

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Biomathématique

Thème

**Étude mathématique et numérique de l'équation de poisson avec
des conditions mixtes**

Présenté Par :

M BENABI Anes

Devant le jury composé de :

Dr. MECENE Rahmouna	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BOUKHARI Boumadiene	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr. BENKHEDDA Hanane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2025/2026

Remerciements

Je remercie Allah le Tout-Puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement exceptionnel de **Dr.BENKHEDDA Hanane**. Nous lui exprimons notre profonde gratitude pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité tout au long de la préparation de ce mémoire. Grâce à ses précieux conseils et orientations scientifiques, elle nous a permis de développer notre niveau intellectuel et scientifique. Elle a toujours été un exemple de sérieux et de dévouement, semant en nous l'esprit de l'effort et de la persévérance. Que Dieu la récompense en bien et la guide dans sa carrière.

Nous tenons également à exprimer notre sincère gratitude à **Dr. MECENE** et **Dr. BOUKHARI** pour leur soutien précieux et leur aide tout au long de ce travail.

Nous adressons également nos sincères remerciements à tous nos professeurs pour leur générosité et leur grande patience malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Dédicace

*À Allah le Tout-Puissant, qui nous a accordé la force, la patience et la volonté
d'accomplir ce travail.*

*À nos très chers parents,
qui ont tout sacrifié pour nous voir réussir,
dont les prières nous ont portés jusqu'ici,
et dont l'amour restera à jamais notre plus grande force.*

*À nos frères et sœurs, compagnons de vie,
pour leur tendresse, leur soutien et leur confiance en nous.*

*À nos amis, pour les moments partagés
et les encouragements qui nous ont soutenus dans les moments difficiles.*

À tous ceux qui ont cru en nous.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude et à l'approximation numérique des solutions du problème de Poisson, modèle fondamental des équations aux dérivées partielles elliptiques. Dans un premier temps, nous avons établi le cadre théorique en rappelant les formules de Green et en introduisant les espaces de Sobolev, cadre fonctionnel naturel de l'analyse variationnelle. Nous avons ensuite démontré, à l'aide du théorème de Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution faible du problème.

Dans un second temps, nous avons développé une approximation numérique par la méthode des éléments finis sur un maillage triangulaire conforme, en étudiant deux types d'éléments : les éléments P1 (polynômes affines) et les éléments P2 (polynômes quadratiques). Pour chacun, nous avons construit la base canonique des fonctions de forme, établi le problème variationnel discret, et montré que celui-ci se ramène à la résolution d'un système linéaire $AX = b$, où la matrice de rigidité A est symétrique définie positive, donc inversible.

Mots clé : Problème de Poisson ; Équations aux dérivées partielles elliptiques ; Espaces de Sobolev ; Formules de Green ; Théorème de Lax-Milgram ; Éléments finis P1 ; Éléments finis P2 ; Maillage triangulaire ; Matrice de rigidité.

Abstract

This memoir is dedicated to the study and numerical approximation of solutions to the Poisson problem, a fundamental model of elliptic partial differential equations. In a first step, we established the theoretical framework by recalling Green's formulas and introducing Sobolev spaces, the natural functional framework of variational analysis. We then demonstrated, using the Lax-Milgram theorem, the existence and uniqueness of the weak solution of the problem.

In a second step, we developed a numerical approximation using the finite element method on a conforming triangular mesh, studying two types of elements : P1 elements (affine polynomials) and P2 elements (quadratic polynomials). For each, we constructed the canonical basis of shape functions, established the discrete variational problem, and showed that it reduces to solving a linear system $AX = b$, where the stiffness matrix A is symmetric positive definite, hence invertible.

Keywords : Poisson problem ; Elliptic partial differential equations ; Sobolev spaces ; Green's formulas ; Lax-Milgram theorem ; P1 finite elements ; P2 finite elements ; Triangular mesh ; Stiffness matrix.

Table des matières

Introduction	7
1 Outils mathématiques	9
1.1 Équations différentielles	9
1.1.1 Ordre d'une équation différentielle	9
1.1.2 Équation différentielle du premier ordre	9
1.1.3 Équation différentielle d'ordre n	10
1.1.4 Degré d'une équation différentielle	10
1.1.5 Équation différentielle linéaire	10
1.1.6 Équation différentielle linéaire homogène	10
1.1.7 Équation différentielle non homogène	11
1.1.8 Solution d'une équation différentielle	11
1.2 Équation différentielle linéaire Partielle	11
1.2.1 Classification des équations du second ordre	12
1.3 Les Espaces	12
1.3.3 Espace de Banach	13
1.3.4 Espace de Hilbert	14
1.3.5 Espace de Sobolev	14
1.3.6 Formule de Green	15
1.4 Théorème de Lax-Milgram	15
1.5 Formule de quadrature sur un triangle	15
1.6 Conditions aux limites	16
1.6.1 Inégalité de Poincaré	17
2 Étude analytique de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Poisson avec des conditions mixtes	18
3 Méthode des éléments finis pour le problème de Poisson avec des conditions mixtes	29
3.1 Discrétisation par Éléments Finis	32

3.1.1	Conditions de régularité du maillage	32
3.2	Interpolation par Éléments Finis	33
3.2.1	Interpolation P1 sur un triangle	33
3.2.2	Construction de l'interpolant	33
3.2.3	Continuité sur les arêtes	33
3.2.4	Opérateur d'interpolation	34
3.3	Base Canonique et Coordonnées Barycentriques	34
3.3.1	Base Canonique Globale sur le Maillage T_h	36
3.3.2	Structure des fonctions de base ψ_i	38
3.3.3	Approximation variationnelle	38
3.3.4	Approximation variationnelle discrète	38
3.3.5	Inversibilité de la matrice de rigidité A	40
3.3.6	Exemple d'Application	42
3.3.7	Élément fini triangulaire du second ordre $P_2(K)$	49
3.3.8	Base canonique de $P_2(K)$	51
	Conclusion	54
	Bibliographie	55

Introduction

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle fondamental dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques et techniques. Elles constituent un outil essentiel pour décrire le comportement de grandeurs physiques continues dans l'espace et le temps. On les rencontre notamment en électrostatique, en mécanique, en thermique et en ingénierie [2, 3].

Parmi ces équations, l'équation de Poisson et l'équation de Laplace occupent une place centrale dans l'analyse des problèmes elliptiques. Ces équations permettent de modéliser des phénomènes stationnaires, pour lesquels l'état du système ne dépend pas explicitement du temps [3]. L'équation de Poisson est une équation elliptique du second ordre qui s'écrit sous la forme

$$-\Delta v = g \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

où Ω désigne un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ représentant la région physique étudiée, Δ est l'opérateur laplacien, u est la fonction inconnue associée à la grandeur recherchée, et f est un terme source décrivant la présence de sources internes dans le domaine.

Lorsque le terme source est nul, l'équation de Poisson se réduit à l'équation de Laplace

$$\Delta v = 0, \quad (2)$$

dont les solutions sont appelées fonctions harmoniques. Ces solutions sont liées à des situations d'équilibre en l'absence de sources [3].

En électrostatique, l'équation de Poisson apparaît naturellement à partir de la loi de Gauss, qui relie la divergence du déplacement électrique $\mathbf{D}$ à la densité volumique de charge électrique ρ selon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (3)$$

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, le déplacement électrique est relié au champ électrique $\mathbf{E}$ par la relation

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

où ε désigne la permittivité du milieu. Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire

V tel que

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (5)$$

En combinant ces relations, on obtient l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel électrique

$$-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (6)$$

qui se réduit à l'équation de Laplace lorsque la densité de charge est nulle [4].

La résolution de l'équation de Poisson nécessite l'imposition de conditions aux limites sur le bord du domaine Ω . Ces conditions peuvent être de type Dirichlet, Neumann ou mixtes, selon la nature des contraintes physiques imposées [5]. Dans la plupart des situations réelles, la complexité du domaine ou des conditions aux limites rend difficile l'obtention d'une solution analytique explicite.

Ainsi, le recours aux méthodes numériques devient indispensable. Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis est largement utilisée en raison de sa flexibilité et de son efficacité [6]. L'objectif de ce mémoire est donc l'étude numérique de l'équation de Poisson avec des conditions aux limites mixtes, en combinant une analyse théorique et une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis.

Origine physique

L'équation de Poisson avec des conditions aux limites mixtes peut être modélisée par plusieurs phénomènes physiques tels que le potentiel électrique, la température ou la pression. La majorité de ces problèmes est caractérisée par une source distribuée dans un domaine en présence d'interactions multiples et différentes sur ses frontières.

Les conditions mixtes, combinant Dirichlet (valeur imposée) et Neumann (flux imposé), reproduisent la variété des situations réelles. Un exemple est le refroidissement d'une puce électronique. La puce dissipe une puissance thermique constante, alors que ses faces présentent des conditions variées : une face en contact avec un dissipateur thermique (condition de Neumann), tandis que la base de la plaquette est maintenue à une température constante (condition de Dirichlet).

En résumé, cette formulation modélise parfaitement les situations où un système atteint un équilibre sous l'effet des sources internes.

Chapitre 1

Outils mathématiques

1.1 Équations différentielles

Définition 1.1.1. Une équation différentielle est une équation mathématique dans laquelle l'inconnue est une fonction, et où apparaissent une ou plusieurs dérivées de cette fonction. Elle permet de décrire la relation entre une fonction inconnue et ses variations par rapport à ses variables indépendantes.

D'une manière générale, une équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$H(x, s(x), s'(x), s''(x), \dots, s^{(n)}(x)) = 0, \quad (1.1)$$

où $s(x)$ est la fonction inconnue et $s^{(n)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre n .

1.1.1 Ordre d'une équation différentielle

Définition 1.1.2. On définit l'ordre d'une équation différentielle le plus grand ordre de dérivation de la fonction inconnue qui apparaît dans cette équation.

Autrement dit, si une équation différentielle contient une dérivée d'ordre n , alors elle est dite d'ordre n .

1.1.2 Équation différentielle du premier ordre

Définition 1.1.3. Une équation différentielle est dite du premier ordre si la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue qui y apparaît est la dérivée première.

Elle peut s'écrire sous la forme :

$$H(x, s(x), s'(x)) = 0, \quad (1.2)$$

où $s(x)$ est la fonction inconnue et $s'(x)$ sa dérivée première.

1.1.3 Équation différentielle d'ordre n

Définition 1.1.4. Une équation différentielle est dite d'ordre n si la dérivée d'ordre n de la fonction inconnue apparaît dans l'équation et qu'aucune dérivée d'ordre supérieur n'y figure.

Elle s'écrit de manière générale sous la forme :

$$H(x, s(x), s'(x), s''(x), \dots, s^{(n)}(x)) = s^{(n)}(x), \quad (1.3)$$

où $s^{(n)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre n de la fonction inconnue.

1.1.4 Degré d'une équation différentielle

Définition 1.1.5. On définit degré d'une équation différentielle la plus grande puissance de la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation, à condition que l'équation soit polynomiale par rapport aux dérivées.

Autrement dit, le degré correspond à l'exposant de la dérivée d'ordre maximal, après avoir éliminé toute racine, fraction ou fonction non algébrique portant sur les dérivées.

Remarque 1.1.1. Si une équation différentielle n'est pas polynomiale par rapport aux dérivées, par exemple lorsque celles-ci apparaissent sous un logarithme, une racine ou une fonction trigonométrique, alors le degré de l'équation n'est pas défini.

1.1.5 Équation différentielle linéaire

Définition 1.1.6. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On définit une équation différentielle linéaire d'ordre n sur E comme une équation de la forme :

$$b_0(x)s + b_1(x)s' + \dots + b_{n-1}(x)s^{(n-1)} + b_n(x)s^{(n)} = h(x), \quad (1.4)$$

Les coefficients $b_i(x)$ sont des fonctions continues définies sur l'intervalle E , avec h est une fonction donnée sur E représentant le second membre de l'équation.

1.1.6 Équation différentielle linéaire homogène

Définition 1.1.7. Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n se caractérise par une relation reliant une fonction inconnue s à ses dérivées jusqu'à l'ordre n , sous la forme :

$$b_0(x)s + b_1(x)s' + \dots + b_{n-1}(x)s^{(n-1)} + b_n(x)s^{(n)} = 0 \quad (1.5)$$

L'homogénéité provient de l'annulation du second membre.

1.1.7 Équation différentielle non homogène

Définition 1.1.8. *On définit une équation différentielle linéaire non homogène à coefficients constant d'ordre n tout équation de la forme :*

$$b_0 s + b_1 s' + \cdots + b_{n-1} s^{(n-1)} + b_n s^{(n)} = h(x), \quad (1.6)$$

- Les coefficients $b_i(x)$ sont des constantes réelles avec $b_n \neq 0$.
- $h(x)$ est une fonction donnée continue.
- On dit qu'elle est non homogène parce que le second membre n'est pas nul.

1.1.8 Solution d'une équation différentielle

Définition 1.1.9. *Soit l'équation différentielle d'ordre n portant sur une fonction inconnue $s(x)$:*

$$H(x, s, s', s'', \dots, s^{(n)}) = 0, \quad x \in E \subset \mathbb{R} \quad (1.7)$$

On définit solution de cette équation toute fonction $s = \varphi(x)$ définie sur E , possédant au moins n dérivées et vérifiant l'équation pour chaque $x \in E$:

$$H(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.8)$$

Dans le cas d'une équation linéaire non homogène, la solution générale se décompose en :

$$s(x) = s_h(x) + s_p(x), \quad (1.9)$$

1.2 Équation différentielle linéaire Partielle

Définition 1.2.1. *On définit équation différentielle partielle linéaire d'ordre 2 tout équation de la forme :*

$$a(y, z) u_{yy} + b(y, z) u_{yz} + c(y, z) u_{zz} + d(y, z) u_y + g(y, z) u_z = h(y, z),$$

où les fonctions $a(y, z), b(y, z), c(y, z), d(y, z), g(y, z)$ et $h(y, z)$ sont les fonctions données.

L'équation est dite linéaire car l'inconnue u et ses dérivées apparaissent uniquement au premier degré, sans produits entre elles.

1.2.1 Classification des équations du second ordre

La classification repose uniquement sur les coefficients des dérivées secondes

$$a(y, z) u_{yy} + b(y, z) u_{yz} + c(y, z) u_{zz}.$$

On introduit le discriminant

$$\Delta(y, z) = b^2(y, z) - 4a(y, z)c(y, z).$$

On distingue alors :

- *équation elliptique* si $\Delta(y, z) < 0$.
- *équation parabolique* si $\Delta(y, z) = 0$.
- *équation hyperbolique* si $\Delta(y, z) > 0$.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de Poisson $-\Delta u = f$, c'est-à-dire au cas où $a = c = 1$ et $b = 0$. On obtient alors $\Delta = -4 < 0$: il s'agit donc d'une équation elliptique, ce qui justifie l'approche variationnelle développée au chapitre 2 ainsi que le choix de la méthode des éléments finis au chapitre 3.

1.3 Les Espaces

Normes et produits scalaires

Définition 1.3.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

*On définit **norme** sur E toute application :*

$$\|\cdot\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Positivité et séparation :

$$\|x_1\|_E \geq 0 \quad \text{pour tout } x_1 \in E,$$

et

$$\|x_1\|_E = 0 \iff x_1 = 0.$$

2. Homogénéité absolue :

$$\|\lambda x_1\|_E = |\lambda| \|x_1\|_E, \quad \text{pour tout } x_1 \in E \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{K}.$$

3. Inégalité triangulaire :

$$\|x_1 + x_2\|_E \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E, \quad \text{pour tout } x_1, x_2 \in E.$$

le couple $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelé **espace normé**.

Définition 1.3.2. Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel X est une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$$

telle que :

1. Si $x \in X \setminus \{0\}$, alors

$$\langle u, v \rangle > 0.$$

2. pour tous $u, v, w \in X$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle.$$

3. pour tous $u, v \in X$,

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

On définit alors la norme associée par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Nous posons $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel (réel) muni d'un produit scalaire.

1.3.3 Espace de Banach

Définition 1.3.3 (Espace de Banach). [2] Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est appelé espace de Banach s'il est complet.

Plus précisément, une suite $(u_n)_{n \geq 1} \subset X$ est dite suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow \|u_m - u_n\|_X < \varepsilon.$$

L'espace X est dit complet si toute suite de Cauchy $(u_n)_{n \geq 1} \subset X$ converge vers un élément de X , c'est-à-dire qu'il existe $u \in X$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_X = 0.$$

1.3.4 Espace de Hilbert

Définition 1.3.4. Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach dont la norme dérive d'un produit scalaire [8].

Proposition 1.3.1. Soit X un espace préhilbertien. pour tous $u, v \in X$ alors :

$$(a) \quad |(u|v)| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \quad [8],$$

$$(b) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \quad [8].$$

1.3.5 Espace de Sobolev

Définition 1.3.5. Soient $k \geq 1$ et $1 < p < \infty$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \text{pour tous } |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

L'espace de Sobolev $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u | v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u | \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

D'après [8], on définit l'espace $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) = \{u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega) : \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega, u|_{\omega} \in W^{k,p}(\omega)\}.$$

Une suite u_n converge vers u dans $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ si, pour tout $\omega \subset\subset \Omega$,

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(\omega)} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

L'espace $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ est muni de la norme

$$\|(v_\alpha)\|_p = \left(\sum_{\alpha=1}^M \int_{\Omega} |v_\alpha|^p dx \right)^{1/p}.$$

Définition 1.3.6 (définition du support [2]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tels que

pour chaque $i \in I$, $f = 0$ p.p. sur ω_i . On pose $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$.

Alors $f = 0$ p.p. sur ω .

Par définition, $\text{Supp } f = \Omega \setminus \omega$.

Définition 1.3.7 (Divergence d'une suite [1]). Une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ dans un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est dite divergente si elle ne converge vers aucun élément de X . C'est-à-dire :

$$\neg (\exists u \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n - u\|_X < \varepsilon).$$

De manière équivalente, pour tout $u \in X$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ vérifiant

$$\|u_n - u\|_X \geq \varepsilon.$$

1.3.6 Formule de Green

Définition 1.3.8. [2] Une solution classique de ce problème est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$, Une solution faible est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.10)$$

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.4.1. Soit H un espace de Hilbert, $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$ [2], et $L(v)$ une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.11)$$

1.5 Formule de quadrature sur un triangle

Définition 1.5.1. Soit T un triangle de sommets A_1, A_2, A_3 . La formule de quadrature du centre de gravité approche l'intégrale sur T par :

$$\int_T F(x, y) dx dy \approx |T| F(G_T),$$

où $|T|$ est l'aire de T et

$$G_T = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$$

est le centre de gravité.

Une formule plus précise, dite **formule des sommets** [7] (utilisée au Chapitre 3) est :

$$\int_T F(x, y) dx dy \approx \frac{|T|}{3} [F(A_1) + F(A_2) + F(A_3)].$$

1.6 Conditions aux limites

Définition 1.6.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. On définit **condition aux limites** une relation imposée à la solution u (ou à ses dérivées) sur le bord $\partial\Omega$ du domaine.

Ces conditions sont essentielles pour garantir l'unicité et la bonne position du problème aux limites.

1. Condition aux limites de Dirichlet :

La valeur de la solution est imposée sur le bord.

$$u = u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

2. Condition aux limites de Neumann :

La dérivée normale est imposée sur le bord.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

3. Condition mixte :

$$\begin{cases} u = u_0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Définition 1.6.2 (Isométrie / Application isométrique). Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Une application $T : X \rightarrow Y$ est dite isométrique (ou isométrie) si elle préserve les distances, c'est-à-dire :

$$\forall u, v \in X, \quad \|T(u) - T(v)\|_Y = \|u - v\|_X.$$

En particulier, si T est linéaire, cette condition équivaut à :

$$\forall u \in X, \quad \|T(u)\|_Y = \|u\|_X.$$

Une isométrie bijective est appelée isomorphisme isométrique. Deux espaces normés

sont dits isométriquement isomorphes s'il existe un isomorphisme isométrique linéaire entre eux. [2]

1.6.1 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.6.1. Soit $1 \leq p < \infty$. S'il existe une isométrie $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ telle que $A\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1} \times]0, a[$, alors pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ [8],

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{a}{2} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. Soient $1 < p < \infty$ et $v \in \mathcal{D}(]0, a[)$. L'inégalité de Hölder entraîne que, pour $0 < x < a$,

$$|v(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^a |v'(t)| dt \leq \frac{a^{1/p'}}{2} \left| \int_0^a |v'(t)|^p dt \right|^{1/p},$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nous obtenons donc :

$$\int_0^a |v(x)|^p dx \leq \frac{a^{p/p'}}{2^p} a \int_0^a |v'(x)|^p dx = \frac{a^p}{2^p} \int_0^a |v'(x)|^p dx.$$

Nous pouvons supposer que $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times]0, a[$. Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous déduisons de l'inégalité précédente et du théorème de Fubini que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^a |u(x', x_N)|^p dx_N \right) dx' \\ &\leq \frac{a^p}{2^p} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^p dx_N \right) dx' \\ &= \frac{a^p}{2^p} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right|^p dx. \end{aligned}$$

Il est aisé de conclure par densité. Le cas $p = 1$ est analogue.

Chapitre 2

Étude analytique de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Poisson avec des conditions mixtes

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de Poisson muni de conditions aux limites mixtes (1.6). Notre objectif est d'établir l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant le théorème de Lax–Milgram (1.4).

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.
- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue (solution).
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée (terme source ou second membre).
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est l'opérateur de laplacien.
- $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ la frontière du domaine.

On considère u une solution de l'équation de Poisson sur le domaine Ω . Soit $u_0 \in H^1(\Omega)$ un relèvement de la condition de Dirichlet, c'est-à-dire vérifiant $u_0|_{\Gamma_1} = u_D$ (donnée de Dirichlet). On introduit l'espace des fonctions tests

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0 \}. \quad (2.2)$$

ce qui permet de réécrire la condition de Dirichlet non homogène sous la forme équivalente

$$u = u_0 + w, \quad \text{avec } w \in V.$$

Proposition 2.0.1. *V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc V est un espace de Hilbert.*

Montrons que V est un espace de Hilbert. Pour cela, considérons l'application de :

$$\psi : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$$

$$v \longrightarrow \psi(v) = v|_{\Gamma_1}$$

ψ est linéaire et continue. En effet, par continuité de l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|\psi(v)\|_{L^2(\Gamma_1)} = \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par définition, $V = \psi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue ; c'est donc un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, V l'est également.

Formulation variationnelle.

On multiplie l'équation de poisson par une fonction test $v \in V$ c'est à dire : $v = 0$ sur Γ_1

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

par la formule de Green généralisée :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds \quad (2.3)$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds = \int_{\Omega} f v(x) \, dx$$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \left(\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds \right) = \int_{\Omega} f v(x) \, dx$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) ds &= \int_{\Omega} f v(x) dx \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx &= \int_{\Gamma_2} g v(x) ds + \int_{\Omega} f v(x) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

on remplace $u = w + u_0$ dans (2.4) on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(w + u_0) \cdot \nabla v(x) dx &= \int_{\Omega} f v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g v(x) ds \\ \int_{\Omega} (\nabla w + \nabla u_0) \cdot \nabla v(x) dx &= \int_{\Omega} f v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g v(x) ds \\ \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v(x) dx &= - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g v(x) ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} w = u - u_0 & \forall w \in V \\ \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g v(x) ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v(x) dx \end{cases}$$

On en déduit que u est solution de l'équation (2.4) si et seulement si w constitue une solution de l'équation (2.5).

Résolution de la formulation variationnelle.

$$\begin{cases} a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v(x) dx & \forall v \in V \\ L(v) = \int_{\Omega} f v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g v(x) ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v(x) dx & \forall v \in V \end{cases}$$

1. Montrons que la forme $a(w, v)$ est bilinéaire sur l'espace V .

Soient $w_1, w_2 \in V$, $v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$a(w_1 + \alpha w_2, v) = \int_{\Omega} \nabla(w_1 + \alpha w_2) \cdot \nabla v dx.$$

Or, par linéarité du gradient,

$$\nabla(w_1 + \alpha w_2) = \nabla w_1 + \alpha \nabla w_2.$$

Ainsi,

$$a(w_1 + \alpha w_2, v) = \int_{\Omega} (\nabla w_1 + \alpha \nabla w_2) \nabla v \, dx = a(w_1, v) + \alpha a(w_2, v).$$

Donc a est linéaire par rapport à w .

Soient $v_1, v_2 \in V$, $w \in V$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$a(w, v_1 + \beta v_2) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla (v_1 + \beta v_2) \, dx.$$

Or, par linéarité du gradient,

$$\nabla(v_1 + \beta v_2) = \nabla v_1 + \beta \nabla v_2.$$

Ainsi,

$$a(w, v_1 + \beta v_2) = \int_{\Omega} \nabla w (\nabla v_1 + \beta \nabla v_2) \, dx = a(w, v_1) + \beta a(w, v_2).$$

Donc a est linéaire par rapport à v

Par conséquent, la forme a est bilinéaire sur l'espace V .

2. Montrons que la forme bilinéaire a est continue sur V .

Soient $w, v \in V$. On a :

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient :

$$|a(w, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or, la norme dans $H^1(\Omega)$ contrôle la norme du gradient. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que :

$$|a(w, v)| \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi, la forme bilinéaire a est continue sur V .

3. Montrons que la forme $L(v)$ est linéaire. Soient $v_1, v_2 \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$L(v_1 + \alpha v_2) = \int_{\Omega} f(v_1 + \alpha v_2) \, dx + \int_{\Gamma_2} g(v_1 + \alpha v_2) \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla (v_1 + \alpha v_2) \, dx.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
L(v_1 + \alpha v_2) &= \int_{\Omega} f v_1 \, dx + \alpha \int_{\Omega} f v_2 \, dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} g v_1 \, ds + \alpha \int_{\Gamma_2} g v_2 \, ds \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_1 \, dx - \alpha \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_2 \, dx.
\end{aligned}$$

En regroupant les termes :

$$\begin{aligned}
L(v_1 + \alpha v_2) &= \left[\int_{\Omega} f v_1 \, dx + \int_{\Gamma_2} g v_1 \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_1 \, dx \right] \\
&\quad + \alpha \left[\int_{\Omega} f v_2 \, dx + \int_{\Gamma_2} g v_2 \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_2 \, dx \right].
\end{aligned}$$

On reconnaît alors :

$$L(v_1 + \alpha v_2) = L(v_1) + \alpha L(v_2).$$

Donc L est linéaire sur V .

4. Montrons que la forme $L(v)$ est continue sur V .

Soit $v \in V$. On considère la forme linéaire

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx.$$

Posons

$$T_1 = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad T_2 = \int_{\Gamma_2} g v \, ds, \quad T_3 = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx.$$

Alors

$$L(v) = T_1 + T_2 - T_3$$

et par l'inégalité triangulaire

$$|L(v)| \leq |T_1| + |T_2| + |T_3|.$$

Majoration de T_1 .

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$|T_1| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

donc

$$|T_1| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Majoration de T_2 .

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz sur Γ_2 , on a

$$|T_2| = \left| \int_{\Gamma_2} g v \, ds \right| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v\|_{L^2(\Gamma_2)}.$$

D'après le théorème de trace, il existe une constante $C_t > 0$ telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_t \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi

$$|T_2| \leq C_t \|g\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Majoration de T_3 .

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans $L^2(\Omega)^n$, on obtient

$$|T_3| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

donc

$$|T_3| \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

En regroupant les estimations précédentes, on obtient

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C_t \|g\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$|L(v)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_t \|g\|_{L^2(\Gamma_2)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|L(v)| \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in V.$$

Ainsi, la forme linéaire L est continue sur V .

5. Montrons que $a(w, v)$ est coercive.

Soit $v \in V$. On a :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C_P > 0$ telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}.$$

Donc la norme H^1 devient équivalente à la norme du gradient :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C_P^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2.$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2.$$

Donc :

$$a(v, v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \geq \frac{1}{C} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

On pose $\alpha = \frac{1}{C} > 0$.

On obtient alors :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ainsi, la forme bilinéaire a est coercive sur V .

Le théorème de Lax–Milgram permet d'affirmer que le problème variationnel admet une unique solution $w \in V$ vérifiant :

$$a(w, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Équivalence avec le problème différentiel

Proposition 2.0.2. *L'espace $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions test, c'est-à-dire des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω . Ces fonctions s'annulent au voisinage du bord, ce qui permet d'appliquer la formule de Green sans termes de bord.*

preuve. Montrons que si $w \in V$ est solution de la formulation variationnelle, alors $u = w + u_0$ est solution du problème aux limites associé.

Cas 1 :

— $v \in D(\Omega)$.

On suppose que $w, u_0 \in H^2(\Omega)$. La formulation variationnelle s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par la formule de Green appliquée à w et u_0 , on a respectivement :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta w v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v \, ds &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx, \\ - \int_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n} v \, ds &= \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

En partant de la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx,$$

et en remplaçant chacune des deux intégrales de gradients par son expression issue de la formule de Green ci-dessus, il vient :

$$\left(- \int_{\Omega} \Delta w v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v \, ds \right) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds - \left(- \int_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n} v \, ds \right).$$

Comme $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ est à support compact dans Ω , on a $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi tous les termes de bord s'annulent et il reste :

$$- \int_{\Omega} \Delta w v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx,$$

soit, en regroupant :

$$- \int_{\Omega} (\Delta w + \Delta u_0 - f) v \, dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit :

$$-\Delta w - \Delta u_0 = f \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Or $u = w + u_0$, donc $\Delta u = \Delta w + \Delta u_0$, d'où :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega.$$

De plus, comme $w \in V$, on a $w|_{\Gamma_1} = 0$, donc $u|_{\Gamma_1} = u_0$. et par conséquent

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = u_0 \end{cases}$$

— $w, u_0 \notin H^2(\Omega)$.

Dans ce cas, les fonctions w et u_0 ne possèdent pas nécessairement des dérivées secondes au sens classique. Par conséquent, l'application directe de la formule de Green n'est plus justifiée. Pour surmonter cette difficulté, on introduit les champs vectoriels

$$\sigma = \nabla w, \quad \sigma_0 = \nabla u_0.$$

À partir de la formulation faible, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in D(\Omega).$$

En utilisant la relation

$$\nabla w \cdot \nabla v = \sigma \cdot \nabla v$$

on écrit

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds - \int_{\Omega} \sigma_0 \cdot \nabla v \, dx.$$

On applique maintenant la formule de divergence

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n) v \, ds.$$

Mais puisque

$$v \in D(\Omega)$$

alors $v = 0$ sur le bord, et par conséquent les termes de bord disparaissent, d'où

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma_0) v \, dx.$$

Ainsi

$$-\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + \operatorname{div} \sigma_0 + f)v \, dx = 0 \quad \forall v \in D(\Omega).$$

On déduit

$$-\operatorname{div} \sigma - \operatorname{div} \sigma_0 = f \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Or

$$\sigma = \nabla w, \quad \sigma_0 = \nabla u_0$$

et on a l'identité classique

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u.$$

Donc

$$-\Delta w - \Delta u_0 = f.$$

Puisque

$$u = w + u_0$$

on obtient

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega.$$

De plus, comme $w \in V$, on a

$$w|_{\Gamma_1} = 0 \Rightarrow u|_{\Gamma_1} = u_0.$$

et par conséquent

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Cas 2 : $v \notin D(\Omega)$.

Sous les hypothèses de régularité du domaine Ω (frontière lipschitzienne, C^2 par morceaux ou polygonale convexe) et des données $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, la théorie de la régularité elliptique [7] assure que la solution faible $w \in V$ du problème variationnel appartient en fait à $H^2(\Omega)$. Par conséquent, la démonstration du Cas 1 ci-dessus s'applique directement, et l'équivalence avec le problème aux limites, y compris la condition

de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ_2 , est complètement établie.

Par conséquent, la fonction u vérifie le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Forme énergétique

Dans ce contexte, la forme bilinéaire $a(w, v)$ définie précédemment est linéaire, continue et coercive sur l'espace V . Par conséquent, les hypothèses du théorème de Lax–Milgram sont satisfaites, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

De plus, la solution peut être caractérisée comme le minimum d'une fonctionnelle d'énergie définie sur V .

Plus précisément, on considère la fonctionnelle $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v), \quad \forall v \in V.$$

Ainsi, la solution u vérifie la propriété de minimisation suivante :

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

En utilisant l'expression des formes $a(w, v)$ et $L(v)$, on obtient :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_2} g v ds.$$

Chapitre 3

Méthode des éléments finis pour le problème de Poisson avec des conditions mixtes

La méthode des éléments finis (FEM) est une méthode numérique utilisée pour résoudre de manière approchée les équations aux dérivées partielles, en particulier lorsque la solution exacte est difficile à déterminer ou lorsque le domaine est de forme complexe. Le principe de cette méthode repose sur la discrétisation du domaine Ω en un nombre fini de sous-domaines appelés éléments (triangles, quadrilatères, etc.). La solution cherchée est ensuite approximée par une combinaison linéaire de fonctions de base définies sur ces éléments.

Ainsi, le problème continu est transformé en un problème discret équivalent, qui conduit à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$AU = F$$

où A est la matrice de rigidité, U le vecteur des inconnues, et F le second membre.

Cette méthode est basée sur la formulation variationnelle et la méthode de Galerkin. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'application de cette méthode au problème de Poisson.

Position du problème

On considère un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de frontière Γ , que l'on décompose en deux parties disjointes :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

On considère alors le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée,
- u_0 est la condition de Dirichlet sur Γ_1 ,
- g est la condition de Neumann sur Γ_2 ,
- $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée normale sortante.

Remarque 3.0.1. Afin de traiter des conditions aux limites non homogènes, on introduit une fonction de relèvement $u_0 \in H^1(\Omega)$ vérifiant les conditions imposées sur le bord. On pose :

$$w = u - u_0$$

Transformation de l'équation On considère le problème :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

En remplaçant $u = w + u_0$, on obtient :

$$-\Delta(w + u_0) = f$$

Par linéarité du Laplacien :

$$-\Delta w - \Delta u_0 = f$$

Donc :

$$-\Delta w = f + \Delta u_0$$

On pose :

$$F = f + \Delta u_0$$

Conditions aux limites

- Sur Γ_1 (Dirichlet) :

$$u = u_0 \Rightarrow w = 0$$

- Sur Γ_2 (Neumann) :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g$$

Comme $u = w + u_0$, on a :

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial u_0}{\partial n} = g$$

Donc :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = g - \frac{\partial u_0}{\partial n}$$

On pose :

$$g_1 = g - \frac{\partial u_0}{\partial n}$$

Problème équivalent

$$\begin{cases} -\Delta w = F & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = g_1 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. On choisit $u \in H^1(\Omega)$. Supposons de plus que $g \in L^2(\Gamma_2)$.

problème Donc le problème (3.1) est équivalent à la formulation variationnelle (avec v fonction test).

On multiplie l'équation $-\Delta u = f$ par une fonction test $v \in V$, puis en intégrant sur le domaine Ω , on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

En appliquant la formule de Green, on transforme le terme en dérivée seconde afin de réduire l'ordre des dérivées. Il vient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Compte tenu de la décomposition du bord $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, on traite séparément les contributions :

sur Γ_1 , la condition de Dirichlet implique que $v = 0$, d'où l'annulation du terme de bord ;

sur Γ_2 , la condition de Neumann impose :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

Ainsi, le terme de bord se réduit à :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Gamma_2} g v \, ds.$$

On obtient finalement la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds, \quad \forall v \in V.$$

3.1 Discretisation par Éléments Finis

Définition 3.1.1 (Maillage triangulaire). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal borné [7]. On appelle maillage triangulaire de Ω toute famille finie $\mathcal{T}_h = \{T_b\}_{1 \leq b \leq N_T}$ de triangles fermés telle que :

$$\Omega = \bigcup_{b=1}^{N_T} T_b,$$

et telle que, pour tous $b, b' \in \{1, \dots, N_T\}$ avec $b \neq b'$:

$$\overset{\circ}{T}_b \cap \overset{\circ}{T}_{b'} = \emptyset.$$

On note N_T le nombre de triangles, et A_i ($1 \leq i \leq N_S$) les nœuds (sommets) du maillage, où N_S est le nombre total de sommets.

Le pas du maillage h est défini par :

$$h = \max_{1 \leq b \leq N_T} \text{diam}(T_b), \quad \text{avec} \quad \text{diam}(T_b) = \sup_{x, y \in T_b} |x - y|.$$

3.1.1 Conditions de régularité du maillage

Pour garantir la qualité de l'approximation, le maillage $\mathcal{T}_h$ doit satisfaire les conditions suivantes :

1. **Non-dégénérescence** Pour tout $b \in \{1, \dots, N_T\}$, les sommets A_1^b, A_2^b, A_3^b du triangle T_b ne sont pas alignés. Cela équivaut à :

$$\det \left(\overrightarrow{A_1^b A_2^b}, \overrightarrow{A_1^b A_3^b} \right) = \det \begin{pmatrix} x_2^b - x_1^b & x_3^b - x_1^b \\ y_2^b - y_1^b & y_3^b - y_1^b \end{pmatrix} \neq 0,$$

où $A_i^b = (x_i^b, y_i^b)$. Géométriquement, cette condition signifie qu'aucun triangle n'est aplati (son aire est non nulle).

2. **Conformité** Pour tous $b, b' \in \{1, \dots, N_T\}$ avec $b \neq b'$, l'intersection $T_b \cap T_{b'}$ est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune entière. En particulier, aucun nœud d'un triangle n'appartient à l'intérieur d'une arête d'un triangle voisin.

3.2 Interpolation par Éléments Finis

3.2.1 Interpolation P1 sur un triangle

Soit $T \in \mathcal{T}_h$ un triangle de sommets $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, on approxime la solution sur cet élément par une fonction affine de type P_1 :

$$u(x, y) = Ax + By + C, \quad \forall (x, y) \in T. \quad (3.3)$$

On note v_1, v_2, v_3 les valeurs de u aux sommets A_1, A_2, A_3 [7].

3.2.2 Construction de l'interpolant

On impose :

$$u(A_i) = v_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = v_1 \\ Ax_2 + By_2 + C = v_2 \\ Ax_3 + By_3 + C = v_3 \end{cases} \quad \text{avec } A_i = (x_i, y_i). \quad (3.5)$$

Ce système admet une solution unique si :

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (3.6)$$

Cela signifie que les points A_1, A_2, A_3 ne sont pas colinéaires.

3.2.3 Continuité sur les arêtes

Soit A_2A_3 une arête commune à deux triangles voisins, portée par une droite $y = ax + b$.

La restriction de u sur cette arête est :

$$u|_{A_2A_3}(x) = Ax + B(ax + b) + C = (A + Ba)x + (Bb + C). \quad (3.7)$$

Cette expression dépend uniquement des valeurs en A_2 et A_3 , donc la continuité est assurée.

3.2.4 Opérateur d'interpolation

Définition 3.2.1. Soit $u \in C^0(\bar{\Omega})$. On définit $I_h(u) \in V_h$ par :

$$I_h(u)(A_i) = u(A_i), \quad i = 1, \dots, N_S, \quad (3.8)$$

et

$$I_h(u)|_{T_b} \in P_1(T_b), \quad b = 1, \dots, N_T. \quad (3.9)$$

3.3 Base Canonique et Coordonnées Barycentriques

Définition 3.3.1 (Espace P_1 sur un triangle). [7] Soit $T \in \mathcal{T}_h$ un triangle. On définit l'espace des polynômes affines sur T par :

$$P_1(T) = \{v : T \rightarrow \mathbb{R} \mid v(x, y) = Ax + By + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie aisément que :

$$\dim P_1(T) = 3.$$

Définition 3.3.2. On appelle **fonctions de forme** (ou **coordonnées barycentriques**) les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P_1(T)$ définies par la condition de Kronecker :

$$\lambda_i(A_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.10)$$

Propriétés des λ_i

Valeurs aux sommets :

$$\lambda_1(A_1) = 1, \quad \lambda_1(A_2) = \lambda_1(A_3) = 0$$

$$\lambda_2(A_2) = 1, \quad \lambda_2(A_1) = \lambda_2(A_3) = 0$$

$$\lambda_3(A_3) = 1, \quad \lambda_3(A_1) = \lambda_3(A_2) = 0$$

Valeurs sur les arêtes :

$$\text{Sur } A_2A_3 : \lambda_1 = 0 \quad \text{Sur } A_1A_3 : \lambda_2 = 0 \quad \text{Sur } A_1A_2 : \lambda_3 = 0$$

Positivité :

$$\forall M \in T : \lambda_i(M) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Partition de l'unité :

$$\lambda_1(M) + \lambda_2(M) + \lambda_3(M) = 1, \quad \forall M \in T. \quad (3.11)$$

Les fonctions λ_i sont appelées fonctions de forme ou coordonnées barycentriques du triangle T .

Théorème 3.3.1. *La famille $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ constitue une base de $P_1(T)$.*

preuve. *On montre successivement que la famille est libre puis génératrice.*

1. Liberté

Supposons qu'il existe $(\alpha_i)_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i = 0 \quad \text{dans } P_1(T).$$

En évaluant cette relation en chaque sommet A_j , $j = 1, 2, 3$, et en utilisant la condition (3.10) :

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i(A_j) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = 0.$$

On obtient $\alpha_j = 0$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. La famille $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ est donc libre.

2. Génératrice

Soit $v \in P_1(T)$ quelconque. On pose :

$$w = v - \sum_{i=1}^3 v(A_i) \lambda_i.$$

La fonction w est une combinaison linéaire de fonctions affines, donc $w \in P_1(T)$.

En évaluant w en chaque sommet A_j :

$$w(A_j) = v(A_j) - \sum_{i=1}^3 v(A_i) \lambda_i(A_j) = v(A_j) - \sum_{i=1}^3 v(A_i) \delta_{ij} = v(A_j) - v(A_j) = 0.$$

Ainsi $w \in P_1(T)$ s'annule en trois points non alignés A_1, A_2, A_3 . Or une fonction affine qui s'annule en trois points non alignés est identiquement nulle, donc :

$$w \equiv 0 \quad \text{sur } T.$$

On conclut que :

$$v = \sum_{i=1}^3 v(A_i) \lambda_i$$

La famille $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ est donc génératrice de $P_1(T)$.

La famille $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ est à la fois libre et génératrice de $P_1(T)$, donc elle constitue une base de $P_1(T)$.

Il s'ensuit que :

$$\dim P_1(T) = 3.$$

Corollaire 3.3.1 (Décomposition dans la base canonique locale). *Toute fonction $v \in P_1(T)$ admet la décomposition unique :*

$$\forall v \in P_1(T) : \quad v = \sum_{i=1}^3 v(A_i) \lambda_i \quad (3.12)$$

preuve. Soit $v \in P_1(T)$. En posant $\beta_i = v(A_i)$, on vérifie que la fonction

$$w = v - \sum_{i=1}^3 \beta_i \lambda_i \in P_1(T)$$

s'annule en chaque sommet A_j :

$$w(A_j) = v(A_j) - \sum_{i=1}^3 \beta_i \lambda_i(A_j) = \beta_j - \sum_{i=1}^3 \beta_i \delta_{ij} = \beta_j - \beta_j = 0.$$

Une fonction affine s'annulant en trois points non alignés est identiquement nulle, donc $w \equiv 0$, d'où :

$$v = \sum_{i=1}^3 v(A_i) \lambda_i$$

3.3.1 Base Canonique Globale sur le Maillage T_h

Rappelons que l'espace d'approximation est :

$$V_h = \left\{ \hat{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{v} \in C^0(\bar{\Omega}), \hat{v}|_{T_b} \in P_1(T_b), b = 1, \dots, N_T \right\}$$

Puisque

$$\dim P_1(\omega) = N_S,$$

on a :

$$\dim V_h = N_S \quad (3.13)$$

De même, on définit :

$$\tilde{V}_h = \left\{ \hat{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \hat{v}|_{T_b} \in P_1(T_b), \hat{v}|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

dont la dimension est égale au nombre de nœuds intérieurs de $\mathcal{T}_h$:

$$\dim \tilde{V}_h = N'_S \quad (3.14)$$

Définition 3.3.3 (Fonctions de base globales). *Soit $(\psi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ la famille de fonctions de $\tilde{V}_h$ définie par :*

$$\psi_i \in \tilde{V}_h \quad \text{et} \quad \psi_i(A_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, N_S\}^2. \quad (3.15)$$

Théorème 3.3.2. *La famille $(\psi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ est une base de $\tilde{V}_h$.*

preuve.

Liberté. *Supposons qu'il existe $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N_S} \in \mathbb{R}^{N_S}$ tels que :*

$$\sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \psi_i = 0 \quad \text{dans } \tilde{V}_h. \quad (3.16)$$

En évaluant cette relation en chaque nœud A_j , $j = 1, \dots, N_S$, et en utilisant la condition (3.15) $\varphi_i(A_j) = \delta_{ij}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \psi_i(A_j) = \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = 0. \quad (3.17)$$

Donc $\alpha_j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N_S$, ce qui montre que la famille (ψ_i) est libre.

La famille $(\psi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ est libre et contient exactement

$$\dim \tilde{V}_h = N_S$$

éléments. D'après un résultat classique d'algèbre linéaire, toute famille libre ayant un nombre d'éléments égal à la dimension de l'espace est une base.

On conclut donc que $(\psi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ est une base de $\tilde{V}_h$.

3.3.2 Structure des fonctions de base ψ_i

Proposition 3.3.1. (*Propriétés locales des fonctions de base*). Les fonctions de base globales $(\psi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ vérifient les propriétés suivantes :

1. **Restriction locale** : Sur chaque triangle T_b , la restriction de ψ_i est un polynôme affine :

$$\psi_i|_{T_b} \in P_1(T_b), \quad \text{et} \quad \psi_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j.$$

2. **Support local** : Le support de ψ_i est constitué uniquement des triangles ayant A_i comme sommet :

$$\text{supp}(\psi_i) = \bigcup_{\substack{b=1 \\ A_i \in T_b}}^{N_T} T_b.$$

En dehors de ces triangles, on a :

$$\psi_i \equiv 0.$$

3. **Localisation** : Plus le maillage $\mathcal{T}_h$ est fin, plus le support de ψ_i est petit et localisé autour du nœud A_i .

Remarque 3.3.1. Cette propriété de support local est fondamentale elle garantit que la matrice de rigidité assemblée est creuse (sparse), ce qui rend la résolution numérique efficace.

3.3.3 Approximation variationnelle

Rappel — Problème continu. On cherche $u \in V$ tel que :

$$(PC) \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_2} g v, \quad \forall v \in V. \right. \quad (3.18)$$

avec :

$$V = H_{\Gamma_1}^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0 \}.$$

3.3.4 Approximation variationnelle discrète

Espace d'approximation $\tilde{V}_h$

On définit l'espace d'approximation de dimension finie :

$$\tilde{V}_h = \{ \tilde{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{v} \in C^0(\bar{\Omega}), \tilde{v}|_{T_b} \in P_1(T_b), \tilde{v}|_{\Gamma_1} = 0 \} \quad (3.19)$$

avec

$$\dim \tilde{V}_h = N'_S < +\infty,$$

où N'_S désigne le nombre de nœuds intérieurs du maillage.

Remarque 3.3.2. *L'espace $\tilde{V}_h$ est un sous-espace de dimension finie de $V = H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$. En effet, toute fonction $\tilde{v} \in \tilde{V}_h$ est continue sur $\overline{\Omega}$, affine par morceaux, donc $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ (ses dérivées au sens des distributions sont constantes par morceaux), et $\tilde{v}|_{\Gamma_1} = 0$ par construction. Ainsi $\tilde{V}_h \subset V$.*

Base canonique de $\tilde{V}_h$

Soit $(\psi_j)_{j=1,\dots,N'_S}$ la base canonique de $\tilde{V}_h$ définie par :

$$\psi_j(A_i) = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, N'_S\}^2.$$

Toute fonction $\hat{u} \in \tilde{V}_h$ se décompose de manière unique comme :

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{N'_S} \tilde{u}_j \varphi_j \quad (3.20)$$

Problème variationnel discret ($P\tilde{V}_h$)

On cherche $\hat{u} \in \tilde{V}_h$ tel que :

$$(P\tilde{V}_h) \left\{ \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla \tilde{v} = \int_{\Omega} f \tilde{v} + \int_{\Gamma_2} g \tilde{v}, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}_h. \right. \quad (3.21)$$

Formulation matricielle du problème discret

En substituant (3.18) dans (3.19) et en prenant $\tilde{v} = \psi_i$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N'_S} \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \right) \hat{u}_j = \int_{\Omega} f \psi_i + \int_{\Gamma_2} g \psi_i, \quad i = 1, \dots, N'_S \quad (3.22)$$

On pose alors :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \quad (3.23)$$

$$b_i = \int_{\Omega} f \psi_i + \int_{\Gamma_2} g \psi_i \quad (3.24)$$

Le problème (3.19) est alors équivalent au système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{N'_S} A_{ij} \hat{u}_j = b_i, \quad i = 1, \dots, N'_S \quad (3.25)$$

En posant :

$$X = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N'_S})^T,$$

ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$AX = b \quad (3.26)$$

où $A = (A_{ij})$ est la matrice de rigidité et $b = (b_i)$ le vecteur second membre.

Remarque 3.3.3. La résolution du problème variationnel discret se ramène à la résolution du système linéaire :

$$AX = b \quad (3.27)$$

qui peut être résolu par des méthodes numériques telles que la **décomposition de Cholesky** ou la **décomposition LU**. Il reste à montrer que la matrice A est inversible, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution discrète $\hat{u}$.

3.3.5 Inversibilité de la matrice de rigidité A

Proposition 3.3.2 (Propriétés de la matrice A). La matrice de rigidité $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N'_S}$ définie par :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dx$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. **Symétrie** : $A_{ij} = A_{ji}$, i.e., A est une matrice symétrique.
2. **Définie positive** : $(AX, X) \geq 0$, $\forall X = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N'_S})^T \in \mathbb{R}^{N'_S}$.

preuve. (i) **Symétrie.** Par commutativité du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dx = \int_{\Omega} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, dx = A_{ji}.$$

(ii) **Définie positive.** Soit $X = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N'_S})^T \in \mathbb{R}^{N'_S}$. On calcule :

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{N'_S} \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dx \right) \hat{u}_j.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
(AX, X) &= \sum_{1 \leq i, j \leq N'_S} \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dx \right) \hat{u}_i \hat{u}_j \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq N'_S} \int_{\Omega} \nabla(\hat{u}_i \psi_i) \cdot \nabla(\hat{u}_j \psi_j) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq N'_S} \nabla(\hat{u}_i \psi_i) \cdot \nabla(\hat{u}_j \psi_j) \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} \, dx \\
&= \int_{\Omega} \|\nabla \hat{u}\|^2 \, dx \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

La forme est donc positive.

preuve. Supposons que :

$$(AX, X) = 0.$$

D'après (3.28) :

$$\int_{\Omega} \|\nabla \hat{u}\|^2 dx = 0 \Rightarrow \nabla \hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u} = \text{constante sur } \Omega.$$

Or $\hat{u} \in \tilde{V}_h$ vérifie $\hat{u}|_{\Gamma_1} = 0$, donc :

$$\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}_i = 0, \forall i \Rightarrow X = 0.$$

Ainsi :

$$(AX, X) = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Donc A est définie positive.

Théorème 3.3.3 (Inversibilité de A). *La matrice de rigidité A est inversible.*

preuve. D'après (3.3.2), A est symétrique définie positive. Par définition, cela signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^{N_s}, \quad (AX, X) \geq \alpha \|X\|^2$$

Montrons que $\ker A = \{0\}$: Soit $X \in \mathbb{R}^{N_s}$ tel que $AX = 0$. Alors :

$$(AX, X) = 0$$

Or, d'après l'inégalité ci-dessus :

$$\alpha \|X\|^2 \geq 0$$

Donc $\alpha \|X\|^2 = 0$, et comme $\alpha > 0$, on en déduit $\|X\| = 0$, soit $X = 0$. Par conséquent,

$$\ker(A) = \{0\}.$$

ce qui signifie que A est **injective**. Puisque A est une matrice carrée, injectivité équivaut à bijectivité, donc A est **invertible**

Corollaire 3.3.2. Le système linéaire $AX = b$ admet une solution unique

$$X = A^{-1}b,$$

ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution discrète $\hat{u} \in \tilde{V}_h$.

3.3.6 Exemple d'Application

Cadre géométrique.

On considère le domaine rectangulaire :

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

On subdivise Ω uniformément en β sous-intervalles dans chaque direction, avec un pas uniforme :

$$h = \frac{1}{\beta}$$

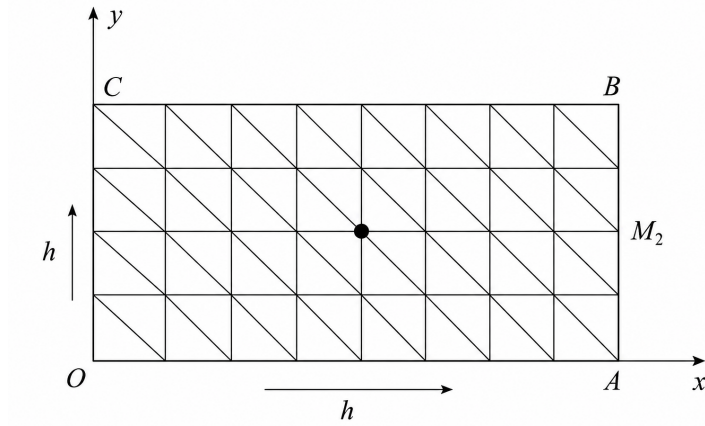
Chaque rectangle obtenu est découpé en deux triangles, ce qui donne un maillage triangulaire uniforme $\mathcal{T}_h$.

Problème continu (PC). On cherche $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$(PC) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0 & \text{(Dirichlet),} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = g & \text{(Neumann).} \end{cases}$$

Espace d'approximation.

$$\tilde{V}_h = \{ \tilde{v} \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \tilde{v}|_{T_b} \in P_1(T_b), \tilde{v}|_{\Gamma_1} = 0 \}.$$

FIGURE 3.1 – Maillage triangulaire régulier de Ω .

Problème variationnel discret ($P\tilde{V}_h$). On cherche $\hat{u} \in \tilde{V}_h$ tel que :

$$(P\tilde{V}_h) \quad \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, dx = \int_{\Omega} f \tilde{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} g \tilde{v} \, d\sigma, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}_h.$$

Système linéaire. Ce problème est équivalent à

$$AX = b$$

avec

$$A_{ij} = \int_{\text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, d\Omega \quad (3.29)$$

et

$$b_i = \int_{\Omega} f \psi_i \, dx + \int_{\Gamma_2} g \psi_i \, d\sigma \quad (3.30)$$

Approximation des intégrales

$$\int_{T_b} F(x, y) \, dx \, dy \approx \text{aire}(T_b) \frac{F(A_1) + F(A_2) + F(A_3)}{3} \quad (3.31)$$

Cette formule de quadrature numérique [7] permet d'approcher l'intégrale d'une fonction sur chaque triangle à partir de ses valeurs aux sommets.

Cas 1 : ψ_i est la Fonction Caractéristique d'un Nœud Structural Intérieur à Ω

Soit M_0 un nœud intérieur entouré de 6 triangles (numérotés 1 à 6), comme illustré ci-dessous :

On applique la correspondance locale-globale :

$$\psi_i \longleftrightarrow \psi_0, \quad A_{ij} \longrightarrow A_{0j}, \quad b_i \longrightarrow b_0$$

2. Équation au Nœud M_0

L'équation nodale associée au nœud M_0 s'écrit :

$$\sum_{j=0}^6 A_{0j} \hat{u}_j = b_0$$

Les coefficients à calculer sont :

$$A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}, \underbrace{A_{05} = A_{04}}_{\text{symétrie}}, \underbrace{A_{06} = A_{03}}_{\text{symétrie}}$$

3. Calcul du Coefficient Diagonal A_{00}

Soit M_0 un nœud intérieur au domaine Ω , entouré de 6 triangles élémentaires

$$T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{45}, T_{56}, T_{61}$$

de pas h uniforme.

Le coefficient diagonal de la matrice de rigidité est défini par :

$$A_{00} = \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 d\Omega$$

Puisque $\text{supp}(\psi_0)$ est l'union des 6 triangles adjacents à M_0 , on décompose :

$$A_{00} = \int_{T_{12}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{23}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{34}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{45}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{56}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{61}} |\nabla \psi_0|^2 dT$$

Propriétés Clés du Maillage Triangulaire Uniforme

Sur un maillage triangulaire régulier de pas h , deux propriétés fondamentales sont utilisées :

Propriété 1 : Le gradient de toute fonction de base ψ_i est constant sur chaque triangle élémentaire T_k , donc :

$$\int_{T_k} |\nabla \psi_0|^2 dT = \left| \nabla \psi_0|_{T_k} \right|^2 \times \text{aire}(T_k)$$

Propriété 2 : L'aire de chaque triangle de pas h est :

$$\text{aire}(T_k) = \frac{h^2}{2}$$

Calcul des Gradients sur Chaque Triangle

Les gradients de ψ_0 sont déterminés à partir des coordonnées barycentriques locales sur chaque triangle :

Triangle	$\nabla\psi_0$	$ \nabla\psi_0 ^2$
T_{12}	$\left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right)$	$\frac{2}{h^2}$
T_{23}	$\left(0, -\frac{1}{h}\right)$	$\frac{1}{h^2}$
T_{34}	$\left(\frac{1}{h}, 0\right)$	$\frac{1}{h^2}$
T_{45}	$\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right)$	$\frac{2}{h^2}$
T_{56}	$\left(0, \frac{1}{h}\right)$	$\frac{1}{h^2}$
T_{61}	$\left(-\frac{1}{h}, 0\right)$	$\frac{1}{h^2}$

Calcul Intégral Triangle par Triangle

En appliquant la Propriété 1 et la Propriété 2 sur chaque triangle :

$$\int_{T_{12}} |\nabla\psi_0|^2 dT = \frac{2}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = 1$$

$$\int_{T_{23}} |\nabla\psi_0|^2 dT = \frac{1}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{T_{34}} |\nabla\psi_0|^2 dT = \frac{1}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{T_{45}} |\nabla\psi_0|^2 dT = \frac{2}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = 1$$

$$\int_{T_{56}} |\nabla\psi_0|^2 dT = \frac{1}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{T_{61}} |\nabla\psi_0|^2 dT = \frac{1}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Résultat Final

En sommant les contributions de tous les triangles :

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{h^2}{2} \left[\frac{2}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right] \\
 &= \frac{h^2}{2} \times \frac{8}{h^2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A_{00} = 4}$$

Calcul des Coefficients Extra-Diagonaux

Coefficient A_{01}

$$A_{01} = \int_{\text{supp } \psi_0 \cap \text{supp } \psi_1} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 d\Omega = \int_{T_{12}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 dT + \int_{T_{61}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 dT$$

Les gradients sur chaque triangle sont :

Triangle	$\nabla \psi_1$
T_{12}	$\left(\frac{1}{h}, 0\right)$
T_{61}	$\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right)$

En calculant les produits scalaires :

$$\int_{T_{12}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 dT = \left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right) \cdot \left(\frac{1}{h}, 0\right) \times \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{T_{61}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1 dT = \left(-\frac{1}{h}, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right) \times \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{h^2} \times \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_{01} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$\boxed{A_{01} = -1}$$

Coefficient A_{02}

$$A_{02} = \int_{\text{supp } \psi_0 \cap \text{supp } \psi_2} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_2 d\Omega = \int_{T_{12}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_2 dT + \int_{T_{23}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_2 dT$$

En calculant les produits scalaires :

$$\int_{T_{12}} = \left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right) \cdot \left(0, \frac{1}{h}\right) \times \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{T_{23}} = \left(0, -\frac{1}{h}\right) \cdot \left(0, \frac{1}{h}\right) \times \frac{h^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_{02} = -1$$

$$\boxed{A_{02} = -1}$$

Coefficient A_{03}

$$A_{03} = \int_{T_{23}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_3 dT + \int_{T_{34}} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_3 dT$$

Les gradients de ψ_3 sur chaque triangle :

Triangle	$\nabla \psi_3$
T_{23}	$\left(-\frac{1}{h}, 0\right)$
T_{34}	$\left(0, \frac{1}{h}\right)$

$$\int_{T_{23}} = \left(0, -\frac{1}{h}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h}, 0\right) \times \frac{h^2}{2} = 0$$

$$\int_{T_{34}} = \left(\frac{1}{h}, 0\right) \cdot \left(0, \frac{1}{h}\right) \times \frac{h^2}{2} = 0$$

$$A_{03} = \frac{h^2}{2}[0 + 0] = 0$$

$$\boxed{A_{03} = 0}$$

Par symétrie :

$$A_{06} = A_{03} = 0$$

Équation Nodale Finale — Nœud Intérieur

En rassemblant tous les coefficients calculés :

$$\sum_{j=0}^6 A_{0j} \hat{u}_j = b_0$$

$$4\hat{u}_0 - \hat{u}_1 - \hat{u}_2 - \hat{u}_4 - \hat{u}_5 = b_0 = \int_{\Omega} f \psi_0 d\Omega + \int_{\Gamma_2} g \psi_0 d\Gamma$$

Par la formule de quadrature du centre de gravité sur les 6 triangles :

$$b_0 \approx 6 \times \frac{h^2}{2} \times \frac{1}{3} f(M_0) = f(M_0) h^2$$

(en supposant f constante ou approximée par sa valeur nodale $f(M_0)$ sur le support de ψ_0).

L'équation nodale s'écrit donc :

$$4\hat{u}_0 - \hat{u}_1 - \hat{u}_2 - \hat{u}_4 - \hat{u}_5 = f(M_0) h^2,$$

ce qui, en divisant par h^2 et en réarrangeant, s'écrit de façon équivalente :

$$\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_4 + \hat{u}_5 - 4\hat{u}_0}{h^2} = -f(M_0).$$

On retrouve ainsi, au signe près imposé par la formulation variationnelle de $-\Delta u = f$, le schéma standard du Laplacien discret centré sur un maillage uniforme. Cette cohérence structurelle illustre la pertinence de l'approximation par éléments finis P_1 pour la discrétisation de l'opérateur de Laplace sur des géométries régulières.

Cas 2 : Nœud M_0 sur le bord de Neumann Γ_2

On considère maintenant le cas où le nœud M_0 est situé sur le bord $\Gamma_2 = OA$. L'équation nodale s'écrit :

$$\sum_{j=0}^4 A_{0j} \hat{u}_j = b_0 = \int_{\Omega} f \psi_0 d\Omega + \int_{\Gamma_2} g \psi_0 d\sigma.$$

Calcul des coefficients de rigidité.

Coefficient diagonal : Le coefficient diagonal se calcule sur les triangles adjacents au

bord :

$$A_{00} = \int_{T_{12}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{61}} |\nabla \psi_0|^2 dT + \int_{T_{34}} |\nabla \psi_0|^2 dT = \frac{h^2}{2} \left[\frac{2}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right] = 2.$$

Coefficients hors-diagonaux :

$$A_{01} = -\frac{1}{2}, \quad A_{02} = -1, \quad A_{03} = 0, \quad A_{04} = -\frac{1}{2}.$$

Calcul du second membre b_0 . Par la formule de quadrature des sommets sur les triangles adjacents :

$$\int_{\Omega} f \psi_0 d\Omega \approx \frac{h^2}{2} \times \frac{1}{3} \times 3f(M_0) = \frac{fh^2}{2}.$$

Pour le terme de bord, le nœud M_0 étant situé à l'intérieur du segment $\Gamma_2 = OA$ (c'est-à-dire non aux extrémités O et A), il possède deux arêtes adjacentes portées par Γ_2 . Par la formule de quadrature sur chacune de ces arêtes :

$$\int_{\Gamma_2} g \psi_0 d\sigma \approx \frac{h}{2} g(M_0) + \frac{h}{2} g(M_0) = h g(M_0),$$

car $\psi_0 = 1$ en M_0 et $\psi_0 = 0$ aux extrémités opposées de chacune des deux arêtes.

Équation nodale finale. En substituant tous les coefficients, l'équation nodale s'écrit :

$$2\hat{u}_0 - \frac{1}{2}\hat{u}_1 - \hat{u}_2 - \frac{1}{2}\hat{u}_4 = \frac{fh^2}{2} + h g(M_0).$$

Remarque 3.3.4. Cette équation est la restriction au nœud $M_0 \in \Gamma_2$ de la formulation variationnelle discrète $(P\tilde{V}_h)$. Le terme $h g(M_0)$ provient de la forme linéaire $L(\psi_0)$ et traduit, au niveau discret, la contribution de la donnée de Neumann g sur Γ_2 dans la formulation faible. Il ne s'agit pas d'une discrétisation directe de la condition $\frac{\partial u}{\partial n} = g$, mais bien de la conséquence, au nœud de bord, de l'approximation variationnelle du problème complet.

3.3.7 Élément fini triangulaire du second ordre $P_2(K)$

Définition 3.3.4. On considère un triangle $K = (A_1, A_2, A_3)$ muni de 6 degrés de liberté :

$$\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}\}$$

où A_{12}, A_{13}, A_{23} désignent les milieux des arêtes. L'espace d'approximation associé est :

$$P_2(K) = \{u(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F\}$$

[7]

Montrons que les 6 valeurs nodales d'une fonction $u \in P_2(K)$ définissent u de manière unique.

Construction de la base canonique de $P_2(K)$ On cherche les fonctions de base $\psi_i \in P_2(K)$ associées aux 6 nœuds, vérifiant :

$$\psi_i(A_j) = \delta_{ij}$$

Ces fonctions s'expriment à l'aide des coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du triangle K .

Fonctions de base aux sommets Pour le sommet A_1 : on cherche $\varphi_1 \in P_2(K)$ telle que $\varphi_1(A_1) = 1$ et $\varphi_1 = 0$ aux 5 autres nœuds.

On pose

$$\psi_1 = \alpha \lambda_1(\lambda_1 - \beta)$$

En évaluant en A_1 où $\lambda_1 = 1$:

$$\psi_1(A_1) = \alpha \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$$

D'où les trois fonctions de base aux sommets :

$$\psi_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \quad \psi_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1), \quad \psi_3 = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$$

Fonctions de base aux milieux des arêtes Pour le nœud milieu A_{12} (milieu de $[A_1A_2]$) : en ce point

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 0$$

On pose

$$\psi_{12} = \alpha \lambda_1 \lambda_2$$

En évaluant en A_{12} :

$$\psi_{12}(A_{12}) = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4$$

D'où les trois fonctions de base aux milieux :

$$\psi_{12} = 4\lambda_1\lambda_2, \quad \psi_{13} = 4\lambda_1\lambda_3, \quad \psi_{23} = 4\lambda_2\lambda_3$$

3.3.8 Base canonique de $P_2(K)$

Théorème 3.3.4. *La famille $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23})$ constitue une base de $P_2(K)$.*

preuve. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}) \in \mathbb{R}^6$ tels que

$$\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \alpha_3\psi_3 + \alpha_{12}\psi_{12} + \alpha_{13}\psi_{13} + \alpha_{23}\psi_{23} = 0 \quad \text{dans } P_2(K).$$

C'est-à-dire :

$$\forall M \in K, \quad \alpha_1\psi_1(M) + \alpha_2\psi_2(M) + \alpha_3\psi_3(M) + \alpha_{12}\psi_{12}(M) + \alpha_{13}\psi_{13}(M) + \alpha_{23}\psi_{23}(M) = 0.$$

Évaluation aux sommets : en $M = A_i$, $i = 1, 2, 3$.

Par définition $\psi_i(A_j) = \delta_{ij}$, donc :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Évaluation aux milieux des arêtes : en $M = A_{\beta\ell}$, $(\beta, \ell) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

L'équation se réduit à

$$\alpha_{\beta\ell}\psi_{\beta\ell}(A_{\beta\ell}) = 0.$$

Or $\psi_{\beta\ell}(A_{\beta\ell}) = 1$, donc :

$$\alpha_{\beta\ell} = 0.$$

Tous les coefficients sont nuls, donc la famille est libre. Comme $\dim P_2(K) = 6$ et que cette famille contient 6 fonctions, elle constitue bien une base de $P_2(K)$.

Décomposition dans la base canonique

Pour tout $u \in P_2(K)$, on peut écrire :

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i + u_{12} \psi_{12} + u_{13} \psi_{13} + u_{23} \psi_{23}$$

où u_i et $u_{\beta\ell}$ sont les valeurs nodales.

En tout point $M \in K$:

$$u(M) = \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i(M) + u_{12} \psi_{12}(M) + u_{13} \psi_{13}(M) + u_{23} \psi_{23}(M)$$

En évaluant en $M = A_j$:

$$u_j = u(A_j)$$

et en $M = A_{\beta\ell}$:

$$u_{\beta\ell} = u(A_{\beta\ell})$$

On a donc, pour tout $u \in P_2(K)$ et tout $M \in K$:

$$u(M) = u(A_1) \psi_1(M) + u(A_2) \psi_2(M) + u(A_3) \varphi_3(M) + u(A_{12}) \psi_{12}(M) + u(A_{13}) \psi_{13}(M) + u(A_{23}) \psi_{23}(M)$$

ce qui confirme que les 6 valeurs nodales déterminent u de manière unique dans $P_2(K)$.

Conformité de l'élément $P_2(K)$ — Continuité aux interfaces

Soit $f = [A_2, A_3]$ une arête du triangle K . On cherche à montrer que l'élément $P_2(K)$ est conforme, c'est-à-dire que les fonctions de $P_2(K)$ se raccordent continûment à travers les interfaces entre éléments voisins.

On montre que

$$\Sigma_f = \{A_2, A_{23}, A_3\}$$

constitue un ensemble de degrés de liberté suffisant pour assurer cette continuité.

Restriction à l'arête $f = [A_2, A_3]$.

Sur l'arête $f \equiv [A_2, A_3]$, l'espace d'approximation se restreint à

$$P_f = \{u = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F\}.$$

Or sur f , on a la relation affine $y = ax + \beta$, ce qui permet de substituer et d'obtenir

$$P_f = \{u = A'x^2 + B'x + C'\},$$

c'est-à-dire un polynôme de degré 2 en une variable, qui dépend de 3 paramètres (A', B', C') .

Unicité de la restriction.

Or ces 3 paramètres (A', B', C') sont déterminés de manière unique en fonction des valeurs de u aux trois nœuds de l'arête :

$$A_2, \quad A_{23}, \quad A_3.$$

Ainsi, deux éléments K_1 et K_2 partageant l'arête $f = [A_2, A_3]$ auront la même restriction sur f dès lors qu'ils coïncident en ces 3 nœuds, ce qui garantit la continuité de u à travers l'interface.

Ainsi, l'élément $P_2(K)$ est conforme la continuité inter-éléments est assurée par les

seules valeurs nodales aux sommets et aux milieux des arêtes partagées [7].

Conclusion

Au terme de ce travail, nous avons entrepris une étude approfondie des équations de Poisson soumises à diverses conditions aux limites — de Dirichlet, de Neumann et mixtes — en nous appuyant sur un cadre théorique rigoureux et des outils numériques éprouvés.

Sur le plan théorique, l'existence et l'unicité des solutions ont été établies dans le cadre de la formulation variationnelle, en exploitant de manière essentielle le théorème de Lax-Milgram. Ce résultat constitue le socle sur lequel repose toute l'analyse numérique ultérieure.

Sur le plan numérique, la méthode des éléments finis s'est révélée particulièrement adaptée à la résolution de ces problèmes aux limites en dimensions 1 et 2. Le principe fondamental de cette approche consiste à approcher l'espace de Hilbert V par un sous-espace de dimension finie $\tilde{V}_h$, construit à partir de fonctions de base judicieusement choisies. Cette discrétisation transforme le problème variationnel continu en un système algébrique linéaire $AX = b$, où la matrice de rigidité A encode les interactions entre les fonctions de base. Sous des hypothèses de régularité et de convergence appropriées, la solution discrète $\hat{u}$ converge vers la solution exacte u , ce qui garantit la fiabilité de l'approximation numérique.

Dans ce mémoire, notre attention s'est principalement portée sur l'étude théorique des formulations variationnelles et sur l'assemblage du système linéaire $AX = b$. En raison des contraintes de temps liées à la réalisation de ce mémoire, la mise en œuvre informatique, la résolution effective du système ainsi que l'obtention et l'analyse des résultats numériques n'ont pas pu être développées. La résolution effective de ce système, ainsi que la visualisation et l'analyse quantitative des résultats numériques — comparaisons avec des solutions analytiques, étude de la convergence en fonction du pas h — constituent des prolongements naturels et prometteurs de ce travail.

Ces perspectives ouvrent également la voie à l'extension de la méthode à des géométries plus complexes ou à des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Bibliographie

- [1] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de mathématiques – Analyse 2*, Dunod, Paris, 1995.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2013.
- [3] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 2010.
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1998.
- [5] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, 1968.
- [6] A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of PDEs*, Springer, 1994.
- [7] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer, New York, 2000.
- [8] M. Willem, *Analyse Fonctionnelle élémentaire* Barnéoud, France, 2003.