termes $-z \frac{dw_0}{dx}(x, t)$ et $-y \frac{dv_0}{dx}(x, t)$ décrivent les effets de la flexion sur le déplacement longitudinal. Ces effets proviennent de l'hypothèse que les sections transversales restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre après déformation. Plus précisément :
 - Si la poutre se courbe dans le plan xz (flexion selon z), chaque point situé à une distance z de l'axe neutre subit un déplacement longitudinal proportionnel à z et à la courbure $\frac{d^2w_0}{dx^2}$.
 - De même, si la poutre se courbe dans le plan xy (flexion selon y), chaque point situé à une distance y de l'axe neutre subit un déplacement longitudinal proportionnel à y et à la courbure $\frac{d^2v_0}{dx^2}$.
 - Les déplacements $v(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$ sont indépendants des coordonnées y et z , ce qui signifie que tous les points d'une même section transversale ont le même déplacement $v_0(x, t)$ et $w_0(x, t)$ dans la direction y et z . Cela reflète l'hypothèse que les sections transversales ne se déforment pas dans leur propre plan.

Le champ de déplacement donné capture les effets combinés de la traction/compression axiale (u_0) et de la flexion (v_0 et w_0) dans une poutre selon la théorie d'Euler-Bernoulli. Il s'agit d'une description simplifiée mais puissante pour analyser le comportement des structures élancées soumises à des charges diverses. Les déformations longitudinales dues à la flexion sont directement liées aux courbures de la poutre, tandis que les déplacements transversaux sont uniformes dans chaque section transversale.

4.2 Énergie cinétique selon Euler-Bernoulli

En appliquant l'équation (2.7) sur l'équation (2.1) et en remplaçant les coordonnées z et y par $z = r \sin(\theta)$ et $y = r \cos(\theta)$, et $dydz = r dr d\theta$, on obtient l'énergie cinétique basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(J_1 (\dot{u}^2 + \dot{w}_0^2 + \dot{v}_0^2) + J_2 \left(\left(\frac{d\dot{w}_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\dot{v}_0}{dx} \right)^2 \right) \right) dx \quad (2.8)$$

Sachant que :

$$\{J_1, J_2\} = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_0} \rho \{1, r^2 \sin^2(\theta)\} r dr d\theta \quad (2.9)$$

Avec R_i et R_o sont le rayon interne et externe du tube cylindrique.

4.3 Énergie de déformation selon Euler-Bernoulli

En appliquant les équations (2.3) - (2.7) sur l'équation (2.2) de l'énergie de déformation et aussi en remplaçant les coordonnées z et y par $z = r \sin(\theta)$ et $y = r \cos(\theta)$, et $dydz = r dr d\theta$, on obtient l'énergie de déformation basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

Le tenseur de déformation est déduit par l'équation (2.6) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w_0}{dx^2} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} \quad (2.10)$$

Avec $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.

On déduit le tenseur de contrainte en remplaçant l'équation (2.10) dans l'équation (2.3) :

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w_0}{dx^2} - y \frac{d^2v_0}{dx^2} \right) \quad (2.11)$$

Avec $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

En remplaçant les équations (2.10) et (2.11) dans l'expression générale de l'énergie de déformation (2.2) :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left(I_1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I_2 \left(\left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 \right) \right) dx \quad (2.12)$$

Avec :

$$\{I_1, I_2\} = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} (\lambda + 2\mu) \{1, r^2 \sin^2(\theta)\} r dr d\theta \quad (2.13)$$

5 Théorie des poutres de Timoshenko

5.1 Hypothèses de base

La théorie des poutres de Timoshenko est une extension de la théorie d'Euler-Bernoulli qui prend en compte les effets du cisaillement transverse et de la rotation des sections transversales. Elle est particulièrement utile pour modéliser des poutres épaisses ou soumises à des charges importantes, où les hypothèses simplificatrices de la théorie d'Euler-Bernoulli (notamment l'hypothèse de Navier-Bernoulli) ne sont plus valides.

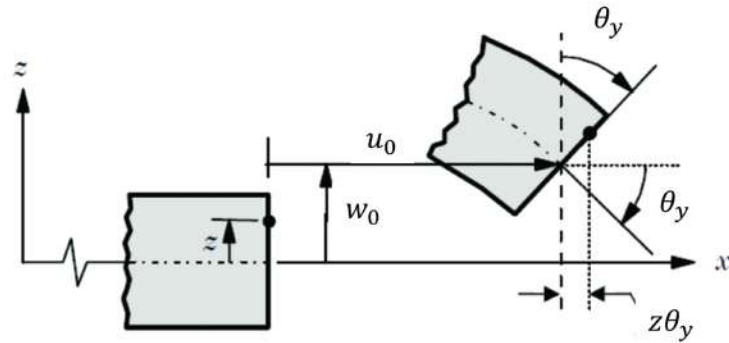


Figure 13: Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oz selon Timoshenko

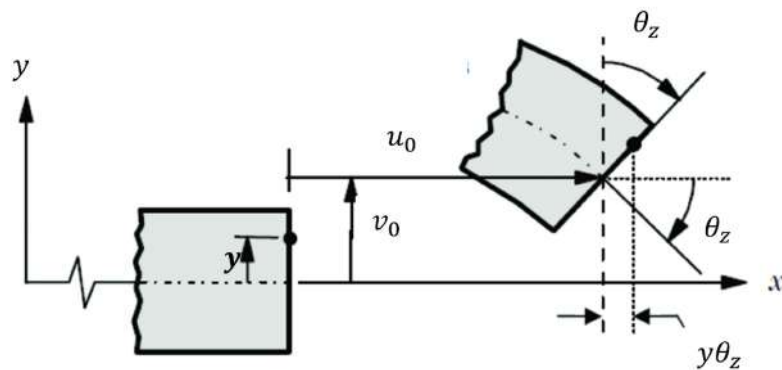


Figure 14: Aproximation de Rotation de flexion autour de l'axe Oz selon Timoshenko

Dans cette théorie, le champ de déplacement est décrit dans un référentiel cartésien (x, y, z) , où x est l'axe longitudinal de la poutre, et y et z sont les axes transversaux. Les composantes du déplacement (u, v, w) représentent respectivement les déplacements selon les directions x , y , et z . Le champ de déplacement est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\theta_y(x, t) - y\theta_z(x, t), \\ v(x, z, t) = v_0(x, t), \\ w(x, z, t) = w_0(x, t). \end{cases} \quad (2.14)$$

Où :

- $\theta_y(x, t)$ est la rotation de la section transversale autour de l'axe y , due à la flexion selon z . Contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli, cette rotation n'est pas

directement liée à la dérivée spatiale du déplacement transversal $w_0(x, t)$, car elle inclut également l'effet du cisaillement transverse.

- $\theta_z(x, t)$ est la rotation de la section transversale autour de l'axe z , due à la flexion selon y . De même, cette rotation n'est pas directement liée à la dérivée spatiale du déplacement transversal $v_0(x, t)$.

- Dans la théorie d'Euler-Bernoulli, les rotations des sections transversales (θ_y et θ_z) sont directement liées aux dérivées spatiales des déplacements transversaux ($\frac{dw_0}{dx}$ et $\frac{dv_0}{dx}$), ce qui implique que les sections transversales restent perpendiculaires à l'axe neutre.

- Dans la théorie de Timoshenko, les rotations des sections transversales (θ_y et θ_z) sont des variables indépendantes, ce qui permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transverse. Cette approche est donc plus générale et plus précise pour les poutres épaisses ou soumises à des charges importantes.

5.2 Énergie cinétique selon Timoshenko

En appliquant l'équation (2.7) sur l'équation (2.1) et en remplaçant les coordonnées z et y par $z = r \sin(\theta)$ et $y = r \cos(\theta)$, et $dydz = r dr d\theta$, on obtient l'énergie cinétique basée sur la théorie des poutres de Timoshenko :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(J_1 (\dot{u}^2 + \dot{w}_b^2 + \dot{v}_b^2) + J_2 (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2) \right) dx \quad (2.15)$$

Sachant que :

$$\{J_1, J_2\} = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \rho \{1, r^2 \sin^2(\theta)\} r dr d\theta \quad (2.16)$$

Avec R_i et R_o sont le rayon interne et externe du tube cylindrique.

5.3 Énergie de déformation selon Timoshenko

En appliquant les équations (2.3) - (2.7) sur l'équation (2.2) de l'énergie de déformation et aussi en remplaçant les coordonnées z et y par $z = r \sin(\theta)$ et $y = r \cos(\theta)$, et $dydz = r dr d\theta$, on obtient l'énergie de déformation basée sur la théorie des poutres de Timoshenko.

Le tenseur de déformation est déduit par l'équation (2.6) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du_0}{dx} + r \sin(\theta) \frac{d\theta_y}{dx} - r \cos(\theta) \frac{d\theta_z}{dx} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dv_0}{dx} - \theta_z \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} + \theta_y \right) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Avec $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0$.

On déduit le tenseur de contrainte en remplaçant l'équation (2.10) dans l'équation (2.3) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xr} \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{du_0}{dx} + r \sin(\theta) \frac{d\theta_y}{dx} - r \cos(\theta) \frac{d\theta_z}{dx} \right) \\ k_s \mu \left(\frac{dv_0}{dx} - \theta_z \right) \\ k_s \mu \left(\frac{dw_0}{dx} + \theta_y \right) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Avec $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. k_s est le facteur de cisaillement.

En remplaçant les équations (2.17) et (2.18) dans l'expression générale de l'énergie de déformation (2.2) :

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_0^l \left(I_1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I_2 \left(\left(\frac{d\theta_y}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\theta_z}{dx} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + I_3 \left(\theta_y^2 + \theta_z^2 + \left(\frac{dv_b}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw_b}{dx} \right)^2 + 2\theta_y \frac{dw_b}{dx} - 2\theta_z \frac{dv_b}{dx} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec :

$$\{I_1, I_2\} = \int (\lambda + 2\mu) \{1, r^2 \sin^2(\theta)\} r dr d\theta, \quad \{I_3\} = 2 \int k_s \mu \sin^2(\theta) r dr d\theta \quad (2.20)$$

5.4 Vecteur de travail virtuel

Le vecteur de travail virtuel F représente les forces externes agissant sur le système. Il découle du principe du travail virtuel :

$$W = \int (f_u u + f_v v + f_w w + g_y \theta_y + g_z \theta_z) dx \quad (2.21)$$

Avec f_u, f_v, f_w sont les forces extérieures suivant les axes Ox, Oy et Oz . g_y et g_z représentent les couples des forces extérieures autour des axes Oy et Oz .

5.5 Conclusion

Ce chapitre a exploré deux théories fondamentales pour l'analyse des poutres cylindriques : la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko. La première est basée sur des hypothèses simplificatrices qui négligent les effets de cisaillement, tandis que la seconde intègre ces effets pour fournir une description plus précise des déformations.

La différence principale entre les deux théories réside dans leur traitement des déformations dues au cisaillement. La théorie d'Euler-Bernoulli est adaptée aux poutres minces où ces effets sont négligeables, alors que la théorie de Timoshenko est mieux adaptée aux poutres épaisses ou courtes, où le cisaillement joue un rôle significatif.

En résumé, le choix entre ces deux théories dépend des caractéristiques géométriques et des conditions de chargement spécifiques de la poutre étudiée.

*Chapitre III: Formulation de l'équation du mouvement

1 Introduction

L'étude du comportement mécanique des tubes cylindriques en matériaux fonctionnellement gradués nécessite des outils mathématiques et numériques robustes, capables de capturer les variations continues des propriétés matérielles à travers leur volume. Dans ce contexte, les méthodes numériques jouent un rôle central en permettant de résoudre les équations gouvernantes complexes qui décrivent le comportement des structures fabriquées à partir de ces matériaux. Ce troisième chapitre est consacré à l'exploration des principales méthodes numériques utilisées dans l'analyse des structures FGM, avec un accent particulier sur la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode semi-analytique de Galerkin.

La méthode des éléments finis, largement utilisée dans l'ingénierie moderne, se distingue par sa capacité à discrétiser des géométries complexes et à gérer des variations matérielles non homogènes. Elle offre une flexibilité exceptionnelle pour modéliser des phénomènes mécaniques variés, tels que la flexion, la vibration ou encore la stabilité des poutres FGM. En parallèle, la méthode semi-analytique de Galerkin, bien que moins répandue, présente l'avantage d'allier simplicité de mise en œuvre et précision élevée, notamment dans les cas où des solutions analytiques partielles peuvent être exploitées.

Ce chapitre vise ainsi à présenter ces deux approches, en mettant en lumière leurs principes fondamentaux, leur efficacité dans la résolution des problèmes liés aux théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, abordées dans le chapitre précédent. Cette exploration fournira une base solide pour comprendre les outils numériques modernes et leur rôle crucial dans l'analyse avancée des structures FGM.

2 Discrétisation par la Méthode des Éléments Finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une approche puissante pour résoudre numériquement des problèmes d'ingénierie impliquant des équations aux dérivées partielles. Elle repose sur la discrétisation du domaine physique en sous-domaines appelés "éléments", où les champs inconnus sont approximés à l'aide de fonctions de forme locales.

Dans la MEF, les champs inconnus $u_0(x, t)$, $v_0(x, t)$, et $w_0(x, t)$ sont exprimés comme des combinaisons linéaires de fonctions de base $[N_u(x)]$, $[N_v(x)]$, et $[N_w(x)]$, multipliées par des coefficients nodaux $q_u(t)$, $q_v(t)$, et $q_w(t)$. Cela peut être écrit sous la forme

matricielle suivante :

$$u_0(x, t) = [N_u(x)]q_u(t), \quad v_0(x, t) = [N_v(x)]q_v(t), \quad w_0(x, t) = [N_w(x)]q_w(t) \quad (3.1)$$

Où $[N]$ représente la matrice des fonctions de forme, définie comme suit :

$$[N] = \begin{bmatrix} H_1(x) & \frac{L_e}{2}H_2(x) & H_3(x) & \frac{L_e}{2}H_4(x) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Les fonctions $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, et $H_4(x)$ sont des fonctions de forme spécifiques à l'élément, qui dépendent de la position relative x/L_e , où L_e est la longueur de l'élément. Ces fonctions permettent de capturer le comportement local des champs physiques.

2.1 Définition des Fonctions de Forme

Les fonctions de forme $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, et $H_4(x)$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 2 \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L_e}\right), & H_2(x) &= 2 \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2 \left(\frac{x}{L_e}\right), \\ H_3(x) &= \left(\frac{x}{L_e}\right)^2 \left(3 - \frac{2x}{L_e}\right), & H_4(x) &= 2 \left(\frac{x}{L_e}\right)^2 \left(\frac{x}{L_e} - 1\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ces fonctions satisfont les propriétés suivantes :

- Elles sont continues sur l'intervalle $[0, L_e]$.
- Elles prennent des valeurs nulles ou unitaires aux extrémités de l'élément.
- Leur somme est égale à 1 sur tout l'intervalle.

2.2 Propriétés des Fonctions de Forme

- **Interpolation** : Les fonctions de forme permettent d'interpoler les valeurs nodales entre deux points d'un élément.

- **Support Local** : Chaque fonction de forme est non nulle uniquement dans un sous-domaine spécifique de l'élément.

- **Orthogonalité Numérique** : Les intégrales des produits croisés des fonctions de forme sur un élément sont souvent nulles, facilitant les calculs numériques.

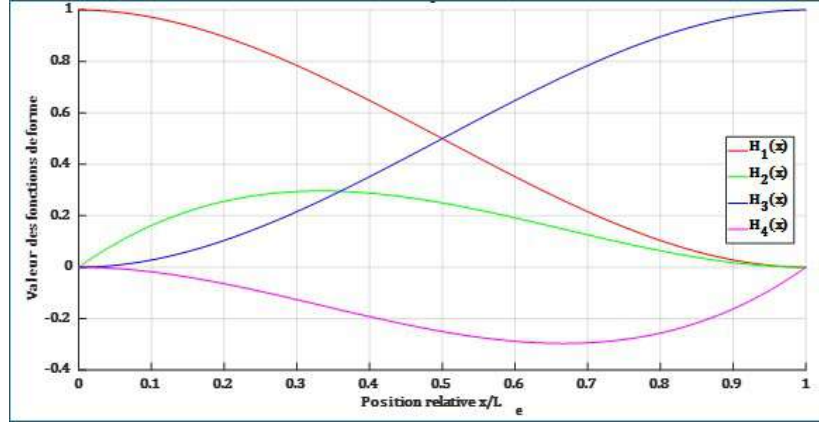


Figure 15: fonctions de formes pour un élément fini

3 Discrétisation de l'équation de mouvement par la méthode des éléments finis

3.1 MEF via la théorie d'Euler-Bernoulli

Dans cette section, l'application de la méthode des éléments finis sur les expressions des énergies cinétique et de déformation déduites à partir de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est présentée. En remplaçant les déplacements par leurs approximations (3.1) - (3.3), les énergies (2.8) et (2.12) deviennent :

$$\begin{aligned}
 T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[J_1 \left([N_u]^T [N_u] \dot{q}_u^2 + [N_w]^T [N_w] \dot{q}_w^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + [N_v]^T [N_v] \dot{q}_v^2 \right) \right. \\
 \left. + J_2 \left(\left[\frac{dN_w}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_w}{dx} \right] \dot{q}_w^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \dot{q}_v^2 \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[I_1 \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] q_u^2 + I_2 \left(\left[\frac{d^2 N_w}{dx^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N_w}{dx^2} \right] q_w^2 + \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] q_v^2 \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

L'équation de Lagrange est utilisée pour dériver les équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \tag{3.6}$$

La matrice de masse est obtenue à partir des termes d'énergie cinétique :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [M]_{22} & [0] \\ [0] & [0] & [M]_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [M]_{11} &= \int_0^l [J_1 [N_u]^T [N_u]] dx, \\ [M]_{22} &= \int_0^l \left[J_1 [N_v]^T [N_v] + J_2 \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \right] dx, \\ [M]_{33} &= \int_0^l \left[J_1 [N_w]^T [N_w] + J_2 \left[\frac{dN_w}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_w}{dx} \right] \right] dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La matrice de rigidité est obtenue à partir des termes d'énergie de déformation :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [K]_{22} & [0] \\ [0] & [0] & [K]_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [K]_{11} &= \int_0^l \left[I_1 \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \right] dx, \\ [K]_{22} &= \int_0^l \left[I_2 \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] \right] dx, \\ [K]_{33} &= \int_0^l \left[I_2 \left[\frac{d^2 N_w}{dx^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N_w}{dx^2} \right] \right] dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

L'équation de mouvement globale du système s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \\ \ddot{q}_w \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Cette équation peut être résolue numériquement pour obtenir les fréquences propres et les modes de vibration du tube cylindrique en FGM.

4 MEF via la théorie de Timoshenko

Dans cette section, l'application de la méthode des éléments finis sur les expressions des énergies cinétique et déformation déduites à partir de la théorie des poutres de Timoshenko est présentée.

En remplaçant les déplacements par leurs approximations (3.1) - (3.3), les énergies (2.15) et (2.19) deviennent :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[J_1 \left([N_u]^T [N_u] \dot{q}_u^2 + [N_w]^T [N_w] \dot{q}_w^2 + [N_v]^T [N_v] \dot{q}_v^2 \right) + J_2 \left([N_y]^T [N_y] \dot{q}_y^2 + [N_z]^T [N_z] \dot{q}_z^2 \right) \right] dx \quad (3.12)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(I_1 \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] q_u^2 + I_2 \left(\left[\frac{dN_y}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_y}{dx} \right] q_y^2 + \left[\frac{dN_z}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_z}{dx} \right] q_z^2 \right) \right) + I_3 \left([N_y]^T [N_y] q_y^2 + [N_z]^T [N_z] q_z^2 + \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] q_v^2 + \left[\frac{dN_w}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_w}{dx} \right] q_w^2 + 2 [N_y]^T \left[\frac{dN_w}{dx} \right] q_y q_w - 2 [N_z]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] q_z q_v \right) \right] dx \quad (3.13)$$

L'équation de Lagrange est utilisée pour dériver les équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (3.14)$$

La matrice de masse est obtenue à partir des termes d'énergie cinétique :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{11} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [M]_{22} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M]_{33} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M]_{44} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [M]_{55} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
[M]_{11} &= \int_0^l [J_1 [N_u]^T [N_u]] dx, \\
[M]_{22} &= \int_0^l [J_1 [N_v]^T [N_v]] dx, \\
[M]_{33} &= \int_0^l [J_1 [N_w]^T [N_w]] dx, \\
[M]_{44} &= \int_0^l [J_2 [N_y]^T [N_y]] dx, \\
[M]_{55} &= \int_0^l [J_2 [N_z]^T [N_z]] dx.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La matrice de rigidité est obtenue à partir des termes d'énergie de déformation :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K]_{22} & [0] & [0] & [K]_{25} \\ [0] & [0] & [K]_{33} & [K]_{34} & [0] \\ [0] & [0] & [K]_{43} & [K]_{44} & [0] \\ [0] & [K]_{52} & [0] & [0] & [K]_{55} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
[K]_{11} &= \int_0^l \left[I_1 \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \right] dx, \\
[K]_{22} &= \int_0^l \left[I_3 \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \right] dx, \\
[K]_{25} &= [K]_{52} = - \int_0^l \left[I_3 [N_z]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \right] dx, \\
[K]_{33} &= \int_0^l \left[I_3 \left[\frac{dN_w}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_w}{dx} \right] \right] dx, \\
[K]_{34} &= [K]_{43} = \int_0^l \left[I_3 [N_y]^T \left[\frac{dN_w}{dx} \right] \right] dx, \\
[K]_{44} &= \int_0^l \left[I_2 \left[\frac{dN_y}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_y}{dx} \right] + I_3 [N_y]^T [N_y] \right] dx, \\
[K]_{55} &= \int_0^l \left[I_2 \left[\frac{dN_z}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_z}{dx} \right] + I_3 [N_z]^T [N_z] \right] dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

L'équation de mouvement globale du système s'écrit sous la forme matricielle

suivante :

$$[M] \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

5 Discrétisation de l'équation de mouvement par la méthode de Galerkin

5.1 Galerkin via la théorie d'Euler-Bernoulli

Pour résoudre les équations de mouvement dans cette section, nous utilisons la méthode semi-analytique de Galerkin. Les champs de déplacement sont approximés à l'aide de fonctions de forme $X_m(x)$ et des coordonnées généralisées $q_u(t)$, $q_v(t)$, et $q_w(t)$. Les déplacements sont donc exprimés comme suit :

$$u(x, t) = \frac{dX_m}{dx} q_u, \quad v_b(x, t) = X_m q_v, \quad w_b(x, t) = X_m q_w \quad (3.20)$$

Les coordonnées généralisées $q_u(t)$, $q_v(t)$, et $q_w(t)$ sont supposées harmoniques dans le temps, c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (3.21)$$

Où ω est la fréquence angulaire du mouvement vibratoire.

Avec X_m , les fonctions de forme au mode m sont données par l'équation suivante, où α , β , et γ sont les coefficients d'indice pour différentes conditions aux limites :

$$X_m(x) = (-1)^\alpha \left(\sin \left(m\pi \frac{x}{L} \right) \right)^{\beta+1} \left(\cos \left((2m - \alpha)\pi \frac{x}{2L} \right) - 1 \right)^\gamma \quad (3.22)$$

Les valeurs de α , β , et γ sont données pour chaque condition aux limites par le tableau suivant :

Conditions aux limites	S-S	C-S	C-C	C-F
α	0	0	0	1
β	0	0	1	-1
γ	0	1	0	1

Table 2: Conditions aux limites pour la méthode de Galerkin

En substituant les expressions discrétisées des déplacements (3.20) dans les formulations des énergies T (2.8) et U (2.12), nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[J_1 \left(\left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \dot{q}_u^2 + X_m^2 \dot{q}_w^2 + X_m^2 \dot{q}_v^2 \right) + J_2 \left(\left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \dot{q}_w^2 + \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \dot{q}_v^2 \right) \right] dx \quad (3.23)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[I_1 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 q_u^2 + I_2 \left(\left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 q_w^2 + \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 q_v^2 \right) \right] dx \quad (3.24)$$

Les équations de mouvement sont dérivées en appliquant le principe de Lagrange (3.14). En effectuant les calculs, nous obtenons les matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$, qui gouvernent les équations de mouvement.

La matrice de masse :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [M]_{22} & [0] \\ [0] & [0] & [M]_{33} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [M]_{11} &= \int_0^l \left[J_1 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\ [M]_{22} &= \int_0^l \left[J_1 X_m^2 + J_2 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\ [M]_{33} &= \int_0^l \left[J_1 X_m^2 + J_2 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La matrice de rigidité :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [K]_{22} & [0] \\ [0] & [0] & [K]_{33} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
[K]_{11} &= \int_0^l \left[I_1 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{22} &= \int_0^l \left[I_2 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{33} &= \int_0^l \left[I_2 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 \right] dx.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

L'équation de mouvement est de la même forme que l'équation (3.11).

6 Galerkin via la théorie de Timoshenko

Pour résoudre les équations de mouvement dans cette section, nous utilisons la méthode semi-analytique de Galerkin. Les champs de déplacement sont approximés à l'aide de fonctions de forme $X_m(x)$ et des coordonnées généralisées $q_u(t)$, $q_v(t)$, $q_w(t)$, $q_y(t)$, et $q_z(t)$. Les déplacements sont donc exprimés comme suit :

$$u(x, t) = \frac{dX_m}{dx} q_u, \quad v(x, t) = X_m q_v, \quad w(x, t) = X_m q_w, \quad \theta_y(x, t) = \frac{dX_m}{dx} q_y, \quad \theta_z(x, t) = \frac{dX_m}{dx} q_z \tag{3.29}$$

Les coordonnées généralisées $q_u(t)$, $q_v(t)$, $q_w(t)$, $q_y(t)$, et $q_z(t)$ sont supposées harmoniques dans le temps, c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \\ \Theta_{ym} \\ \Theta_{zm} \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \tag{3.30}$$

Où ω est la fréquence angulaire du mouvement vibratoire.

En substituant les expressions discrétisées des déplacements (3.28) dans les formulations des énergies T (2.15) et U (2.19), nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[J_1 \left(\left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \dot{q}_u^2 + X_m^2 \dot{q}_w^2 + X_m^2 \dot{q}_v^2 \right) + J_2 \left(\left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \dot{q}_y^2 + \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \dot{q}_z^2 \right) \right] dx \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_0^l & \left[I_1 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 q_u^2 + I_2 \left(\left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 q_y^2 + \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 q_z^2 \right) \right. \\
& + I_3 \left(\left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 q_y^2 + \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 q_z^2 + \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 q_v^2 + \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 q_w^2 \right. \\
& \left. \left. + 2 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 q_y q_w - 2 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 q_z q_v \right) \right] dx \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Les équations de mouvement sont dérivées en appliquant le principe de Lagrange (3.14). En effectuant les calculs, nous obtenons les matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$, qui gouvernent les équations de mouvement.

La matrice de masse :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{11} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [M]_{22} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M]_{33} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M]_{44} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [M]_{55} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
[M]_{11} &= \int_0^l \left[J_1 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[M]_{22} &= \int_0^l [J_1 X_m^2] dx, \\
[M]_{33} &= \int_0^l [J_1 X_m^2] dx, \\
[M]_{44} &= \int_0^l \left[J_2 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[M]_{55} &= \int_0^l \left[J_2 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

La matrice de rigidité :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K]_{22} & [0] & [0] & [K]_{25} \\ [0] & [0] & [K]_{33} & [K]_{34} & [0] \\ [0] & [0] & [K]_{43} & [K]_{44} & [0] \\ [0] & [K]_{52} & [0] & [0] & [K]_{55} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
[K]_{11} &= \int_0^l \left[I_1 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{22} &= \int_0^l \left[I_3 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{25} &= [K]_{52} = - \int_0^l \left[I_3 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{33} &= \int_0^l \left[I_3 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{34} &= [K]_{43} = \int_0^l \left[I_3 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{44} &= \int_0^l \left[I_2 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 + I_3 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx, \\
[K]_{55} &= \int_0^l \left[I_2 \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 + I_3 \left(\frac{dX_m}{dx} \right)^2 \right] dx.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

L'équation de mouvement est de la même forme que l'équation (3.19).

7 Résolution de l'équation de mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement (3.11) et (3.19) afin de déterminer les fréquences du système, les équations sont transformées comme suit :

$$(-\omega^2 [M] + [K]) = 0 \tag{3.37}$$

Pour déterminer la flexion statique, on doit résoudre l'équation suivante :

$$[K] \{q\} = \{F\} \tag{3.38}$$

Sachant que $\{F\}$ est le vecteur des forces extérieures déduit du vecteur des travaux virtuels (2.21) via l'équation de Lagrange.

Cas pour la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli via MEF :

$$F = \begin{Bmatrix} \int_0^l f_u N_u dx \\ \int_0^l f_v N_u dx \\ \int_0^l f_w N_u dx \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

Cas pour la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli via Galerkin :

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l f_u \frac{dX_m}{dx} dx \\ \int_0^l f_v X_m dx \\ \int_0^l f_w X_m dx \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

Cas pour la théorie des poutres de Timoshenko via MEF :

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l f_u N_u dx \\ \int_0^l f_v N_u dx \\ \int_0^l f_w N_u dx \\ \int_0^l g_y N_y dx \\ \int_0^l g_z N_z dx \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

Cas pour la théorie des poutres de Timoshenko via Galerkin :

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l f_u \frac{dX_m}{dx} dx \\ \int_0^l f_v X_m dx \\ \int_0^l f_w X_m dx \\ \int_0^l g_y \frac{dX_m}{dx} dx \\ \int_0^l g_z \frac{dX_m}{dx} dx \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

8 Conclusion

Dans ce chapitre, les énergies déduites à partir des théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ont été discrétisées par deux méthodes numériques différentes, la méthode des éléments finis et la méthode de Galerkin, afin de déterminer l'équation du mouvement pour étudier le comportement dynamique et la flexion statique d'un tube cylindrique en matériaux FG.

*Chapitre IV: Résultats et Discussions

1 Introduction

L'analyse des performances vibratoires et mécaniques des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) constitue un domaine de recherche crucial pour les applications industrielles modernes, notamment dans les environnements complexes où les variations thermiques et les imperfections matérielles jouent un rôle prépondérant. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus à partir d'une étude numérique approfondie portant sur le comportement vibratoire libre et la flexion statique des tubes FGM intégrant des propriétés de porosité sous l'influence de distributions thermiques non linéaires.

Ce travail repose sur une modélisation rigoureuse basée sur deux théories classiques des poutres – Euler-Bernoulli et Timoshenko – permettant une analyse comparative des effets structuraux et environnementaux. Les équations de mouvement ont été formulées en utilisant le principe de Lagrange, résolues par deux méthodes distinctes : une approche numérique via les éléments finis classiques et une méthode analytique reposant sur l'approche de Galerkin. Ces outils ont permis de calculer les fréquences naturelles tout en intégrant divers paramètres influents, tels que la géométrie du tube, l'indice de puissance associé à la loi de graduation, les variations de température, ainsi que les indices de porosité.

Les résultats obtenus offrent une perspective détaillée sur l'interaction entre les propriétés matérielles, les conditions thermiques et les caractéristiques géométriques dans les performances dynamiques des tubes FGM. En outre, ils mettent en lumière l'importance relative de chaque paramètre dans la réponse vibratoire et la flexion statique, fournissant ainsi des informations précieuses pour l'optimisation des structures FGM dans des applications réelles. La discussion qui suit vise à interpréter ces résultats à travers une analyse critique, en soulignant leurs implications pratiques et leur contribution aux connaissances existantes sur les matériaux FGM.

2 Etude de Convergence

Avant validation avec la littérature une étude de convergence des résultats a été réalisée avec les méthodes abordé dans ce travail. Le model de tube utiliser pour la convergence est le même que ce lui utiliser dans la validation avec la littérature [22], tel que le matériau intérieur est SUS304 et le matériau extérieur est Nickel (Ni), les propriétés mécaniques de ces deux pôles sont présentées respectivement dans le

tableau 1. Et les dimensions géométriques (épaisseur de couche FG $h=0,002$ m, rapport diamètre épaisseur $D/h = 500$, rapport longueur diamètre $L/D=20$, et un facteur de correction de cisaillement $K_s=0,5$. La température extérieure et intérieure est de $300K$, avec des conditions aux limites double appuis. Et un indice de puissance $k=0.5$.

Table 3: Convergence des fréquences et la flexion statique par la méthode des éléments finis via Timoshenko

Nbre d'éléments	Fréquence (Hz)				Flexion statique (m)
	1er Freq	2eme Freq	3eme Freq	4eme Freq	Déflexion de milieu
3	7.06946	27.89777	64.12946	114.42478	-0.10272
5	7.06596	27.72673	60.61178	104.04753	-0.11250
7	7.06569	27.71210	60.48325	103.46539	-0.11523
9	7.06564	27.70964	60.46020	103.35965	-0.11637
11	7.06563	27.70905	60.45432	103.33135	-0.11694
13	7.06563	27.70887	60.45244	103.32194	-0.11727
15	7.06563	27.70880	60.45174	103.31832	-0.11748
17	7.06563	27.70878	60.45144	103.31676	-0.11762
19	7.06563	27.70876	60.45131	103.31603	-0.11772
21	7.06563	27.70876	60.45124	103.31566	-0.11779
23	7.06563	27.70875	60.45121	103.31546	-0.11784
25	7.06563	27.70875	60.45119	103.31535	-0.11788
27	7.06563	27.70875	60.45117	103.31529	-0.11791
29	7.06563	27.70875	60.45117	103.31525	-0.11794
31	7.06563	27.70875	60.45116	103.31522	-0.11796

Table 4: Convergence des fréquences et la flexion statique par la méthode des éléments finis via Euler Bernoulli

Nbre d'éléments	Fréquence (Hz)				Flexion statique (m)
	1er Freq	2eme Freq	3eme Freq	4eme Freq	Déflexion de milieu
3	7.10894	28.61712	70.08953	128.35770	-0.10159
5	7.10395	28.32995	63.66035	113.67550	-0.11131
7	7.10339	28.29557	63.29648	111.85782	-0.11403
9	7.10326	28.28771	63.21072	111.40430	-0.11516
11	7.10322	28.28518	63.18276	111.25360	-0.11573
13	7.10320	28.28418	63.17155	111.19262	-0.11606
15	7.10320	28.28371	63.16637	111.16430	-0.11626
17	7.10319	28.28348	63.16372	111.14973	-0.11640
19	7.10319	28.28335	63.16225	111.14164	-0.11650
21	7.10319	28.28327	63.16138	111.13685	-0.11657
23	7.10319	28.28322	63.16085	111.13387	-0.11662
25	7.10319	28.28319	63.16050	111.13195	-0.11666
27	7.10319	28.28317	63.16026	111.13066	-0.11670
29	7.10319	28.28315	63.16010	111.12976	-0.11672
31	7.10319	28.28314	63.15999	111.12913	-0.11674

Table 5: fréquences et la flexion statique par la méthode analytique de Galerkin

	Fréquence (Hz)				Flexion statique (m)
	1er Freq	1er Freq	1er Freq	1er Freq	Déflexion de milieu
TBT-Galerkin	7.06563	27.70875	60.45115	103.31517	-0.11796
EBT-Galerkin	7.10319	28.28311	63.15961	111.12706	-0.11674

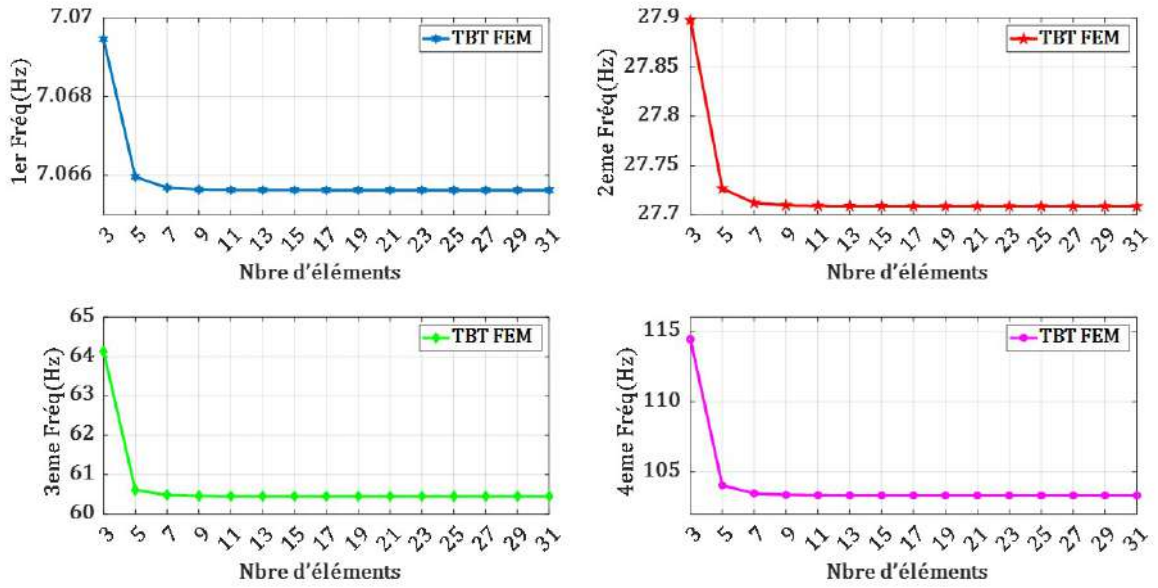


Figure 16: Convergence des fréquences par la méthode des éléments finis via Timoshenko

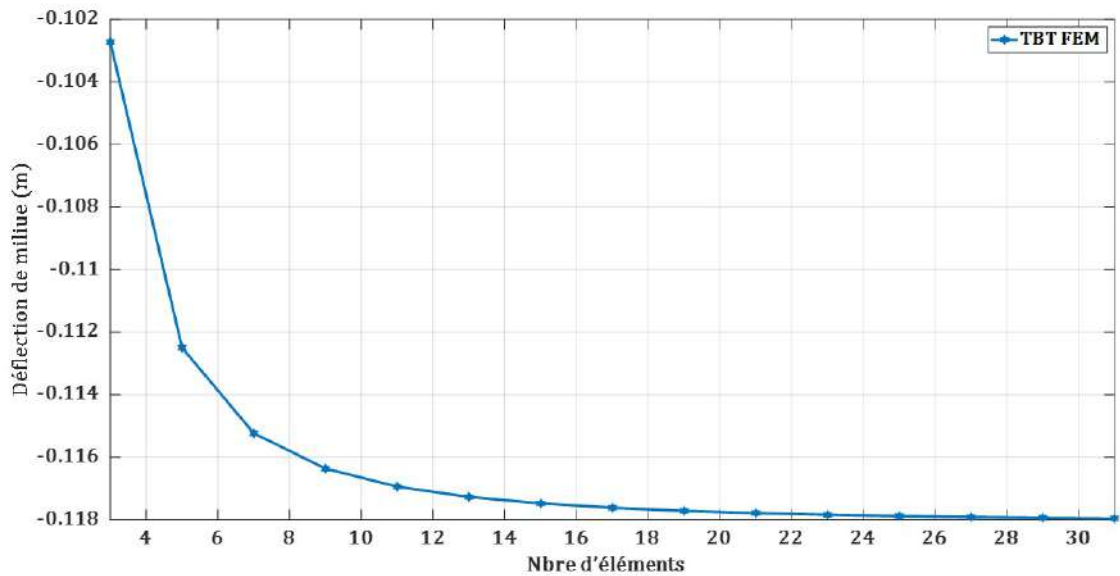


Figure 17: Convergence de la déflexion de milieu par la méthode des éléments finis via Timoshenko

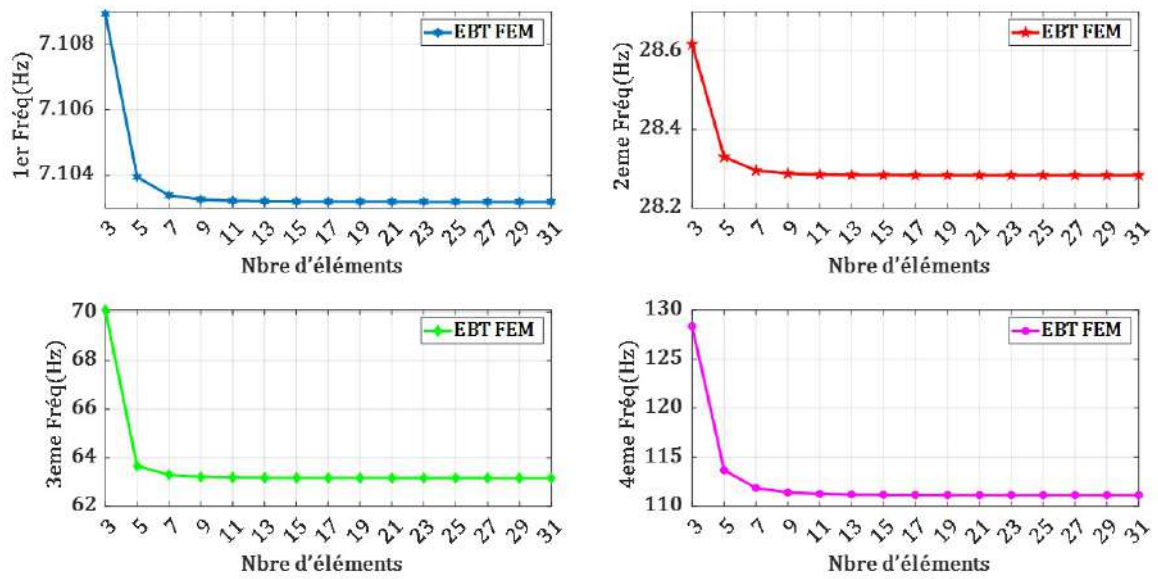


Figure 18: Convergence des fréquences par la méthode des éléments finis via Euler Bernoulli

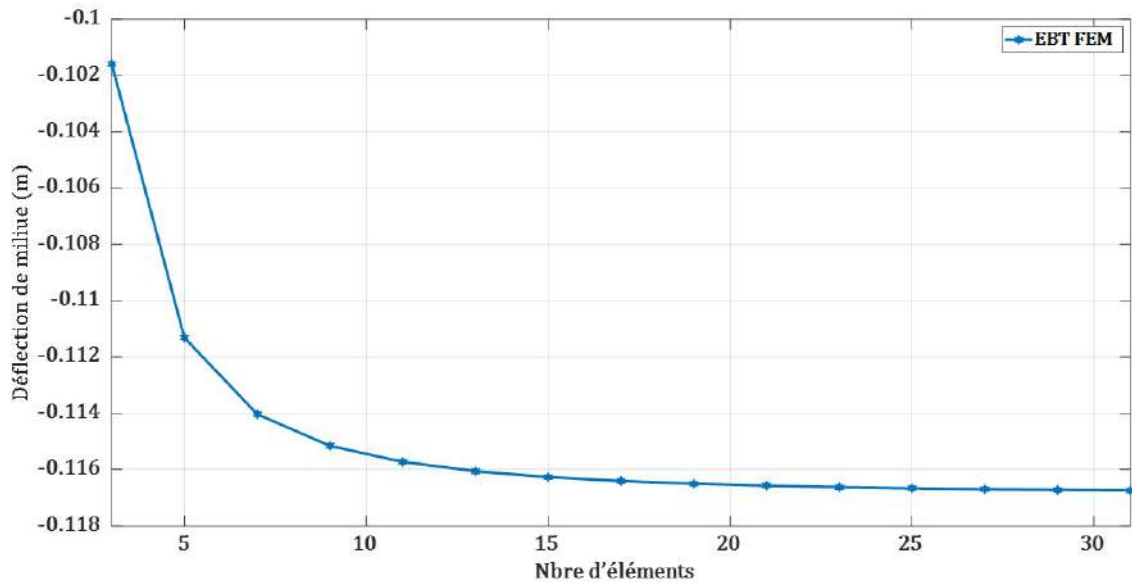


Figure 19: Convergence de la déflexion de milieu par la méthode des éléments finis via Euler Bernoulli

L'analyse des résultats dans les tableaux 3–5 et les figures 16–19 permet d'interpréter la convergence des fréquences propres et de la déflexion statique obtenues par différentes méthodes (éléments finis via Timoshenko, méthode analytique de Galerkin via Timoshenko, éléments finis via Euler-Bernoulli, et méthode analytique de Galerkin via Euler-Bernoulli).

3 Convergence des Fréquences Propres et de la Flexion Statique

3.1 Tableau 3 : Éléments finis via Timoshenko

Les fréquences propres convergent rapidement avec l'augmentation du nombre d'éléments :

- 1ère fréquence : Stabilisée à 7.06563 Hz dès 9 éléments.
- 2ème fréquence : Stabilisée à 27.70875 Hz à partir de 15 éléments.
- 3ème fréquence : Stabilisée à 60.45117 Hz à partir de 23 éléments.
- 4ème fréquence : Stabilisée à 103.31522 Hz à partir de 29 éléments.

La déflexion statique converge plus lentement, atteignant -0.11796 m pour 31 éléments.

3.2 Tableau 4 : Éléments finis via Euler-Bernoulli

Les fréquences propres sont plus élevées que celles obtenues avec le modèle de Timoshenko :

- 1ère fréquence : Stabilisée à 7.10319 Hz dès 9 éléments.
- 2ème fréquence : Stabilisée à 28.28314 Hz à partir de 15 éléments.
- 3ème fréquence : Stabilisée à 63.15999 Hz à partir de 23 éléments.
- 4ème fréquence : Stabilisée à 111.12913 Hz à partir de 29 éléments.

La déflexion statique converge vers -0.11674 m, ce qui est légèrement inférieur à celle obtenue avec le modèle de Timoshenko.

3.3 Tableau 5 : Méthode analytique de Galerkin

Les résultats analytiques sont cohérents avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis via Euler-Bernoulli et Timoshenko:

- Les fréquences propres pour la combinaison EBT-Galerkin (7.10319 Hz, 28.28311 Hz, 63.15961 Hz, 111.12706 Hz) sont très proches des valeurs convergées du tableau 4.

- Les fréquences propres pour la combinaison TBT-Galerkin (7.06563 Hz, 27.70875 Hz, 60.45115 Hz, 103.31517 Hz) sont très proches des valeurs convergées du

tableau 3.

- La déflexion statique est aussi proche des résultats dans les tableaux 3 et 4.

4 Comparaison entre les Modèles de Timoshenko et Euler-Bernoulli

4.1 Fréquences Propres

Les fréquences obtenues avec le modèle d'Euler-Bernoulli sont systématiquement plus élevées que celles obtenues avec le modèle de Timoshenko :

- Par exemple, pour la 1ère fréquence : 7.10319 Hz (Euler-Bernoulli) vs 7.06563 Hz (Timoshenko).

- Cette différence s'explique par le fait que le modèle d'Euler-Bernoulli néglige les effets du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, ce qui conduit à une surévaluation des fréquences propres, surtout pour les structures épaisses ou courtes.

- L'écart diminue pour les fréquences plus élevées, car l'effet du cisaillement devient moins significatif.

4.2 Déflexion Statique

La déflexion statique est généralement plus importante avec le modèle de Timoshenko qu'avec celui d'Euler-Bernoulli :

- Par exemple : -0.11796 m (Timoshenko) vs -0.11674 m (Euler-Bernoulli).

- Cela s'explique par le fait que le modèle de Timoshenko inclut les effets du cisaillement transverse, qui augmentent la déformation globale de la structure.

Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis (via Timoshenko ou Euler-Bernoulli) convergent vers des valeurs proches de celles obtenues par les méthodes analytiques de Galerkin. Cela valide la précision des méthodes numériques utilisées dans ce travail.

Le modèle de Timoshenko est plus précis pour les structures épaisses ou courtes, car il prend en compte les effets du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation.

Le modèle d'Euler-Bernoulli reste valable pour les structures longues et fines, où les effets du cisaillement sont négligeables.

4.3 Nombre Optimal d'Éléments

Pour des résultats précis, un maillage avec environ 29–31 éléments semble suffisant pour les deux modèles.

Les résultats montrent une bonne convergence des fréquences propres et de la déflexion statique pour les deux modèles étudiés (Timoshenko et Euler-Bernoulli). Les différences observées entre les deux modèles s'expliquent par les hypothèses sous-jacentes à chaque théorie. Le modèle de Timoshenko est plus adapté aux structures épaisses ou courtes, tandis que celui d'Euler-Bernoulli convient mieux aux structures longues et fines.

5 Validation

Des efforts ont été déployés pour valider soigneusement ce travail par rapport à la littérature. En raison de la rareté des travaux de recherche importants sur l'utilisation des tubes FG, la validation à chaque étape a été largement confirmée par la littérature. La validation par rapport à la littérature est effectuée afin de déterminer la précision de la gradation du matériau. L'algorithme, réalisé avec le langage de programmation MATLAB, concerne différents cas de gradation des propriétés du matériau FG. Les propriétés du matériau sont calculées au rayon moyen de chaque couche pour différentes lois de matériau, et leur variation avec le coefficient de loi de puissance est représentée graphiquement.

5.1 Validation de la variation des propriétés des matériaux FG dans la direction radiale

Afin de valider la gradation des matériaux en fonction de la température, un tube FG en $SS-ZrO_2$ a été étudié à partir des données de matériaux disponibles dans la littérature [23]. Le rayon (R_o) de l'arbre est de 50 mm, la couche céramique externe est maintenue à une température de 900 K, tandis que le noyau métallique interne est à température ambiante (300 K). La variation des propriétés des matériaux, telles que le module de Young, le coefficient de Poisson et la température, a été vérifiée à l'aide de la figure 5 de [24]. Le diagramme du module de Young pour différentes lois de puissance. Les coefficients obtenus à l'aide du code sont présentés à les figures 20-21.

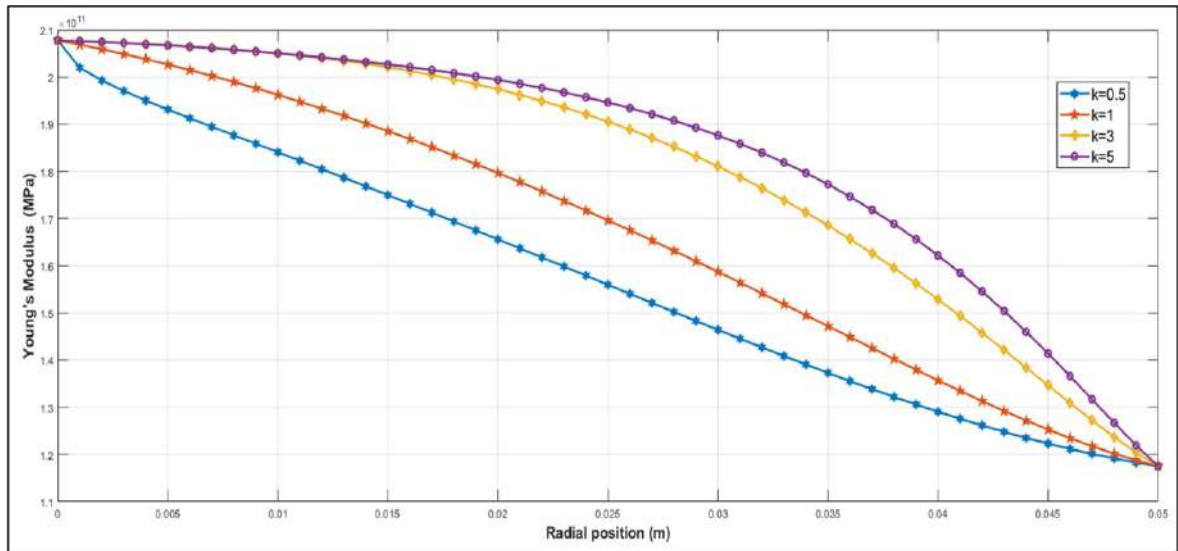


Figure 20: Variation du module de Young pour différentes valeurs de k lorsque $T_m = 300$ K et $T_c = 900$ K pour un tube FG SS- ZrO_2

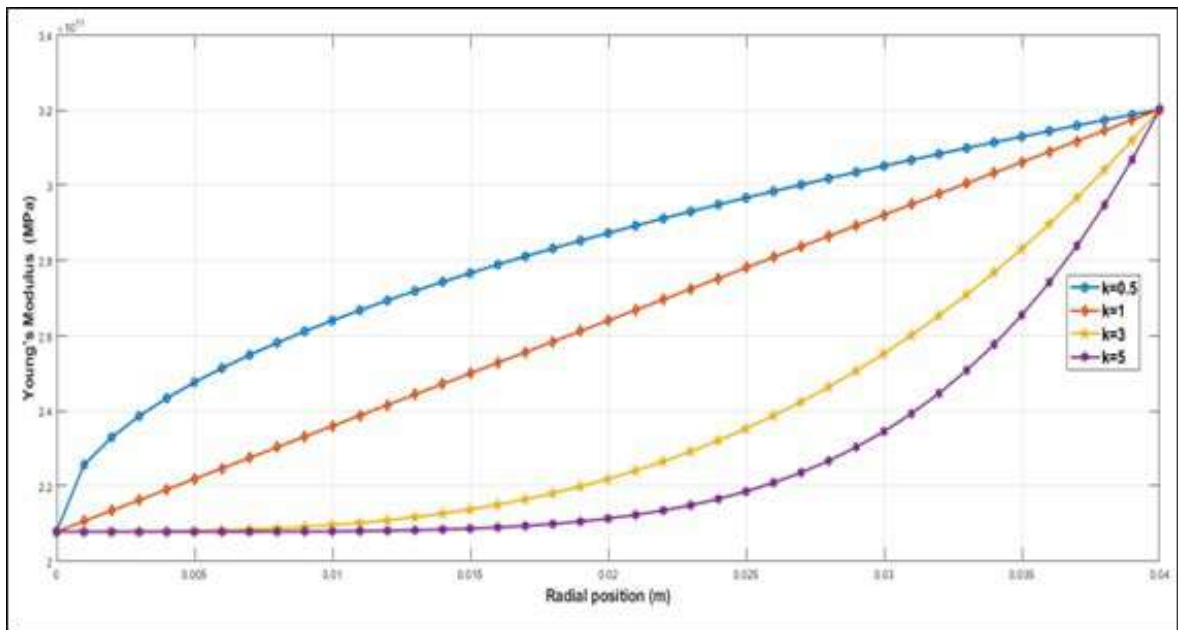


Figure 21: Variation du module de Young le long de la direction radiale pour différentes valeurs de k pour un arbre Al_2O_3 FG à température ambiante

5.2 Validation avec un tube cylindrique FG

Pour effectuer la validation avec un arbre cylindrique FG, il suffit de mettre l'angle d'inclinaison dans l'équation 29, $\alpha = 0$. Le même arbre que dans [22] a été utilisé, tel que le matériau intérieur est SUS304 et le matériau extérieur est Nickel (Ni), les propriétés mécaniques de ces deux pôles sont présentées respectivement dans les tableaux 1. Et les dimensions géométriques (épaisseur de la couche FG $h = 0,002$ m,

Table 6: Variation des fréquences fondamentales (Hz) pour un tube cylindrique FG simplement supporté

Fréquences fondamentales (Hz)			
matériaux	source	gradation	1er freq (Hz)
FGM (Ni-SUS304)	(Hadjoui et al., 2023)(Exp-Law)	100% Ni	6.7848
		FGM (Ni-SUS304)	6.8952
		100% SUS304	7.0067
	(Hadjoui et al., 2023)(Power-Law)	k=0	6.7277
		k=0.5	6.8368
		k=1	6.8931
	(Loy et al., 1999)	k=0	6.8577
		k=0.5	7.0384
		k=1	7.0972
	(Boukhalfa, 2014)	k=0	6.9397
		k=0.5	7.0584
		k=1	7.1197
	Présent (TBT-FEM)	k=0	6.9457
		k=0.5	7.0656
		k=1	7.1275
	Présent (EBT-FEM)	k=0	6.9825
		k=0.5	7.1032
		k=1	7.1654
Présent (TBT-Galerkin)	k=0	6.9457	
	k=0.5	7.0656	
	k=1	7.1275	
Présent (EBT-Galerkin)	k=0	6.9825	
	k=0.5	7.1032	
	k=1	7.1654	

rapport diamètre épaisseur $D / h = 500$, rapport longueur diamètre $L/D = 20$, et un facteur de correction de cisaillement $K_s = 0,5$. La température extérieure et intérieure est de 300 K. sachant que la littérature (Hadjoui et al., 2023)[25] ont utiliser la méthode des quadratures différentielles via la théorie de Timoshenko. (Loy et al., 1999) [22] ont utiliser la méthode analytique de Navier via la théorie d'Euler Bernoulli, et (Boukhalfa, 2014) [26] a utiliser la version-p des éléments finies via la théorie de Timoshenko.

L'interprétation des résultats présentés dans le Tableau 6 permet de comparer les fréquences fondamentales (en Hz) obtenues pour un tube cylindrique FG (Functionally Graded Material) en utilisant différentes méthodes numériques et analytiques, ainsi que différentes théories (Timoshenko Beam Theory - TBT et Euler-Bernoulli Beam Theory - EBT).

Comparaison des Résultats

a: Les résultats obtenus par TBT-FEM, TBT-Galerkin, et Boukhalfa (2014) sont très proches, ce qui valide la précision de ces approches.

- Par exemple, pour $k = 0.5$:

- TBT-FEM : 7.0656 Hz.

- TBT-Galerkin : 7.0656 Hz.

- Boukhalfa (2014) : 7.0584 Hz.

- Ces valeurs sont cohérentes avec celles obtenues par Hadjoui et al. (2023) pour la loi Power-Law ($k = 0.5$: 6.8368 Hz).

b: Les fréquences obtenues par EBT-FEM et EBT-Galerkin sont systématiquement plus élevées que celles obtenues par les méthodes basées sur Timoshenko.

- Par exemple, pour $k = 0.5$:

- EBT-FEM : 7.1032 Hz.

- EBT-Galerkin : 7.1032 Hz.

- Cette différence s'explique par le fait que le modèle d'Euler-Bernoulli néglige les effets du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, ce qui conduit à une surévaluation des fréquences.

c: Les résultats obtenus par Loy et al. (1999) (méthode analytique via Euler-Bernoulli) sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par les méthodes basées sur Timoshenko.

- Par exemple, pour $k = 0.5$:

- Loy et al. (1999) : 7.0384 Hz.

- TBT-FEM : 7.0656 Hz.

- Cela met en évidence l'importance de prendre en compte les effets du cisaillement transverse dans les modèles de poutres.

Les résultats obtenus dans cette étude sont cohérents avec ceux publiés dans la littérature :

- Les méthodes basées sur Timoshenko convergent vers des valeurs proches de celles obtenues par Hadjoui et al. (2023) et Boukhalfa (2014).

- Les méthodes basées sur Euler-Bernoulli produisent des résultats similaires à ceux de Loy et al. (1999), mais avec une légère surestimation des fréquences.

Les résultats montrent une bonne concordance entre les différentes méthodes et théories utilisées, validant ainsi les approches numériques et analytiques employées dans cette étude. Le modèle de Timoshenko est mieux adapté pour les structures épaisses ou courtes, tandis que celui d'Euler-Bernoulli convient mieux aux structures longues et fines. L'effet de la gradation des matériaux (via l'indice k) est clairement visible, avec des fréquences croissantes lorsque la proportion de SUS304 augmente.

6 Étude paramétrique

Dans cette section les résultats sont obtenus via la méthode des éléments finies en combinaison avec la théorie des poutres de Timoshenko. Les fréquences propres d'un tube poreux creux en FG sont étudiées. Les dimensions du système géométrique (épaisseur de la couche de FG $h = 0,002$ m, rapport diamètre/épaisseur $D/h = 500$) et un facteur de correction de cisaillement $K_s = 0,5$ sont pris en compte. Le rapport d'élancement est fixé à $L/D = 10$. Une étude paramétrique est réalisée pour observer le comportement des vibrations libres avec différents paramètres géométriques et différents matériaux de surface, l'indice de porosité et le rapport longueur/diamètre, à température ambiante et à une température atteignant 1500 K en surface interne. Le matériau externe pris dans cette partie est SUS304 avec différents matériaux internes (Al_2O_3 , N_i et ZrO_2). Pour la flexion statique une charge continue la longe de tube est appliquée $q_o = 100\text{Mpa}$.

6.1 Influence des Condition aux limites

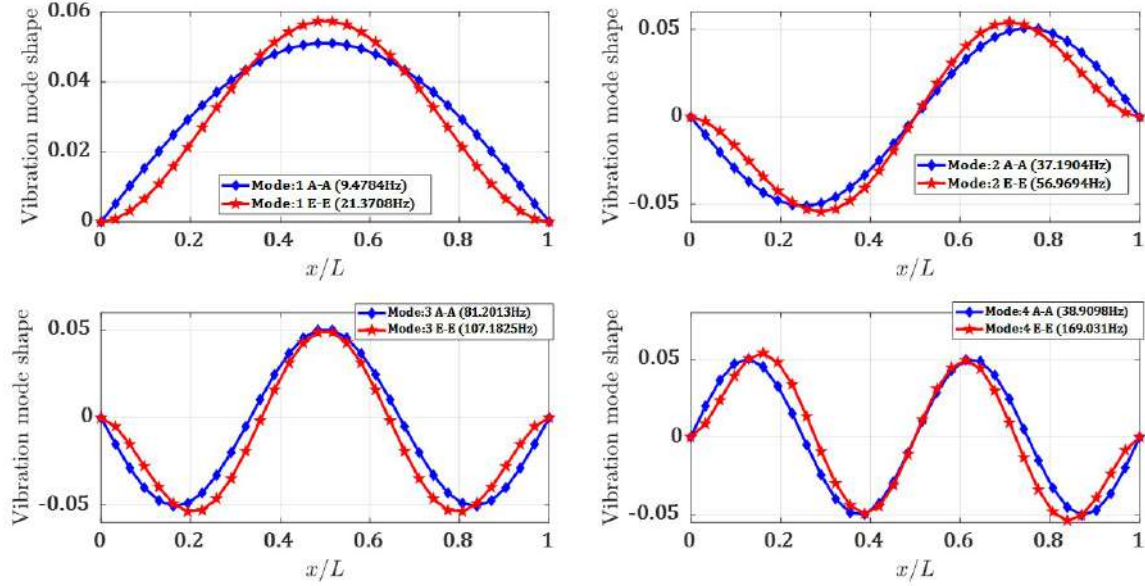


Figure 22: Premiers modes de vibration selon deux types de conditions aux limites (appui-appui) et (encastrement-encastrement) avec $k=1$ ($SUS304-Al_2O_3$) a température ambiante 300 K et $e_p = 0$.

7 Influence des paramètres géométriques

7.1 Effet du Rapport L/D

Table 7: Fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ ($SUS304 - Al_2O_3$)

L/D	Température interne = 300 K / température externe = 300 K					Température interne = 1500 K / température externe = 300 K				
	ep=0	ep=0.1	ep=0.2	uniforme	non-uniforme	ep=0	ep=0.1	ep=0.2	uniforme	non-uniforme
5	138.90977	138.07636	139.86536	137.36280	140.95394	117.81466	117.20770	118.66846	116.87185	119.76910
10	37.19045	36.89944	37.52015	36.64593	37.89271	31.64416	31.39983	31.96363	31.23556	32.36075
15	16.76490	16.62686	16.92103	16.50631	17.09728	14.27506	14.15657	14.42842	14.07500	14.61809
20	9.47836	9.39890	9.56819	9.32944	9.66956	8.07283	8.00410	8.16148	7.95643	8.27094
25	6.08060	6.02919	6.13869	5.98424	6.20425	5.17956	5.13495	5.23703	5.10390	5.30792
30	4.22813	4.19222	4.26870	4.16081	4.31448	3.60184	3.57062	3.64202	3.54885	3.69158
35	3.10882	3.08234	3.13873	3.05918	3.17248	2.64844	2.62539	2.67808	2.60931	2.71464
40	2.38141	2.36109	2.40436	2.34331	2.43026	2.02880	2.01110	2.05156	1.99874	2.07962

Table 8: Déflexion statique en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ ($SUS304 - Al_2O_3$)

L/D	Température interne = 300 K / température externe = 300 K					Température interne = 1500 K / température externe = 300 K				
	ep=0	ep=0.1		ep=0.2		ep=0	ep=0.1		ep=0.2	
		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
5	0.00042	0.00047	0.00038	0.00054	0.00034	0.00058	0.00066	0.00052	0.00074	0.00047
10	0.00602	0.00674	0.00538	0.00775	0.00484	0.00832	0.00939	0.00742	0.01067	0.00658
15	0.02984	0.03341	0.02664	0.03847	0.02392	0.04115	0.04649	0.03663	0.05291	0.03244
20	0.09358	0.10482	0.08351	0.12073	0.07498	0.12900	0.14580	0.11478	0.16599	0.10159
25	0.22764	0.25503	0.20312	0.29377	0.18234	0.31372	0.35466	0.27908	0.40385	0.24696
30	0.47111	0.52784	0.42034	0.60806	0.37729	0.64918	0.73397	0.57743	0.83585	0.51090
35	0.87176	0.97678	0.77777	1.12528	0.69809	1.20117	1.35814	1.06834	1.54676	0.94516
40	1.48604	1.66511	1.32578	1.91832	1.18991	2.04746	2.31512	1.82095	2.63675	1.61092

Table 9: Fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (SUS304-Ni)

L/D	Température interne = 300 K / température externe = 300 K					Température interne = 1500 K / température externe = 300 K				
	ep=0	ep=0.1		ep=0.2		ep=0	ep=0.1		ep=0.2	
		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
5	106.88332	106.14266	107.73475	105.51020	108.70765	88.21049	87.96544	88.69003	87.98720	89.39610
10	28.65733	28.40066	28.94947	28.17817	29.28123	23.72514	23.59609	23.92444	23.54467	24.19403
15	12.92250	12.80087	13.06075	12.69522	13.21765	10.70601	10.64134	10.80319	10.61235	10.93314
20	7.30686	7.23686	7.38638	7.17602	7.47661	6.05515	6.01724	6.11162	5.99964	6.18685
25	4.68779	4.64252	4.73922	4.60315	4.79757	3.88522	3.86049	3.92191	3.84884	3.97071
30	3.25974	3.22812	3.29566	3.20062	3.33641	2.70184	2.68449	2.72753	2.67625	2.76167
35	2.39684	2.37352	2.42332	2.35325	2.45336	1.98671	1.97388	2.00567	1.96776	2.03086
40	1.83604	1.81815	1.85636	1.80259	1.87941	1.52191	1.51205	1.53648	1.50733	1.55582

Table 10: Déflexion statique en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (SUS304-Ni)

L/D	Température interne = 300 K / température externe = 300 K					Température interne = 1500 K / température externe = 300 K				
	ep=0	ep=0.1		ep=0.2		ep=0	ep=0.1		ep=0.2	
		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
5	0.00058	0.00065	0.00052	0.00074	0.00047	0.00085	0.00095	0.00077	0.00107	0.00069
10	0.00828	0.00937	0.00738	0.01071	0.00661	0.01208	0.01357	0.01080	0.01533	0.00969
15	0.04099	0.04642	0.03649	0.05309	0.03267	0.05972	0.06716	0.05334	0.07597	0.04775
20	0.12852	0.14558	0.11438	0.16657	0.10236	0.18715	0.21057	0.16707	0.23829	0.14949
25	0.31262	0.35416	0.27816	0.40527	0.24889	0.45511	0.51218	0.40618	0.57969	0.36334
30	0.64694	0.73297	0.57558	0.83882	0.51497	0.94168	1.05988	0.84033	1.19972	0.75161
35	1.19707	1.35633	1.06498	1.55227	0.95276	1.74232	1.96115	1.55468	2.22003	1.39041
40	2.04053	2.31208	1.81531	2.64617	1.62396	2.96980	3.34295	2.64984	3.78439	2.36973

Table 11: Fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (SUS304- ZrO_2)

L/D	Température interne = 300 K / température externe = 300 K					Température interne = 1500 K / température externe = 300 K				
	ep=0	ep=0.1		ep=0.2		ep=0	ep=0.1		ep=0.2	
		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
5	104.21198	103.45635	105.08119	102.81116	106.07511	88.18442	87.79778	88.76450	87.62722	89.53647
10	27.95183	27.69051	28.24963	27.46417	28.58823	23.69833	23.53440	23.92091	23.43411	24.20361
15	12.60546	12.48166	12.74636	12.37423	12.90648	10.69189	10.61182	10.79916	10.56108	10.93452
20	7.12782	7.05658	7.20886	6.99472	7.30094	6.04674	6.00019	6.10884	5.97035	6.18701
25	4.57299	4.52692	4.62541	4.48690	4.68495	3.87970	3.84945	3.91997	3.82996	3.97063
30	3.17994	3.14776	3.21655	3.11980	3.25813	2.69796	2.67677	2.72612	2.66309	2.76154
35	2.33817	2.31445	2.36516	2.29383	2.39582	1.98383	1.96818	2.00461	1.95806	2.03074
40	1.79111	1.77290	1.81181	1.75708	1.83534	1.51969	1.50768	1.53565	1.49989	1.55570

Table 12: Déflexion statique en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $k=1$ (SUS304- ZrO_2)

L/D	Température interne = 300 K / température externe = 300 K					Température interne = 1500 K / température externe = 300 K				
	ep=0	ep=0.1		ep=0.2		ep=0	ep=0.1		ep=0.2	
		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme		uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
5	0.00053	0.00059	0.00047	0.00068	0.00042	0.00074	0.00082	0.00066	0.00093	0.00060
10	0.00751	0.00851	0.00669	0.00973	0.00599	0.01045	0.01178	0.00933	0.01336	0.00836
15	0.03718	0.04214	0.03307	0.04823	0.02958	0.05168	0.05830	0.04607	0.06622	0.04121
20	0.11658	0.13216	0.10365	0.15133	0.09266	0.16199	0.18279	0.14434	0.20771	0.12902
25	0.28356	0.32151	0.25206	0.36818	0.22528	0.39395	0.44463	0.35094	0.50532	0.31363
30	0.58678	0.66539	0.52155	0.76204	0.46610	0.81516	0.92014	0.72608	1.04583	0.64880
35	1.08575	1.23126	0.96500	1.41019	0.86235	1.50826	1.70260	1.34334	1.93529	1.20027
40	1.85077	2.09887	1.64487	2.40396	1.46983	2.57089	2.90227	2.28966	3.29905	2.04571

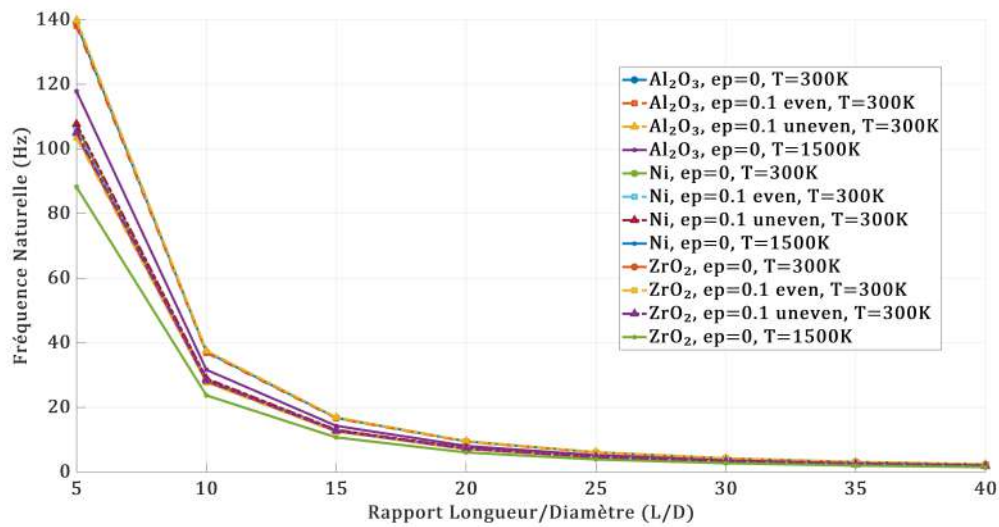


Figure 23: Représentation graphique des fréquences naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre

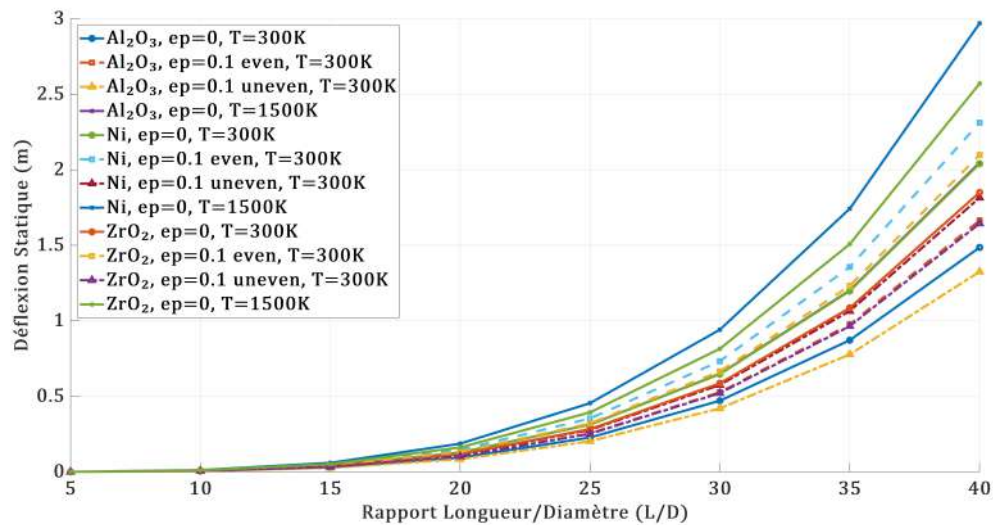


Figure 24: Représentation graphique des déflexions statiques en fonction du rapport longueur/diamètre

Les tableaux 7 à 12 illustrent les fréquences naturelles et les déflexions statiques d'un tube creux en FGM avec porosité sous l'influence de gradients thermiques. Ces résultats sont représentés graphiquement dans les Figures 23 et 24. Une analyse détaillée révèle les tendances suivantes concernant l'effet du rapport longueur/diamètre (L/D) et de ses interactions avec la porosité (ep), les conditions thermiques, et le choix des matériaux internes.

Fréquences Naturelles

L'augmentation du rapport L/D entraîne une diminution significative des fréquences naturelles pour tous les cas étudiés. Par exemple, pour le matériau SUS304- Al_2O_3 à $T_{int} = T_{ext} = 300K$ et $ep = 0$, la fréquence passe de $138.91Hz$ pour $L/D = 5$ à $2.38Hz$ pour $L/D = 40$. Ce comportement est cohérent avec une réduction de la rigidité effective lorsque la longueur du tube augmente par rapport à son diamètre.

Pour un même rapport L/D , les fréquences naturelles sont plus élevées pour des tubes courts (L/D faible) que pour des tubes longs (L/D élevé). Cela s'explique par une inertie plus faible et une rigidité accrue pour des géométries compactes.

Déflexions Statiques

À l'inverse des fréquences naturelles, les déflexions statiques augmentent avec le rapport L/D . Par exemple, pour SUS304- Al_2O_3 à $T_{int} = T_{ext} = 300K$ et $ep = 0$, la déflexion passe de $0.00042m$ pour $L/D = 5$ à $1.49m$ pour $L/D = 40$. Cette augmentation est due à une flexibilité accrue pour des tubes plus longs, qui deviennent plus sensibles aux charges externes.

Combinaison du Rapport L/D avec la Porosité (ep)

Fréquences Naturelles

L'introduction de porosité ($ep = 0.1, 0.2$) diminue les fréquences naturelles, indépendamment du rapport L/D . Cependant, cet effet est amplifié pour des valeurs élevées de L/D , car la rigidité déjà réduite par la longueur est davantage affaiblie par la porosité.

La distribution non uniforme ("non-uniforme") de la porosité a un impact plus prononcé que la distribution uniforme ("uniforme"). Par exemple, pour $L/D = 10$ et SUS304-Ni, la fréquence diminue de $28.66Hz$ ($ep = 0$) à $28.18Hz$ ($ep = 0.1$, uniforme) et $29.28Hz$ ($ep = 0.1$, non-uniforme).

Déflexions Statiques

La présence de porosité accroît les déflexions statiques, particulièrement pour des rapports L/D élevés. Par exemple, pour $L/D = 40$ et SUS304-Ni, la déflexion passe de $2.04m$ ($ep = 0$) à $3.78m$ ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela montre que la combinaison de la porosité et d'une géométrie allongée amplifie les déformations.

Combinaison du Rapport L/D avec les Conditions Thermiques

Fréquences Naturelles

Une élévation de la température interne ($T_{int} = 1500K$) réduit systématiquement les fréquences naturelles pour tous les rapports L/D . Cette réduction est plus marquée pour des valeurs élevées de L/D , où la rigidité est déjà compromise. Par exemple, pour $L/D = 40$ et SUS304- ZrO_2 , la fréquence diminue de $1.79Hz$ ($T_{int} = 300K$) à $1.52Hz$ ($T_{int} = 1500K$).

Déflexions Statiques

Les déflexions statiques augmentent avec la température interne, et cet effet est exacerbé pour des rapports L/D élevés. Par exemple, pour $L/D = 40$ et SUS304- ZrO_2 , la déflexion passe de $1.85m$ ($T_{int} = 300K$) à $2.57m$ ($T_{int} = 1500K$). Cela reflète l'impact combiné de la dilatation thermique et de la flexibilité accrue pour des géométries allongées.

Combinaison du Rapport L/D avec le Matériau Interne

Fréquences Naturelles

Le choix du matériau interne influence les fréquences naturelles, quel que soit le rapport L/D . Al_2O_3 présente les fréquences les plus élevées, suivi de ZrO_2 et Ni. Par exemple, pour $L/D = 5$ et $T_{int} = T_{ext} = 300K$, les fréquences naturelles sont respectivement de $138.91Hz$ (Al_2O_3), $104.21Hz$ (ZrO_2), et $106.88Hz$ (Ni). Cette tendance est attribuée aux différences de densité et de module d'élasticité entre ces matériaux.

Déflexions Statiques

Les matériaux internes ayant une densité plus faible (comme Al_2O_3) présentent des déformations légèrement inférieures à ceux avec une densité plus élevée (Ni). Par exemple, pour $L/D = 40$ et $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la déflexion est de $1.49m$ (Al_2O_3), $1.85m$ (ZrO_2), et $2.04m$ (Ni).

Les résultats montrent que le rapport L/D joue un rôle clé dans le comportement dynamique et statique des tubes en FGM. Une augmentation de L/D réduit les fréquences naturelles tout en augmentant les déflexions statiques. La combinaison de ce paramètre avec la porosité, les conditions thermiques, et le choix du matériau interne amplifie ou atténue ces effets. Par exemple, la porosité "non-uniforme" et des températures internes élevées accentuent les déformations pour des rapports L/D élevés, tandis que des matériaux internes rigides comme Al_2O_3 minimisent ces effets. Ces observations fournissent des insights précieux pour optimiser la conception de structures en FGM en fonction des exigences spécifiques de l'application.

La Figure 23 offre une visualisation synthétique de ces tendances, facilitant la compréhension des interactions entre les différents paramètres.

7.2 Effet du l'indice de porosité e_p

L'introduction de porosité dans les tubes en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a un impact significatif sur les fréquences naturelles et les déflexions statiques. Les résultats montrent que cet effet varie en fonction de la distribution de la porosité ("uniforme" ou "non-uniforme") et interagit avec d'autres paramètres tels que le rapport longueur/diamètre (L/D), les conditions thermiques, et le choix du matériau interne. les résultats sont détailler dans les tableaux 13-18 et sont illustré dans les figures 25-26.

Table 13: Fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité, avec $L/D=20$ (SUS304- Al_2O_3)

ep	Température interne = 300 K / température externe = 300 K						Température interne = 1500 K / température externe = 300 K					
	k=0		k=0.5		k=1		k=0		k=0.5		k=1	
	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
0	7.321	7.321	8.678	8.678	9.478	9.478	5.992	5.992	7.150	7.150	8.073	8.073
0.1	7.043	7.577	8.517	8.835	9.399	9.568	5.631	6.318	6.959	7.339	8.004	8.161
0.2	6.731	7.821	8.346	8.993	9.329	9.670	5.219	6.626	6.761	7.533	7.956	8.271
0.3	6.370	8.058	8.159	9.156	9.269	9.783	4.722	6.925	6.544	7.737	7.932	8.402
0.4	5.933	8.293	7.942	9.325	9.218	9.911	4.083	7.223	6.293	7.955	7.934	8.558

Table 14: Déflexion statique naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $L/D=20$ (SUS304- Al_2O_3)

ep	Température interne = 300 K / température externe = 300 K						Température interne = 1500 K / température externe = 300 K					
	k=0		k=0.5		k=1		k=0		k=0.5		k=1	
	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
0	0.116	0.116	0.099	0.099	0.093	0.093	0.172	0.172	0.146	0.146	0.128	0.128
0.1	0.135	0.100	0.113	0.088	0.105	0.083	0.211	0.144	0.169	0.127	0.145	0.114
0.2	0.160	0.088	0.131	0.078	0.120	0.074	0.267	0.123	0.199	0.112	0.165	0.102
0.3	0.196	0.078	0.154	0.070	0.139	0.067	0.357	0.106	0.239	0.098	0.189	0.091
0.4	0.250	0.069	0.185	0.063	0.163	0.061	0.528	0.092	0.294	0.087	0.221	0.081

Table 15: Fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)

ep	Température interne = 300 K / température externe = 300 K						Température interne = 1500 K / température externe = 300 K					
	k=0		k=0.5		k=1		k=0		k=0.5		k=1	
	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
0	7.321	7.321	7.311	7.311	7.307	7.307	5.992	5.992	5.927	5.927	6.055	6.055
0.1	7.247	7.183	7.240	7.178	7.237	7.176	5.894	6.099	5.864	6.004	6.017	6.112
0.2	7.183	7.078	7.178	7.079	7.176	7.080	5.803	6.218	5.815	6.098	6.000	6.187
0.3	7.126	7.002	7.124	7.009	7.124	7.014	5.716	6.351	5.782	6.209	6.005	6.282
0.4	7.078	6.948	7.078	6.964	7.079	6.977	5.630	6.501	5.766	6.340	6.040	6.398

Table 16: Déflexion statique naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)

ep	Température interne = 300 K / température externe = 300 K						Température interne = 1500 K / température externe = 300 K					
	k=0		k=0.5		k=1		k=0		k=0.5		k=1	
	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
0	0.116	0.116	0.124	0.124	0.129	0.129	0.172	0.172	0.189	0.189	0.187	0.187
0.1	0.130	0.146	0.140	0.159	0.146	0.166	0.196	0.153	0.213	0.168	0.211	0.167
0.2	0.146	0.193	0.159	0.215	0.167	0.228	0.224	0.136	0.243	0.149	0.238	0.149
0.3	0.167	0.275	0.184	0.319	0.193	0.348	0.260	0.121	0.279	0.133	0.272	0.134
0.4	0.193	0.459	0.215	0.595	0.228	0.699	0.306	0.108	0.324	0.119	0.313	0.120

Table 17: Fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité, avec $L/D=20$ (SUS304- ZrO_2)

ep	Température interne = 300 K / température externe = 300 K						Température interne = 1500 K / température externe = 300 K					
	k=0		k=0.5		k=1		k=0		k=0.5		k=1	
	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
0	7.321	7.321	7.191	7.191	7.128	7.128	5.992	5.992	5.964	5.964	6.047	6.047
0.1	7.268	7.388	7.125	7.268	7.057	7.209	5.888	6.103	5.898	6.043	6.000	6.109
0.2	7.229	7.469	7.071	7.356	6.995	7.301	5.789	6.225	5.844	6.137	5.970	6.187
0.3	7.207	7.565	7.027	7.458	6.942	7.405	5.690	6.360	5.804	6.246	5.959	6.282
0.4	7.205	7.676	6.996	7.573	6.897	7.523	5.586	6.511	5.779	6.374	5.970	6.396

Table 18: Déflexion statique naturelles en fonction du rapport longueur/diamètre, avec $L/D=20$ (SUS304- ZrO_2)

ep	Température interne = 300 K / température externe = 300 K						Température interne = 1500 K / température externe = 300 K					
	k=0		k=0.5		k=1		k=0		k=0.5		k=1	
	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme	uniforme	non-uniforme
0	0.116	0.116	0.116	0.116	0.117	0.117	0.172	0.172	0.169	0.169	0.162	0.162
0.1	0.131	0.103	0.132	0.103	0.132	0.104	0.199	0.151	0.192	0.149	0.183	0.144
0.2	0.150	0.092	0.151	0.092	0.151	0.093	0.234	0.132	0.221	0.133	0.208	0.129
0.3	0.174	0.082	0.175	0.083	0.176	0.083	0.279	0.117	0.256	0.118	0.238	0.116
0.4	0.205	0.074	0.207	0.075	0.208	0.075	0.341	0.103	0.303	0.105	0.277	0.104

Fréquences Naturelles

- **Réduction des Fréquences Naturelles** : L'introduction de porosité ($ep = 0.1, 0.2$) diminue systématiquement les fréquences naturelles, indépendamment des autres paramètres. Par exemple, pour $L/D = 10$ et SUS304-Ni à $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la fréquence passe de $28.66Hz$ ($ep = 0$) à $28.18Hz$ ($ep = 0.1$, uniforme) et $29.28Hz$ ($ep = 0.1$, non-uniforme). Cette réduction est attribuée à une diminution de la rigidité effective due à la présence de pores, qui affaiblit la structure globale du tube.

- **Impact de la Distribution de la Porosité** : La porosité "non-uniforme" (non uniforme) a un effet plus prononcé que la porosité "uniforme" (uniforme). Par exemple, pour $L/D = 15$ et SUS304- Al_2O_3 à $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la fréquence diminue de

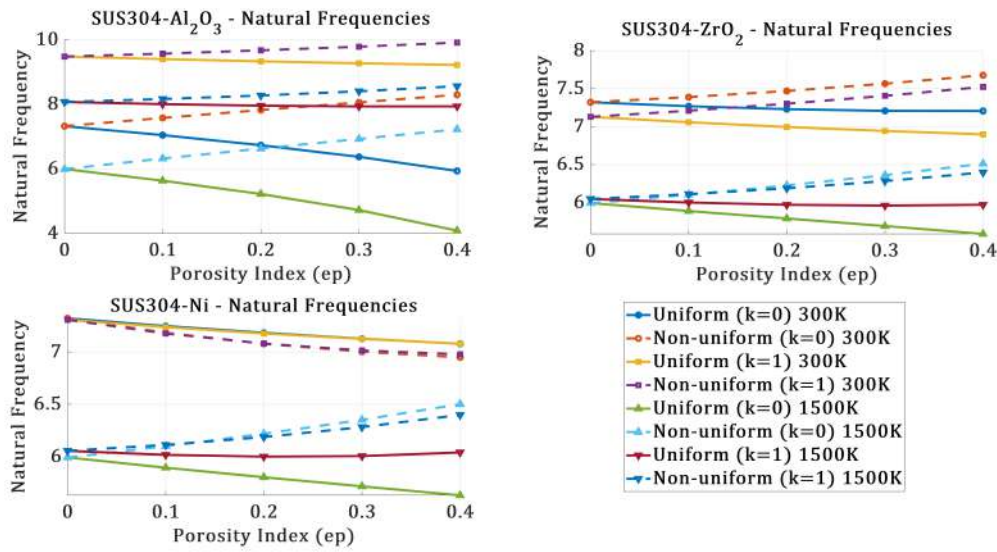


Figure 25: Représentation graphique des fréquences naturelles en fonction du l'indice de porosité

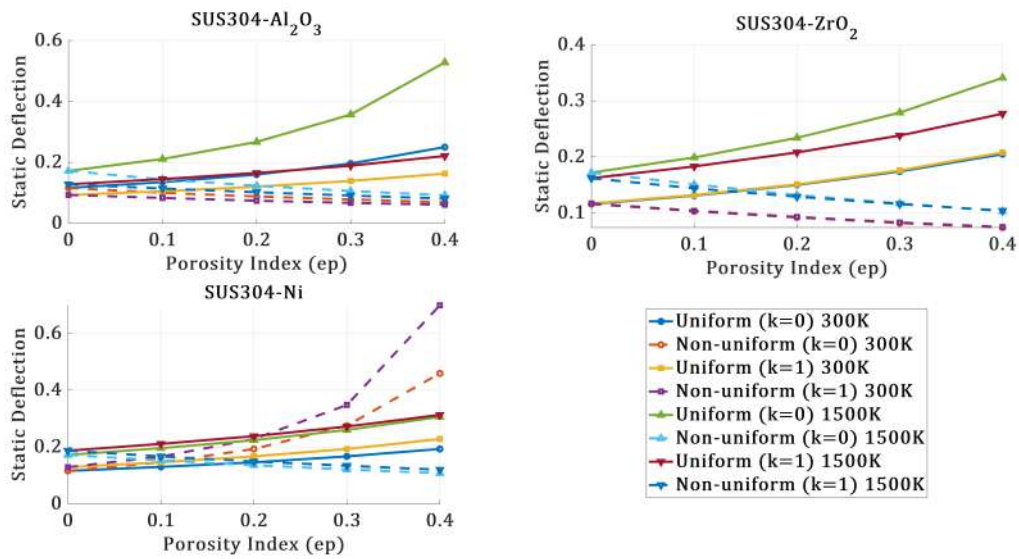


Figure 26: Représentation graphique des déflexions statiques en fonction du l'indice de porosité

16.76Hz ($ep = 0$) à 16.51Hz ($ep = 0.2$, uniforme) et 17.10Hz ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela suggère que la distribution non uniforme de la porosité perturbe davantage la continuité structurale, entraînant une rigidité encore plus faible.

- **Amplification pour des Rapports L/D Élevés** : L'effet de la porosité est amplifié pour des rapports L/D élevés. Par exemple, pour $L/D = 40$ et SUS304- ZrO_2 à $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la fréquence diminue de 1.79Hz ($ep = 0$) à 1.76Hz ($ep = 0.2$, uniforme) et 1.84Hz ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela est dû au fait qu'une géométrie allongée est déjà moins rigide, et la porosité aggrave cette fragilité.

- **Influence des Conditions Thermiques** : Une élévation de la température interne ($T_{int} = 1500K$) accentue l'impact négatif de la porosité sur les fréquences naturelles. Par exemple, pour $L/D = 20$ et SUS304-Ni, la fréquence passe de $6.06Hz$ ($ep = 0$) à $5.97Hz$ ($ep = 0.2$, uniforme) et $6.19Hz$ ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela reflète une combinaison des effets de dilatation thermique et de rigidité réduite.

Déflexions Statiques

- **Augmentation des Déflexions Statiques** : La présence de porosité accroît systématiquement les déflexions statiques. Par exemple, pour $L/D = 10$ et SUS304- Al_2O_3 à $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la déflexion passe de $0.00602m$ ($ep = 0$) à $0.00775m$ ($ep = 0.2$, uniforme) et $0.00484m$ ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela s'explique par une réduction de la rigidité effective due à la présence de pores, rendant la structure plus flexible.

- **Impact de la Distribution de la Porosité** : La porosité "non-uniforme" provoque des déformations plus importantes que la porosité "uniforme". Par exemple, pour $L/D = 25$ et SUS304-Ni à $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la déflexion passe de $0.31262m$ ($ep = 0$) à $0.40527m$ ($ep = 0.2$, uniforme) et $0.18234m$ ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela montre que la distribution non uniforme de la porosité crée des zones de faiblesse localisées, augmentant les déformations globales.

- **Amplification pour des Rapports L/D Élevés** : L'effet de la porosité sur les déflexions statiques est exacerbé pour des rapports L/D élevés. Par exemple, pour $L/D = 40$ et SUS304- ZrO_2 à $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la déflexion passe de $1.85m$ ($ep = 0$) à $2.40m$ ($ep = 0.2$, uniforme) et $1.47m$ ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela est dû à une flexibilité accrue pour des géométries allongées.

- **Influence des Conditions Thermiques** : Une élévation de la température interne ($T_{int} = 1500K$) amplifie l'impact de la porosité sur les déflexions statiques. Par exemple, pour $L/D = 30$ et SUS304- Al_2O_3 , la déflexion passe de $0.47111m$ ($ep = 0$) à $0.83585m$ ($ep = 0.2$, uniforme) et $0.51090m$ ($ep = 0.2$, non-uniforme). Cela reflète une combinaison des effets de dilatation thermique et de rigidité réduite.

7.3 Effet du variation de température interne

Table 19: Fréquences naturelles en fonction du température interne, avec L/D=20 (SUS304- Al_2O_3)

Temp interne (K)	k	Even				Uneven		
		$e_p = 0$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$
300	0	7.321	7.282	7.246	7.212	7.363	7.407	7.454
600		7.219	7.179	7.142	7.108	7.261	7.306	7.355
900		6.987	6.945	6.906	6.870	7.031	7.079	7.130
1200		6.599	6.555	6.514	6.477	6.646	6.696	6.750
1500		5.992	5.949	5.910	5.873	6.038	6.087	6.140
300	0.5	8.678	8.517	8.346	8.159	8.835	8.993	9.156
600		8.574	8.413	8.244	8.058	8.730	8.888	9.051
900		8.201	8.032	7.855	7.661	8.366	8.534	8.708
1200		7.782	7.603	7.416	7.213	7.958	8.138	8.326
1500		7.150	6.959	6.761	6.544	7.339	7.533	7.737
300	1	9.478	9.399	9.329	9.269	9.568	9.670	9.783
600		9.368	9.288	9.219	9.160	9.457	9.559	9.673
900		8.994	8.914	8.848	8.794	9.086	9.191	9.312
1200		8.624	8.548	8.488	8.446	8.715	8.824	8.951
1500		8.073	8.004	7.956	7.932	8.161	8.271	8.402

Table 20: Déflexion statique en fonction du température interne, avec L/D=20 (SUS304- Al_2O_3)

Temp interne (K)	k	Even				Uneven		
		$e_p = 0$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$
300	0	0.116	0.123	0.131	0.140	0.109	0.103	0.097
600		0.119	0.126	0.135	0.144	0.112	0.105	0.100
900		0.127	0.135	0.144	0.154	0.119	0.112	0.106
1200		0.142	0.152	0.162	0.174	0.134	0.126	0.118
1500		0.172	0.184	0.197	0.211	0.162	0.152	0.143
300	0.5	0.099	0.113	0.131	0.154	0.088	0.078	0.070
600		0.102	0.116	0.134	0.157	0.090	0.080	0.072
900		0.111	0.127	0.148	0.174	0.098	0.087	0.078
1200		0.123	0.142	0.166	0.196	0.108	0.096	0.085
1500		0.146	0.169	0.199	0.239	0.127	0.112	0.098
300	1	0.093	0.105	0.120	0.139	0.083	0.074	0.067
600		0.095	0.107	0.123	0.142	0.085	0.076	0.069
900		0.103	0.117	0.133	0.154	0.092	0.082	0.074
1200		0.112	0.127	0.145	0.167	0.100	0.089	0.080
1500		0.128	0.145	0.165	0.189	0.114	0.102	0.091

Table 21: Fréquences naturelles en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)

Temp interne (K)	k	Even				Uneven		
		$e_p = 0$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$
300	0	7.321	7.282	7.246	7.212	7.363	7.407	7.454
600		7.219	7.179	7.142	7.108	7.261	7.306	7.355
900		6.987	6.945	6.906	6.870	7.031	7.079	7.130
1200		6.599	6.555	6.514	6.477	6.646	6.696	6.750
1500		5.992	5.949	5.910	5.873	6.038	6.087	6.140
300	0.5	7.191	7.125	7.071	7.027	7.268	7.356	7.458
600		7.039	6.974	6.921	6.879	7.115	7.203	7.304
900		6.798	6.733	6.680	6.638	6.875	6.964	7.068
1200		6.450	6.384	6.330	6.289	6.528	6.620	6.727
1500		5.964	5.898	5.844	5.804	6.043	6.137	6.246
300	1	7.128	7.057	6.995	6.942	7.209	7.301	7.405
600		6.959	6.888	6.827	6.774	7.040	7.132	7.236
900		6.732	6.664	6.608	6.561	6.810	6.900	7.003
1200		6.433	6.373	6.326	6.293	6.506	6.592	6.693
1500		6.047	6.000	5.970	5.959	6.109	6.187	6.282

 Table 22: Déflexion statique en fonction du température interne, avec $L/D=20$ (SUS304-Ni)

Temp interne (K)	k	Even				Uneven		
		$e_p = 0$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$
300	0	0.116	0.123	0.131	0.140	0.109	0.103	0.097
600		0.119	0.126	0.135	0.144	0.112	0.105	0.100
900		0.127	0.135	0.144	0.154	0.119	0.112	0.106
1200		0.142	0.152	0.162	0.174	0.134	0.126	0.118
1500		0.172	0.184	0.197	0.211	0.162	0.152	0.143
300	0.5	0.116	0.132	0.151	0.175	0.103	0.092	0.083
600		0.121	0.138	0.157	0.183	0.108	0.096	0.086
900		0.130	0.148	0.169	0.196	0.115	0.103	0.092
1200		0.144	0.164	0.188	0.218	0.128	0.114	0.102
1500		0.169	0.192	0.221	0.256	0.149	0.133	0.118
300	1	0.117	0.132	0.151	0.176	0.104	0.093	0.083
600		0.122	0.139	0.159	0.184	0.109	0.097	0.087
900		0.131	0.148	0.170	0.197	0.116	0.104	0.093
1200		0.143	0.162	0.185	0.214	0.127	0.114	0.102
1500		0.162	0.183	0.208	0.238	0.144	0.129	0.116

Table 23: Fréquences naturelles en fonction du température interne, avec L/D=20 (SUS304-ZrO₂)

Temp interne (K)	k	Even				Uneven		
		$e_p = 0$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$
300	0	7.321	7.282	7.246	7.212	7.363	7.407	7.454
600		7.219	7.179	7.142	7.108	7.261	7.306	7.355
900		6.987	6.945	6.906	6.870	7.031	7.079	7.130
1200		6.599	6.555	6.514	6.477	6.646	6.696	6.750
1500		5.992	5.949	5.910	5.873	6.038	6.087	6.140
300	0.5	7.311	7.240	7.178	7.124	7.392	7.484	7.587
600		7.032	6.965	6.909	6.864	7.109	7.197	7.298
900		6.757	6.692	6.640	6.599	6.833	6.922	7.025
1200		6.418	6.354	6.304	6.267	6.496	6.587	6.695
1500		5.927	5.864	5.815	5.782	6.004	6.098	6.209
300	1	7.307	7.237	7.176	7.124	7.386	7.477	7.579
600		6.941	6.869	6.805	6.749	7.022	7.114	7.217
900		6.669	6.602	6.546	6.500	6.747	6.837	6.940
1200		6.408	6.352	6.312	6.287	6.478	6.563	6.664
1500		6.055	6.017	6.000	6.005	6.112	6.187	6.282

 Table 24: Déflexion statique en fonction du température interne, avec L/D=20 (SUS304-ZrO₂)

Temp interne (K)	k	Even				Uneven		
		$e_p = 0$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$	$e_p = 0.1$	$e_p = 0.2$	$e_p = 0.3$
300	0	0.116	0.123	0.131	0.140	0.109	0.103	0.097
600		0.119	0.126	0.135	0.144	0.112	0.105	0.100
900		0.127	0.135	0.144	0.154	0.119	0.112	0.106
1200		0.142	0.152	0.162	0.174	0.134	0.126	0.118
1500		0.172	0.184	0.197	0.211	0.162	0.152	0.143
300	0.5	0.124	0.140	0.159	0.184	0.111	0.099	0.089
600		0.134	0.151	0.172	0.198	0.120	0.107	0.097
900		0.145	0.164	0.186	0.214	0.129	0.116	0.104
1200		0.161	0.182	0.207	0.237	0.143	0.128	0.115
1500		0.189	0.213	0.243	0.279	0.168	0.149	0.133
300	1	0.129	0.146	0.167	0.193	0.114	0.102	0.092
600		0.142	0.162	0.185	0.215	0.127	0.113	0.101
900		0.154	0.175	0.200	0.232	0.137	0.122	0.110
1200		0.167	0.189	0.215	0.248	0.149	0.133	0.119
1500		0.187	0.211	0.238	0.272	0.167	0.149	0.134

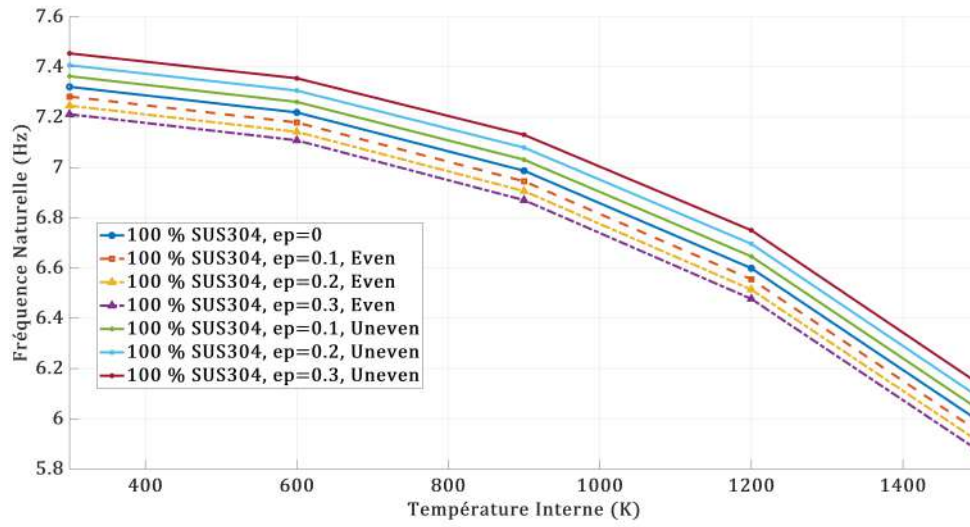


Figure 27: Fréquences naturelles en fonction du température interne (100 % SUS304)

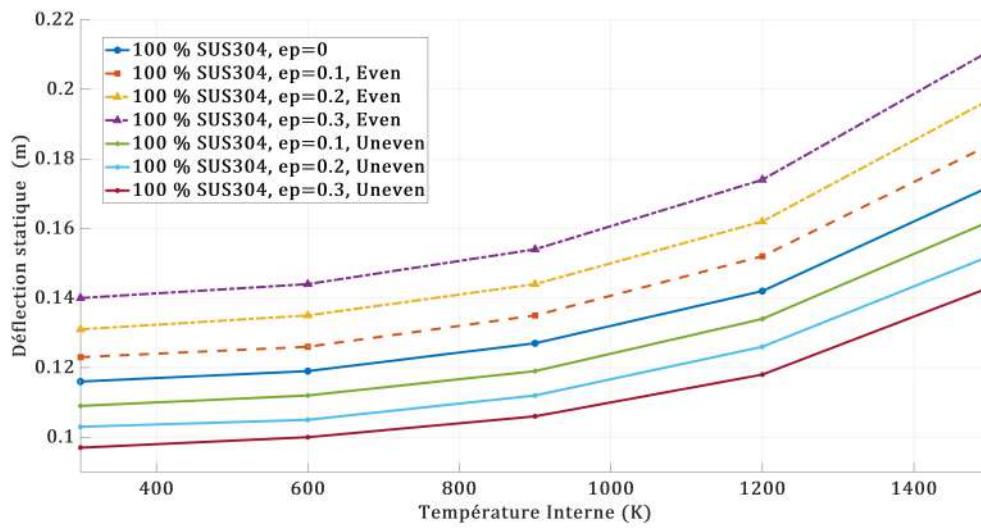


Figure 28: Déflexions statiques en fonction du température interne (100 % SUS304)

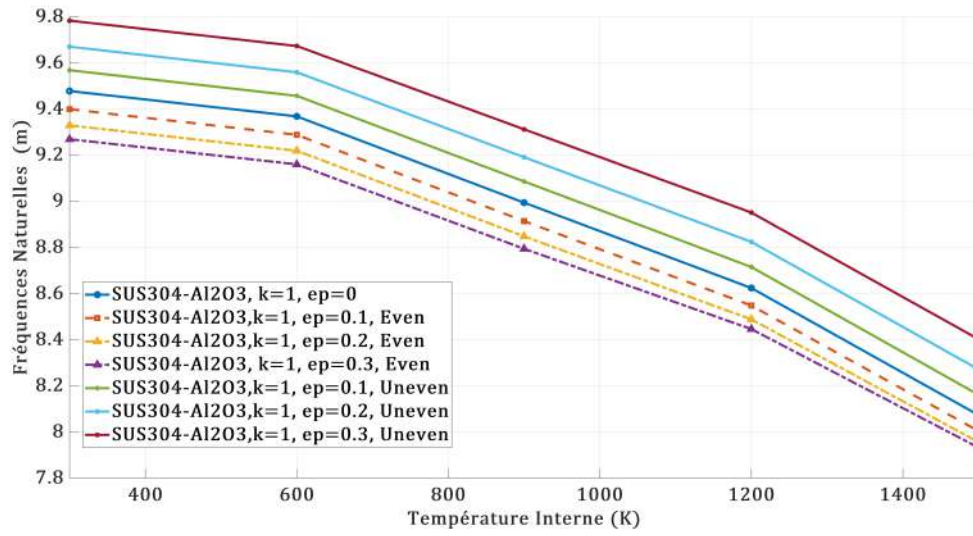


Figure 29: Fréquences naturelles en fonction du température interne ($SUS304-Al_2O_3, k = 1$)

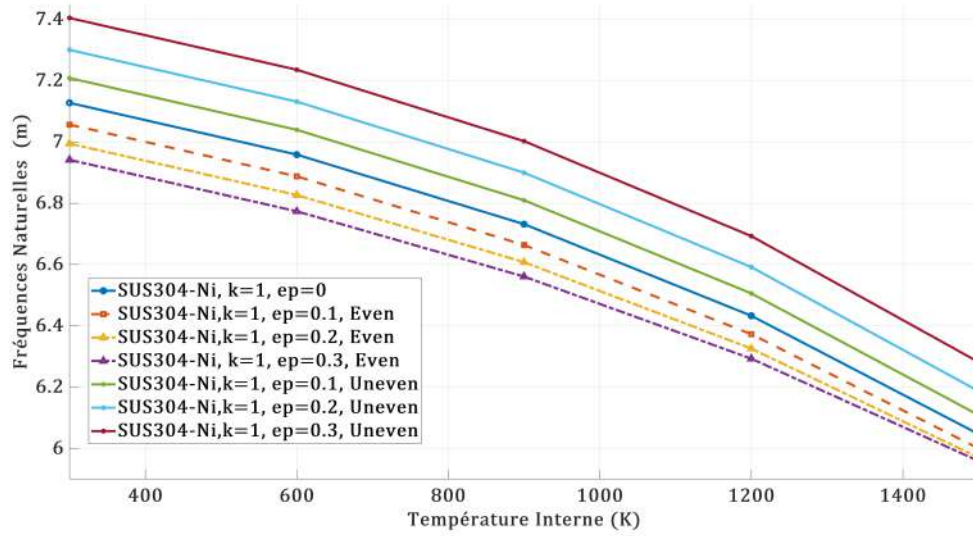


Figure 30: Fréquences naturelles en fonction du température interne ($SUS304 - Ni, k = 1$)

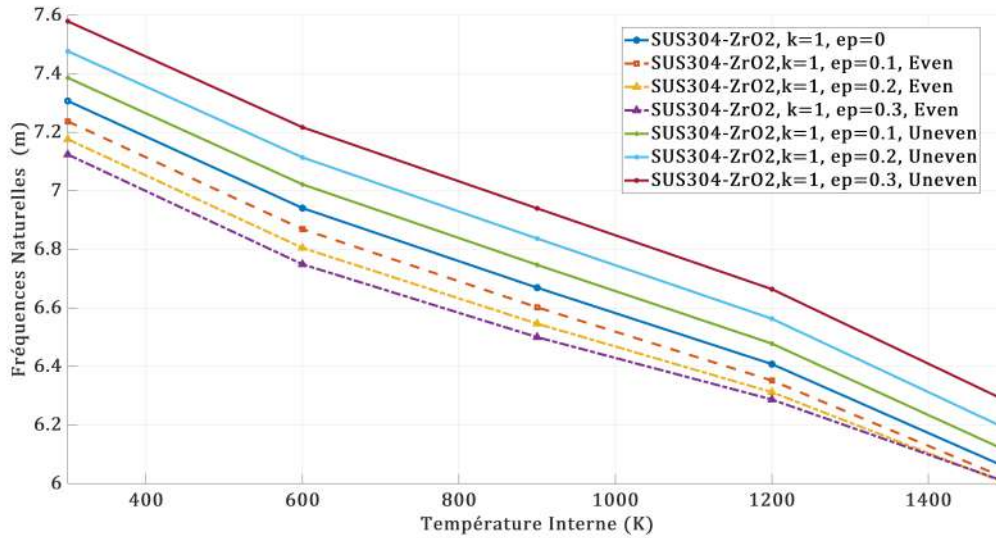


Figure 31: Fréquences naturelles en fonction du température interne ($SUS304-ZrO_2, k = 1$)

Les résultats présentés dans les tableaux 19-24 et illustré dans les figures 27-31 fournissent une analyse approfondie des fréquences naturelles et les déflexions statiques en fonction de la la température interne (T_{int}):

Effet de la Température Interne

- Une élévation de la température interne réduit systématiquement les fréquences naturelles. Par exemple, pour $L/D = 20$ et $SUS304-Al_2O_3$, une augmentation de la température interne entraîne une diminution notable des fréquences fondamentales. Ce comportement est attribué à la dilatation thermique, qui diminue la rigidité effective du matériau.
- Les déflexions statiques augmentent avec la température interne, reflétant une déformation accrue due à l'expansion thermique.

Influence de la Porosité

- L'effet combiné de la température interne élevée et de la porosité accentue la réduction des fréquences naturelles et l'augmentation des déflexions statiques.

Impact du Rapport Longueur/Diamètre (L/D)

- Un rapport L/D élevé réduit les fréquences naturelles et augmente les déflexions statiques. Ces tendances sont amplifiées par la présence de porosité et des conditions thermiques extrêmes.

Influence du Gradient Matériel (k)

- Le paramètre de gradation k modifie les propriétés mécaniques effectives du matériau FGM : - Pour $k = 0$ (matériau homogène), les fréquences naturelles sont généralement plus élevées, tandis que les déflexions statiques sont plus faibles. - Des valeurs plus élevées de k (transition abrupte entre les matériaux internes et externes) entraînent des variations dans les performances dynamiques et statiques.

Comparaison du Comportement entre les Matériaux Internes

Le choix du matériau interne influence directement les performances du tube FGM. Une comparaison des matériaux internes (Al_2O_3 , Ni, ZrO_2) révèle les tendances suivantes :

Fréquences Naturelles

- Al_2O_3 présente les fréquences naturelles les plus élevées, suivi de ZrO_2 et Ni. Par exemple, pour $L/D = 5$ et $T_{int} = T_{ext} = 300K$, les fréquences naturelles sont respectivement de $138.91Hz$ (Al_2O_3), $104.21Hz$ (ZrO_2), et $106.88Hz$ (Ni). - Ces différences sont attribuées aux propriétés intrinsèques des matériaux, telles que leur densité et leur module d'élasticité. Al_2O_3 , étant plus rigide et moins dense, offre des performances dynamiques supérieures.

Déflexions Statiques

- Les matériaux internes ayant une densité plus faible (comme Al_2O_3) présentent des déformations légèrement inférieures à ceux avec une densité plus élevée (Ni). Par exemple, pour $L/D = 40$ et $T_{int} = T_{ext} = 300K$, la déflexion est de $1.49m$ (Al_2O_3), $1.85m$ (ZrO_2), et $2.04m$ (Ni). - Cette tendance est exacerbée pour des rapports L/D élevés et des conditions thermiques extrêmes.

Les résultats montrent que la performance des tubes FGM est fortement influencée par une combinaison de facteurs géométriques, matériels, et environnementaux. Une température interne élevée, une porosité accrue, et un rapport L/D élevé réduisent la rigidité et augmentent les déformations. Ces observations soulignent l'importance de contrôler ces paramètres lors de la conception de structures FGM pour des applications soumises à des environnements thermiques sévères ou nécessitant une rigidité élevée.

En outre, le choix du matériau interne joue un rôle crucial dans les performances dynamiques et statiques. Al_2O_3 se distingue par ses performances supérieures, offrant

des fréquences naturelles plus élevées et des déformations plus faibles, ce qui en fait un choix privilégié pour des applications exigeantes.

Conclusion générale

Ce travail de recherche a porté sur l'étude des performances dynamiques et statiques d'un tube creux en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) avec porosité, soumis à des gradients thermiques. À travers une analyse approfondie des fréquences naturelles et des déflexions statiques, nous avons exploré l'influence combinée de plusieurs paramètres critiques : le rapport longueur/diamètre (L/D), la porosité ($ep = 0, 0.1, 0.2$), les conditions thermiques ($T_{int} = 300K, T_{ext} = 1500K$), et le choix du matériau interne (Al_2O_3, Ni, ZrO_3).

Principaux Résultats

Les résultats obtenus ont permis de tirer les conclusions suivantes :

- **Effet du Rapport L/D** : Une augmentation du rapport L/D entraîne une diminution significative des fréquences naturelles tout en augmentant les déflexions statiques. Ce comportement est cohérent avec une réduction de la rigidité effective lorsque la longueur du tube augmente par rapport à son diamètre. Les géométries allongées (L/D élevé) sont donc plus flexibles mais moins adaptées aux applications nécessitant une rigidité élevée.

- **Influence de la Porosité** : L'introduction de porosité réduit systématiquement les fréquences naturelles et accroît les déformations statiques. La distribution non uniforme ("uneven") de la porosité a un impact plus prononcé que la distribution uniforme ("even"). Cela souligne l'importance de contrôler

la porosité dans la conception des structures en FGM pour minimiser ses effets néfastes.

- **Impact des Conditions Thermiques** : Une élévation de la température interne ($T_{int} = 1500K$) amplifie les déformations statiques et réduit les fréquences naturelles. Ces effets sont exacerbés pour des rapports L/D élevés et des niveaux de porosité importants. Cela reflète l'impact combiné de la dilatation thermique et de la rigidité réduite sous des conditions extrêmes.

- **Choix du Matériau Interne** : Le choix du matériau interne influence directement les performances du tube. Al_2O_3 présente les fréquences naturelles les plus élevées et les déformations les plus faibles, suivi de ZrO_3 et Ni. Ces différences sont attribuées aux propriétés mécaniques intrinsèques des matériaux, telles que leur densité et leur module d'élasticité.

Contributions de ce Travail

Ce travail apporte plusieurs contributions significatives à la littérature sur les matériaux FGM :

- Une analyse détaillée des interactions entre les paramètres géométriques, matériels, et environnementaux sur les performances dynamiques et statiques des tubes FGM.
- Une mise en évidence de l'importance de la porosité et de sa distribution dans le comportement structural des matériaux FGM.
- Des recommandations pratiques pour la conception de structures FGM optimisées, en tenant compte des exigences spécifiques des applications (rigidité, résistance aux déformations, etc.).

Perspectives pour des Travaux Futurs

Bien que ce travail fournisse des résultats précieux, plusieurs pistes de recherche restent à explorer :

- **Optimisation Multi-objectifs** : Développer des méthodes d'optimisation pour concevoir des structures FGM qui maximisent les performances tout en minimisant les effets indésirables de la porosité et des gradients thermiques.

- **Modélisation Avancée** : Intégrer des modèles plus complexes, tels que des lois de comportement non linéaires ou des effets de fatigue, pour mieux capturer le comportement des matériaux FGM dans des conditions réelles.

- **Applications Industrielles** : Étudier l'applicabilité des résultats obtenus dans des domaines spécifiques, tels que l'aérospatiale, l'énergie, ou la biomécanique.

En conclusion, cette étude a permis de mieux comprendre les mécanismes régissant le comportement des tubes FGM avec porosité sous des gradients thermiques. Les résultats obtenus constituent une base solide pour le développement de structures FGM performantes et adaptées aux exigences des applications modernes. Les perspectives proposées ouvrent la voie à des recherches futures prometteuses, contribuant ainsi à l'avancement de ce domaine en pleine expansion.

Références

- [1] J. N. Reddy. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):663–684, 2000. ISSN 0029-5981. doi: /10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8.
- [2] M. Koizumi. Fgm activities in japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1):1–4, 1997. ISSN 1359-8368. doi: [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836896000169>.
- [3] Victor Birman and Larry W. Byrd. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 60(5):195–216, 2007. ISSN 0003-6900. doi: 10.1115/1.2777164. URL <https://doi.org/10.1115/1.2777164>.
- [4] Nuttawit Wattanasakulpong and Arisara Chaikittiratana. Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method. *Meccanica*, 50(5):1331–1342, 2015. ISSN 1572-9648. doi: 10.1007/s11012-014-0094-8. URL <https://doi.org/10.1007/s11012-014-0094-8>.
- [5] A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, and J. N. Reddy. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(3): 519–539, 2003. ISSN 0020-7403. doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740303000584>.
- [6] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2013. ISBN 978-1-85617-633-0. doi: 10.1016/C2009-0-24909-9.
- [7] Ankit Gupta and Mohammad Talha. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*, 79:1–14, 2015. ISSN 0376-0421. doi: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042115000561>.
- [8] Huu-Tai Thai and Thuc P. Vo. A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 54:58–66, 2012. ISSN 0020-7225. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.01.009>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722512000201>.

- [9] Hui-Shen Shen. *Functionally Graded Materials*. Nonlinear Analysis of Plates and Shells. CRC Press, Boca Raton, 1st edition edition, 2011. doi: 10.1201/9781420092578.
- [10] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2006. ISBN 9780979004902. URL <https://books.google.dz/books?id=rWvefGICfO8C>.
- [11] Trung-Kien Nguyen, Ba-Duy Nguyen, Thuc P. Vo, and Huu-Tai Thai. Hygro-thermal effects on vibration and thermal buckling behaviours of functionally graded beams. *Composite Structures*, 176:1050–1060, 2017. ISSN 0263-8223. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.036>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822317312746>.
- [12] M Yamanouchi, M Koizumi, T Hirai, and I Shiota. Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials. *Sendai, Japan*, 1990.
- [13] Toshio Hirai and Leng Chen. Recent and prospective development of functionally graded materials in japan. *Materials Science Forum*, 308-311:509–514, 1999. ISSN 1662-9752. doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.308-311.509. URL <https://www.scientific.net/MSF.308-311.509>.
- [14] S. Uemura. The activities of fgm on new application. *Materials Science Forum*, 423-425:1–10, 2003. ISSN 1662-9752. doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.423-425.1. URL <https://www.scientific.net/MSF.423-425.1>.
- [15] JB Holt, Mitsue Koizumi, Toshio Hirai, and ZA Munir. Ceramic transactions: Functionally gradient materials. volume 34. Report, Westerville, OH (United States); American Ceramic Society, 1993.
- [16] J. Aboudi, M. J. Pindera, and S. M. Arnold. Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 30(8):777–832, 1999. ISSN 1359-8368. doi: 10.1016/S1359-8368(99)00053-0. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836899000530>.
- [17] Debabrata Gayen and Tarapada Roy. Finite element based vibration analysis of functionally graded spinning shaft system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(18):3306–3321, 2014. doi: 10.1177/0954406214527923. URL <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/0954406214527923>.
- [18] J. N. Reddy and C. D. Chin. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 21(6):593–626, 1998. ISSN 0149-5739. doi: 10.1080/01495739808956165. URL <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>. doi: 10.1080/01495739808956165.
- [19] Y. S. Touloukian. *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*. THERMOPHYSICAL AND ELECTRONIC PROPERTIES INFORMATION ANALYSIS CENTER LAFAYETTE, 1966. URL <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0649950.pdf>.

- [20] Y. Kiani and M. R. Eslami. Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(3):229–238, 2010. ISSN 1573-8841. doi: 10.1007/s10999-010-9132-4. URL <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9132-4>.
- [21] Vijaykumar Vaka, Prabhakar Sathujoda, and Satishkumar Yelike. A review on dynamic analysis of porous functionally graded rotor systems. *AIP Conference Proceedings*, 2341(1), 2021. ISSN 0094-243X. doi: 10.1063/5.0050352. URL <https://doi.org/10.1063/5.0050352>.
- [22] C. T. Loy, K. Y. Lam, and J. N. Reddy. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3):309–324, 1999. ISSN 0020-7403. doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00054-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00054-X). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002074039800054X>.
- [23] J. N. Reddy. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2):288–307, 2007. ISSN 0020-7225. doi: 10.1016/j.ijengsci.2007.04.004. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722507000377>.
- [24] Debabrata Gayen, D. Chakraborty, and Rajiv Tiwari. Finite element analysis for a functionally graded rotating shaft with multiple breathing cracks. *International Journal of Mechanical Sciences*, 134:411–423, 2017. ISSN 0020-7403. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.10.027. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740317316806>.
- [25] Fethi Hadjoui, Ahmed Saimi, Ismail Bensaid, and Abdelhamid Hadjoui. Dynamic analysis of a functionally graded tapered rotating shaft under thermal load via differential quadrature finite elements method. *Advances in aircraft and spacecraft science*, 10(1):19–49, 2023. ISSN 2287-528X/2287-5271. doi: 10.12989/AAS.2023.10.1.019. URL <https://doi.org/10.12989/AAS.2023.10.1.019>.
- [26] Abdelkrim Boukhalfa. Dynamic analysis of a spinning functionally graded material shaft by the p - version of the finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(11):2018–2038, 2014. ISSN 1679-7825. doi: 10.1590/S1679-78252014001100007.

Abstract

In this thesis, an in-depth numerical study is conducted on the free vibrational analysis and static bending of tubes made from functionally graded materials (FGM), taking into account porosity properties under the influence of thermal variations. The power-law is used to model the gradation of FGM materials, while a nonlinear temperature distribution is adopted to better reflect real-world conditions. This work is based on two classical beam theories: Euler-Bernoulli theory and Timoshenko theory, allowing for a comparative analysis of mechanical behavior. The equations of motion are derived by applying Lagrange's principle through two distinct methods: a numerical method based on classical finite elements and an analytical approach using the Galerkin method. The natural frequencies are then calculated by solving the eigenvalue problem, considering various influencing parameters such as the FGM tube geometry, the power-law index associated with material gradation, temperature variations, porosity index, and different combinations of FG materials. This research aims to provide a deeper understanding of the vibrational and mechanical performance of FGM structures in complex environments.

keywords: FG materials, Free vibrations, Static bending, Beam theory, Finite element method, Galerkin method, Porosity, Nonlinear thermal distribution.

Résumé

Dans le cadre de cette thèse, une étude numérique approfondie est menée sur l'analyse vibratoire libre et la flexion statique des tubes en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), intégrant des propriétés de porosité sous l'influence des variations thermiques. La loi de puissance est utilisée pour modéliser la gradation des matériaux FGM, tandis qu'une distribution non linéaire de la température est adoptée pour mieux refléter les conditions réelles. Ce travail repose sur deux théories des poutres classiques : la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko, permettant ainsi une analyse comparative des comportements mécaniques. Les équations de mouvement sont dérivées en appliquant le principe de Lagrange à travers deux méthodes distinctes : une méthode numérique basée sur les éléments finis classiques et une méthode analytique fondée sur l'approche de Galerkin. Les fréquences naturelles sont ensuite calculées en résolvant le problème aux valeurs propres, tout en prenant en compte divers paramètres influents, tels que la géométrie du tube FGM, l'indice de puissance associé à la loi de gradation, les variations de température, l'indice de porosité, ainsi que différentes combinaisons de matériaux FG. Cette recherche vise à fournir une compréhension approfondie des performances vibratoires et mécaniques des structures FGM dans des environnements complexes.

mots-clés: Matériaux FG, Vibrations libres, Flexion statique, Théorie des poutres, Méthode des éléments finis, Méthode de Galerkin, porosité, Distribution thermique non linéaire.

ملخص

في إطار هذه الأطروحة، تم إجراء دراسة عددية معمقة حول التحليل الاهتزازي الحر والانحناء الاستاتيكي للأبواب المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفياً (ذجبي)، مع الأخذ بعين الاعتبار خصائص المسامية تحت تأثير التغيرات الحرارية. تم استخدام قانون القوة لنموذج التدرج في المواد ذجبي، في حين تم اعتماد توزيع غير خطي لدرجات الحرارة لعكس الظروف الحقيقية بشكل أفضل. يستند هذا العمل إلى نظريتين كلاسيكيتين للعوارض: نظرية أويلر بيرنولي ونظرية تيموشينكو، مما يتيح إجراء تحليل مقارنة للسلوك الميكانيكي. تم استخلاص معادلات الحركة باستخدام مبدأ لاغرانج من خلال طريقتين مختلفتين: طريقة عددية تعتمد على العناصر المحدودة التقليدية وطريقة تحليلية تستند إلى نهج غاليركين. تم حساب الترددات الطبيعية بعد ذلك عن طريق حل مشكلة القيم الذاتية، مع مراعاة مجموعة من العوامل المؤثرة مثل هندسة الأنابيب ذجبي، ومعامل القدرة المرتبط بتدرج المادة، والتغيرات في درجات الحرارة، ومعامل المسامية، بالإضافة إلى مجموعات مختلفة من مواد ذج. تهدف هذه الدراسة إلى تقديم فهم عميق للأداء الاهتزازي والميكانيكي للهياكل ذجبي في بيئات معقدة.

الكلمات المفتاحية: المواد ذات الخصائص المتدرجة، الاهتزازات الحرة، الانحناء الساكن، نظرية العوارض، طريقة العناصر المتهية، طريقة غاليركين، المسامية، التوزيع الحراري غير الخطي