

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Belhadj Bouchaib d'Ain-Temouchent
Institut de Technologie
Département de Génie Mécanique



Projet de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master en :
Domaine : TECHNOLOGIE
Filière : GÉNIE MÉCANIQUE
Spécialité : Énergétiques

**Simulation-RANS des écoulements turbulent sans et avec
combustion dans une tuyère supersonique**

Présenté Par :

DJEROUAT Anes Mohammed Ryad

Devant le jury composé de :

Pr F. BOUAFIA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Présidente
Pr.E. A. BOUNIF	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant
Pr T. NEHARI	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur

Année Universitaire 2025/2026

Remerciement

Avant tout, je remercie Dieu de m'avoir donné le courage, la patience et la force d'étudier et de suivre le chemin de la science.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadrant, le Professeur BOUNIF Abdelhamid, pour son suivi, son aide scientifique, ses judicieux conseils et surtout pour son soutien. Il a su m'encourager, me réconforter et croire en moi dès le début.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je souhaite également adresser mes remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer et de juger mon travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

*À prunelle de mes yeux ma mère MEHTOUGUI Saliha qui m'ont
accordé leur confiance et m'a encouragé durant toute ma vie.*

À la mémoire de mon père (allaho-maa arhamho).

À mon petit frère Adel, je te souhaite tout le bonheur et la réussite.

À mes chère granrdes mère, que Dieu vous protège.

*À toute ma famille, à mes proches et à tous ceux qui me donnent
motivation et énergie. Et tout particulièrement à mon oncle
MEHTOUGUI Farid pour son aide et son soutien, Que Dieu leur
donne une longue et joyeuse vie.*

RÉSUMÉ

Ce travail porte sur la simulation numérique (CFD) par l'approche RANS des écoulements turbulents supersoniques dans une tuyère de turboréacteur. L'étude consiste à modéliser le comportement du fluide et la dynamique des ondes de choc en évaluant l'influence de plusieurs paramètres physiques et opérationnels. La démarche intègre une phase de validation du modèle numérique, une analyse comparative des modèles de turbulence ainsi qu'une étude des régimes stationnaire et transitoire. De plus, une analyse paramétrique est menée pour caractériser l'impact des variations de la pression et de la température d'entrée sur l'écoulement. Enfin, le travail comporte la modélisation et l'analyse thermochimique d'un écoulement réactif hydrogène-air au sein du divergent.

Mots-clés : Tuyère supersonique, Turboréacteur, Simulation numérique (CFD), RANS, Étude paramétrique, Écoulement réactif.

ABSTRACT

This work focuses on the numerical simulation (CFD) using the RANS approach of turbulent supersonic flows within a turbojet nozzle. The study consists of modeling fluid behavior and shock wave dynamics by evaluating the influence of several physical and operational parameters. The methodology integrates a numerical model validation phase, a comparative analysis of turbulence models, and an investigation of steady versus unsteady regimes. In addition, a parametric analysis is conducted to characterize the impact of inlet pressure and temperature variations on the flow. Finally, the work includes the modeling and thermochemical analysis of a reactive hydrogen-air flow within the divergent section.

Keywords: Supersonic nozzle, Turbojet, Numerical simulation (CFD), RANS, Parametric study, Reactive flow.

ملخص

يركز هذا العمل على المحاكاة العددية (ديناميكا الموائع الحسابية) باستخدام منهج رينولدز المتوسطات (RANS) لتدفقات فوق صوتية مضطربة داخل فوهة محرك نفاث توربيني. تتضمن الدراسة نمذجة سلوك المائع وديناميكيات الموجة الصدمية من خلال تقييم تأثير العديد من المعايير الفيزيائية والتشغيلية. تدمج المنهجية مرحلة التحقق من صحة النموذج العددي، وتحليلًا مقارنًا لنماذج الاضطراب، ودراسة الأنظمة المستقرة وغير المستقرة. بالإضافة إلى ذلك، يُجرى تحليل بارامتري لتحديد تأثير تغيرات ضغط ودرجة حرارة المدخل على التدفق. أخيرًا، يتضمن العمل نمذجة وتحليلًا كيميائيًا حراريًا لتدفق الهيدروجين والهواء التفاعلي داخل المقطع المتباعد.

الكلمات المفتاحية: فوهة فوق صوتية، محرك نفاث توربيني، محاكاة عددية (ديناميكا الموائع الحسابية)، رينولدز المتوسطات، دراسة بارامترية، تدفق تفاعلي.

Nomenclature

Lettres latines :

A	Section
c_f	Coefficient de frottement
L	Longueur
P_a	Pression Totale et pression statique
P^*	Pression critique
$\vec{U}$	Vecteur de vitesse
E	L'énergie totale par unité de masse
T	Température
X	Abscisse
y	Ordonnée
M	Nombre de Mach
t	Temps
q	le flux de chaleur
r	La constante du gaz parfait
C_p	La chaleur spécifique a pression constante
C_v	La chaleur spécifique a volume constant
Pr_r	Nombre de Prandtl
e	L'énergie interne
h	L'enthalpie
k	L'énergie cinétique turbulente
y^+	Ordonnée adimensionnelle
G_ω	représente la génération de ω
Y_k et Y_ω	dissipations de k et w dues à la turbulence
Pr_t	Le nombre de Prandtl turbulent

Pr_k et Pr_ω	les nombres de Prandtl pour k et ω
D_ω^+	La portion positive du terme de la diffusion croisée

Symbole grecs

a	Représente la célérité de son
β	représente le coefficient de dilatation thermique.
Ω_{ij}	le tenseur moyen du taux-de-rotation,
μ_t	la viscosité turbulente.
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
λ	Le coefficient de conductivité thermique
Γ_t	la diffusivité turbulente
Γ_k et Γ_ω	coefficients de la diffusion effective de k et ω respectivement,

indices Désignation

a	Conditions ambiantes
e	Condition de sortie de la tuyère
n	Normal
w	Paroi

Abréviations

CD	Convergente-Divergente
FANS	Favre averaged Navier Stokes equations
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
SST	shear Stress Tensor
TIC	Truncated Ideal Contour
TOC	Thrust Optimized Contour

Table des matières

<i>Remerciement</i>	II
<i>Dédicace</i>	III
RÉSUMÉ.....	IV
<i>Nomenclature</i>	V
Table des matières.....	VII
Liste des figures.....	IX
Listes des tableaux.....	XI
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1

Chapitre 01 : Généralités et recherche bibliographie

1.1	Introduction	3
1.2	Définition du fluide	3
1.3	Définition de l'écoulement d'un fluide	3
1.4	Les différents régimes de l'écoulement compressible	4
1.5	La tuyère supersonique	4
1.5.1	Géométrie et optimisation de la tuyère	5
1.5.2	Domaines d'application des tuyères supersoniques	7
1.6	Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique	9
1.6.1	Régime subsonique	9
1.6.2	Écoulement sonique adapté	10
1.6.3	Écoulement sonique non adapté (Régime de sur-détente)	10
1.6.4	Écoulement supersonique adapté	11
1.6.5	Écoulement supersonique non adapté (Sous-détente)	11
1.7	Fonctionnement réel de la tuyère de Laval	12
1.7.1	Régime d'adaptation	12
1.7.2	Régime de sous-détente	12
1.7.3	Régime de sur-détente	13
1.8	Les ondes de choc	14

Chapitre 02 : Équations gouvernantes et modèles Numériques

2.1	Introduction	17
2.2	Equations fondamentales des fluides compressibles instantanées :	17
2.2.1	Equation de conservation de la masse :	17
2.2.2	Equation de conservation de quantité de mouvement :	17
2.2.3	Equation de la conservation de l'énergie	17
2.3	Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS)	18
2.4	Modèles de turbulence	20
2.4.1	Modèle $K - \varepsilon$ standard	20
2.4.2	Modèle de turbulence $k-\omega$ -SST (Shear-Stress Transport)	25
2.5	méthodes numériques :	29
2.5.1	Introduction :	29
2.5.2	Procédure numérique :	29
2.5.3	Maillage :	30
2.5.4	Choix du maillage	30
2.6	Les méthodes numériques de résolution :	31
2.7	Forme linéarisée de l'équation discrète	32

2.8	Résolution de système d'équations linéaires	33
2.9	Schémas de discrétisation utilisés	33
2.10	Paramètres numériques de simulation	34

Chapitre 03 : Résultats et discussion

3.1	Introduction	37
3.2	Description de la géométrie de la tuyère	37
3.3	Maillage	38
3.4	Validation du modèle numérique	38
3.5	Analyse Comparative et Validation de la Modélisation Turbulente	40
3.5.1	Performances numériques et convergence	40
3.5.2	Analyse du contour du nombre de mach	43
3.5.3	Analyse des profils axiaux du nombre de mach (XY Plots)	44
3.5.4	Conclusion :	45
3.6	Comparaison entre les approches stationnaire et transitoire	45
3.6.1	Performances numériques et convergence	45
3.6.2	Analyse du profil du nombre de Mach	45
3.6.3	Conclusion	46
3.7	Influence de la pression d'entrée sur l'écoulement :	46
3.7.1	Analyse du mouvement de l'écoulement :	46
3.7.2	Analyse des propriétés thermodynamique	49
3.7.3	Conclusion	51
3.8	Influence de la température d'entrée sur l'écoulement	51
3.8.1	Analyse du mouvement de l'écoulement :	52
3.8.2	Analyse des propriétés thermodynamique	55
3.8.3	Conclusion	57
3.9	Analyse d'un écoulement réactif (mélange $H_2 - air$) :	57
3.9.1	Analyse des profils de vitesse et de température.	57
3.9.2	Analyse des fractions massiques des espèces chimiques	58
3.9.3	Analyse du nombre de Damköhler	59
3.9.4	Conclusion	59
CONCLUSION GÉNÉRALE		60
Références bibliographiques		61

Liste des figures

Chapitre 01 : Généralités et recherche bibliographie **Erreur ! Signet non défini.**

<i>Figure 1.1</i> Propagation d'ondes de pression et évolution des fronts d'onde en fonction du régime d'écoulement (distingué par le nombre de Mach)	4
<i>Figure 1.2</i> - Schéma d'une tuyère convergente-divergente (de Laval) [2].	5
<i>Figure 1.3</i> - La tuyère supersonique [5].	5
<i>Figure 1.4</i> - Profils des tuyères LEA-TIC et LEA-TOC [11].	6
<i>Figure 1.5</i> - Tuyères TIC et TOC du DLR [6].	7
<i>Figure 1.6</i> - Tuyère supersonique d'un avion de combat [13].	7
<i>Figure 1.7</i> - Tuyère propulsive d'un moteur fusée [14].	8
<i>Figure 1.8</i> - Soufflerie supersonique[15].	8
<i>Figure 1.9</i> - Schéma de la tuyère supersonique [11].	9
<i>Figure 1.10</i> - Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique, évolution de la pression le long de la tuyère [11], ...	10
<i>Figure 1.11</i> - Régime de sur détente en 1D [10].	11
<i>Figure 1.12</i> - L'organisation de l'écoulement à l'adaptation [13].	12
<i>Figure 1.13</i> - Organisation de l'écoulement en régime de sous détente [13].	13
<i>Figure 1.14</i> - Profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente [12].	13
<i>Figure 1.15</i> - Tuyère en surdétente avec décollement naissant de la couche limite[11].	14
<i>Figure 1.16</i> - Tuyère en sur détente avec décollement étendu de la couche limite [11].	14

Chapitre 02 : Équations gouvernantes et modèles Numériques

<i>Figure 2.1</i> Volume de contrôle des configurations en 2D et 3D pour la résolution en volumes finis	30
---	----

Chapitre 03 : Résultats et discussion

<i>Figure 3.1</i> Géométrie utilisé pour le calcul numérique	37
<i>Figure 3.2</i> Maillage 2D du domaine de calcul de la tuyère.	38
<i>Figure 3.3</i> la position de l'onde de choc dans la tuyère de référence	40
<i>Figure 3.4</i> la position de l'onde de choc dans la présente tuyère	40
<i>Figure 3.5</i> Historique des résidus (laminaire)	41
<i>Figure 3.6</i> Historique des résidus ($K-\epsilon$)	41
<i>Figure 3.7</i> Historique des résidus ($K-\omega$ SST)	42
<i>Figure 3.8</i> Historique des résidus (RSM)	42
<i>Figure 3.9</i> contour du nombre de mach $K-\epsilon$	43
<i>Figure 3.10</i> contour du nombre de mach $K-\omega$ SST	43
<i>Figure 3.11</i> contour du nombre de mach RSM	44
<i>Figure 3.12</i> Profil axial du nombre de Mach	44
<i>Figure 3.13</i> profil du nombre de Mach	45

Figure 3.14 contour du nombre de mach (30bars)	46
Figure 3.15 contour du nombre de mach (60bars)	47
Figure 3.16 contour du nombre de mach (90bars)	47
Figure 3.17 profil du nombre de Mach	47
Figure 3.18 contour de vitesse (30bars)	48
Figure 3.19 contour de vitesse (60bars)	48
Figure 3.20 contour de vitesse (90bars)	48
Figure 3.21 le champ de vitesse	49
Figure 3.22 profil de la pression statique	49
Figure 3.23 profil de la pression dynamique	50
Figure 3.24 profil de la température statique	51
Figure 3.25 contour du nombre de mach (600K)	52
Figure 3.26 contour du nombre de mach (900K)	52
Figure 3.27 contour du nombre de mach (1200K)	52
Figure 3.28 profil du nombre de Mach	53
Figure 3.29 contour de vitesse (600K)	53
Figure 3.30 contour de vitesse (900K)	54
Figure 3.31 contour de vitesse (1200K)	54
Figure 3.32 champ de vitesse	54
Figure 3.33 profil de la pression statique	55
Figure 3.34 profil de la pression dynamique	56
Figure 3.35 profil de la température statique	56
Figure 3.36 Contour de vitesse	57
Figure 3.37 Contour de température statique	57
Figure 3.38 La fraction massique de H ₂ O	58
Figure 3.39 profil des fraction massique	58
Figure 3.40 contour de nombre de Damkohler	59
Figure 3.41 profil axial de nombre de Damkohler	59

Listes des tableaux

Chapitre 02 : Équations gouvernantes et modèles Numériques Erreur ! Signet non défini.

<i>Tableau 2-1 Les coefficients des principaux schéma de discrétisation</i>	34
<i>Tableau 2-2 Paramètres numériques utilisés dans la simulation</i>	35

Chapitre 03 : Résultats et discussion

<i>Tableau 3-1 les dimension du tuyère</i>	37
<i>Tableau 3-2 les dimension des deux tuyères</i>	39
<i>Tableau 3-3 Bilan de la robustesse numérique des solveurs</i>	42
<i>Tableau 3-4 Comparaison de la précision des modèles de turbulence pour la capture des structures de choc.</i>	44

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La conception et l'optimisation des systèmes de propulsion aéronautique modernes imposent aux ingénieurs de repousser constamment les limites de l'efficacité énergétique et des performances dynamiques. Au cœur du turboréacteur, la tuyère supersonique subit des contraintes thermomécaniques et aérodynamiques extrêmes. Sa fonction principale, qui consiste à détendre et accélérer les gaz d'échappement à des régimes hautement supersoniques pour générer la poussée, est complexifiée par l'apparition de phénomènes physiques sévères tels que la forte turbulence, la compressibilité du fluide et le développement d'ondes de choc directes ou obliques.

Traditionnellement dépendante de campagnes expérimentales en soufflerie particulièrement lourdes et coûteuses, la recherche en propulsion s'appuie désormais sur la simulation numérique de la dynamique des fluides (CFD). L'approche de modélisation RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) s'impose aujourd'hui comme un standard de l'ingénierie, offrant un excellent compromis entre le temps de calcul et la fidélité de la capture des structures complexes de l'écoulement. Comprendre comment ces structures réagissent aux variations géométriques et opérationnelles est indispensable pour concevoir les moteurs de demain.

L'objectif de ce mémoire de fin d'études est de simuler, valider et analyser l'écoulement turbulent supersonique au sein d'une tuyère de turboréacteur à travers une étude paramétrique et thermochimique approfondie. Il s'agit d'évaluer la sensibilité du fluide face aux modèles de turbulence, de caractériser l'impact des variations de pression et de température d'entrée, et d'analyser le comportement d'un écoulement réactif hydrogène-air.

Pour répondre à ces objectifs, le présent manuscrit est structuré en trois chapitres principaux :

- Le Chapitre 1 est consacré à la revue bibliographique où sont abordés les concepts fondamentaux de la dynamique des fluides compressibles, les régimes de fonctionnement de la tuyère de supersonique ainsi que la physique des ondes de choc.
- Le Chapitre 2 présente le cadre théorique et méthodologique de la modélisation. Il expose les équations fondamentales de la mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes et les modèles de turbulence, suivis par l'explication des équations de transport et la méthode numérique de résolution utilisée.
- Le Chapitre 3 est dédié à la présentation et à l'analyse de nos résultats de simulation. Après la description de la géométrie et la validation du modèle, nous étudions l'influence des modèles de turbulence, comparons les écoulements stationnaire et transitoire, analysons l'impact de la pression et de la température d'entrée, et terminons par l'étude d'un écoulement réactif hydrogène-air.

Une conclusion générale viendra clôturer ce travail en synthétisant les principaux résultats et en ouvrant des perspectives pour de futures recherches

Chapitre 01 : Généralités et recherche bibliographie

Sommaire

1.1	Introduction.....	3
1.2	Définition du fluide.....	3
1.3	Définition de l'écoulement d'un fluide.....	3
1.4	Les différents régimes de l'écoulement compressible.....	4
1.5	La tuyère supersonique.....	4
1.5.1	Géométrie et optimisation de la tuyère.....	5
1.5.2	Domaines d'application des tuyères supersoniques.....	7
1.6	Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique.....	9
1.6.1	Régime subsonique.....	9
1.6.2	Écoulement sonique adapté.....	10
1.6.3	Écoulement sonique non adapté (Régime de sur-détente).....	10
1.6.4	Écoulement supersonique adapté.....	11
1.6.5	Écoulement supersonique non adapté (Sous-détente).....	11
1.7	Fonctionnement réel de la tuyère de Laval.....	12
1.7.1	Régime d'adaptation.....	12
1.7.2	Régime de sous-détente.....	12
1.7.3	Régime de sur-détente.....	13
1.8	Les ondes de choc.....	14

1.1 Introduction

La mécanique des fluides est la science qui étudie les lois régissant le déplacement des fluides. Elle constitue la base essentielle à la conception des systèmes de transport de fluides et se divise en deux grandes parties :

- La statique des fluides : étudie les fluides au repos.
- La dynamique des fluides : étudie le comportement des fluides en mouvement.

D'autres domaines spécialisés y sont liés, comme l'hydraulique, l'aérodynamique, l'hydrodynamique et la mécanique des fluides numérique (CFD). Cette dernière utilise des méthodes numériques pour simuler le mouvement des fluides en résolvant leurs équations descriptives. Ses applications sont nombreuses, notamment en ingénierie navale et en aéronautique.

Qu'est-ce qu'un fluide ?

Et quels sont ses types ?

1.2 Définition du fluide

Un fluide se définit comme une substance constituée d'une multitude de particules matérielles capables de se déplacer librement les unes par rapport aux autres. Contrairement aux solides, un fluide ne possède pas de forme propre : il est malléable, peut s'écouler et adopte systématiquement la forme du récipient qui le contient.

On distingue généralement deux catégories de fluides selon leur comportement physique :

- Les fluides incompressibles : Leur volume reste constant, même en cas de variations de pression ou de température extérieure. Les liquides, tels que l'eau ou l'huile, sont considérés comme des fluides incompressibles.
- Les fluides compressibles : Leur volume varie en fonction des changements de pression ou de température au sein de l'écoulement. Cela provoque une modification de leur masse volumique, ce qui influence directement le comportement du flux. Les gaz, comme l'air, l'hydrogène ou le méthane, sont des fluides compressibles [1].

1.3 Définition de l'écoulement d'un fluide

L'écoulement désigne le mouvement d'un fluide. On distingue principalement deux régimes de mouvement selon le comportement des particules :

- L'écoulement laminaire : Il se caractérise par un déplacement lent et ordonné des particules. Celles-ci restent proches les unes des autres, et les différentes couches de fluide glissent les unes sur les autres de façon régulière, sans se mélanger.
- L'écoulement turbulent : À l'inverse, il survient lorsque les particules s'agitent de manière aléatoire, irrégulière et rapide dans toutes les directions. Dans ce cas, il devient impossible de suivre la trajectoire précise d'un marqueur fluide.

Le passage d'un régime laminaire à un régime turbulent ne dépend pas uniquement de la vitesse, mais également des propriétés intrinsèques du fluide, telles que sa viscosité. Des vitesses trop élevées engendrent une instabilité chez les particules, ce qui provoque inévitablement la turbulence.

1.4 Les différents régimes de l'écoulement compressible

Dans un écoulement compressible, toute perturbation ponctuelle de pression se propage dans toutes les directions à la vitesse locale du son. On distingue trois configurations principales définies par le nombre de Mach (M) :

- Le régime subsonique ($M < 1$): La vitesse du fluide est inférieure à la vitesse du son
- Le régime sonique ($M = 1$): La vitesse du fluide est égale à la vitesse du son.
- Le régime supersonique ($M > 1$): La vitesse du fluide est supérieure à la vitesse du son.

Pour illustrer ces phénomènes, on considère un point matériel P se déplaçant à une vitesse V dans un fluide. Ce mouvement génère des perturbations de pression (ondes acoustiques) qui induisent des variations de masse volumique. La propagation de ces ondes diffère selon le régime d'écoulement (voir Figure 1.1) :

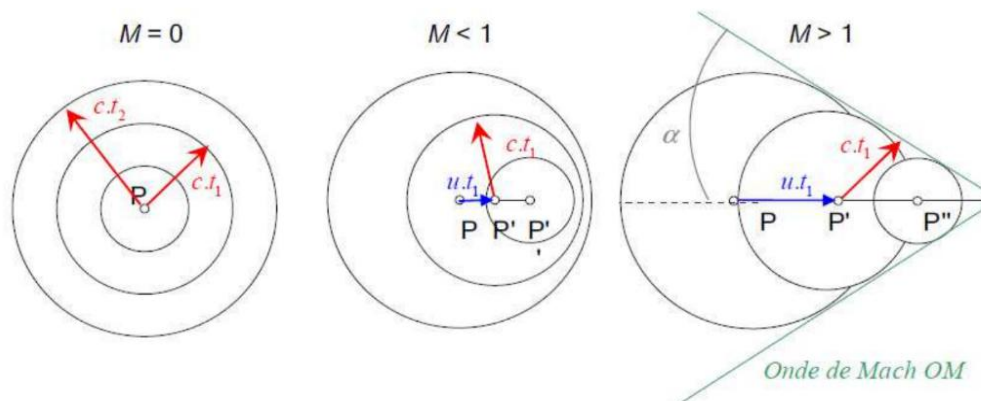


Figure 1.1 Propagation d'ondes de pression et évolution des fronts d'onde en fonction du régime d'écoulement (distingué par le nombre de Mach)

- En régime subsonique : Les ondes de pression voyagent plus vite que la source et se propagent vers l'avant.
- En régime supersonique : La source se déplace plus vite que les ondes qu'elle émet, créant une accumulation d'ondes appelée "cône de Mach"[1].

1.5 La tuyère supersonique

Une tuyère de Laval (ou tuyère supersonique) est un conduit à géométrie convergente-divergente dont le profil est spécifiquement étudié pour accélérer un fluide à des vitesses supersoniques. Comme l'illustre la figure 1.2, elle se compose de trois sections essentielles :

- **Le convergent** : situé dans la partie amont, son rétrécissement progressif provoque l'accélération du gaz. Dans cette zone, l'écoulement est de régime subsonique.
- **Le col** : il s'agit de la section transversale minimale de la tuyère. C'est à cet endroit précis que l'écoulement atteint la vitesse du son ($Mach = 1$).
- **Le divergent** : situé en aval du col, cette section permet au gaz de poursuivre sa détente. Sa forme évasée transforme l'énergie de pression en énergie cinétique, permettant à l'écoulement d'atteindre des vitesses supersoniques et d'optimiser l'effet propulsif.

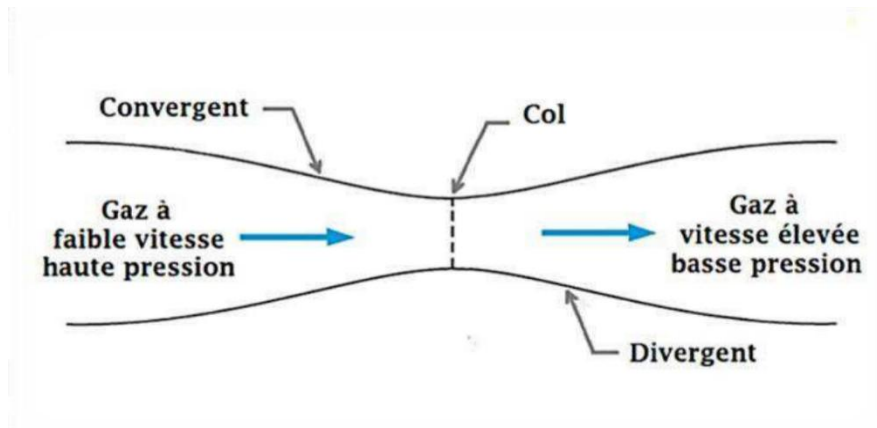


Figure 1.2 - Schéma d'une tuyère convergente-divergente (de Laval) [2].

Tout le long de la tuyère (voir la figure 1.3), la forme géométrique permet une détente continue du gaz : tandis que la vitesse de l'écoulement augmente de l'entrée vers la sortie, la pression et la température diminuent proportionnellement [3,4].

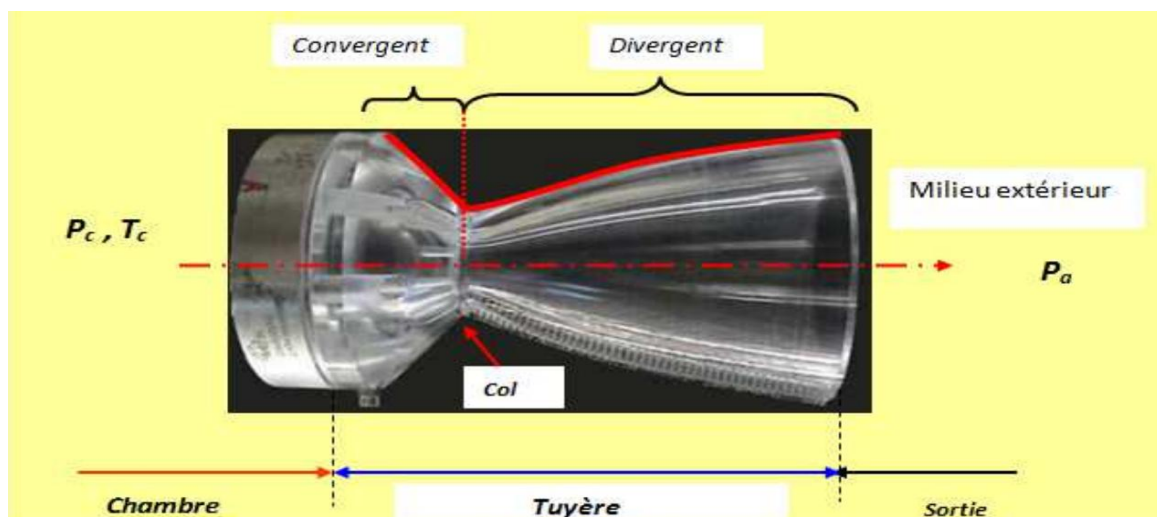


Figure 1.3 - La tuyère supersonique [5].

1.5.1 Géométrie et optimisation de la tuyère

Il existe une grande diversité de tuyères, chacune générant son propre modèle d'écoulement interne. La conception de ces systèmes repose sur un travail d'optimisation rigoureux visant à maximiser le rendement global. Généralement, cette optimisation s'appuie sur des paramètres de performance tels que :

- La poussée générée ;
- L'uniformité de l'écoulement en sortie de tuyère.

Parallèlement, les ingénieurs cherchent à minimiser certaines contraintes critiques, notamment le frottement fluide (pertes de charge) et le poids structurel de l'équipement.

Un enjeu majeur de cette conception réside dans la compréhension du comportement de l'écoulement interne. En effet, chaque configuration peut engendrer des phénomènes de

décollement de la couche limite et des charges latérales associées. La capacité à caractériser et à prévoir ces phénomènes est essentielle pour garantir la stabilité et l'intégrité de la tuyère.

1.5.1.1 Les tuyères à contour idéal tronqué (TIC)

Les tuyères TIC (de l'anglais *Truncated Ideal Contoured nozzle*) tirent leur nom du fait que leur divergent est volontairement tronqué dans sa partie terminale. Cette modification est réalisée dans un but d'optimisation : elle permet de réduire considérablement l'encombrement au prix d'une perte de poussée relativement limitée.

Le profil de ces tuyères est dérivé d'une tuyère idéale de référence, initialement calculée pour générer, dans le plan de sortie, un écoulement parfaitement parallèle à l'axe de la tuyère [6,7].

1.5.1.2 Les tuyères à profil parabolique (TOC)

Les tuyères TOC (*Thrust-Optimized Contour nozzle*) sont conçues pour maximiser les performances. La méthode d'optimisation pour une longueur donnée a été proposée par Rao [8]. Selon sa théorie, la longueur typique d'une tuyère Rao représente seulement 75 % à 85 % de celle d'une tuyère conique de 15 degrés possédant le même rapport de section.

Rao a également démontré que le profil optimal obtenu par cette méthode pouvait être approximé par une parabole sans perte significative de performance. Ce type de profil est aujourd'hui standard pour les moteurs-fusées modernes.

1.5.1.3 Comparaison TIC vs TOC :

Bien que les deux types puissent présenter le même rapport de section (A_s / A_c) et des performances similaires en écoulement parfait, la tuyère TOC est plus optimisée que la TIC. Elle permet d'obtenir une poussée équivalente avec une longueur réduite, ce qui se traduit par un gain de poids crucial en ingénierie aérospatiale [9,10].

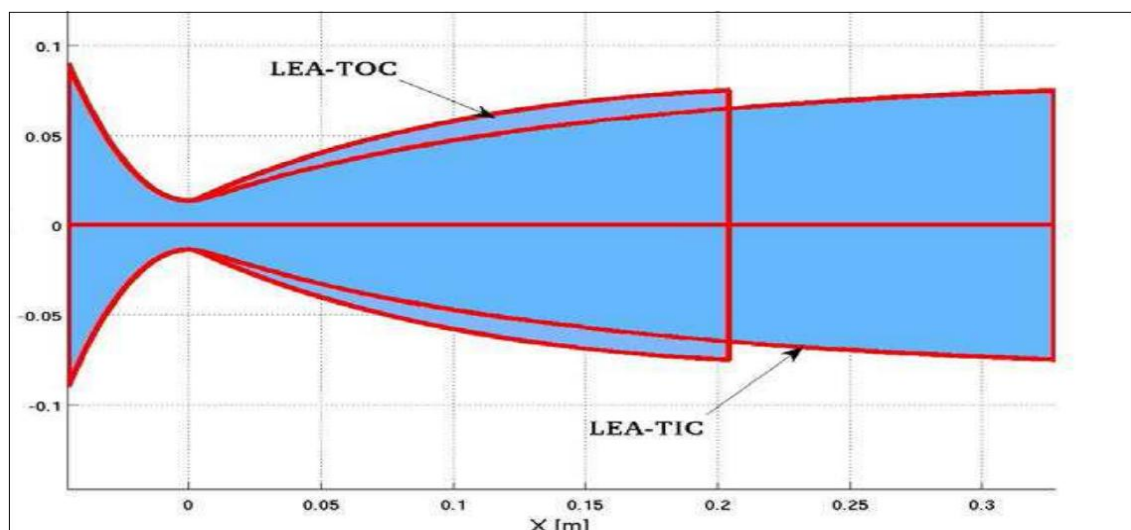


Figure 1.4 - Profils des tuyères LEA-TIC et LEA-TOC [11].



Figure 1.5 - Tuyères TIC et TOC du DLR [6].

1.5.2 Domaines d'application des tuyères supersoniques

Le rôle fondamental d'une tuyère supersonique est de convertir l'énergie de pression en énergie cinétique. Le profil de ces tuyères suit précisément une ligne de courant, généralement déterminée par la méthode des caractéristiques.

Initialement considérées comme des organes annexes (notamment sur les premiers turboréacteurs), les tuyères servent aujourd'hui à réguler le fonctionnement du compresseur selon le régime de vol, grâce à une adaptation géométrique rigoureuse. On retrouve ces structures dans plusieurs domaines clés :

1.5.2.1 Les moteurs d'avion

Dans l'aéronautique, la tuyère doit remplir plusieurs fonctions critiques :

- **Régulation du débit** : Elle assure le blocage de l'écoulement aux différents régimes par la variation de la section au col (A_c), en fonction de la température et de la pression des gaz.
- **Optimisation de la poussée** : Elle doit permettre une détente optimale pour maximiser la poussée en régime de croisière. Ce raccordement géométrique entre la sortie du moteur et la structure de l'avion (carénage) est un défi aérodynamique majeur.
- **Phases d'atterrissage** : La tuyère participe au freinage de l'appareil via l'inversion de poussée (voir figure 1.6), généralement obtenue par la déviation du jet. Elle joue également un rôle essentiel dans l'atténuation des nuisances sonores [12].



Figure 1.6 - Tuyère supersonique d'un avion de combat [13].

1.5.2.2 Les moteurs-fusées

Le moteur-fusée est le système de propulsion le plus performant pour les vitesses dépassant 1500 km/h. La tuyère y joue un rôle central : elle éjecte les gaz de combustion à très haute vitesse hors de la chambre de combustion. La force de poussée résultante est le produit direct de cette accélération massive de la quantité de mouvement (voir figure 1.7).

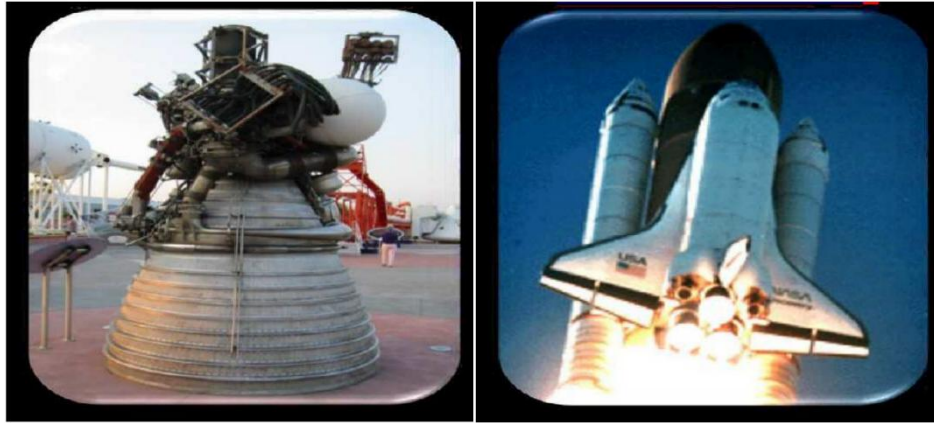


Figure 1.7 - Tuyère propulsive d'un moteur fusée [14].

1.5.2.3 Les souffleries supersoniques

Une soufflerie supersonique (voir figure 1.8) est une installation expérimentale conçue pour reproduire les conditions de vol réelles sur des prototypes à échelle réduite (maquettes d'avions, profils d'ailes).

Le principe repose sur la génération d'un écoulement uniforme dont le nombre de Mach et le profil de vitesse sont analogues à ceux de l'atmosphère libre. La tuyère est l'élément moteur permettant d'atteindre ces vitesses supersoniques. Bien qu'il existe diverses configurations (à rafale, à impulsion, à cycle fermé), l'installation se compose généralement de trois parties :

- **Le collecteur (convergent)** : pour accélérer l'air entrant.
- **La chambre d'expérience** : où est placé l'objet d'étude.
- **Le diffuseur (divergent)** : pour ralentir l'écoulement et récupérer la pression.

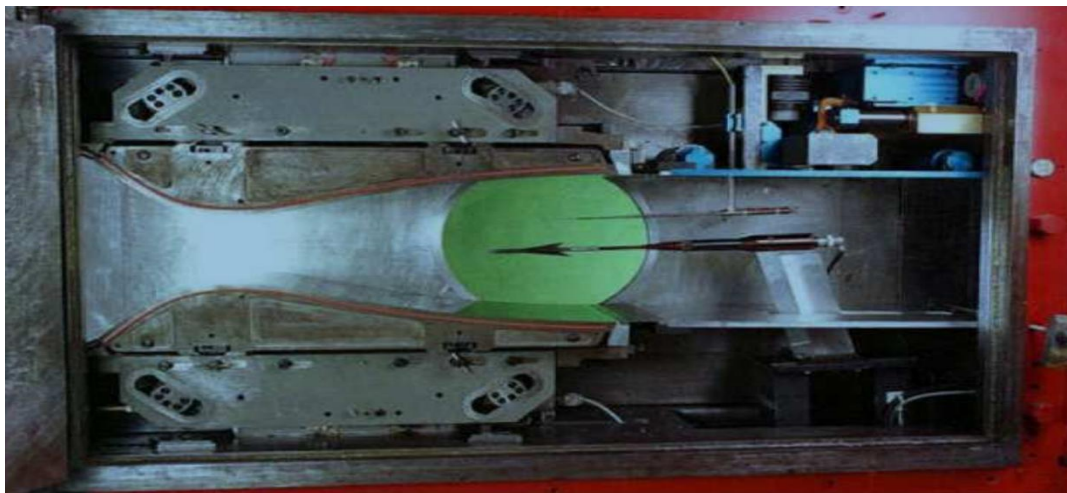


Figure 1.8 - Soufflerie supersonique[15].

1.6 Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique

L'étude des différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique s'appuie généralement sur une approche monodimensionnelle. On considère ici un gaz calorifiquement parfait et non visqueux (fluide idéal).

Le système d'étude (représenté en figure 1.9) se compose d'une tuyère de Laval reliée à un réservoir amont. Ce réservoir contient un gaz maintenu à une pression génératrice (P_c ou P_i) supposée fixe. Le divergent débouche ensuite dans une enceinte de volume quasi infini, où la pression statique ambiante (P_a) est variable.

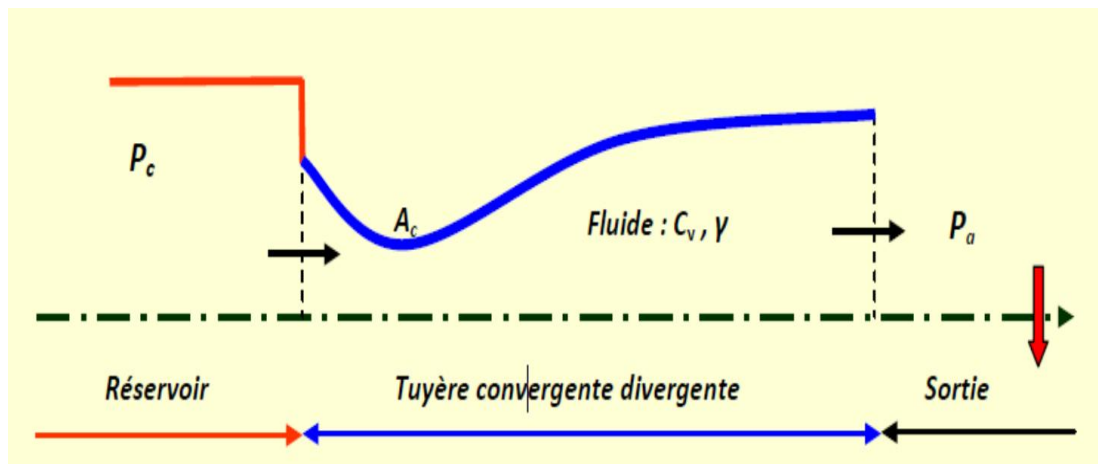


Figure 1.9 - Schéma de la tuyère supersonique [11].

Le comportement du fluide dépend directement du rapport entre ces deux pressions :

1. Repos complet : Si la pression du milieu extérieur est égale à la pression de la chambre ($P_a = P_c$), le fluide demeure immobile (voir figure 1.10, courbe a).
2. Amorce de l'écoulement : Si l'on diminue progressivement la pression ambiante (P_a) tout en maintenant la pression de la chambre (P_c) constante, un débit s'établit.

Selon l'importance de cette chute de pression, on distingue cinq régimes particuliers d'écoulement [16, 17, 18], allant du régime subsonique simple jusqu'au régime de détente complète (adapté).

1.6.1 Régime subsonique

Dans ce régime, l'écoulement demeure subsonique sur toute la longueur de la tuyère. Le débit augmente progressivement à mesure que la pression ambiante (P_a) diminue.

- Dans le convergent : la vitesse augmente tandis que la pression chute, atteignant sa valeur minimale au col.
- Dans le divergent : le processus s'inverse ; la vitesse diminue et la pression remonte jusqu'à s'égaler avec la pression extérieure.

La section du col présente donc la pression la plus basse et la vitesse la plus élevée de tout le conduit.

1.6.2 Écoulement sonique adapté

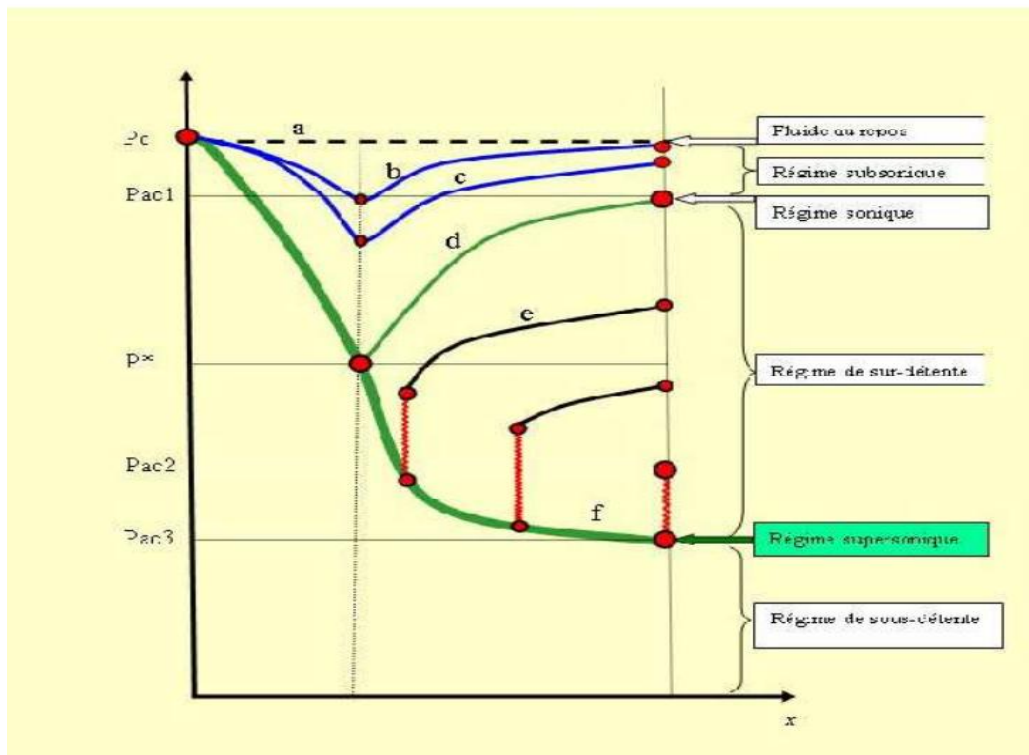


Figure 1.10 - Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique, évolution de la pression le long de la tuyère [11],

L'écoulement est dit sonique adapté lorsque la pression ambiante (P_a) diminue jusqu'à atteindre une valeur critique caractéristique. À ce stade, les conditions au col de la tuyère subissent une transition majeure :

- Régime sonique : L'écoulement au col atteint la vitesse du son (Mach = 1).
- Pression critique : La pression locale chute jusqu'à la valeur critique (P^*).
- Débit maximal : Le débit atteint sa valeur limite maximale.

À cet instant précis, on dit que le col est amorcé : l'état du fluide au col devient indépendant des variations de pression en aval (dans le divergent), stabilisant ainsi le débit massique.

1.6.3 Écoulement sonique non adapté (Régime de sur-détente)

Si la pression ambiante P_a diminue en dessous de P_{ac1} , le col reste bloqué en régime sonique. Dans le divergent, un phénomène irréversible apparaît : l'onde de choc. L'écoulement est alors qualifié de sonique non adapté ou de régime de sur-détente.

Ce comportement est illustré par la courbe (e) de la figure I.8. Alors que l'écoulement dans le convergent ne subit aucune modification, une onde de choc normale stationnaire se forme dans le divergent, divisant l'écoulement en deux zones distinctes (figure 1.11) :

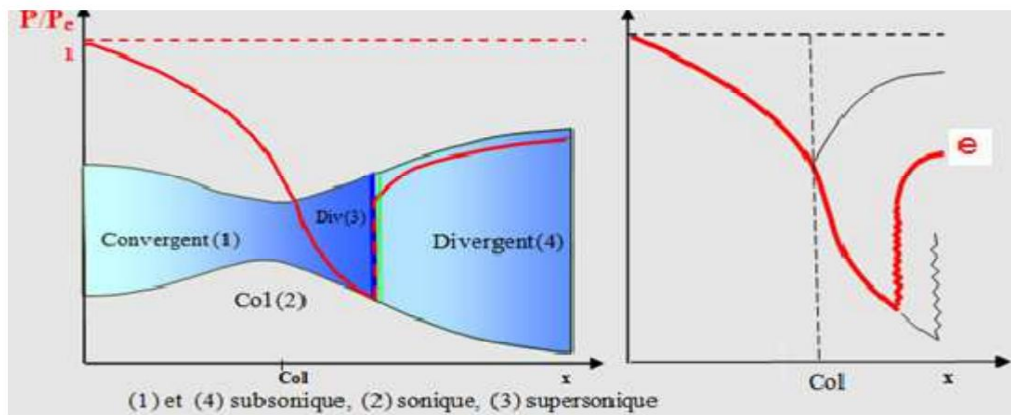


Figure 1.11 - Régime de sur détente en 1D [10].

1. En amont de l'onde de choc : L'écoulement est supersonique. La vitesse continue d'augmenter tandis que la pression diminue.

2. À travers l'onde de choc : La pression augmente brusquement (saut de pression) et la vitesse chute instantanément. L'onde se positionne de manière à ce que la recompression ramène la pression de sortie à la pression ambiante P_a .

3. En aval de l'onde de choc : L'écoulement redevient subsonique. La pression remonte et la vitesse diminue progressivement jusqu'à la sortie du divergent.

À mesure que P_a diminue, l'onde de choc se déplace vers la sortie de la tuyère. On note P_{ac2} la pression ambiante pour laquelle l'onde se situe exactement au plan de sortie.

Si P_a descend en dessous de P_{ac2} , l'écoulement à l'intérieur du divergent devient entièrement supersonique. Toute diminution supplémentaire de la pression extérieure n'affecte plus l'écoulement interne. L'équilibrage entre la pression de sortie et la pression ambiante s'effectue alors à l'extérieur de la tuyère par le biais d'ondes de choc obliques.

1.6.4 Écoulement supersonique adapté

L'écoulement devient entièrement supersonique lorsque la pression ambiante P_a continue de diminuer jusqu'à ce que le phénomène d'onde de choc disparaisse totalement. À ce stade, il n'y a plus de recompression interne ou externe : la tuyère est dite parfaitement adaptée.

Cette configuration, illustrée par la courbe (f) de la figure 1.10, correspond à la pression ambiante P_{ac3} (ou pression d'adaptation). Dans ce régime :

- La pression du gaz en sortie est exactement égale à la pression du milieu extérieur ($P_s = P_a$).
- La détente du fluide est complète et optimale au sein du divergent.
- Le rendement propulsif de la tuyère est maximal.

1.6.5 Écoulement supersonique non adapté (Sous-détente)

Lorsque la pression ambiante P_a devient inférieure à la pression d'adaptation P_{ac3} , l'écoulement est dit supersonique non adapté (ou en régime de sous-détente).

Dans cette configuration :

- L'écoulement à l'intérieur de la tuyère ne subit plus aucune modification et reste entièrement supersonique.
- L'ajustement entre la pression de sortie (plus élevée) et la pression ambiante (plus faible) s'effectue à l'extérieur de la tuyère.
- Cette adaptation se traduit par la formation d'une série d'ondes de détente obliques (éventail de détente), provoquant un élargissement du jet de gaz en sortie.

1.7 Fonctionnement réel de la tuyère de Laval

Dans les écoulements réels, contrairement au modèle idéal, le fluide est visqueux. Cela entraîne la formation d'une couche limite le long des parois de la tuyère. Cette couche limite est extrêmement sensible aux gradients de pression, ce qui complexifie considérablement les phénomènes physiques internes.

Dès que le col de la tuyère est amorcé (régime sonique), l'évolution de l'écoulement dépend essentiellement du rapport entre la pression au plan de sortie P_e et la pression du milieu ambiant P_a [14].

Dans cette configuration réelle, on distingue alors trois régimes principaux selon l'équilibre de ces pressions :

1.7.1 Régime d'adaptation

La tuyère est dite adaptée lorsque la pression statique au plan de sortie P_e est parfaitement égale à la pression ambiante (P_a), soit : ($P_e = P_a$)

Dans cette configuration, le gaz subit une détente continue depuis la chambre de combustion jusqu'à la section de sortie de la tuyère. L'écoulement s'échappe alors sous la forme d'un jet supersonique quasi uniforme.

Au contact du fluide ambiant, la couche limite du jet interagit avec l'air extérieur. Ce phénomène de cisaillement entraîne le fluide environnant dans son sillage, donnant naissance à une couche de mélange (voir figure 1.12). C'est le point de fonctionnement optimal où la poussée est maximale pour une géométrie donnée.

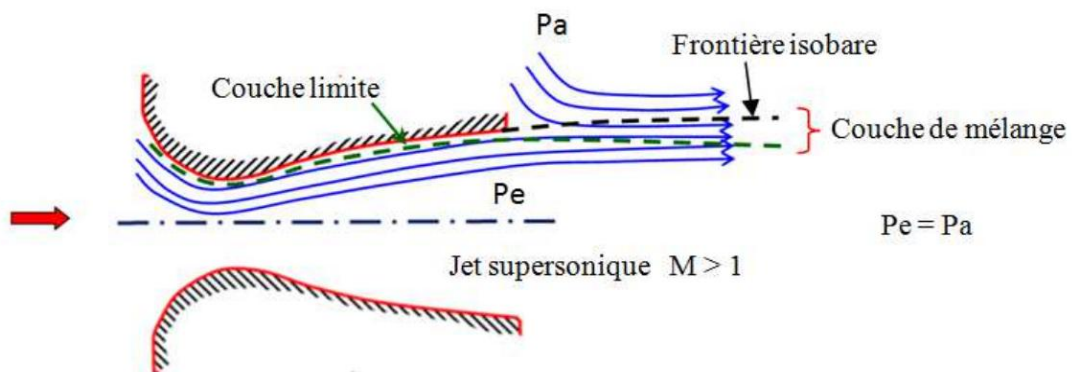


Figure 1.12 - L'organisation de l'écoulement à l'adaptation [13].

1.7.2 Régime de sous-détente

Ce régime correspond à un état hors adaptation où la détente du fluide au sein du divergent est incomplète. En sortant de la tuyère, la pression statique du gaz P_e est encore supérieure à la pression ambiante P_a : ($P_e > P_a$)

Puisque le gaz n'a pas fini de se détendre, il poursuit son expansion immédiatement après le plan de sortie par l'intermédiaire d'un faisceau d'ondes de détente (éventail de Prandtl-Meyer). Ce phénomène provoque un élargissement caractéristique du jet supersonique.

La frontière isobare, qui sépare le flux supersonique du fluide environnant, prend alors une forme divergente (voir figure 1.13). Ce régime est typique des moteurs-fusées fonctionnant à haute altitude, là où la pression atmosphérique devient très faible.

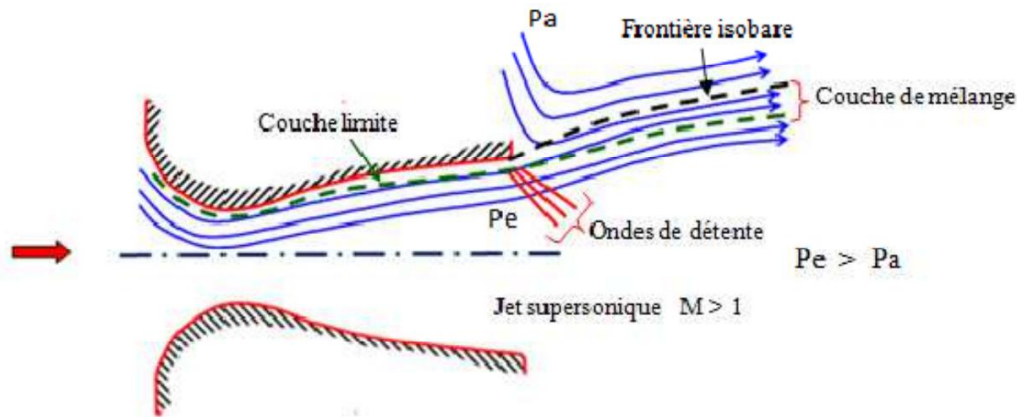


Figure 1.13 - Organisation de l'écoulement en régime de sous détente [13].

La figure 1.14 représente le profil de la pression pariétale le long de la tuyère pour les régimes d'adaptation et de sous-détente. Dans ces deux cas, l'écoulement suit une distribution de pression strictement décroissante, depuis la pression de la chambre jusqu'à la pression de sortie.

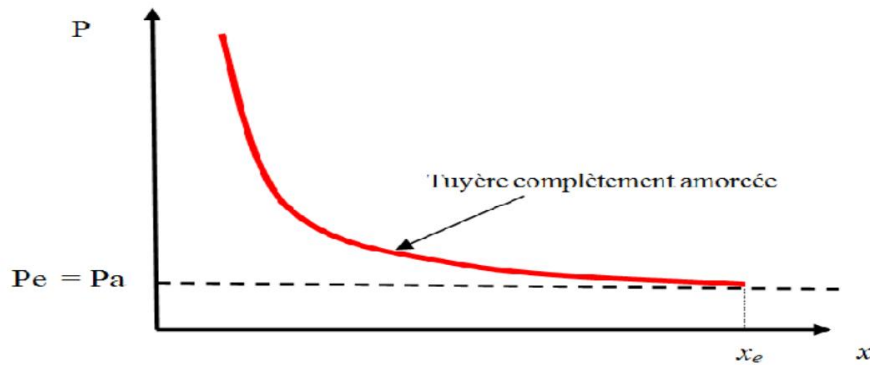


Figure 1.14 - Profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente [12].

1.7.3 Régime de sur-détente

Un autre régime hors adaptation, dit de sur-détente, s'effectue lorsque la pression du milieu ambiant P_a est supérieure à la pression d'adaptation de la tuyère.

Le gaz se détend dans la tuyère jusqu'à une pression statique (P_1) inférieure à la pression ambiante P_a . Dans cette situation, la couche limite du jet subit une contre-pression et un choc d'intensité P_2/P_1 se forme dans l'écoulement. La pression après le choc (P_2) est alors presque égale à la pression ambiante.

Suivant l'intensité du choc, deux cas sont rencontrés :

- Le régime de sur-détente avec décollement naissant.

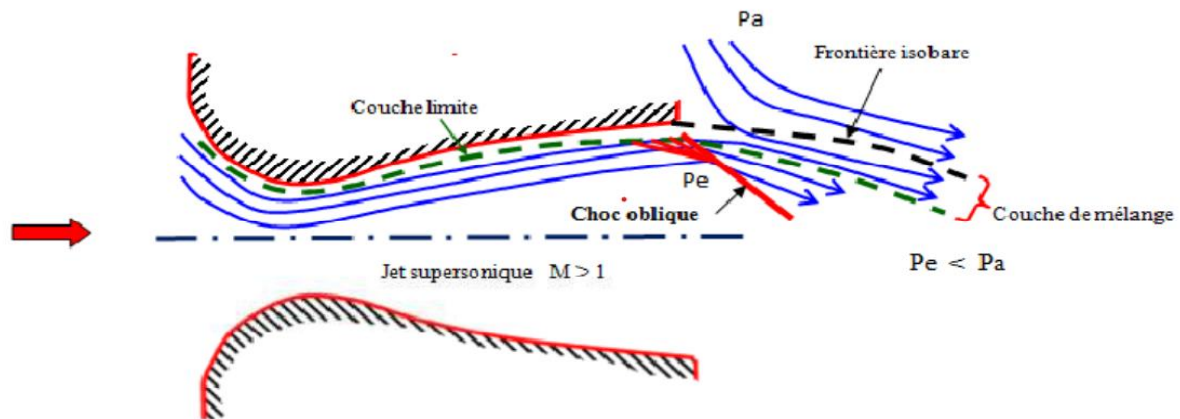


Figure 1.15 - Tuyère en surdétente avec décollement naissant de la couche limite[11].

➤ Le régime de sur-détente avec décollement étendu.

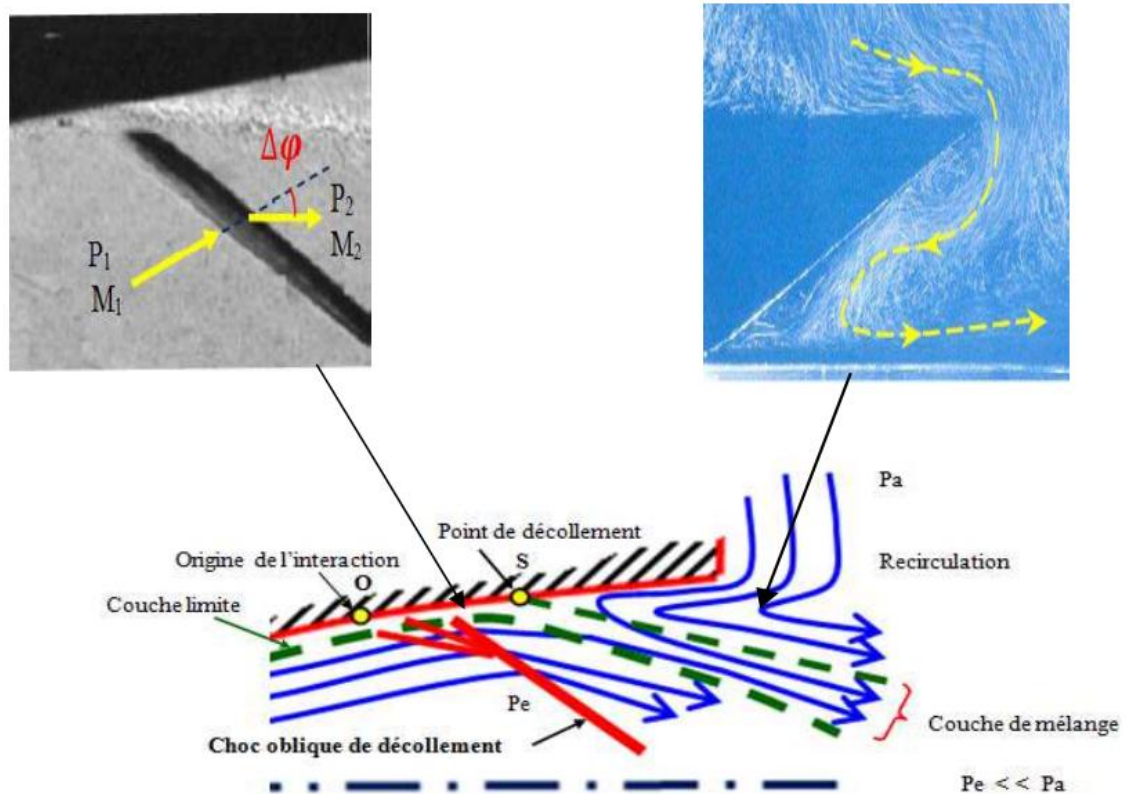


Figure 1.16 - Tuyère en sur détente avec décollement étendu de la couche limite [11].

1.8 Les ondes de choc

Les ondes de choc constituent, avec les tourbillons, l'un des phénomènes les plus spectaculaires de la mécanique des fluides. Elles se forment inévitablement dans un écoulement supersonique lorsqu'il rencontre un obstacle ou subit une variation brutale de pression. Rapporté pour la première fois par l'illustre savant E. Mach en 1878, ce phénomène traduit l'apparition de discontinuités majeures au sein du champ d'écoulement.

Physiquement, une onde de choc est une surface de transition d'une épaisseur extrêmement faible à travers laquelle les caractéristiques du fluide compressibles subissent des variations brusques. Lors du passage du front de choc, la vitesse devient discontinue,

tandis que la pression, la densité et la température augmentent de façon quasi instantanée. Ces changements s'effectuent sur une distance si courte que l'onde apparaît comme une frontière séparant deux zones d'écoulements continus (amont et aval).

Dans le domaine de l'aéronautique et de l'étude des tuyères, ces ondes sont à l'origine de phénomènes complexes tels que le "bang" supersonique ou les interactions de sillage. Leur analyse repose sur un couplage étroit entre l'expérience (visualisation par strioscopie) et la théorie, s'appuyant notamment sur les équations algébriques de Rankine-Hugoniot pour élucider le comportement du fluide à haute vitesse.

Chapitre 02 : Équations gouvernantes et modèles Numériques

Sommaire

2.1	Introduction.....	17
2.2	Equations fondamentales des fluides compressibles instantanées :.....	17
2.2.1	Equation de conservation de la masse :.....	17
2.2.2	Equation de conservation de quantité de mouvement :.....	17
2.2.3	Equation de la conservation de l'énergie.....	17
2.3	Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS).....	18
2.4	Modèles de turbulence.....	20
2.4.1	Modèle $K - \varepsilon$ standard.....	20
2.4.2	Modèle de turbulence k- ω -SST (Shear-Stress Transport).....	25
2.5	méthodes numériques :.....	29
2.5.1	Introduction :.....	29
2.5.2	Procédure numérique :.....	29
2.5.3	Maillage :.....	30
2.5.4	Choix du maillage.....	30
2.6	Les méthodes numériques de résolution :.....	31
2.7	Forme linéarisée de l'équation discrète.....	32
2.8	Résolution de système d'équations linéaires.....	33
2.9	Schémas de discrétisation utilisés.....	33
2.10	Paramètres numériques de simulation.....	Erreur ! Signet non défini.

2.1 Introduction

L'étude numérique des écoulements complexes en aéronautique repose invariablement sur le système d'équations de Navier-Stokes. Ce modèle mathématique universel permet de régir les écoulements compressibles, qu'ils soient laminaires ou turbulents, en formalisant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à l'échelle d'un volume de contrôle infinitésimal.

L'objectif de ce chapitre est de poser le cadre théorique et numérique indispensable à notre étude. Nous présenterons d'abord les équations de Navier-Stokes instantanées et moyennées (RANS) en formulation indicielle (bidimensionnelle et axisymétrique). Par la suite, le principe de la méthode des volumes finis sera exposé pour introduire la méthode de discrétisation de ces équations. Le chapitre se conclura par une présentation détaillée des modèles de turbulence deux équations, $k - \varepsilon$ et $k - \omega$, implémentés pour capturer la physique des écoulements étudiés.

2.2 Equations fondamentales des fluides compressibles instantanées :

Pour un fluide compressible, visqueux et supposé parfait, les équations fondamentales de l'écoulement peuvent être données par les lois de conservations suivantes :

2.2.1 Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide et u_j la composante j du vecteur vitesse.

2.2.2 Equation de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) \quad (2.2)$$

où P est la pression statique, δ_{ij} le tenseur de Kronecker et τ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses.

2.2.3 Equation de la conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho E + P)] = - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) \quad (2.3)$$

Où q_j est le flux de chaleur dans la direction j, E est l'énergie totale par unité de masse, qui s'exprime par la relation suivante:

$$E = e + \frac{1}{2} u_k u_k \quad (2.4)$$

Il faut ajouter aussi l'équation d'état des gaz parfaits

$$P = \rho r T \quad c_p - c_v = r \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.5)$$

Où γ étant la constante particulière du gaz parfait. c_p et c_v représentent respectivement les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.

Pour un fluide supposé newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses prend la forme suivante:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

Le flux de chaleur par unité de surface q_j en fonction de la température s'écrit comme suit :

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

k est la conductivité thermique qui s'exprime en fonction de la viscosité dynamique par le nombre de Prandtl Pr :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} = \gamma \frac{\mu C_v}{K} \quad (2.8)$$

En supposant que le fluide est calorifiquement parfait (l'énergie interne $e = C_v T$ et l'enthalpie $h = C_p T$), le flux de chaleur peut s'écrire :

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

En ce qui concerne la viscosité dynamique, celle-ci est donnée, pour la gamme de température étudiée, par la loi de Sutherland (utilisée par FLUENT) suivante :

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \left(\frac{1 + T/T_0}{1 + S/T} \right) \quad (2.10)$$

Où $\mu_0 = 1.78938 \cdot 10^{-5} \text{ Kg.m}^{-1}.\text{S}^{-1}$ est la viscosité du fluide à la température de référence $T_0 = 288 \text{ K}$ et S est une constante fixée pour l'air à 110 K .

2.3 Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS)

Une quantité instantanée ϕ de l'écoulement peut être décomposée selon Reynolds en une partie moyenne $\bar{\phi}$ et une partie fluctuante ϕ' .

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \text{ où } \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \phi(t) dt \quad (2.11)$$

Les équations de Navier-Stokes moyennées peuvent contenir des termes additionnels comme les tenseurs des contraintes de Reynolds. Ces équations moyennées sont simplifiées pour les écoulements compressibles en utilisant la formule de Favre.

La méthode de Favre consiste à décomposer la quantité instantanée, par exemple la composante de la vitesse, u_i en une partie moyenne $\tilde{u}_i$ pondérée par la masse et une partie u_i'' fluctuante, où :

$$\begin{cases} u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \\ \rho = \bar{\rho} + \rho' \\ p = \bar{p} + p' \\ e = \tilde{e}_i + e_i'' \\ h = \tilde{h} + h'' \end{cases} \quad (2.12)$$

En remplaçant les quantités précédentes dans les équations de Navier-Stokes, nous obtenons les formules suivantes :

Pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (2.13)$$

Pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_{ij}} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''}) \quad (2.14)$$

Où le terme $-\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''}$ représente les contraintes de Reynolds (flux turbulents de la quantité de mouvement). Pour achever la fermeture du système d'équations, ce terme doit être modélisé.

Les modèles de turbulence présents dans le code FLUENT utilisent le concept de la viscosité turbulente de Boussinesq, dans lequel la contrainte de Reynolds est supposée être une fonction linéaire des taux de déformation :

$$-\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (2.15)$$

Où μ_t est la viscosité turbulente et k l'énergie turbulente donnée par la formule suivante :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_k'' u_k''} \quad (2.16)$$

Les équations moyennées de FANS (Favre-averaged Navier-Stokes equations) sont obtenues en remplaçant l'équation 2.15 dans l'équation 2.14 :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} k) \quad (2.17)$$

De même pour l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{h}) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} u_j'' h'' \quad (2.18)$$

Des termes additionnels apparaissent. Le premier terme est l'enthalpie fluctuante, elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} u_j'' h'' = \Gamma_t \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} = c_p \Gamma_t \frac{\partial T}{\partial x_j} = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.19)$$

Où Γ_t est la diffusivité turbulente qui s'exprime comme suit : $\Gamma_t = \frac{\mu_t}{Pr_t}$

Pr_t est le nombre turbulent de Prandtl fixé à 0.9

Le deuxième terme est le taux de dissipation de l'énergie turbulente ε qui dépend du choix du modèle de turbulence. On obtient le taux de dissipation par la résolution de l'équation de ε . Pour le modèle de k- ε , ce terme est défini par :

$$\overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \bar{\rho} \varepsilon \quad (2.20)$$

Si l'équation de ε n'est pas résolue (Comme dans le modèle de Baldwin-Lomax), le terme $\bar{\rho} \varepsilon$ s'exprime comme suit :

$$\overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.21)$$

L'équation d'état moyennée est donnée par la formule suivante :

$$p = \bar{\rho} r \tilde{T} \quad (2.22)$$

2.4 Modèles de turbulence

Afin de déterminer la viscosité turbulente μ_t et fermer ainsi le système d'équations moyennes de Reynolds, un modèle de turbulence est requis. Le code de calcul FLUENT dispose de plusieurs modèles de turbulence. Deux modèles à deux équations de transport à savoir : **K - ε** et **K - ω SST** sont utilisés au cours de cette étude. Ces modèles sont plus élaborés, plus généraux et plus utilisés en pratique. Les modèles à une et à deux équations utilisent des équations aux dérivées partielles pour atteindre le même but [2].

2.4.1 Modèle K - ε standard

Le modèle k- ε est un modèle semi empirique à deux équations de transport utilisé pour évaluer la viscosité tourbillonnaire. Il résout deux équations aux dérivées partielles afin d'obtenir l'énergie cinétique turbulente **k** et son taux de dissipation **ε** (obtenue par résonance physique), ces équations sont citées ci-dessous.

2.4.1.1 Équations de transport :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b + \bar{\rho}\varepsilon - Y_M + S_k \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\rho}\varepsilon}{k} (G_k + C_{\varepsilon 3} G_b) - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\rho}\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (2.24)$$

Où,

G_k : Représente la génération de l'énergie cinétique due au gradient de vitesse,

G_b : La génération de k due au décollement des forces de volume,

Y_M : La contribution de la dilatation fluctuante dans la turbulence compressible pour (ε) ,

$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$: Constantes,

S_k, S_ε : Termes source,

Pr_k, Pr_ε : le nombre de Prandtl turbulent pour k et ε .

2.4.1.2 Modélisation de la viscosité turbulente

La viscosité turbulente est donnée par la formule suivante :

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (2.25)$$

2.4.1.3 Les constantes du modèle $k - \varepsilon$ standard:

Les résultats de calcul dépendent fortement de la valeur des constantes empiriques, cela constitue une faiblesse de ce modèle, bien que les auteurs admettent le plus souvent les mêmes valeurs. Ci-dessous on donne les valeurs utilisées par défaut par le code de calcul Fluent.

$C_\mu = 0.09$	$C_{\varepsilon 1} = 1.44$	$C_{\varepsilon 2} = 1.92$	$Pr_k = 1.0$	$Pr_\varepsilon = 1.3$
----------------	----------------------------	----------------------------	--------------	------------------------

2.4.1.4 Modélisation de la production de turbulence dans les modèles $k - \varepsilon$:

Le terme G_k représente la production de l'énergie cinétique turbulente, il est modélisé identiquement pour les modèles $(k - \varepsilon)$ standard, **RNG** et les modèles réalisables. A partir de l'équation exacte de transport de k , ce terme peut être défini comme suit:

$$G_k = -\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \quad (2.26)$$

La valeur de G_k en utilisant l'hypothèse de Boussinesq prend la forme suivante :

$$\mu_t = \mu_t S^2 \quad (2.27)$$

Où S est le module du tenseur moyen du taux-de-tension, défini comme :

$$S = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (2.28)$$

2.4.1.5 Effet de force de volume sur la turbulence dans le modèle $k - \varepsilon$:

La génération de la turbulence due aux forces de pression est donnée par :

$$G_b = \beta g_i \frac{\bar{\mu}_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.29)$$

Où,

Pr_t : est le coefficient de Prandtl turbulent pour l'énergie,

g_i : est le composant du vecteur gravitationnel dans la direction i .

Dans les deux modèles réalisable et standard, le coefficient de Prandtl turbulent est donné par défaut par : $Pr_t = 0.85$,

$\beta = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T} \right)_p$: représente le coefficient de dilatation thermique.

Pour le cas d'un gaz parfait :

$$G_b = -g_i \frac{\bar{\mu}_t}{\bar{\rho} Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (2.30)$$

2.4.1.6 Effet de compressibilité sur la turbulence pour le modèle $k - \varepsilon$

Pour les écoulements ayant un nombre de Mach important, la compressibilité affecte la turbulence à travers ce qu'on appelle (dissipation de la dilatation), laquelle est négligée normalement dans la modélisation des écoulements incompressibles [1].

Négliger la dissipation de la dilatation s'explique par la baisse observée dans le taux de dissipation qui s'étend avec un nombre de Mach croissant pour les mélanges compressibles et les autres couches de cisaillement libres. Pour expliquer ces effets dans les modèles $k - \varepsilon$ du code de calcul Fluent, le terme de la dissipation de la dilatation, Y_M , est inclus dans l'équation de k . Ce terme prend la forme suivante d'après une proposition de *S. Sarkar et al.* [2, 3] :

$$Y_M = 2\bar{\rho}\varepsilon M_t^2 \quad (2.31)$$

$$M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}} \quad , \quad a = \sqrt{\gamma r T} \quad (2.32)$$

a : Représente la célérité de son

2.4.1.7 Traitement de la région près de la paroi [4]:

Les lois de paroi (Standard Wall Function) sont utilisées, en remplacement de la condition d'adhérence à une paroi, dans le but de réduire notablement le coût de calcul (taille mémoire et temps de simulation).

Elles autorisent une discrétisation plus grossière près de la paroi. Toutefois, diverses limitations ou incertitudes demeurent sur leur domaine de validité. On admet généralement que l'écoulement présente une zone où le profil de vitesse est logarithmique. Or, l'existence d'une telle zone n'est établie que pour des écoulements où la turbulence est en équilibre avec l'écoulement moyen, ce qui implique que celui-ci varie suffisamment lentement. D'autre part, la zone logarithmique, lorsqu'elle existe, est limitée en étendue transversale et ceci implique un contrôle strict de la distance à la paroi du premier point de calcul.

Avec un modèle de loi de paroi, les équations de transport pour les grandeurs turbulentes ne sont résolues que dans la région de turbulence pleinement développée et hors de la couche limite. Ceci est assuré en prenant la distance du centre de la première maille à la paroi dans la gamme $30 \leq y^+ \leq 300$. La production de l'énergie cinétique turbulente, Gk , et son taux de dissipation, ε , dans la maille adjacente à la paroi, sont calculés à partir d'une hypothèse d'équilibre local. D'après Launder et Spalding [5], on a :

$$Gk = \frac{\tau_p^2}{\bar{\rho} K C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p} \quad , \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{K y_p} \quad (2.32)$$

Nous ne nous intéressons pas au détail de la couche limite, mais à l'effet global de la présence d'une paroi sur l'écoulement.

La modélisation de l'écoulement en proche paroi s'appuie sur celle des écoulements turbulents pariétaux cisailés simples.

Afin d'exprimer les différentes lois de répartition de la vitesse dans les différentes zones, On définit les paramètres adimensionnels suivants :

$$y^+ = \frac{\bar{\rho} y u_\tau}{\mu} \quad ; \quad u^+ = \frac{\tilde{u}}{u_\tau} \quad (2.33)$$

Avec

$$u_{\tau} = \left(\frac{\tau_{\omega}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

Où τ_{ω} (τ_p) est la tension de cisaillement à la paroi.

Une analyse temporelle multi-échelle permet de décomposer en trois couches distinctes la couche limite turbulente proche d'une paroi lisse :

Une première couche où la viscosité du fluide domine la viscosité turbulente, appelée sous couche visqueuse. Dans cette zone le profil de vitesse est linéaire et s'écrit sous la forme suivante :

$$y^+ = u^+ \quad (2.35)$$

La sous couche visqueuse s'étendant jusqu'à une épaisseur de $y^+ = 5$.

Une couche intermédiaire où la viscosité du fluide et la viscosité turbulente sont équivalentes, appelée zone tampon.

Une couche externe où la viscosité turbulente est prépondérante et où le profil de vitesse est logarithmique et s'écrit comme suit :

$$u^+ = \frac{\tilde{u}}{u_{\tau}} = \frac{1}{K} \ln (E y^+) \quad (2.36)$$

Où :

E et K (constantes de Von Karman) ont des valeurs fixes qui sont égales à : $E = 0,9$ et $K = 0,4$.

Cette couche externe est supposée commencer à partir de $y^+ > 50$.

L'option Standard Wall Function est principalement utilisée avec les modèles $k - \varepsilon$ et RSM . Le modèle $k - \omega$, notamment $k - \omega SST$, utilise généralement un traitement proche paroi spécifique et automatique (ANSYS Fluent 19.2).

Avec le modèle k-ε standard, les contraintes de Reynolds à la paroi sont calculées en supposant l'existence d'un profil de vitesse entre la paroi et la première cellule proche de celle-ci (Fluent 19.2). Ce profil est modélisé par des lois semblables à celles que nous avons détaillées précédemment. Elles s'écrivent comme suit :

$$y^* = u^* \quad \text{pour} \quad y^* < 11.225$$

$$u^* = \frac{1}{K} \ln (E y^*) \quad \text{pour} \quad y^* > 11.225$$

Les expressions de y^* et u^* sont les suivantes :

$$y^* = \frac{\bar{\rho} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\mu} \quad \text{et} \quad u^* = \frac{\tilde{u}}{u_\tau} = \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \tilde{u}_p}{\tau_\omega / \bar{\rho}} \quad (2.37)$$

$\tilde{u}_p$ Représente la vitesse moyenne du fluide au point P , situé à la distance y_p par rapport aux

2.4.2 Modèle de turbulence $k-\omega$ -SST (Shear-Stress Transport)

Il est bien connu que la formulation en ω est plus robuste que celle en ε dans le cas d'écoulements soumis à de forts gradients de pression adverse. En revanche, le modèle $k-\omega$ présente le désavantage d'être sensible à la valeur externe de ω . Le modèle $k-\varepsilon$, quant à lui, est très efficace dans les zones d'écoulements cisailés libres. Une combinaison des deux modèles est possible via une formulation mixte $k-\varepsilon / k-\omega$. C'est l'approche suivie par *Menter* [6] pour mettre au point son modèle (appelé *SST-Menter*) via une fonction de transfert *F1*. Cette fonction permet de sélectionner le modèle *Wilcox* $k-\omega$ dans la sous couche visqueuse et la région logarithmique et basculer progressivement vers le modèle $k-\varepsilon$ à mesure qu'on s'approche de la zone de sillage. On profite ainsi de la robustesse de ω dans la région proche paroi et de l'insensibilité de ε dans l'écoulement libre, cependant, le modèle $k-\omega$ SST semble donc bien adapté aux écoulements décollés [7].

2.4.2.1 Équations de transport :

Le modèle $k-\omega$ SST a une forme semblable au modèle $k-\omega$ standard :

Le modèle de Menter repose sur deux équations de transport, une pour l'énergie cinétique de turbulence et l'autre pour la vorticité :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tilde{G}_k - Y_k + S_k^2 \quad (2.38)$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega^2 \quad (2.39)$$

$\tilde{G}_k$: représente la génération d'énergie cinétique turbulente due aux gradients de vitesse moyenne,

G_ω : représente la génération de ω ,

Γ_k et Γ_ω : coefficients de la diffusion effective de k et ω respectivement,

Y_k et Y_ω : dissipations de k et ω dues à la turbulence,

S_k et S_ω : termes sources,

D_ω : représente le terme de la diffusion croisée, calculé comme décrit ci-dessous.

2.4.2.2 Modélisation de la diffusivité effective :

Les diffusivités effectives pour le modèle **SST** sont données par les équations suivantes :

$$\Gamma_k = \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_k} \quad (2.40)$$

$$\Gamma_\omega = \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \quad (2.41)$$

Où

$$Pr_k = \frac{1}{F_1/Pr_{k,1} + (1 - F_1)/Pr_{k,2}} \quad (2.42)$$

$$Pr_\omega = \frac{1}{F_1/Pr_{\omega,2} + (1 - F_1)/Pr_{\omega,2}} \quad (2.43)$$

Pr_k et Pr_ω sont les nombres de Prandtl pour k et ω respectivement, et μ_t la viscosité turbulente.

2.4.2.3 Modélisation de la viscosité turbulente

La viscosité turbulente est estimée par l'équation suivante :

$$\bar{\mu}_t = \frac{\bar{\rho}k}{\omega} \frac{1}{\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{\alpha_1 \omega} \right]} \quad (2.44)$$

$$|\Omega| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.45)$$

Où :

Ω_{ij} : est le tenseur moyen du taux-de-rotation,

Les fonctions F_1 et F_2 , sont données par les relations suivantes :

$$F_1 = \tanh(\zeta_1^4) \quad (2.46)$$

$$\zeta_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\bar{\mu}}{\bar{\rho}y^2\omega} \right), \frac{4\bar{\rho}k}{Pr_{\omega,2}D_\omega^+ y^2} \right] \quad (2.47)$$

$$D_\omega^+ = \max \left(2\bar{\rho} \frac{1}{Pr_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (2.48)$$

$$F_2 = \tanh(\zeta_2^4) \quad (2.49)$$

$$\zeta_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\bar{\mu}}{\bar{\rho}y^2\omega} \right) \quad (2.50)$$

y : est la distance à la surface suivante,

D_{ω}^+ : est la portion positive du terme de la diffusion croisée.

2.4.2.4 Modélisation de la production de turbulence

2.4.2.4.1 Production de k

Le terme $\tilde{G}_k$ représente la production d'énergie cinétique turbulente. Elle est définie de la même façon que celle du modèle standard.

A partir de l'équation exacte de transport de k , ce terme peut être défini comme suit :

$$\tilde{G}_k = \min (G_k, 10\tilde{G}_k\bar{\rho}\beta^*k\omega) \quad \text{Où} \quad G_k = -\bar{\rho} \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \quad (2.51)$$

La valeur de G_k en utilisant l'hypothèse de Boussinesq prend la forme suivante :

$$G_k = \bar{\mu}_t \cdot S^2 \quad (2.52)$$

Où S est le module du tenseur moyen du taux-de-tension, défini de la même façon que le modèle $k - \varepsilon$.

2.4.2.4.2 Production de ω

Le terme G_{ω} représente la production de ω , il est donné par la formule suivante :

$$G_{\omega} = \frac{\alpha}{v_t} \tilde{G}_k \quad (2.53)$$

Notez que cette formulation est en désaccord avec le modèle $k - \omega$ standard. La différence entre les deux modèles réside aussi dans la manière d'évaluation du terme α_{∞} .

Dans le modèle $k - \omega$ standard, α_{∞} est défini comme une constante. Pour le modèle **SST**, elle prend la forme suivante :

$$\alpha_{\infty} = F_1 \alpha_{\infty,1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty,2} \quad (2.54)$$

Où;

$$\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_{\infty}^*} - \frac{K^2}{Pr_{\omega,1} \sqrt{\beta_{\infty}^*}} \quad (2.55)$$

$$\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_{\infty}^*} - \frac{K^2}{Pr_{\omega,2} \sqrt{\beta_{\infty}^*}} \quad (2.56)$$

Et

$$K = 0.41, \beta_{i,1} = 0.075, \beta_{i,2} = 0.0828$$

2.4.2.5 Modélisation de la dissipation de turbulence :

2.4.2.5.1 Dissipation de k

Le terme Y_k représente la dissipation de l'énergie cinétique turbulente, il est défini de la même façon que celle du modèle $k-\omega$ standard. La différence entre le modèle $k-\omega$ standard et le modèle $k-\omega SST$ réside dans la manière d'évaluation du terme f_{β^*} . En effet, dans le modèle $k-\omega$ standard, f_{β^*} est défini comme une fonction. C'est une constante égale à 1 pour le modèle $k-\omega SST$. D'où :

$$Y_k = \bar{\rho} \beta^* k \omega \quad (2.57)$$

2.4.2.5.2 Dissipation de ω

Le terme Y_ω représente la dissipation de ω , il est défini de la même façon que celle du modèle $k-\omega$ standard. La différence entre les deux modèles $k-\omega$ standard et $k-\omega SST$ réside dans la manière d'évaluation des termes β_i et f_β .

Dans le modèle $k-\omega$ standard, β_i est défini comme une constante égale à 0.072; f_β est pour le modèle $k-\omega SST$, une constante égale à 1. D'où :

$$Y_k = \bar{\rho} \beta k \omega^2 \quad (2.58)$$

β_i est donnée pour le modèle $k-\omega SST$ par la relation suivante :

$$\beta_i = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2} \quad (2.59)$$

Avec :

$$\beta_{i,1} = 0.075 \quad , \quad \beta_{i,2} = 0.0828 \quad (2.60)$$

Le modèle $k-\omega SST$ est basé sur les deux modèles standard $k-\varepsilon$ et $k-\omega$, pour utiliser ces deux modèles ensemble, le modèle $k-\varepsilon$ standard est transformé en équations basées sur k et ω par l'introduction d'un terme de diffusion croisée D_ω donné par la relation suivante :

$$D_\omega = 2(1 - F_1) \bar{\rho} Pr_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.61)$$

2.4.2.6 Constantes du modèle $k-\omega SST$

$$Pr_{k,1} = 1.176 \quad , \quad Pr_{\omega,1} = 2 \quad , \quad Pr_{k,2} = 1 \quad , \quad Pr_{\omega,2} = 1.168$$

$$\beta_{i,1} = 0.075 \quad , \quad \beta_{i,2} = 0.0828 \quad , \quad a_1 = 0.31$$

Toutes les constantes supplémentaires du modèle SST à savoir ; α_∞^* , α_∞ , α_0 , β_∞^* , R_β , R_ω , R_k , ζ^* et M_{t0} ont les mêmes valeurs que celles du modèle $k-\omega$ standard.

Sur le plan numérique, les équations $k - \omega$ sont résolues de la même manière que celles du modèle $k - \varepsilon$, les seules différences résident en :

L'établissement des conditions initiales et des conditions aux limites en ω tel que $\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$

La modification des termes diffusifs et l'ajout des termes sources inhérents au modèle **SST** – **Menter**.

L'avantage du modèle $k-\omega$ par rapport au modèle $k-\varepsilon$ réside dans la prise en compte des effets dus à la turbulence des écoulements à faible nombre de Reynolds. Il est utilisable pour les écoulements compressibles et permet de prendre en compte les transferts pariétaux.

Le modèle de Wilcox est applicable pour les écoulements en charge, les écoulements à surface libre caractérisés par de fortes contraintes de cisaillement, les jets et les écoulements autour d'un obstacle (phénomène de sillage), il est applicable aussi à la diffusion d'un polluant dissous.

2.5 méthodes numériques :

2.5.1 Introduction :

L'étude des phénomènes d'apparition des ondes de choc dans les tuyères et les écoulements supersoniques présente une grande complexité. Bien que ces phénomènes soient traités de manières expérimentale et théorique, des difficultés subsistent pour les cas d'écoulements compressibles à hautes vitesses. Les approches numériques issues de la technique CFD (*Computational Fluid Dynamics*) permettent aujourd'hui d'apporter des solutions et des résultats fiables.

L'ensemble des codes de calcul est basé sur la discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) de Navier-Stokes afin de fournir des solutions approchées. En raison des contraintes liées aux approches expérimentales dans le domaine des fluides compressibles, la simulation numérique est privilégiée. Ce travail de simulation a été réalisé à l'aide du logiciel ANSYS Fluent (version 19.2), basé sur la méthode de discrétisation en volumes finis.

2.5.2 Procédure numérique :

La méthode de volumes finis a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 [42], le principe de la méthode des volumes finis est basé sur une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équation algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volume de contrôle, chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal, comme indiqué dans la figure 2.1.

La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégralité des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle.

Les différentes étapes de la méthode des volumes finis sont :

La discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle ;

La formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles ;

Ecriture des équations algébriques aux nœuds du maillage.

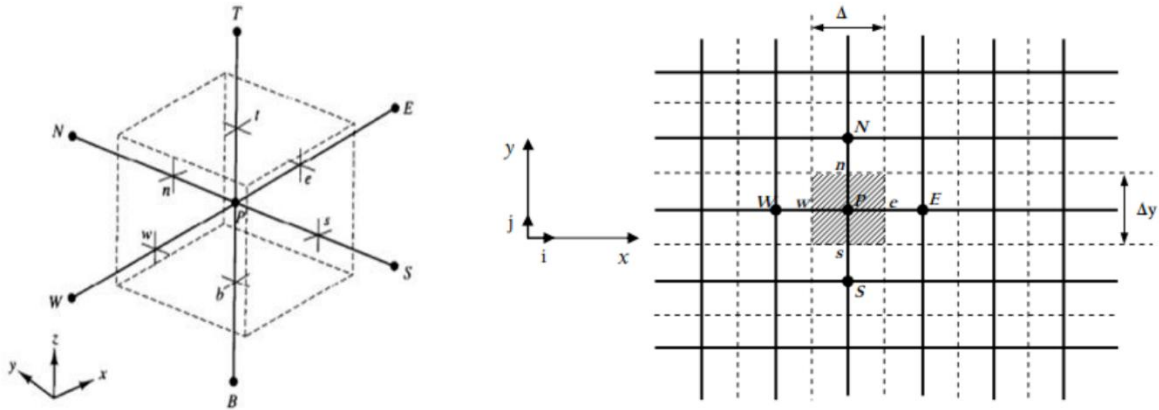


Figure 2.1 Volume de contrôle des configurations en 2D et 3D pour la résolution en volumes finis

2.5.3 Maillage :

Le maillage est une discrétisation de l'espace à étudier (support des calculs CFD), il est constitué d'un ensemble de mailles (ou cellules) dans lesquelles les équations du problème seront résolues. Le pas d'espace est ici défini comme la taille caractéristique d'une maille [22].

2.5.4 Choix du maillage

Le logiciel utilisé pour le maillage est ANSYS Fluent (version 19.2). Il comporte deux grandes classes de maillage correspondant aux types de maillage utilisés pour les simulations : les maillages structurés et les maillages non structurés ou hybrides.

Un maillage structuré est généralement composé de mailles quadrilatérales en deux dimensions (2D ou maillage surfacique) et hexaédriques en trois dimensions (3D ou maillage volumique), tandis qu'un maillage non structuré est composé de mailles quadrilatérales ou triangulaires en 2D et hexaédriques ou tétraédriques en 3D.

Le maillage structuré multi-blocs quadrilatère est choisi pour les calculs 2D réalisés lors de cette étude. Ce type de maillage permet de contrôler de façon rigoureuse l'épaisseur des mailles dans des endroits précis, notamment dans les zones de l'écoulement où la capture des ondes de choc et la résolution des paramètres aérodynamiques sont importantes.

Le seul inconvénient rencontré dans ce type de maillage, par rapport au maillage non structuré, est l'augmentation du nombre de mailles lors de son raffinement dans les zones sensibles à étudier. Cela engendre une augmentation du nombre d'équations à résoudre, à la fois pour l'étape de résolution et pour celle du post-traitement, ce qui accroît le temps et le coût de calcul.

2.6 Les méthodes numériques de résolution :

Les équations de transport des grandeurs caractéristiques de l'écoulement peuvent se résumer à une expression commune qui peut être schématisée sous la forme différentielle suivante, pour la grandeur scalaire ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] + S_\phi \quad (2.62)$$

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)$: Terme temporel

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \phi)$: Terme convectif

$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right]$: Terme de diffusion

S_ϕ : Terme source de ϕ par unité de volume

L'équation (2.62) est intégrée sur un volume de contrôle dV et sa forme intégrale devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho\phi) dV + \oint_f \rho\phi \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \oint_f \Gamma_\phi \rho \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA + \iiint_V S_\phi dV \quad (2.63)$$

Où ;

ρ : Densité du fluide,

$\vec{U}$: Vecteur de vitesse instantanée,

$\vec{dA}$: Vecteur de surface ($\vec{dA} = \vec{n} dA$),

Γ_ϕ : Coefficient de diffusion de ϕ

$\vec{\nabla} \phi$: Gradient de ϕ ,

S_ϕ : Source de ϕ par unité de volume.

L'équation (2.63) s'écrit dans le régime stationnaire comme suit :

$$\oint_f \rho\phi \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \oint_f \Gamma_\phi \rho \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dA + \iiint_V S_\phi dV \quad (2.64)$$

En utilisant le théorème de Green Ostrogorski, les intégrales sur le volume de contrôle peuvent être réécrites sous forme d'intégrale sur la surface enveloppant le volume, et les deux

termes, à gauche et à droite de l'équation (2.62), par exemple le premier terme s'écrit comme suit :

$$\oint_f \vec{\nabla} \cdot (\rho \phi \vec{U}) dV = \oint_f \rho \phi \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (2.65)$$

Après intégration, l'équation (2.63) donne :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} V_{cellule} + \sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{U}_f \phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\phi \vec{\nabla} \phi_f \cdot \vec{A}_f + S_\phi V_{cellule} \quad (2.66)$$

Où

N_{faces} : Nombre de faces de la cellule.

ϕ_f : Variable de ϕ évaluée à la face f .

$\rho_f \vec{U}_f \vec{A}_f$: Débit massique à travers la face f .

$\vec{A}_f$: Surface de la face f .

$\vec{\nabla} \phi_f$: Grandeur de $\vec{\nabla} \phi$ normale à la surface f .

$V_{cellule}$: volume de la cellule.

Et en régime stationnaire elle s'écrit comme suit:

$$\underbrace{\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{U}_f \phi_f \cdot \vec{A}_f}_{TC} = \underbrace{\sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\phi \vec{\nabla} \phi_f \cdot \vec{A}_f}_{TD} + \underbrace{S_\phi V_{cellule}}_{TS} \quad (2.67)$$

TC : Termes convectifs

TD : Termes diffusifs

TS : Termes sources

2.7 Forme linéarisée de l'équation discrète

L'équation de transport scalaire discrétisée (Éq. 2.64) contient les variables inconnues de la quantité scalaire ϕ dans les centres des cellules aussi bien que les valeurs inconnues en cellules voisines environnantes. Cette équation, en général, sera non-linéaire. En régime permanent la forme linéaire de l'équation (2.64) discrètes est la suivante :

$$a_p \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (2.68)$$

où :

nb : indice désigne les cellules voisines.

a_p et a_{nb} : sont les coefficients linéarisés de ϕ et ϕ_{nb} respectivement.

b représente la contribution de la partie constante du terme source S_ϕ .

ϕ : est la valeur d'une variable scalaire au centre de la cellule.

Le nombre de cellules voisines dépend de la topologie du maillage, il est généralement égale au nombre de faces entourant la cellule (en 3D, 6 cellules voisines pour un maillage hexaédrique).

2.8 Résolution de système d'équations linéaires

Nous avons décrit auparavant les méthodes de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement laminaire ou turbulent. Ces équations peuvent se mettre pour la variable ϕ en chaque volume de contrôle élémentaire, sous la forme suivante:

$$a_p \phi_{i,j} = a_E \phi_{i+1,j} + a_W \phi_{i-1,j} + a_N \phi_{i,j+1} + a_S \phi_{i,j-1} \quad (2.69)$$

Ce processus conduit à un système d'équations algébriques linéaires qui doit être résolu. La complexité et la dimension de l'ensemble d'équations dépendent du dimensionnement du problème, du nombre de nœuds de la grille et de la méthode de discrétisation. Il y a deux méthodes pour la résolution des équations algébriques linéaires : les méthodes directes et les méthodes indirectes ou itératives. Les exemples simples des méthodes directes sont la règle de Cramer par inversion de la matrice et la méthode de Gauss. Les méthodes itératives sont basées sur une application répétée d'un algorithme relativement simple qui mène à la convergence éventuelle après un ou quelquefois un grand- nombre de répétitions. Les exemples les plus connus sont méthodes d'itération point par point, les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel. Les méthodes itératives sont plus économiques que les méthodes directes.

FLUENT résout ce système linéaire par la méthode de Gauss-Seidel conjointement avec des méthodes à Multi grilles algébriques (AMG).

2.9 Schémas de discrétisation utilisés

Pour évaluer les termes convectifs et diffusifs aux faces du volume de contrôle, un schéma de discrétisation doit être adopté. Pour un écoulement unidimensionnel stationnaire, l'équation discrète se réduit à la forme :

$$a_p \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

avec :

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Ou :

F : représente le flux convectif

D : représente la conductance diffusive

Les coefficients des cellules voisines varient selon les schémas de discrétisation adoptés

Tableau des coefficients des principaux schéma de discrétisation :

Schéma de discrétisation	Coefficient Ouest (a_W)	Coefficient Est (a_E)
Différences centrées	$D_w + F_w/2$	$D_e - F_e/2$
Upwind	$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$
hybride	$\max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$
Power law	$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max(F_w, 0)$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max(F_e, 0)$

Tableau 2- 1 Les coefficients des principaux schéma de discrétisation

Le schéma Upwind d'ordre deux est généralement privilégié dans les simulations CFD car il offre un bon compromis entre précision et stabilité numérique.

2.10 Paramètres numériques de simulation

Les calculs numériques ont été réalisés à l'aide du logiciel ANSYS Fluent. Les principaux paramètres numériques retenus sont récapitulés dans le tableau suivant.

Paramètre	Choix
Type de simulation	2D stationnaire
Solveur	Density-Based , pressure-based (reactive case)
Précision	Double précision
Formulation	Implicite
Discrétisation temporelle	Second ordre
Modèle de turbulence	k-ε et k-ω SST
Schéma de flux	Roe-FDS

Quantité de mouvement	Upwind second ordre
Énergie cinétique turbulente k	Upwind second ordre
Taux de dissipation spécifique ω	Upwind second ordre
Taux de dissipation turbulente ε	Upwind second ordre
Nombre de Courant (CFL)	Variable selon les cas étudiés
Condition d'entrée	Pressure inlet
Condition de sortie	Pressure Outlet
Paroi supérieure	Condition de non-glissement
Paroi inférieure	Condition de non-glissement

Tableau 2- 2 Paramètres numériques utilisés dans la simulation

Chapitre 03 : Résultats et discussion

Sommaire

3.1	Introduction.....	37
3.2	Description de la géométrie de la tuyère.....	37
3.3	Maillage.....	38
3.4	Validation du modèle numérique.....	38
3.5	Analyse Comparative et Validation de la Modélisation Turbulente.....	40
3.5.1	Performances numériques et convergence.....	40
3.5.2	Analyse du contour du nombre de mach.....	43
3.5.3	Analyse des profils axiaux du nombre de mach (XY Plots).....	44
3.5.4	Conclusion :.....	45
3.6	Comparaison entre les approches stationnaire et transitoire.....	45
3.6.1	Performances numériques et convergence.....	45
3.6.2	Analyse du profil du nombre de Mach.....	45
3.6.3	Conclusion.....	46
3.7	Influence de la pression d'entrée sur l'écoulement :.....	46
3.7.1	Analyse du mouvement de l'écoulement :.....	46
3.7.2	Analyse des propriétés thermodynamique.....	49
3.7.3	Conclusion.....	51
3.8	Influence de la température d'entrée sur l'écoulement.....	51
3.8.1	Analyse du mouvement de l'écoulement :.....	52
3.8.2	Analyse des propriétés thermodynamique.....	55
3.8.3	Conclusion.....	57
3.9	Analyse d'un écoulement réactif (mélange $H_2 - air$) :.....	57
3.9.1	Analyse des profils de vitesse et de température.....	57
3.9.2	Analyse des fractions massiques des espèces chimiques.....	58
3.9.3	Analyse du nombre de Damköhler.....	59
3.9.4	Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse des résultats obtenus par simulation numérique. L'objectif est de valider les choix numériques adoptés et d'évaluer l'influence des différents paramètres sur le comportement de l'écoulement.

Les résultats sont analysés afin de comparer les modèles de turbulence et les régimes de calcul étudiés, ainsi que d'examiner l'effet des conditions d'entrée sur les caractéristiques de l'écoulement. Une étude de l'écoulement réactif hydrogène-air est également présentée afin d'analyser les principaux paramètres de la combustion et leur influence sur les champs calculés.

3.2 Description de la géométrie de la tuyère

La simulation numérique est réalisée sur une tuyère supersonique de type convergente-divergente (axisymétrique). La forme du domaine fluide retenu pour cette étude est illustrée par la Figure 3.1.

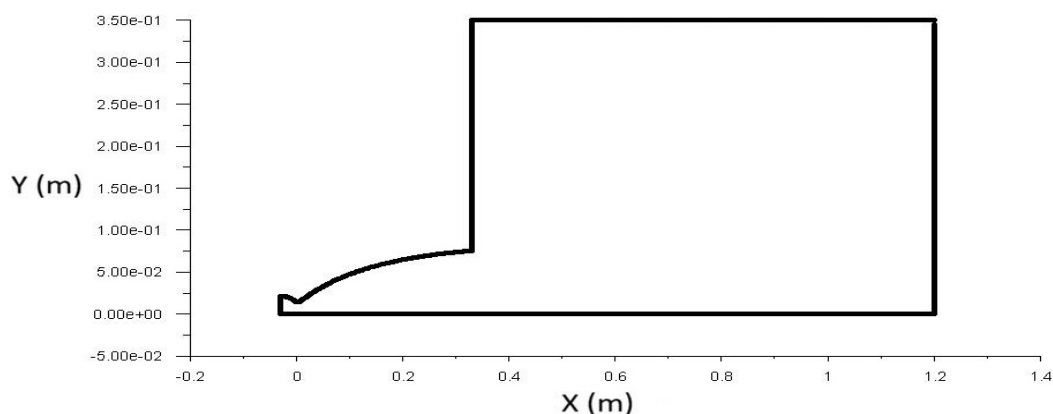


Figure 3.1 Géométrie utilisé pour le calcul numérique

Les valeurs géométriques exactes définissant cette structure sont rassemblées dans le Tableau 3.1 ci-dessous :

Paramètre géométrique	Symbole	Valeur
Rayon d'entrée	R_e	0.0205 m
Rayon du col (Throat)	R_c	0.01362 m
Rayon de sortie	R_s	0.075 m
Longueur du convergent	L_c	0.031905 m
Longueur du divergent	L_d	0.33 m
Longueur totale	L_t	1.231905 m

Tableau 3- 1 les dimension du tuyère

3.3 Maillage

Le maillage du domaine fluide a été réalisé afin de discrétiser l'espace pour le calcul numérique. Nous utilisons pour nos simulations un maillage structuré quadrilatère. Ce type de maillage permet en général d'obtenir une bonne résolution numérique. Il permet en outre un raffinement homogène au voisinage des parois et dans les zones à forts gradients (comme au col de la tuyère), ce qui est indispensable pour capturer correctement le comportement de l'écoulement. La Figure 3.2 illustre le maillage du domaine de calcul retenu.

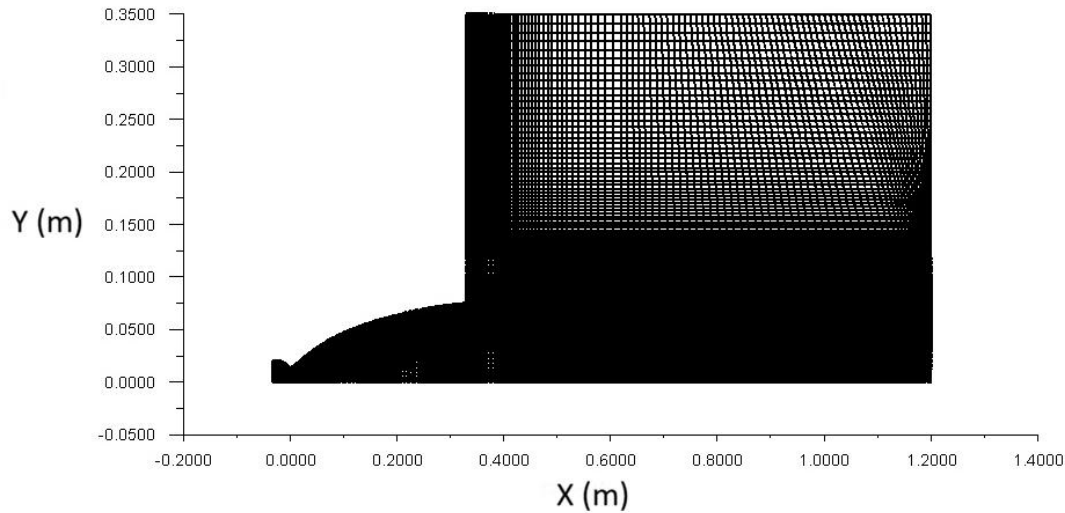


Figure 3.2 Maillage 2D du domaine de calcul de la tuyère.

3.4 Validation du modèle numérique

La validation du modèle numérique constitue une étape essentielle afin de vérifier la capacité du modèle CFD à reproduire correctement les phénomènes physiques présents dans les écoulements compressibles supersoniques.

Dans cette étude, les résultats numériques obtenus sous ANSYS Fluent ont été comparés aux résultats publiés dans la littérature concernant l'écoulement turbulent compressible dans une tuyère supersonique à contour idéal tronqué (TIC) [23].

Les conditions aux limites utilisées dans la présente simulation sont similaires à celles utilisées dans la référence, avec une pression totale de : $P_c = 34.7 \text{ bar}$ et une température totale de : $T_c = 270 \text{ K}$

L'air comprimé traverse la tuyère et subit une accélération progressive jusqu'à atteindre un régime supersonique avant son éjection dans le milieu ambiant aux conditions : $P_a = 1 \text{ bar}$ et : $T_a = 288 \text{ K}$

L'écoulement étudié correspond à un régime de sur-détente caractérisé par la présence d'une onde de choc dans le divergent de la tuyère. Les résultats présentés dans la référence [1] montrent que cette onde de choc est localisée à une distance de: $x = 0.202\text{m}$ après le col de la tuyère, où le nombre de Mach atteint une valeur maximale égale à : $M = 5.41$ avant de chuter brutalement vers un régime subsonique.

Dans la présente simulation numérique, l'onde de choc est observée à : $x = 0.212m$ où le nombre de Mach atteint une valeur maximale de : $M = 5.31$ avant une diminution rapide du nombre de Mach après l'onde de choc.

La comparaison entre les deux résultats montre un bon accord avec un écart relatif d'environ 4.95 %.

Cet écart reste faible et acceptable dans le cadre des simulations CFD compressibles turbulentes. Cette différence peut être attribuée aux variations de maillage, aux méthodes de discrétisation numérique ainsi qu'aux différences géométriques observées au niveau du convergent.

Bien que certaines différences géométriques existent entre la tuyère étudiée dans ce travail et la tuyère LEA-TIC de la référence [1], les principales caractéristiques du divergent restent identiques. Les deux géométries possèdent le même rayon du col, la même longueur du divergent ainsi que le même rayon de sortie. Les différences concernent essentiellement le rayon d'entrée et la longueur du convergent. Malgré cela, les résultats obtenus présentent une bonne concordance concernant la structure globale de l'écoulement supersonique et la position de l'onde de choc.

Tableau comparatif des caractéristiques géométriques:

Paramètre	Tuyère de référence	Présente tuyère
Rayon entrée	0.0899 m	0.0205 m
Longueur du convergent	0.04585 m	0.031905 m
Rayon du col	0.01362 m	0.01362 m
Longueur du divergent	0.33 m	0.33 m
Rayon de sortie	0.075 m	0.075 m

Tableau 3- 2 les dimension des deux tuyères

Figure 3.3 Le nombre de Mach obtenu dans la référence [1] montrant la position de l'onde de choc.

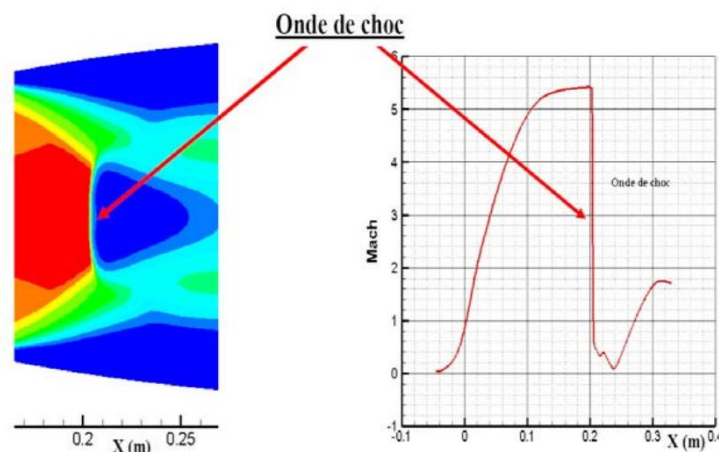
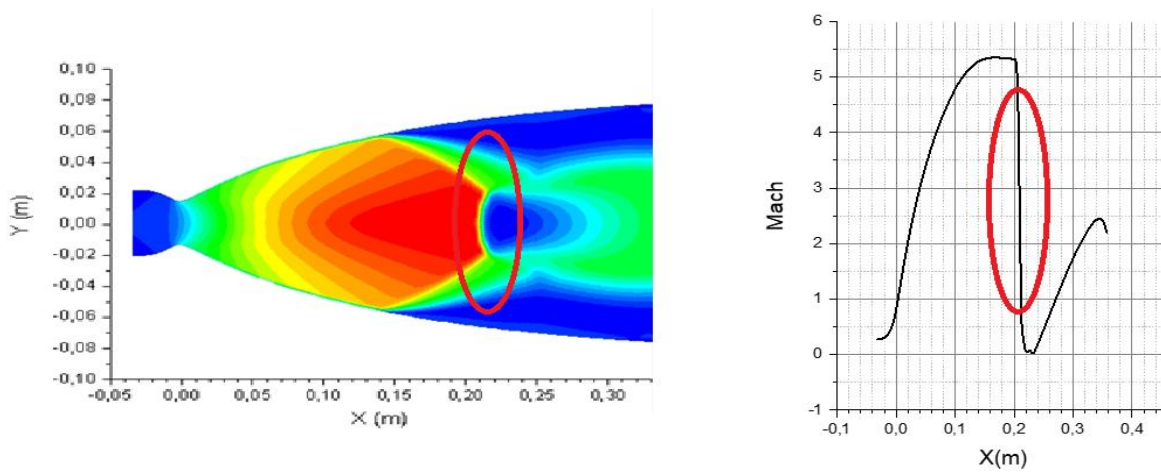


Figure 3.3 la position de l'onde de choc dans la tuyère de référence

Figure 3.4 Le nombre de Mach obtenu dans la présente simulation numérique.

*Figure 3.4 la position de l'onde de choc dans la présente tuyère*

L'évolution du nombre de Mach le long de l'axe de la tuyère montre une accélération progressive de l'écoulement dans le divergent jusqu'à atteindre un régime supersonique. Le nombre de Mach atteint une valeur maximale de $M = 5.31$ à une distance de $x = 0.212$ m dans le divergent, puis chute brutalement après l'onde de choc vers un régime subsonique. Les résultats obtenus présentent une bonne concordance avec ceux de la littérature [1], ce qui confirme la fiabilité du modèle numérique utilisé dans cette étude.

3.5 Analyse Comparative et Validation de la Modélisation Turbulente

L'objectif de Cette section est de valider le code de calcul et de sélectionner le modèle de turbulence le plus apte à capturer la physique complexe des écoulements comme les ondes de choc dans une tuyère supersonique. Nous soumettons quatre modèles (**laminaire**, **$K - \epsilon$** , **$K - \omega SST$** , **RSM**) à une étude comparative sous des conditions de : **$P = 300 \text{ bar}$** et : **$T = 300 \text{ K}$**

3.5.1 Performances numériques et convergence

Le test de la stabilité numérique des simulations à travers l'étude des résidus permet de vérifier la fiabilité et la convergence du solveur.

3.5.1.1 Limites de l'approche laminaire

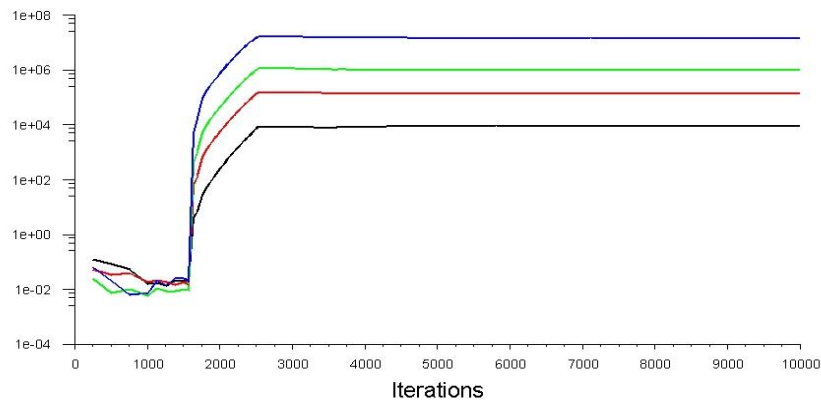


Figure 3.5 Historique des résidus (laminaire)

- Analyse : On observe une divergence brutale des résidus atteignant : 10^8 après environ 1500 itérations.
- Interprétation : L'écoulement à haut nombre de Reynolds est intrinsèquement turbulent. L'approche laminaire ne parvient pas à dissiper correctement l'énergie, ce qui génère une instabilité numérique importante du solveur.

3.5.1.2 Comparaison de la convergence des modèles turbulents

- Modèle $K - \varepsilon$:

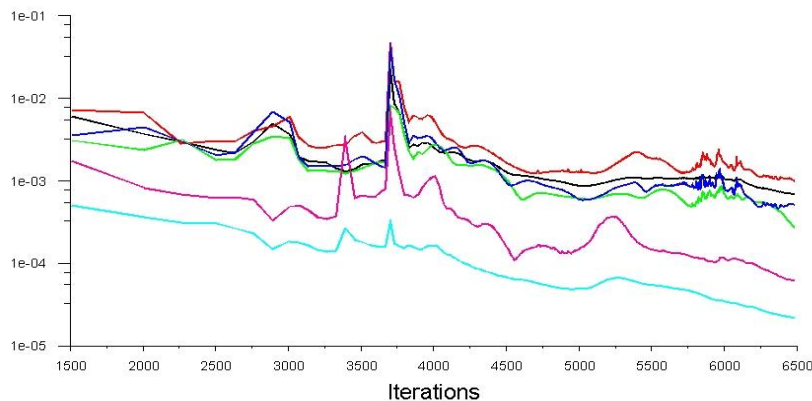


Figure 3.6 Historique des résidus ($K-\varepsilon$)

La convergence est atteinte après environ 6500 itérations. Les pics d'instabilité visibles entre 3500 et 4000 itérations figure 3.6 traduisent la difficulté du modèle à stabiliser l'établissement des ondes de choc.

- Modèle $K - \omega SST$:

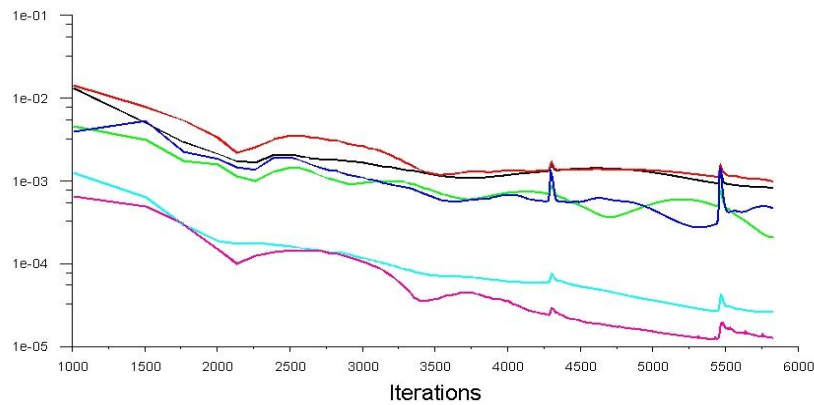


Figure 3.7 Historique des résidus ($K-\omega$ SST)

Ce modèle présente une meilleure stabilité avec une convergence plus fluide atteinte après environ 5800 itérations figure 3.7. Sa formulation est mieux adaptée aux écoulements compressibles caractérisés par de forts gradients de pression.

➤ Modèle RSM :

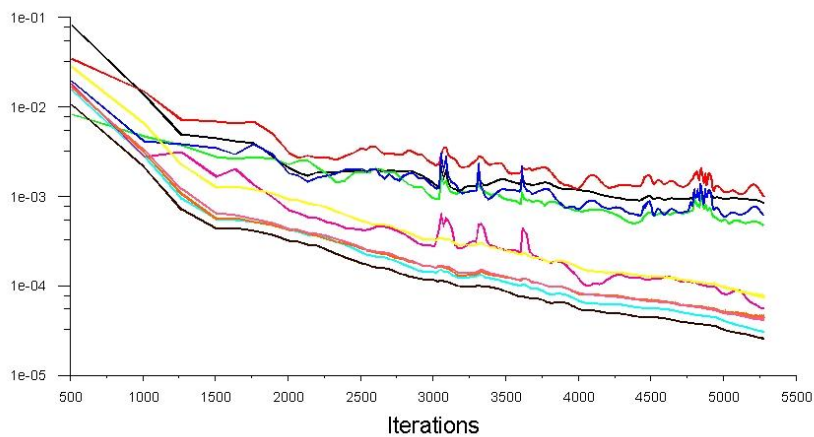


Figure 3.8 Historique des résidus (RSM)

Le modèle RSM présente la convergence la plus rapide en nombre d'itérations (5300) avec une évolution régulière des résidus figure 3.8. Bien que chaque itération nécessite un temps de calcul plus important, la résolution des contraintes de Reynolds permet une stabilisation plus rapide de la solution globale.

Modèle	Nombre d'itérations	Comportement numérique	Stabilité
laminaire	10000	Divergence à (10^8)	Faible
$K - \varepsilon$	6500	Convergence avec oscillations	Bonne
$K - \omega$ SST	5800	Convergence stable	Très bonne
RSM	5300	Convergence régulière	Bonne

Tableau 3-3 Bilan de la robustesse numérique des solveurs

3.5.2 Analyse du contour du nombre de mach

Cette étape permet d'évaluer la capacité des modèles à représenter correctement la structure du jet supersonique.

➤ $K - \varepsilon$:

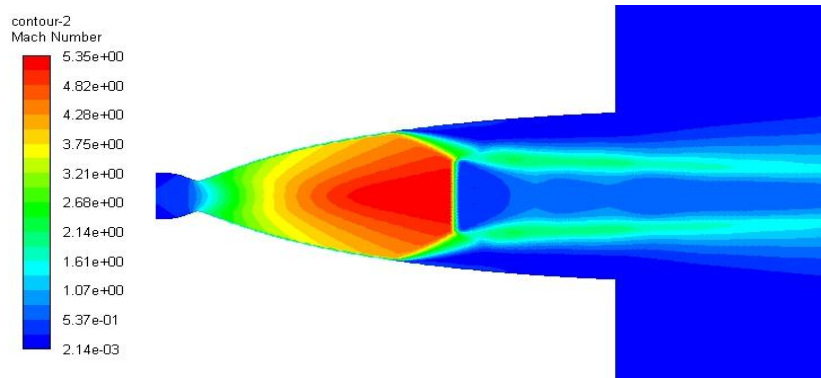


Figure 3.9 contour du nombre de mach $K-\varepsilon$

Le jet apparaît fortement amorti à la sortie ; la structure périodique reste relativement diffuse en raison d'une dissipation numérique importante.

➤ $K - \omega SST$:

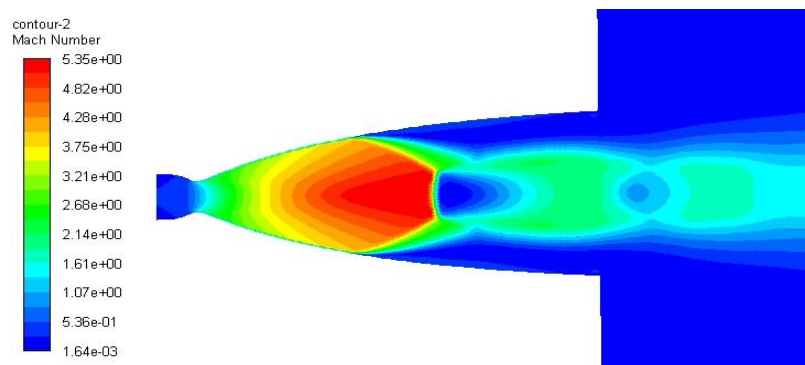


Figure 3.10 contour du nombre de mach $K-\omega SST$

Le modèle montre une représentation très nette des *shock Diamonds* à la sortie de la tuyère, avec des zones de Mach clairement définies.

➤ RSM :

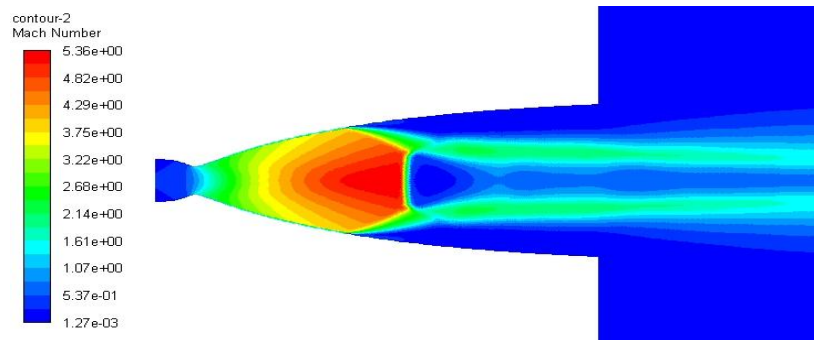


Figure 3.11 contour du nombre de mach RSM

Le modèle fournit également une bonne représentation des structures compressibles, bien que les contours apparaissent légèrement moins nets que ceux obtenus avec le modèle SST.

Bien que le modèle représente correctement le champ de pression global, les cellules de recompressions externes restent moins marquées que celles obtenues avec le modèle $K - \omega SST$.

Modèle	Structures de choc	Netteté des contours	Diffusion numérique
$K - \varepsilon$	Moyennes	Diffuses	Élevée
$K - \omega SST$	Très bonnes	Très nette	Faible
RSM	Bonnes	Nette	Moyenne

Tableau 3-4 Comparaison de la précision des modèles de turbulence pour la capture des structures de choc.

3.5.3 Analyse des profils axiaux du nombre de mach (XY Plots)

L'extraction des données le long de l'axe longitudinal (X) permet d'effectuer une comparaison quantitative des performances des différents modèles.

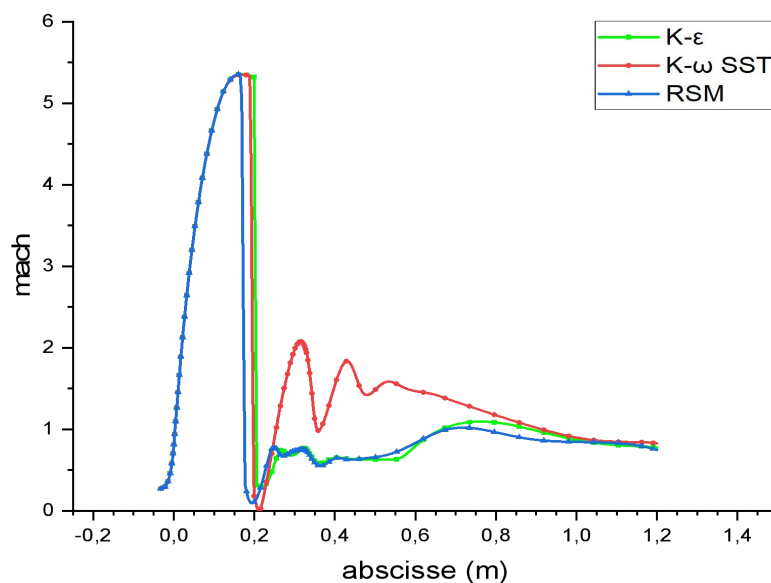


Figure 3.12 Profil axial du nombre de Mach

Interprétation :

La courbe rouge correspondant au modèle $K - \omega SST$ présente des pics périodiques plus nets, traduisant une diffusion numérique plus faible par rapport aux modèles $K - \varepsilon$ et RSM .

3.5.4 Conclusion :

Le modèle $K - \omega SST$ est retenu pour la suite de l'étude. Sa stabilité numérique, la netteté des contours obtenus ainsi que la précision des profils axiaux en font le modèle le plus adapté à l'analyse des écoulements supersoniques dans la tuyère TIC.

3.6 Comparaison entre les approches stationnaire et transitoire

Pour vérifier la précision de la méthode numérique et évaluer le temps de calcul nécessaires, une simulation comparative a été réalisée entre un solveur stationnaire (*Steady*) et un solveur transitoire (*Transient*). Le test utilise des conditions fixes : une pression d'entrée de **50bars** et une température de **500K**, avec une sortie vers un milieu ambiant à **1bar** et **300K**. Le maillage ainsi que le modèle de turbulence restent identiques pour les deux calculs.

3.6.1 Performances numériques et convergence

Sur le plan du calcul, le mode stationnaire atteint une convergence rapide car le solveur élimine la variable temps pour chercher directement l'état d'équilibre final. À l'inverse, le calcul transitoire demande un temps d'exécution beaucoup plus long, car il résout l'écoulement de manière chronologique, pas après pas (*time-step*). Cependant, comme les conditions aux limites ne varient pas dans le temps, le régime transitoire se stabilise et donne des résultats similaires au cas stationnaire.

3.6.2 Analyse du profil du nombre de Mach

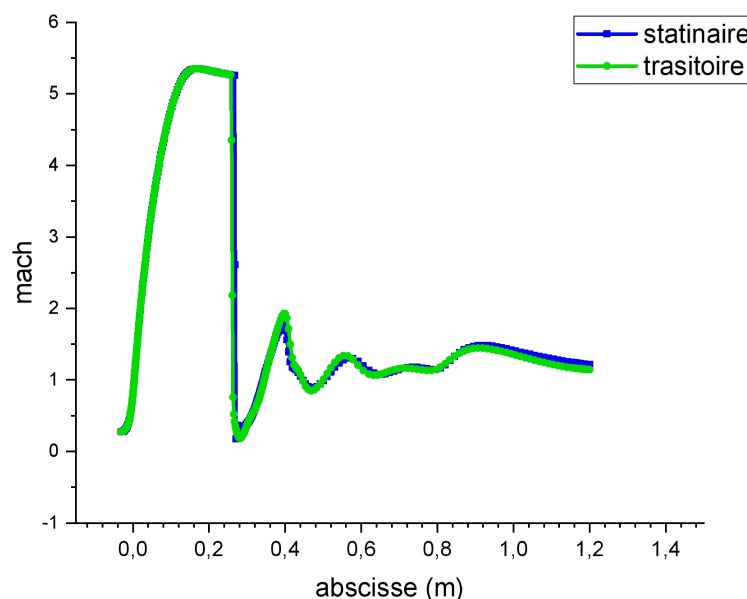


Figure 3.13 profil du nombre de Mach

Le graphique montre que les deux courbes se superposent de façon presque parfaite. Dans la zone de détente, l'écoulement accélère de la même manière et atteint un nombre de Mach maximal de **5,3**. À l'abscisse $x = 0,25m$, on constate une baisse brutale du Mach qui indique la présence de l'onde de choc normale. La position de ce choc principal, tout comme les ondulations secondaires situées en aval, est identique pour les deux solveurs.

3.6.3 Conclusion

Cette comparaison confirme que le traitement stationnaire reproduit fidèlement la physique de l'écoulement et la position de l'onde de choc. Cette approche offre une précision équivalente au mode transitoire tout en réduisant considérablement le coût de calcul, ce qui justifie son application pour l'étude des autres niveaux de pression.

3.7 Influence de la pression d'entrée sur l'écoulement :

Cette section est consacrée à l'étude de l'impact de la pression d'entrée P_c sur les caractéristiques aérodynamiques de l'écoulement dans la tuyère. Afin d'isoler l'effet de ce paramètre, les conditions de simulation sont maintenues constantes : la géométrie de la tuyère est fixe, la température d'entrée est maintenue à une valeur constante et le modèle de turbulence $K - \omega SST$ est utilisé pour l'ensemble des cas. L'analyse compare les résultats obtenus pour trois niveaux de pression (**30, 60 et 90bars**), en se concentrant sur l'évolution du champ de mouvement (nombre de Mach et vitesse) ainsi que sur la distribution des propriétés thermodynamiques (pressions et température statiques).

3.7.1 Analyse du mouvement de l'écoulement :

3.7.1.1 Distribution du nombre de Mach

3.7.1.1.1 Contours du nombre de Mach

➤ Cas 30 bars :

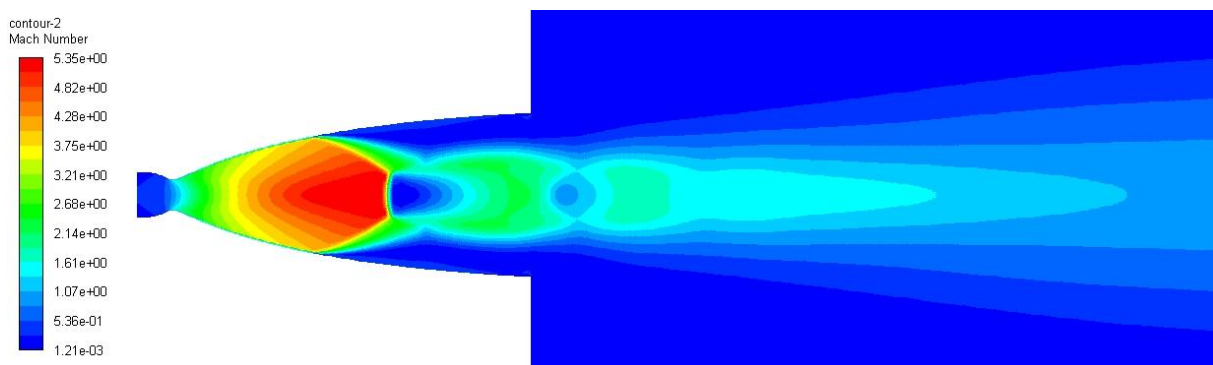


Figure 3.14 contour du nombre de mach (30bars)

➤ Cas 60 bars :

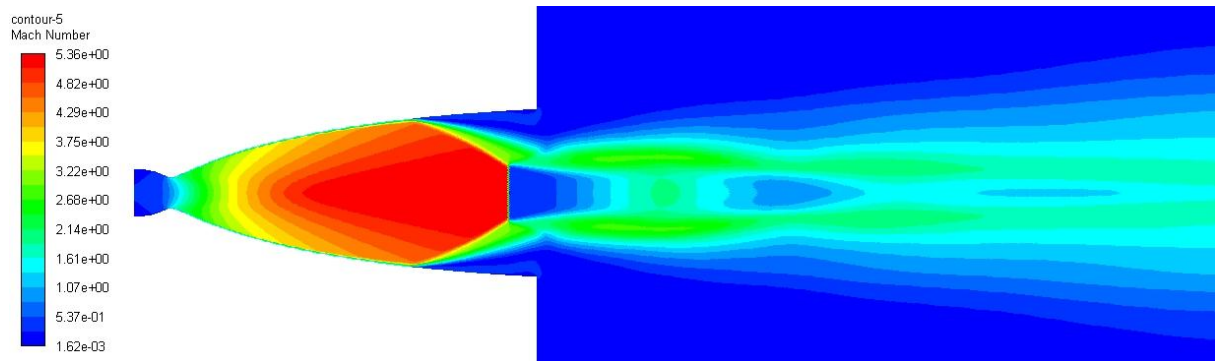


Figure 3.15 contour du nombre de mach (60bars)

➤ Cas 90 bars :

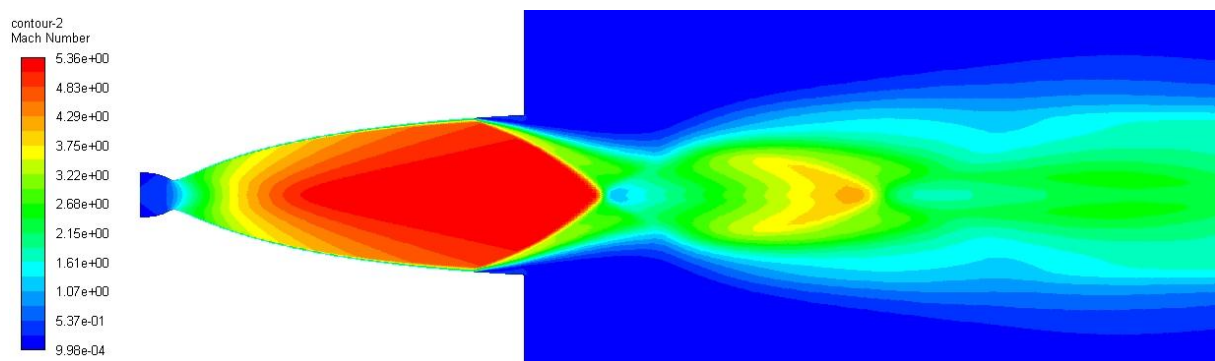


Figure 3.16 contour du nombre de mach (90bars)

3.7.1.1.2 Graphe comparatif : ($Mach = f(x)$)

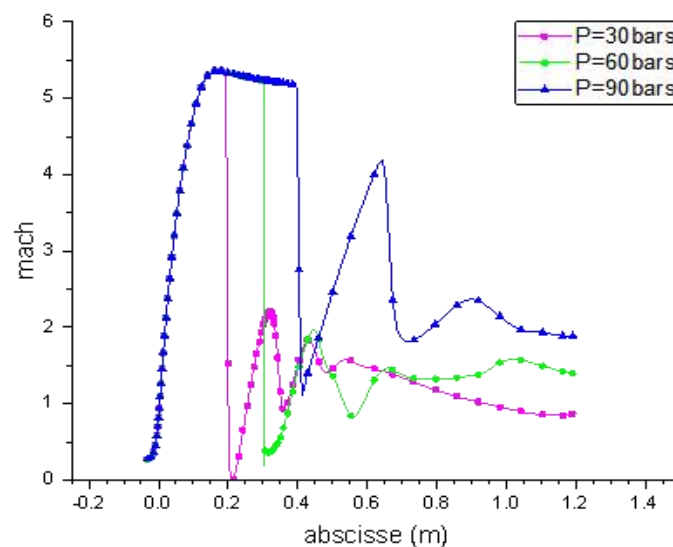


Figure 3.17 profil du nombre de Mach

3.7.1.1.3 Analyse et interprétation

Les résultats montrent que le nombre de Mach maximal reste presque constant pour les trois cas étudiés, avec une valeur proche de Mach 5.35. Cette stabilité est principalement due à la géométrie de la tuyère ainsi qu'au rapport d'expansion de l'écoulement.

L'augmentation de la pression d'entrée provoque un déplacement progressif de l'onde de choc vers l'aval de la tuyère. Ainsi, le cas de **90bars** présente une région supersonique plus étendue que celles observées pour **30** et **60bars**.

À haute pression d'entrée, le jet devient davantage sous-détendu, ce qui provoque un allongement des cellules de choc et une extension plus importante de la structure supersonique après la sortie de la tuyère.

3.7.1.2 Distribution de la vitesse (Velocity)

3.7.1.2.1 Contours de la vitesse

➤ Cas 30 bar :

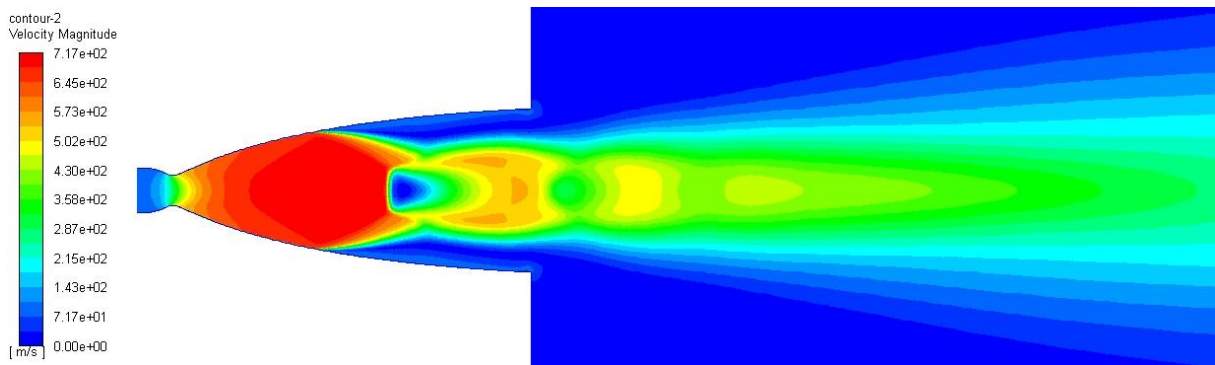


Figure 3.18 contour de vitesse (30bars)

➤ Cas 60 bars :

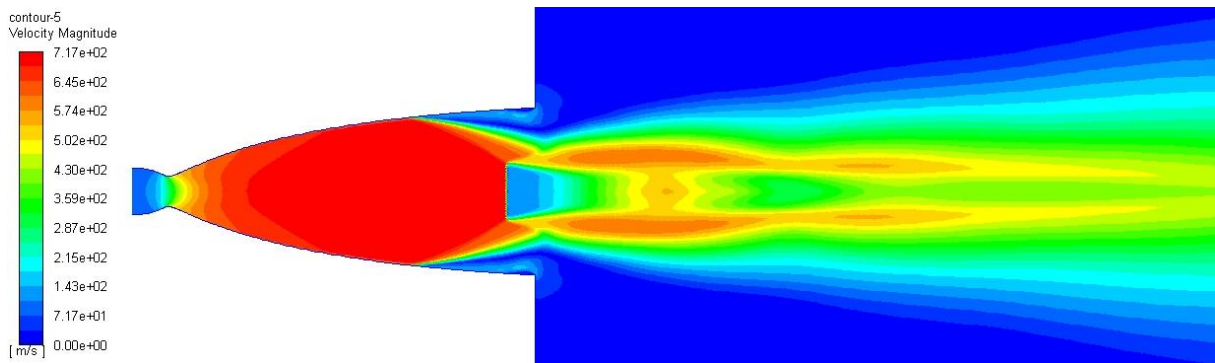


Figure 3.19 contour de vitesse (60bars)

➤ Cas 90 bars :

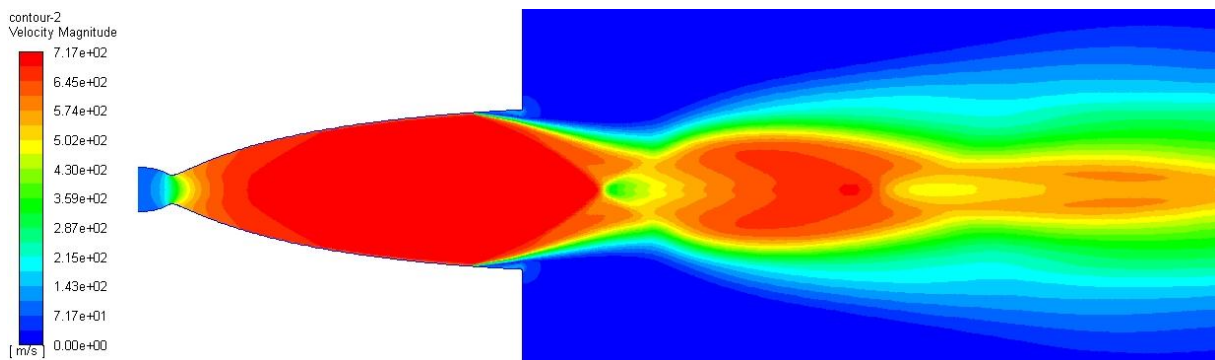


Figure 3.20 contour de vitesse (90bars)

3.7.1.2.2 Graphe comparatif : $Vitesse = f(x)$

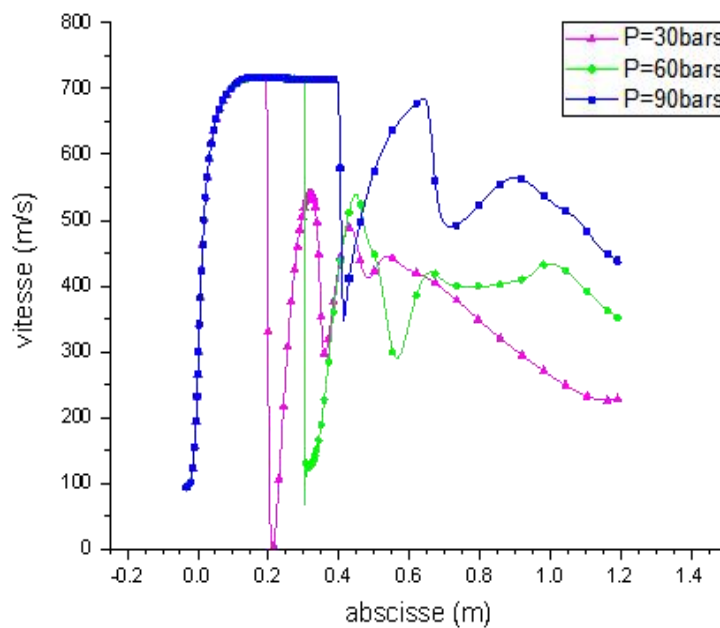


Figure 3.21 le champ de vitesse

3.7.1.2.3 Analyse et interprétation

La vitesse maximale reste pratiquement constante pour les trois cas étudiés, car elle dépend principalement de la géométrie de la tuyère ainsi que des conditions d'entrée de l'écoulement.

L'augmentation de la pression d'entrée permet de maintenir des vitesses élevées sur une distance plus importante dans la tuyère, ce qui prolonge la région d'accélération du fluide.

Pour le cas de 90 bars, le jet à haute vitesse s'étend davantage vers l'aval, traduisant une augmentation de l'énergie cinétique de l'écoulement en sortie de tuyère.

3.7.2 Analyse des propriétés thermodynamique

3.7.2.1 Interprétation de la pression statique

3.7.2.1.1 Graphe comparatif : ($static\ pressure = f(x)$)

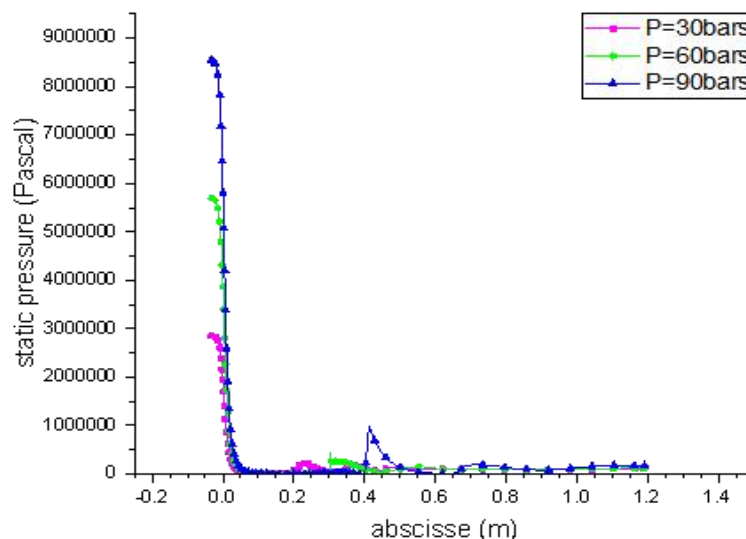


Figure 3.22 profil de la pression statique

3.7.2.1.2 Analyse et interprétation

On observe une forte diminution de la pression statique dès l'entrée de la tuyère pour les trois cas étudiés.

Cette chute de pression traduit la conversion de l'énergie de pression en énergie cinétique lors de l'accélération du fluide à travers la tuyère.

L'augmentation de la pression d'entrée entraîne un déplacement de l'onde de choc vers l'aval de l'écoulement. Dans le cas de 90 bars, la pression reste faible sur une distance plus importante, ce qui indique une région supersonique plus étendue.

3.7.2.2 Interprétation de la pression dynamique

3.7.2.2.1 Graphe comparatif : (*dynamic pressure* = $f(x)$)

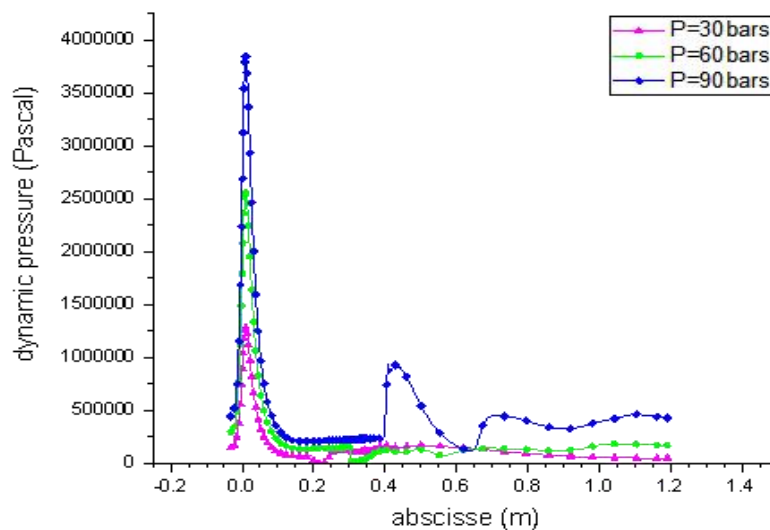


Figure 3.23 profil de la pression dynamique

3.7.2.2.2 Analyse et interprétation

La pression dynamique augmente fortement dans la zone d'accélération de l'écoulement et atteint ses valeurs maximales au voisinage du col ainsi que dans la région supersonique.

Les résultats montrent également que la pression dynamique augmente avec la pression d'entrée, le cas de 90 bars présentant les valeurs les plus élevées de l'écoulement.

3.7.2.3 Interprétation de la température statique

3.7.2.3.1 Graphe comparatif : (*static temperature* = $f(x)$)

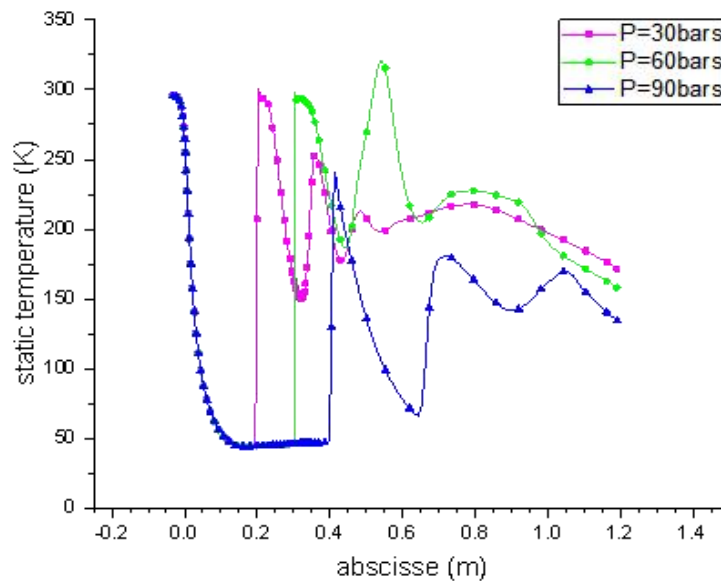


Figure 3.24 profil de la température statique

3.7.2.3.2 Analyse et interprétation

La température statique diminue fortement durant l'expansion supersonique du fluide à l'intérieur de la tuyère.

L'augmentation de la pression d'entrée accentue le refroidissement du fluide et prolonge la région de basse température dans l'écoulement.

Les augmentations locales de température correspondent aux zones d'ondes de choc, où une partie de l'énergie cinétique est transformée de nouveau en énergie thermique. Ces zones se déplacent progressivement vers l'aval lorsque la pression d'entrée augmente.

3.7.3 Conclusion

L'analyse de l'influence de la pression d'entrée P_c sur l'écoulement démontre que celle-ci est le paramètre déterminant pour la performance dynamique de la tuyère. Les résultats confirment que l'augmentation de la pression d'entrée de 30 à 90 bars permet d'étendre la zone supersonique et de repousser les ondes de choc vers l'aval, optimisant ainsi la conservation de la vitesse sur une distance plus importante. Bien que la vitesse maximale plafonne en raison des contraintes géométriques, une pression d'entrée plus élevée accroît significativement l'énergie cinétique globale du jet, renforçant directement la poussée produite par le système.

3.8 Influence de la température d'entrée sur l'écoulement

Cette section examine l'impact de la température d'entrée T_c sur les caractéristiques dynamiques et thermodynamiques de l'écoulement au sein de la tuyère. Pour assurer la pertinence de cette analyse, les conditions aux limites sont strictement contrôlées : la géométrie de la tuyère est maintenue constante, la pression d'entrée est fixée à une valeur unique de 30 bars et le modèle de turbulence $K - \omega SST$ est conservé pour l'ensemble des simulations. L'étude compare les comportements du fluide pour trois paliers de température (600K, 900K et 1200K), en évaluant l'évolution du champ de mouvement et la distribution des propriétés physiques associées.

3.8.1 Analyse du mouvement de l'écoulement :

3.8.1.1 Distribution du nombre de Mach

3.8.1.1.1 Contours du nombre de Mach

➤ Cas 600K:

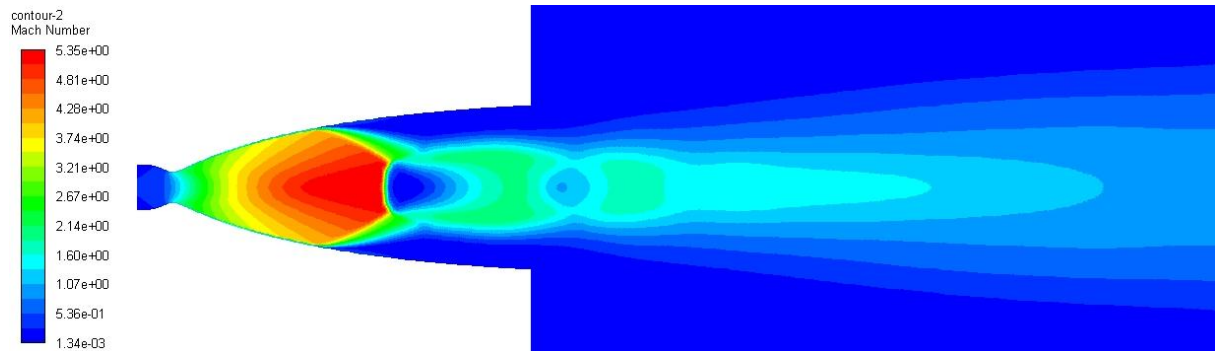


Figure 3.25 contour du nombre de mach (600K)

➤ Cas 900K:

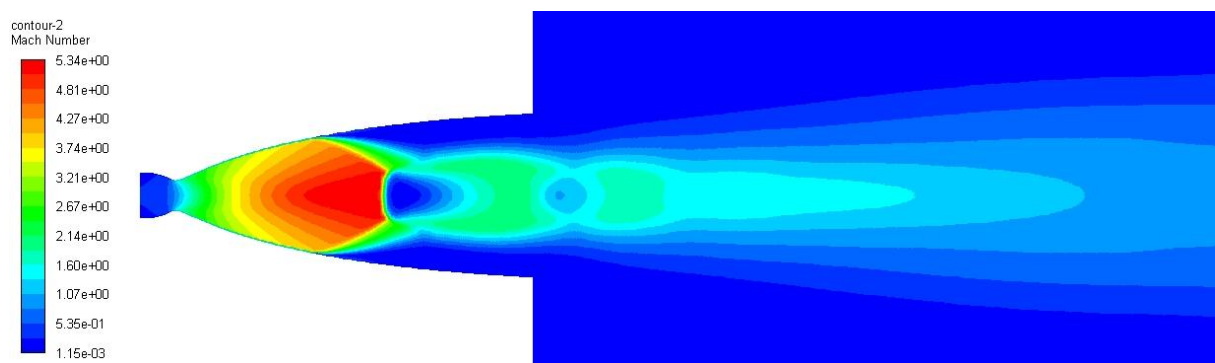


Figure 3.26 contour du nombre de mach (900K)

➤ Cas 1200K:

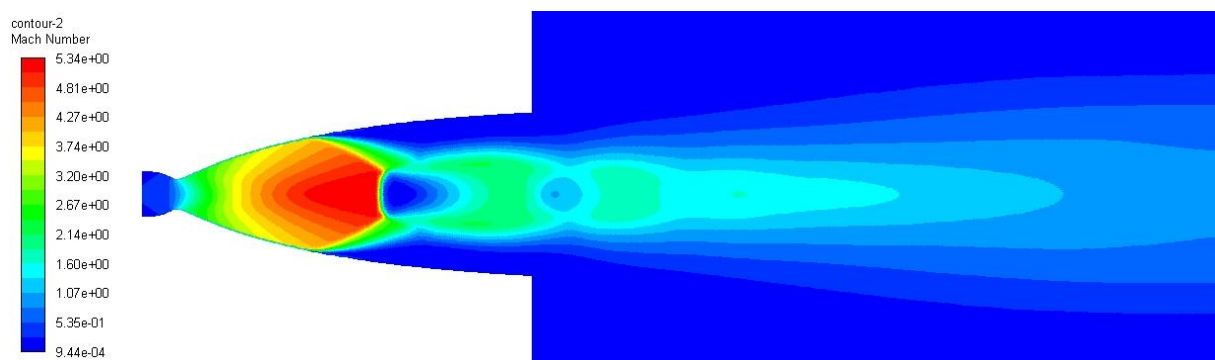


Figure 3.27 contour du nombre de mach (1200K)

3.8.1.1.2 Graphe comparatif : ($Mach = f(x)$)

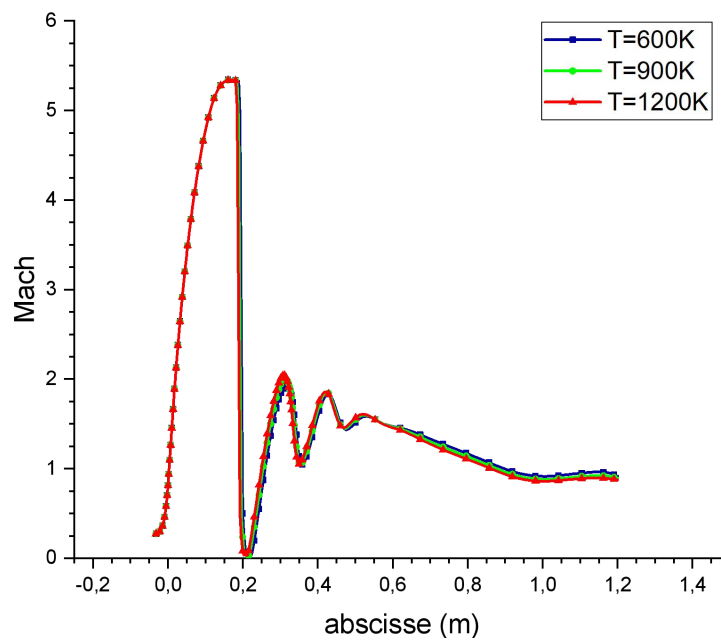


Figure 3.28 profil du nombre de Mach

3.8.1.1.3 Analyse et interprétation

Les contours du nombre de Mach pour 600K, 900K et 1200K présentent une structure quasiment identique dans toute la tuyère, avec une valeur maximale proche de Mach 5.35, ce qui montre une faible sensibilité du nombre de Mach à la température d'entrée.

Le graphe comparatif de Mach montre une superposition quasi parfaite des trois courbes pour les différentes températures, indiquant que la distribution longitudinale du nombre de Mach reste pratiquement inchangée malgré la variation thermique.

Ce comportement s'explique par le fait que le nombre de Mach dépend principalement de la géométrie de la tuyère et du rapport d'expansion de l'écoulement, ce qui rend sa distribution globalement indépendante de la température d'entrée.

3.8.1.2 Distribution de la vitesse (Velocity)

3.8.1.2.1 Contours de la vitesse

➤ Cas 600K :

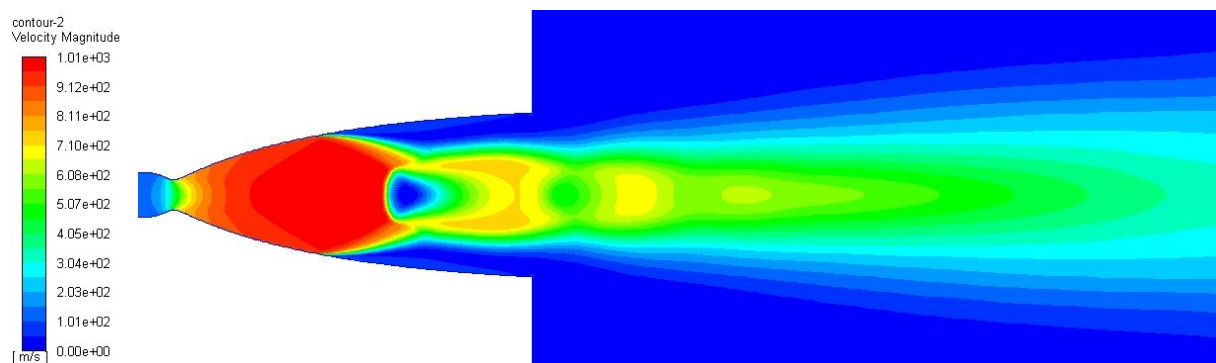


Figure 3.29 contour de vitesse (600K)

➤ Cas 900K :

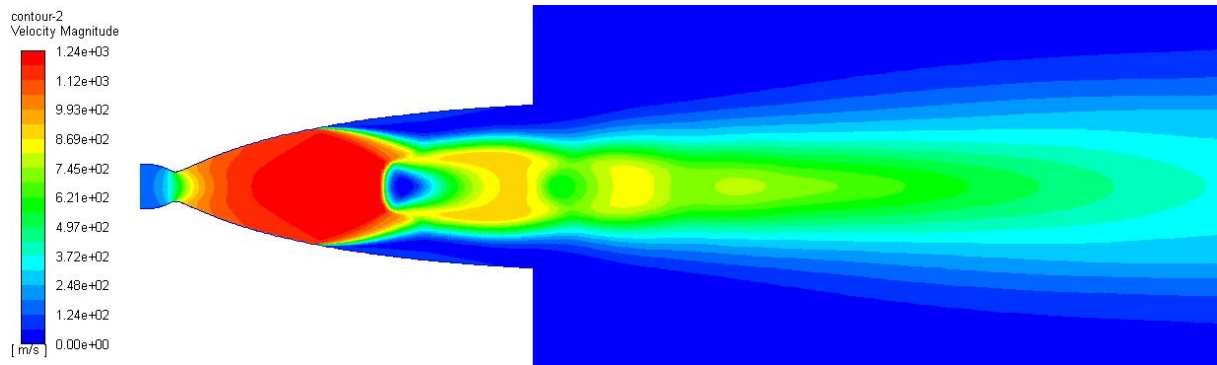


Figure 3.30 contour de vitesse (900K)

➤ Cas 1200K :

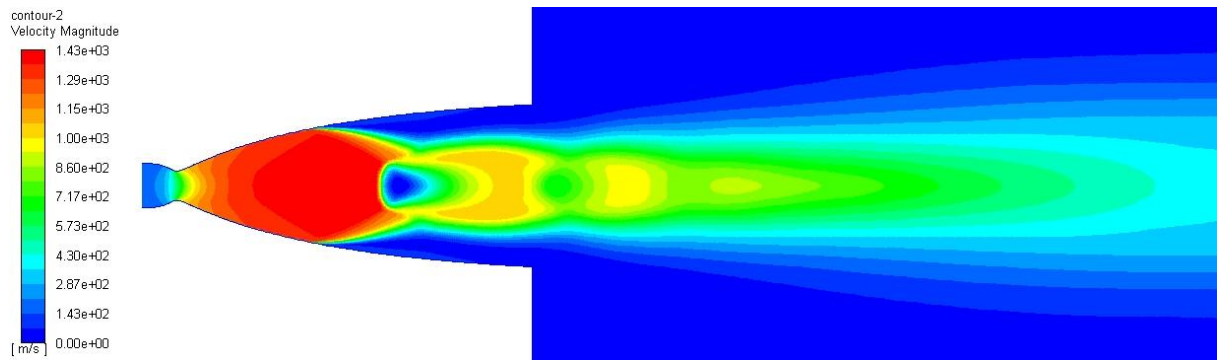


Figure 3.31 contour de vitesse (1200K)

3.8.1.2.2 Graphe comparatif : $Vitesse = f(x)$

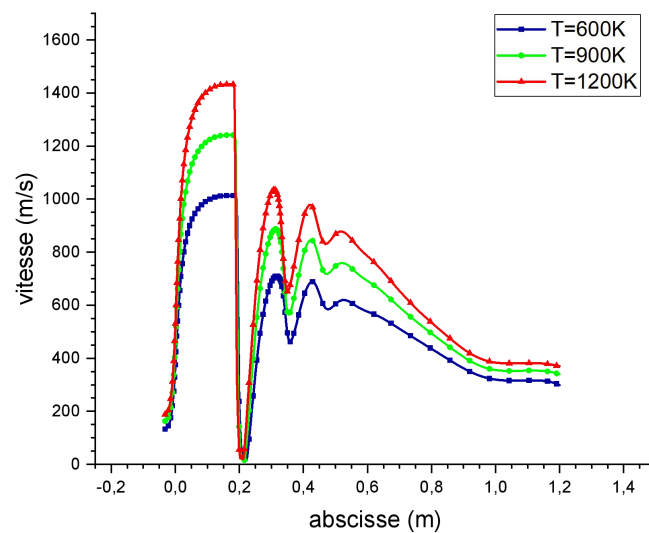


Figure 3.32 champ de vitesse

3.8.1.2.3 Analyse et interprétation

Les résultats montrent que la vitesse augmente significativement avec la température d'entrée, atteignant environ 1010m/s pour 600K, 1240m/s pour 900K et 1430m/s pour 1200K, tout en conservant une structure globale similaire de l'écoulement.

Le graphe comparatif met en évidence des courbes de même forme mais décalées vers des valeurs plus élevées lorsque la température augmente, avec des positions caractéristiques globalement inchangées le long de l'axe x .

Cette augmentation de la vitesse s'explique par l'élévation de la vitesse du son avec la température, ce qui impose une augmentation de la vitesse réelle de l'écoulement afin de conserver un nombre de Mach similaire dans la tuyère.

3.8.2 Analyse des propriétés thermodynamique

3.8.2.1 Interprétation de la pression statique

3.8.2.1.1 Graphe comparatif : (*static pressure* = $f(x)$)

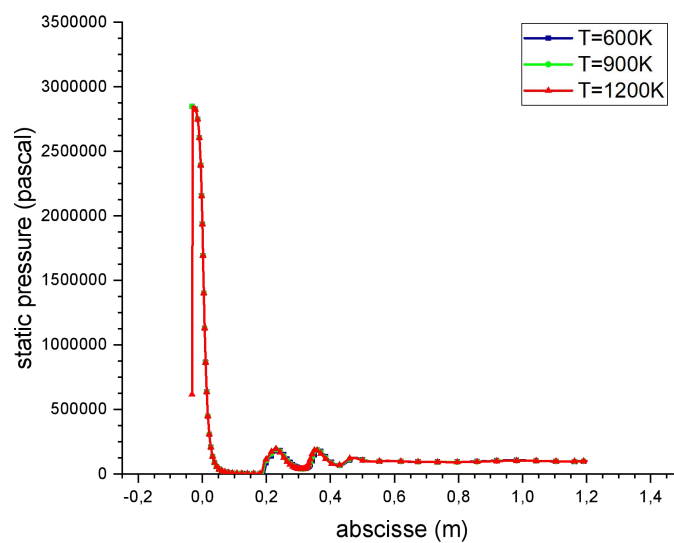


Figure 3.33 profil de la pression statique

3.8.2.1.2 Analyse et interprétation

Les trois courbes correspondant à 600K, 900K K et 1200K sont parfaitement confondues.

La variation de la température d'entrée n'a aucun impact sur la distribution de la pression statique dans la tuyère, celle-ci étant principalement gouvernée par la pression d'entrée P , qui reste fixée à 30bars.

3.8.2.2 Interprétation de la pression dynamique

3.8.2.2.1 Graphe comparatif : (*dynmic pressure* = $f(x)$)

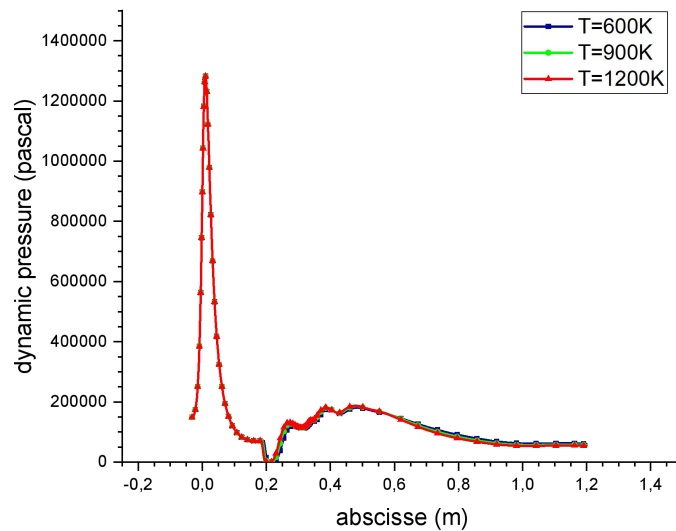


Figure 3.34 profil de la pression dynamique

3.8.2.2.2 Analyse et interprétation

Les courbes de pression dynamique sont également totalement superposées pour les trois températures étudiées.

Bien que la vitesse augmente avec la température, la masse volumique diminue en proportion, ce qui conduit à une compensation des effets et rend la pression dynamique globalement inchangée.

3.8.2.3 3. Interprétation de la température statique

3.8.2.3.1 Graphe comparatif : (*static temperature* = $f(x)$)

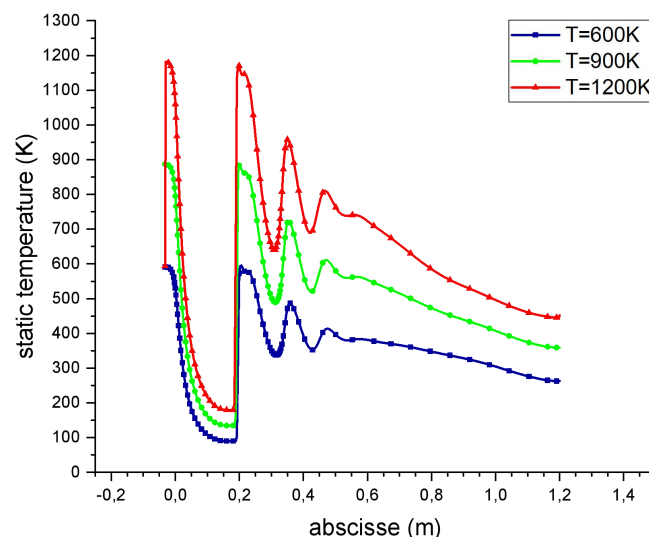


Figure 3.35 profil de la température statique

3.8.2.3.2 Analyse et interprétation

On observe un décalage vertical net entre les courbes. Plus la température d'entrée est élevée, plus le niveau de température reste important tout au long de l'écoulement.

Le profil de refroidissement conserve la même forme pour les trois cas, mais il débute à des niveaux différents (600K, 900K et 1200K). Les sauts de température associés aux ondes de choc apparaissent aux mêmes positions pour tous les cas.

3.8.3 Conclusion

L'analyse de l'influence de la température d'entrée (T) révèle que ce paramètre agit principalement sur la vitesse réelle d'éjection et le niveau thermique interne du fluide, sans modifier la structure aérodynamique de base. Les résultats montrent qu'une augmentation de la température, de 600K à 1200K, accroît de manière significative la vitesse du jet par l'élévation de la célérité du son, tout en conservant un nombre de Mach identique. Par ailleurs, l'insensibilité des profils de pression statique et dynamique aux variations thermiques confirme que, à pression d'entrée constante, la dynamique des ondes de choc reste régie par la géométrie et la pression, tandis que la température d'entrée joue un rôle direct et déterminant sur la performance énergétique du jet.

3.9 Analyse d'un écoulement réactif (mélange $H_2 - air$) :

Cette section présente l'étude numérique de l'écoulement réactif stationnaire au sein de la tuyère supersonique. Les simulations ont été réalisées sous une pression totale d'entrée de 30bar et une température d'entrée globale de 1000K, avec un prémélange stœchiométrique d'hydrogène et d'air (Richesse = 1). Les conditions ambiantes à la sortie du domaine sont fixées à une pression atmosphérique de 1bar et une température de 300K. Pour la fermeture de la turbulence, le modèle standard $k - \varepsilon$ a été utilisé afin de modéliser le comportement de l'écoulement.

3.9.1 Analyse des profils de vitesse et de température.

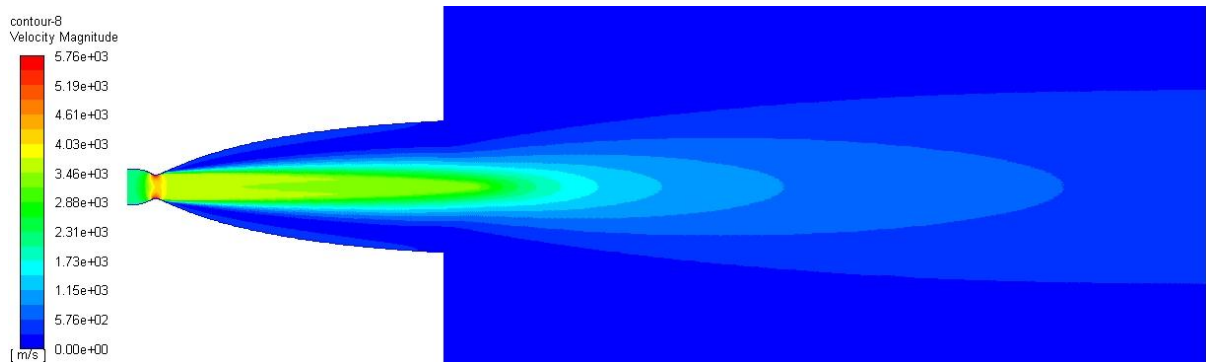


Figure 3.36 Contour de vitesse

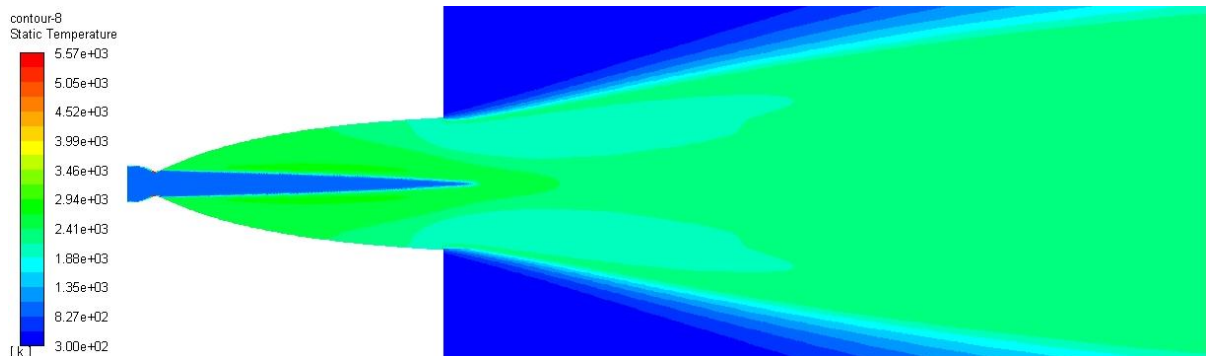


Figure 3.37 Contour de température statique

L'analyse des contours de vitesse et de température montre qu'à la sortie de la tuyère, l'écoulement atteint des vitesses élevées tandis que la température demeure relativement faible. En progressant dans le divergent, on observe une diminution de la vitesse accompagnée d'une augmentation de la température. Cette évolution traduit le développement de la combustion et la libération d'énergie thermique au sein de l'écoulement. L'élévation de température est associée à la réaction chimique du mélange, tandis que la diminution de la vitesse résulte de la modification des caractéristiques de l'écoulement sous l'effet de la combustion.

3.9.2 Analyse des fractions massiques des espèces chimiques

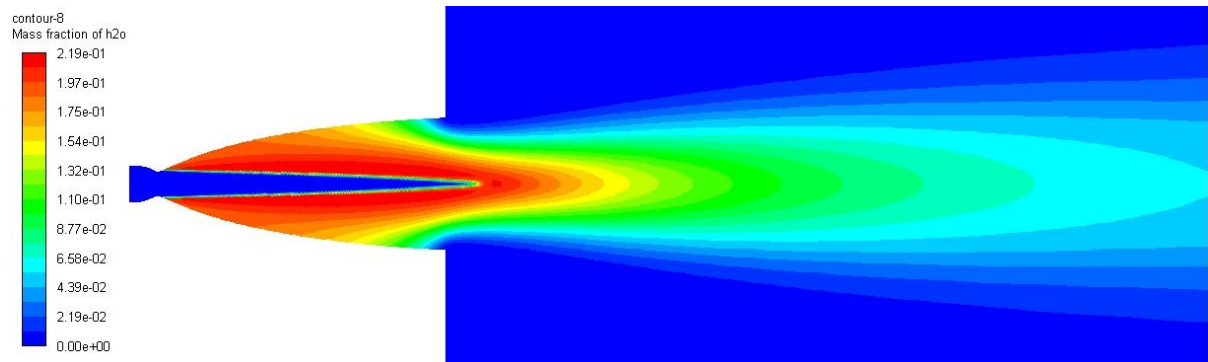


Figure 3.38 La fraction massique de H_2O

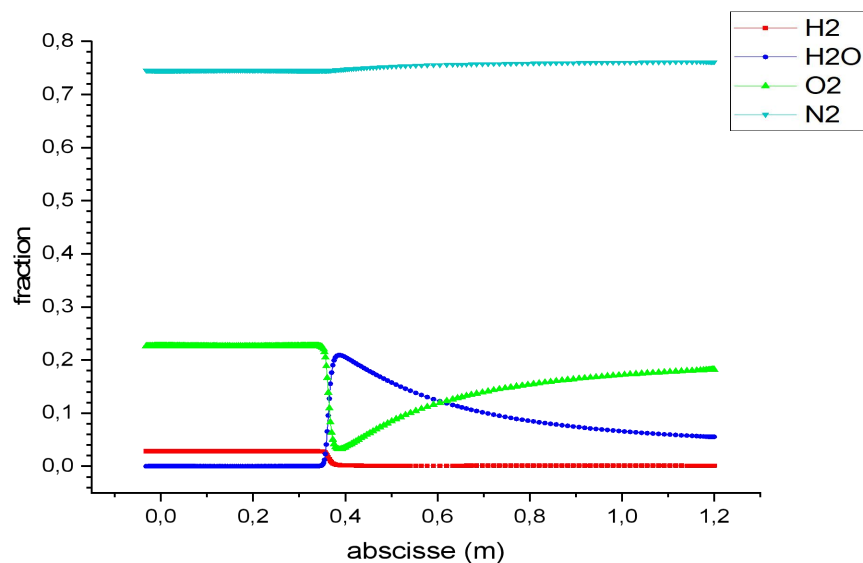


Figure 3.39 profil des fraction massique

Le contour de la fraction massique de H_2O ainsi que l'évolution des fractions massiques des différentes espèces permettent de suivre l'avancement de la combustion. Dans les premières régions de l'écoulement, la fraction massique de H_2O reste faible, indiquant une production limitée des produits de réaction. Plus en aval, la fraction massique de H_2O augmente progressivement tandis que celle de H_2 diminue, traduisant la consommation du combustible et la formation des produits de combustion. Cette évolution confirme le développement progressif de l'activité chimique dans le divergent.

3.9.3 Analyse du nombre de Damköhler

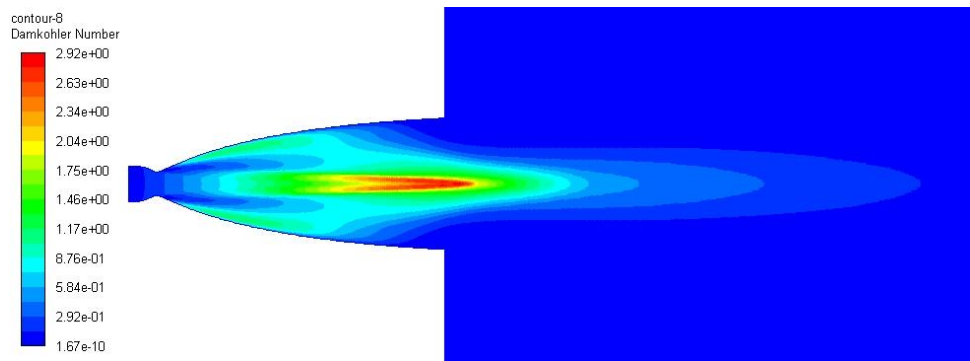


Figure 3.40 contour de nombre de Damkohler

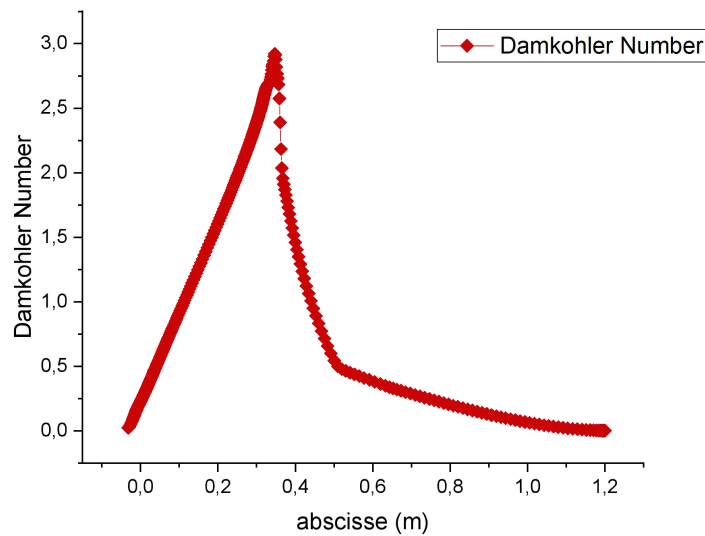


Figure 3.41 profil axial de nombre de Damkohler

L'évolution du nombre de Damköhler met en évidence une augmentation progressive de son intensité dans les régions où la combustion se développe. Les valeurs observées indiquent que les réactions chimiques deviennent de plus en plus influentes par rapport aux phénomènes de transport de l'écoulement. Cette tendance est cohérente avec l'augmentation de la température et la formation des produits de combustion observées précédemment.

3.9.4 Conclusion

Les différents résultats obtenus montrent le développement progressif de la combustion à l'intérieur du divergent. Cette évolution est caractérisée par une augmentation de la température, une diminution de la vitesse d'écoulement, la formation de H_2O ainsi qu'une augmentation du nombre de Damköhler. L'ensemble de ces observations met en évidence l'établissement de la réaction chimique et confirme la cohérence des résultats numériques obtenus.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail de fin d'études a été consacré à l'étude et à la simulation numérique des écoulements turbulents supersoniques au sein d'une tuyère de turboréacteur. L'objectif principal était de comprendre le comportement du fluide face à différentes contraintes physiques, géométriques et opérationnelles en utilisant l'approche RANS.

Pour répondre à cette problématique, notre démarche s'est articulée en trois grandes étapes :

Tout d'abord, une synthèse bibliographique approfondie a permis de fixer le cadre théorique de la dynamique des fluides compressibles, du fonctionnement des tuyères de Laval et de la physique complexe des ondes de choc. Ensuite, la mise en place du cadre méthodologique a consisté à formaliser les équations de Navier-Stokes, les modèles de turbulence et la résolution numérique des équations de transport sur un maillage adapté.

Enfin, la phase de simulation et d'analyse des résultats a mené aux conclusions scientifiques suivantes :

- Choix du modèle : Le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ SST s'est révélé être le plus adapté pour capturer avec précision les profils axiaux et les structures de choc. De plus, l'approche stationnaire a été validée pour la suite de l'étude car elle reproduit fidèlement la physique de l'écoulement tout en réduisant le coût de calcul.
- Effet de la pression : L'augmentation de la pression d'entrée (de 30 à 90 bars) est le facteur déterminant pour la performance. Elle repousse les ondes de choc vers l'aval et augmente l'énergie cinétique globale, ce qui renforce directement la poussée.
- Effet de la température : Elle agit comme un levier énergétique direct. Augmenter la température élève la vitesse réelle d'éjection par la célérité du son (à Mach constant), sans altérer la structure aérodynamique globale.
- Écoulement réactif : L'introduction du mélange hydrogène-air ($H_2 - Air$) a confirmé le développement de la combustion dans le divergent, validé par la hausse de température, la baisse de vitesse, l'apparition de H_2O et la cohérence du nombre de Damköhler.

Références bibliographiques

- [1] Patrice Dubs “étude d’un jet d’azote supercritique utilisé dans un prototype industriel de traitement de surface à faible impact environnemental” ; université “Henri Pointcarré, Nancy1” ; Ecole doctorale d’Energie, Mécanique et Matériaux (EMMA), ED409, 2010.
- [2] Ethirajan Rathakrishnan., “Gas Dynamics” ; “Prentice-Hall of India, New Delhi.2004.
- [3] Jean Délery, “Traité d’aérodynamique compressible”, Volume 2, écoulements Monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité, Lavoisier 2008.
- [4] Andre Lallemend, “Ecoulement monodimensionnel des fluides Compressibles”, Techniques de l’ingénieur Génie énergétique – B 8 165
- [5] Yohann Perrot, “étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible”, Thèse de doctorat, INSA de Rouen 2006.
- [6] Pascal Pempie, “Moteur fusée à ergols liquides”, document CNES DLA/CT 03-194,2007.
- [7] RAO, G.V.R., “Approximation of optimum thrust nozzle contours”. ARS Journal J30(6), page 561, June 1960.
- [8] Bogdan-Alexandru B., 2015, Analysis of Flow in Convergent Divergent Rocket Engine Nozzle Using Computational Fluid,” International Conference of Scientific Paper AFASES 2015 Brasov, 28-30.
- [9] Manuel Frey, “Behandlung von Strömungsproblemen in Raketendüsen bei Überexpansion. PhD thesis”, Université de Stuttgart, Allemagne, 2001.
- [10] GOUIDMI Hamza, “Étude De L’interaction Choc/Choc Des Écoulements Dans Une Tuyère”, UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI,2015.
- [11] Mahfoudi El-Ahcene “ Contribution à l’étude des profils de tuyères en écoulement supersonique visqueux par la méthode des volumes ; ‘Université de Constantine 1’”,2014.
- [12] P. Carriere. “Aérodynamique interne Tuyère et Jets,” deuxième partie. Toulouse Ecole Nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace, 1971
- [13] Philippe REIJASSE., “Aérodynamique des tuyères supersoniques”, ENSAM.2007
- [14] D. Guézengar, J. Francescatto, H. Guillard, J.-P. Dussauge, "Variations on a k-ε turbulence model for supersonic boundary layer computations", Eur. J. Mech. B/Fluids 18 (1999) 713–738.
- [15] Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y., Kreiss H.O., The analysis and modeling of dilatational terms in compressible turbulence, NASA Contractor Report 181959, ICASE Report 89-79, 1989.
- [16] Sarkar S., The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow, J. Fluid Mech. 282 (1995) 163–186.

- [17] ANSYS-FLUENT 12.0 "Tutorial Fluent «Modeling Turbulence, Chapter 12". ANSYS, inc. 2009.
- [18] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Method in applied Mech. and Eng.*, 3:269–289, 1974.
- [19] F.R. Menter. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. AIAA 93-2906, 24th Fluid Dynamics Conference July 6-9, 1993 / Orlando, Florida.
- [20] Cyril Pilinski "Étude numérique du décollement en tuyères supersoniques" thèse de Doctorat de l'INSA de Rouen, 2002.
- [21] S.V. Patankar "Numerical heat transfer and fluid flow". Hemispherepublishing corporation, États-Unis d'Amérique, 1980.
- [22] GOUIDMI Hamza, "Étude De L'interaction Choc/Choc Des Écoulements Dans Une Tuyère", UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI, 2015.
- [23] E. Mahfoudi, A. Gahmousse et K. Talbi, Etude numérique de l'écoulement compressible turbulent dans une tuyère supersonique, *Revue des Energies Renouvelables*, Vol. 16, N°2, pp. 285–296, 2013.