

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique Appliquées

Thème

Théorème de Girsanov et Applications

Présenté Par :

Melle.Slimani fatima zahra

Devant le jury composé de :

Mr. Mami Tawfik Fawzi	Pr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mme. Mecene Rahmouna	Dr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Mme. Messabihi Aicha	Dr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2024/2025

Résumé:

Ce mémoire étudie le théorème de Girsanov et ses applications aux processus stochastiques, notamment le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U) et les processus d'Itô-Lévy. Après une introduction aux bases des probabilités et du calcul stochastique (mouvement brownien, martingales, intégrale d'Itô), le travail détaille le théorème de Girsanov, qui permet de modifier la mesure de probabilité pour éliminer ou ajuster la dérive d'un processus. Les applications montrent comment ce théorème transforme la dynamique du processus O-U (retour à la moyenne) et des processus à sauts (Itô-Lévy), avec des simulations numériques en R. Les résultats soulignent son importance en finance quantitative, notamment pour la tarification d'options et la gestion des risques.

Abstract:

This thesis explores Girsanov's Theorem and its applications in stochastic processes, focusing on the Ornstein-Uhlenbeck (O-U) process and Itô-Lévy processes. The study begins with foundational concepts of stochastic processes, including Brownian motion, martingales, and Itô calculus. It then rigorously presents Girsanov's Theorem, which allows changing the probability measure to transform a stochastic process with drift into a driftless one (or vice versa). The applications demonstrate how Girsanov's Theorem simplifies the analysis of O-U processes (used in finance and physics) and Itô-Lévy processes (incorporating jumps). Simulations in R illustrate the theoretical results, highlighting the theorem's utility in financial modeling and risk-neutral pricing.

ملخص:

هذا البحث يدرس مبرهنة جيرسانوف وتطبيقاتها على العمليات العشوائية، وخاصة عملية أورنشتاين-أولنبيك وعمليات إيتو-ليفي. بعد تقديم لمبادئ الاحتمالات والحساب العشوائي (الحركة البراونية، المارتينجالات، تكامل إيتو)، يتناول العمل بالتفصيل مبرهنة جيرسانوف، التي تتيح تغيير قياس الاحتمال من أجل إزالة أو تعديل الانحراف (الانجراف) في عملية معينة. وتُظهر التطبيقات كيف تُحوّل هذه المبرهنة ديناميكية عملية أورنشتاين-أولنبيك (العودة إلى المتوسط) والعمليات ذات القفزات (إيتو-ليفي)، مع محاكاة عددية بلغة البرمجة وتؤكد النتائج على أهمية هذه المبرهنة في المالية الكمية، خصوصاً في تسعير الخيارات وإدارة المخاطر.

Remerciements

Je rends grâce à Allah pour sa bienveillance, pour la force, la santé et la patience qu'il m'a accordées tout au long de ce travail sans sa volonté, rien n'aurait été possible.

À mes parents, mes premiers soutiens, pour vos encouragements, vos sacrifices et votre confiance en moi, sans vous, je n'aurais jamais pu mener ce projet à bien.

*Un merci profond à **Mme. Messabihi Aicha**, mon encadrante pour ses précieux conseils, sa disponibilité et saguidance, qui ont éclairée chaque étape de ce mémoire.*

*À l'ensemble du jury **Mr.Mami Fawzi Tawfiq** et **Mme. Mecene Rahmouna**, je vous exprime ma sincère gratitude pour le temps accordé, l'attention portée à ce travail, et l'honneur que vous me faites en l'évaluant.*

À mes enseignants, merci pour vos connaissances partagées, votre patience et votre engagement.

Dédicace

À mon père, pilier inébranlable de ma vie, dont les sacrifices silencieux ont bâti chacune des marches de mon parcours. Sans lui, je ne serais pas ce qui je suis aujourd'hui.

À ma mère, lumière de mon âme, dont l'amour inconditionnel m'a portée, protégée et guidée, même au cœur des plus sombres tempêtes.

À Kawther, Merieme et Imad, mes frères et sœurs, ma joie et ma force

À mes enseignants, pour leur savoir et leur patience

Et à la fin

Je dédie une pensée solidaire Au peuple palestinien, en quête de paix et de justice,

Puissent vos luttes trouvées un écho dans nos consciences.

Slimani Fatima Zahra

Notations et symboles

- $\mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur $[0, T]$ qui admettent une dérivée continue
- $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$: Espace des fonctions qui ont des dérivées partielles premières et secondes continues.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: Tribu borélienne sur \mathbb{R}^d .
- $\mathbf{1}_A(x)$: Fonction indicatrice de l'ensemble A , définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- \mathcal{E}_t : Ensemble des fonctions mesurables.
- $\mathbb{L}^1([0, T])$: Espaces des fonctions mesurables et intégrables .
- $\mathbb{L}^2([0, T])$: Espaces des fonctions mesurables et de carré intégrables .
- $\mathbb{L}^2(\nu)$: Espaces des fonctions ν mesurables et de carré intégrables .
- $\mathbb{L}^2(\mu)$: Espaces des fonctions μ mesurables et de carré intégrables .
- $\mathbb{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^+)$: Ensemble des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^+ de carré intégrable sur tout intervalle fini $[0, T]$.
- \mathbb{M}^2 : Espace des processus adaptés et càdlàg .
- \mathbb{P} -p.s. : Presque sûrement pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .
- EDS : Équation différentielle stochastique.
- i.e. : C'est-à-dire.
- $dt d\nu$: Mesure produit de la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mesure ν .
- \ll : Absolument continue ($\nu \ll \mu$) cela signifie que la mesure ν est absolument continue par rapport à μ
- càdlàg : Fonction continue à droite et admettant une limite à gauche.

- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$: Espérance sous la mesure \mathbb{P} .
- A^c : Complémentaire de l'ensemble A .
- $\langle X \rangle_t$: Variation quadratique (ou crochet stochastique) du processus X .
- \mathcal{W}_H^n : Espace de processus adaptés, souvent \mathbb{L}^2 par rapport à la mesure de Wiener.

Table des matières

Introduction	12
1 Processus Stochastique	14
1.1 Probabilités	14
1.1.1 Espace de probabilité	14
1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à un événement	16
1.1.3 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu	16
1.1.4 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire	16
1.2 Processus stochastique	17
1.2.1 Filtration et adaptation	18
1.2.2 Processus Gaussiens	19
1.2.3 Mouvement Brownien	20
1.2.4 Variation quadratique du mouvement brownien standard	22
1.2.5 Martingales	23
1.2.6 Temps d'arrêt	24

2	Intégration Stochastique	25
2.1	Intégrale de Wiener	25
2.1.1	Construction d'intégrale de Wiener	25
2.1.2	Processus liés à l'intégrale de Wiener	26
2.1.3	Intégration par parties	28
2.2	Intégrale stochastique d'Itô	28
2.2.1	Propriétés de l'intégrale d'Itô	28
2.2.2	Processus d'Itô	29
2.2.3	Intégrale par rapport à un processus d'Ito	29
2.2.4	Formule d'Itô	30
2.2.5	Formule d'intégration par parties	30
2.3	Equations différentielles stochastiques	31
2.3.1	Existence et unicité des solutions d'EDS	31
3	Théorèmes de Girsanov	32
3.1	Changement de Probabilité	32
3.1.1	Théorème de Radon-Nikodym	32
3.1.2	Formule de Cameron-Martin	35
3.2	Théorèmes de Girsanov	36
4	Application du théorème de Girsanov	40
4.1	Processus d'Orenstein-Uhlenbeck	40
4.2	Processus d'Ito-Lévy	47

4.3	Comparaison des applications des théorèmes de Girsanov I et II sur les processus d'Ornstien-Uhlenbeck et d'Itô-Lévy	53
	Conclusion	56
	Annexes	61

Table des figures

1.1	Représentation graphique d'un processus stochastique	18
1.2	Représentation graphique d'un mouvement brownien	21
2.1	Représentation graphique d'intégrale de wiener	27
4.1	Représentation graphique du processus Ornstein Uhlenbeck avec $\mu = 0, \sigma = 1, \theta = 2$	41
4.2	Représentation graphique de l'application de théorème de girsanov I sur Processus O-U	42
4.3	Représentation graphique de l'application de théorème de girsanov II sur Processus O-U	46
4.4	Représentation graphique de Processus ITO-LEVY	49
4.5	Représentation graphique de l'application de théorme de girsanov I sur Processus ITO-LEVY	50
4.6	Représentation graphique de l'application de théorème de girsanov II sur Processus ITO-LEVY	52

Liste des tableaux

4.1	Comparaison entre l'application des théorèmes de Girsanov I et II au processus d'Ornstein-Uhlenbeck	47
4.2	Comparaison entre l'application des théorèmes de Girsanov I et II au processus d'Itô-Lévy	53
4.3	Comparaison entre l'application du théorème de Girsanov I au processus d'Ornstein-Uhlenbeck et au processus d'Itô-Lévy	54
4.4	Comparaison entre l'application du théorème de Girsanov II au processus d'Ornstein-Uhlenbeck et au processus d'Itô-Lévy	55

Introduction

Le théorème de Girsanov est un résultat fondamental du calcul stochastique et de la finance mathématique. Il fournit un cadre mathématique permettant de transformer un processus stochastique sous une mesure de probabilité en un processus équivalent sous une autre mesure de probabilité. Ce théorème est étroitement lié au théorème de représentation de martingale, qui permet d'exprimer un processus stochastique sous la forme d'une intégrale stochastique par rapport à une certaine martingale sous la mesure de probabilité modifiée.

Cette représentation est essentielle pour l'évaluation des produits dérivés et la construction de stratégies de trading optimales. Le théorème implique également la construction d'une dérivée de Radon-Nikodym, également appelée densité de Girsanov ou noyau de Girsanov. Cette dérivée spécifie la transformation entre la mesure de probabilité initiale et la nouvelle. Elle quantifie les ajustements nécessaires pour tenir compte du changement de mesure de probabilité et du terme de dérive associé. Par exemple, en modélisation financière, on parvient à dériver la mesure de neutralité au risque. Cette mesure est une mesure de probabilité artificielle selon laquelle les rendements attendus des actifs risqués sont ajustés pour être sans risque. Elle simplifie la tarification et la valorisation des produits dérivés en supposant une opportunité d'investissement sans risque ainsi le théorème de Girsanov joue un rôle crucial en finance quantitative, permettant la modélisation et la valorisation des produits dérivés dans le cadre d'une mesure de neutralité au risque. Il facilite l'analyse de la dynamique des marchés financiers et la construction de stratégies de trading optimales dans les modèles à temps continu.

Le présent mémoire est consacré à l'étude approfondie du théorème de Girsanov et à ses principales applications. Il est structuré en quatre chapitres.

Le premier présente des notions de base des processus stochastiques, en particulier les martingales et les principales classes de processus qui seront utilisées par la suite.

Le deuxième chapitre portera sur l'intégration stochastique, l'intégrale de Wiener et plus particulièrement sur l'intégrale d'Itô. nous en exposerons les principales propriétés, en insistant sur la formule d'Itô et son importance dans la résolution des équations différentielles stochastiques.

Le troisième et le quatrième chapitre seront consacré respectivement au théorème de Girsanov et applications. Nous en présenterons une formulation rigoureuse, accompagnée de la démonstration, puis nous étudierons plusieurs applications. En particulier, nous mettrons en évidence l'utilité du théorème dans l'analyse du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ainsi que des processus d'Itô-Lévy.

Chapitre 1

Processus Stochastique

Nous exposons dans ce chapitre les notions probabilistes de base qui serviront de fondement à notre étude.

1.1 Probabilités

1.1.1 Espace de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sachant que Ω est un ensemble non vide, \mathcal{F} est une tribu (σ -algèbre) et \mathbb{P} est une probabilité sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) .

Définition 1.1.1. Soit E un ensemble quelconque. Une tribu (ou σ -algèbre) sur E est une famille \mathcal{A} de parties de E telle que :

- (a) $E \in \mathcal{A}$;
- (b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- (c) Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit que (E, \mathcal{A}) est un espace mesurable et on déduit :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Puisqu'on peut toujours prendre $A_n = \emptyset$ pour n assez grand, la propriété (3) entraîne que \mathcal{A} est stable par réunions finies (et de même par intersections finies). Voir [22]

Définition 1.1.2. Une mesure positive sur (E, \mathcal{A}) est une application

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables deux à deux disjointes :

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Voir[23]

Définition 1.1.3. Soit Ω un ensemble. Une mesure de probabilité (ou distribution de probabilité) est une application définie sur une partie \mathcal{F} de $\mathbb{P}(\Omega)$ par $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Si A et B sont deux parties disjointes de Ω , alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Voir[29]

Définition 1.1.4. Une variable aléatoire X est une fonction mesurable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par sa fonction de répartition :

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

Voir[46]

Définition 1.1.5. Soit X une variable aléatoire réelle de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Si X est intégrable selon la mesure \mathbb{P} , l'espérance de X est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

D'après le théorème de transfert, elle est alors égale à :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x).$$

Dans le cas où $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n , alors

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]).$$

1.1.2 Espérance conditionnelle par rapport à un événement

Définition 1.1.6. Soit B un ensemble avec une mesure positive dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout ensemble A , on appelle la probabilité conditionnelle de A sachant B la fraction

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition 1.1.7. Pour toute variable aléatoire réelle intégrable X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on appelle l'espérance conditionnelle sachant un ensemble B de mesure positive la moyenne pondérée

$$\mathbb{E}(X | B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int (X \cdot \mathbf{1}_B) d\mathbb{P}(\omega),$$

où $\mathbf{1}_B$ est la fonction indicatrice de l'ensemble B , Autrement écrit :

$$\mathbb{E}(X | B) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Voir[19]

1.1.3 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité . Soit X, Z deux variables aléatoires définies sur cet espace. Soit \mathcal{G} la tribu engendrée par Z (i.e., $\mathcal{G} = \sigma(Z)$).

Définition 1.1.8. On appelle l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant \mathcal{G} l'unique variable aléatoire notée $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$, telle que :

1. $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ est \mathcal{G} -mesurable .
2. Pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Voir[31]

1.1.4 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X et Z deux variables aléatoires définies sur cet espace et soit \mathcal{G} la tribu engendrée par Z

Définition 1.1.9. On appelle l'espérance conditionnelle de X sachant Z une variable aléatoire définie comme l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu \mathcal{G} (i.e $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$) notée $\mathbb{E}(X | Z)$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X | Z)$ est caractérisée par :

1. C'est une variable $\sigma(Z)$ -mesurable.
2. Pour tout $A \in \sigma(Z)$,

$$\int_A \mathbb{E}(X | Z) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Proposition 1.1.1. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles positives intégrables et soit \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} .

1. Linéarité : Pour tous $b, c \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(b.X + c.Y | \mathcal{G}) = b.\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + c.\mathbb{E}(Y | \mathcal{G}) \quad p.s.$$

2. Positivité-monotonie : Si $X \geq Y$ p.s., alors

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y | \mathcal{G}) \quad p.s.$$

3. Si Y est \mathcal{G} -mesurable :

$$\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \quad p.s.$$

4. Si X est \mathcal{G} -mesurable :

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = X \quad p.s.$$

5. Si X est indépendante de \mathcal{G} :

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$$

Voir[16]

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1. Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par le temps $t \in T$:

1. Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.
2. Si $T = \mathbb{N}$, le processus est une suite de variables aléatoires.
3. Plus généralement, quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.

4. Pour $T \subset \mathbb{R}^n$, on parle de champ aléatoire

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

1. Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. Voir[25]

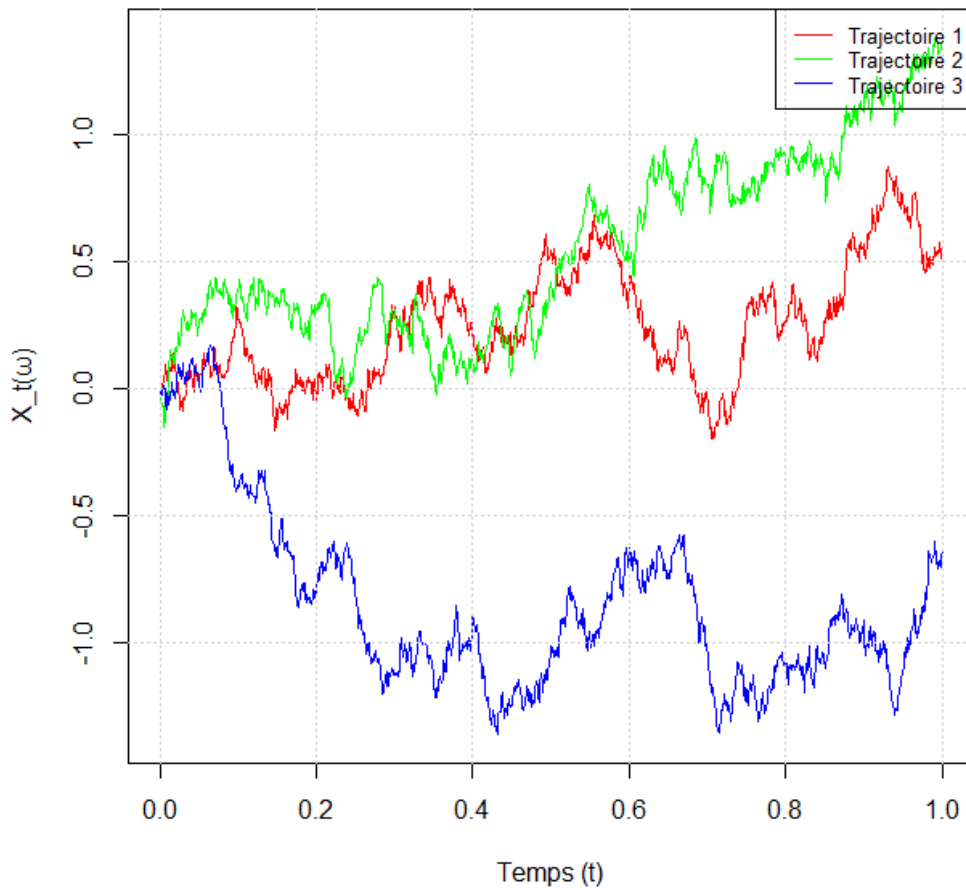


FIGURE 1.1 – Représentation graphique d'un processus stochastique

1.2.1 Filtration et adaptation

Définition 1.2.2. Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{A} , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}, \quad \text{pour tous } s, t \in [0, T], \quad \text{tel que } s \leq t. \text{ Voir [4]}$$

Définition 1.2.3. La filtration naturelle ou canonique d'un processus (X_t) est définie comme suit :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t), \quad \text{pour tout } t \in T,$$

c'est la plus petite σ -algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tout $0 \leq s \leq t$.

Définition 1.2.4. Un processus X est dit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout t .

Définition 1.2.5. le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est mesurable si l'application suivante est mesurable :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) &\rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Définition 1.2.6. On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est progressivement mesurable par rapport \mathcal{F}_t si pour tout t , l'application suivante est $(\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F})$ -mesurable :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}) &\rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Définition 1.2.7. Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit prévisible par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (ou \mathcal{F}_t -prévisible) si pour tout $t \geq 0$, X_{t+1} est \mathcal{F}_t -mesurable.

1.2.2 Processus Gaussiens

Définition 1.2.8. (Variables Gaussiennes) une variable aléatoire X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ si elle admet pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

De façon générale, une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Proposition 1.2.1. Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a pour :

1. **Espérance :**

$$\mathbb{E}[X] = \mu.$$

2. **Variance :**

$$\text{Var}(X) = \sigma^2.$$

3. *Fonction caractéristique :*

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Définition 1.2.9. (*Processus gaussiens*) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique. Il est dit gaussien si toutes ses lois finies-dimensionnelles $L(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ sont gaussiennes ($\forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T$). Un processus gaussien $X = (X_t)_{t \in T}$ est donc caractérisé en loi par sa “gaussianité” ainsi que par ses fonctions espérance et covariance :

1. Sa fonction d’espérance :

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t]$$

2. Sa fonction de covariance :

$$K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) \quad s, t \in [0, T].$$

Voir[2]

1.2.3 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t, t \geq 0)$ un processus stochastique.

Définition 1.2.10. On dit que $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard, si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $B_0 = 0$, p.s .
2. Pour tout $n \geq 1$, et tous $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, Les variables aléatoires $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ sont indépendantes .
3. Pour tous $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t - s)$.
4. Les trajectoires $t \mapsto B_t$ sont continues p.s sur \mathbb{R}_+ . Voir[43]

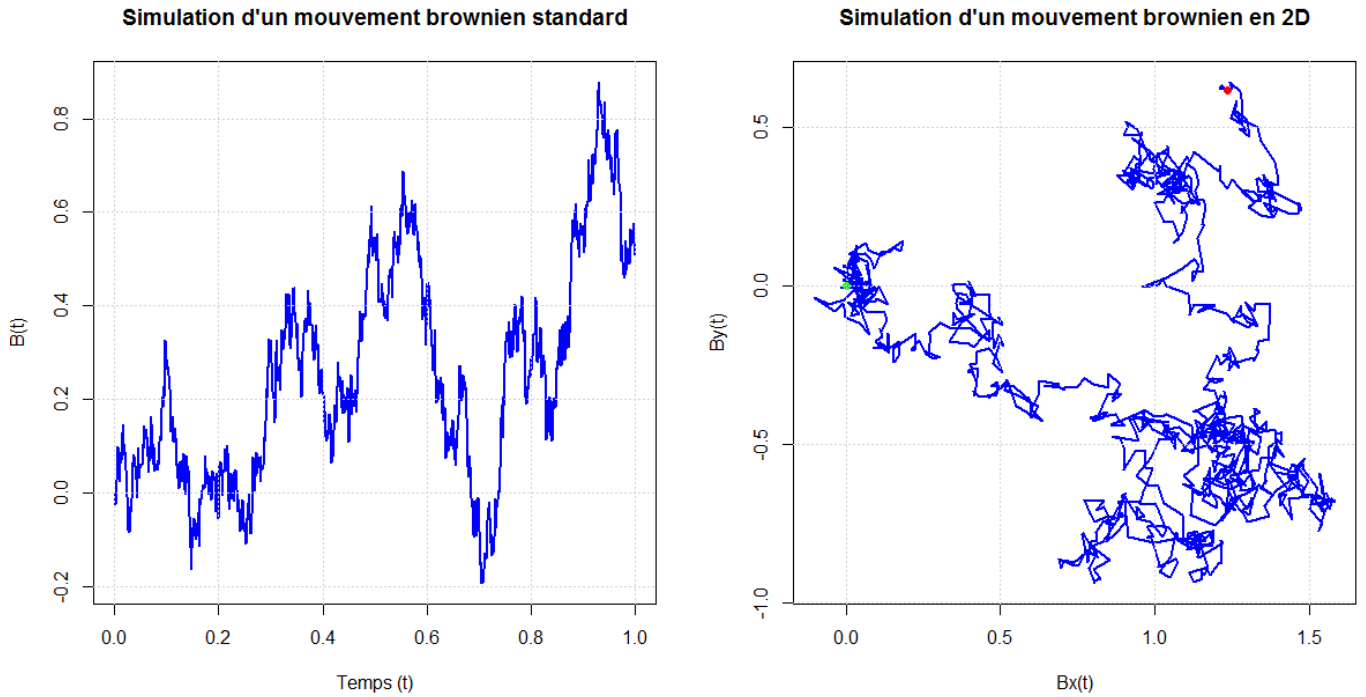


FIGURE 1.2 – Représentation graphique d'un mouvement brownien

Remarque 1.2.1. Pour $t \geq s \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s.$$

Proposition 1.2.2. Si $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien standard, alors :

1. $\mathbb{E}(B_t) = 0$;
2. $\mathbb{E}[B_t^2] = t$;
3. $\text{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s) = s \wedge t$.

Propriétés trajectorielle du mouvement brownien

Soit (B_t) un mouvement brownien, alors :

1. Pour tout $\epsilon > 0$ on a p.s :

$$\limsup_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s > 0, \quad \liminf_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s < 0.$$

2. Pour tout $\eta > 0$, on a p.s :

$$\limsup_{t \geq 0} B_t = +\eta, \quad \liminf_{t \geq 0} B_t = -\eta.$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $T_a = \inf(t \geq 0, B_t = a)$. Alors : $T_a < +\infty$ p.s .

4. Par conséquent, p.s, on a :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty, \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t = -\infty, \quad \text{p.s.}$$

5. Le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ a des trajectoires p.s localement holdérienne de tout ordre $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$.

6. En chaque $t \geq$, les trajectoires du mouvement brownien sont p.s non dérivable.

Théorème 1.2.1. (Dvoretzky) *il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\mathbb{P} \left(\exists t > 0, \limsup_{s \rightarrow t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s - t}} < C \right) = 0.$$

Corollaire 1.2.1. (Dvoretzky) *Presque sûrement, $t \rightarrow B_t$ est dérivable nulle part et de variation infinie sur chaque sous intervalle. voir [26]*

Remarque 1.2.2. *La dérivée du mouvement brownien, telle que la dérivée classique d'une fonction n'existe pas, cela signifie qu'il n'y a pas de fonctions qui représente sa dérivée à chaque point du temps, car les variations instantanées du mouvement brownien sont trop importantes, or le mouvement brownien est caractérisé par une trajectoire aléatoire continue mais très irrégulière . En d'autre termes , il y a une infinité de sauts infinitésimaux à chaque instant, rendant la dérivée impossible à définir, ainsi au lieu de dérivée , on utilise la variations quadratique pour caractériser les changement du mouvement brownien .*

1.2.4 Variation quadratique du mouvement brownien standard

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard (par convenance, on notera parfois $B_t = B(t)$). Pour $t > 0$, on définit

$$\langle B_t \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left(B \left(\frac{it}{2^n} \right) - B \left(\frac{(i-1)t}{2^n} \right) \right)^2.$$

Proposition 1.2.3. *Pour $t > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \quad \text{p.s.}$$

et on définit la variation quadratique du mouvement brownien standard $\langle B \rangle_t$ comme étant donnée par cette limite (par convention, on pose également $\langle B \rangle_0 = 0$).

Preuve Soient $X_i = B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)$, $1 \leq i \leq 2^n$ (t et n fixés). Les v.a. X_i sont i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, t/2^n)$ et $\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} X_i^2$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle B \rangle_t^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{t}{2^n} = t \\ \text{Var}(\langle B \rangle_t^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{2^n} \text{Var}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n} (\mathbb{E}(X_i^4) - \mathbb{E}(X_i^2)^2) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \left(3 \frac{t^2}{4^n} - \frac{t^2}{4^n}\right) = \frac{t^2}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\langle B \rangle_t^{(n)} - t| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(\langle B \rangle_t^{(n)}) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^2}{2^{n-1}} < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli et le critère donné pour la convergence presque sûre, on a donc

$$\langle B \rangle_t^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t \text{ p.s.}$$

1.2.5 Martingales

On se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.11. *Un processus $(X_t, t \in T)$ est une \mathcal{F}_t -martingale si :*

1. X_t est un processus adapté .
2. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, pour tout $t \in T$ (le processus X_t est intégrable) .
3. $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$, pour tout $s \leq t$. Voir [1]

Proposition 1.2.4. *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté et intégrable. On dit que X est*

1. *Une sur-martingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$$

2. *Une sous-martingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Proposition 1.2.5. *Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien standard, alors :*

1. $(B_t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.
2. $X_t = B_t^2 - t$, pour tout $t \geq 0$, est une \mathcal{F}_t -martingale.

1.2.6 Temps d'arrêt

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.12. Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On associe à un temps d'arrêt T la tribu des évènements antérieurs à T par :

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Voir[27]

Définition 1.2.13. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ et τ un temps d'arrêt relativement à la même filtration. On appelle processus arrêté au temps τ le processus défini par $X^\tau = (X_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$.

Remarque 1.2.3. Le processus arrêté est adapté à $\{\mathcal{F}_{\tau \wedge t}\}_{t \geq 0}$ et donc adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Définition 1.2.14. Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une **martingale locale** s'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) croissant vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté $X^{T_n}(\mathbf{1}_{T_n > 0})$ soit une martingale. Voir[45]

Intégration Stochastique

Ce chapitre explore la construction des intégrales de Wiener et Itô introduites pour modéliser des phénomènes aléatoires, elles permettent de définir des intégrales par rapport à des mouvements browniens. Alors que l'intégrale de Wiener s'applique à des fonctions déterministes, celle d'Itô étend ce concept à des processus stochastiques, jouant un rôle clé dans la modélisation des équations différentielles stochastiques.

2.1 Intégrale de Wiener

2.1.1 Construction d'intégrale de Wiener

Définition 2.1.1. *L'intégrale de Wiener est une intégrale du type :*

$$\omega \mapsto Y_1(\omega) = \left(\int_0^1 f(s) dB_s \right) (\omega)$$

Soit $T > 0$, notons \mathcal{E}_t l'ensemble des fonctions $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien. Le problème est bien sûr de donner un sens à l'élément différentiel dB_s puisque la fonction $s \mapsto B_s$ n'est pas dérivable.

on note :

$$\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R}) = \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} ; \int_0^T |f(s)|^2 ds < +\infty \right\}.$$

Si maintenant, $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\int_0^T f(s)^2 ds < +\infty$, alors on peut montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{E}_T telle que :

$$\int_0^T |f_n(s) - f(s)|^2 ds \longrightarrow 0.$$

Comme :

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T f_m(s) dB_s - \int_0^T f_n(s) dB_s \right|^2 \right] = \int_0^T |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds.$$

on voit que la suite :

$$\left(\int_0^T f_n(s) dB_s \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

est de Cauchy dans \mathbb{L}^2 , donc convergente dans \mathbb{L}^2 . On peut montrer facilement que la limite obtenue ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie pour approcher f . Cette limite est notée :

$$\int_0^T f(s) dB_s.$$

Si maintenant, on a $\int_0^T f(s)^2 ds < +\infty$ pour tout $T > 0$, on peut définir un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que :

$$X_t = \int_0^t f(s) dB_s, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Ce processus est adapté à la filtration naturelle associée au mouvement brownien. Dans ce cas, on posera pour $s < t$,

$$\int_s^t f(u) dB_u = X_t - X_s.$$

Voir[17]

Remarque 2.1.1. 1. Si $T < +\infty$, les fonctions continues et les fonctions bornées sont contenues dans $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R})$.

2. L'espace $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, au sens où toute suite de $\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ est de Cauchy pour la norme :

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^T f^2(s) ds \right)^{1/2}$$

2.1.2 Processus liés à l'intégrale de Wiener

On définit pour $f \in \mathbb{L}_{Loc}^2(\mathbb{R}_+)$ la variable aléatoire

$$\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(s) f(s) dB_s.$$

On peut de la même façon définir $\int_0^t f(s) dB_s$, pour toute fonction f qui vérifie

$$\int_0^T |f(s)|^2 ds < +\infty, \quad \forall T > 0$$

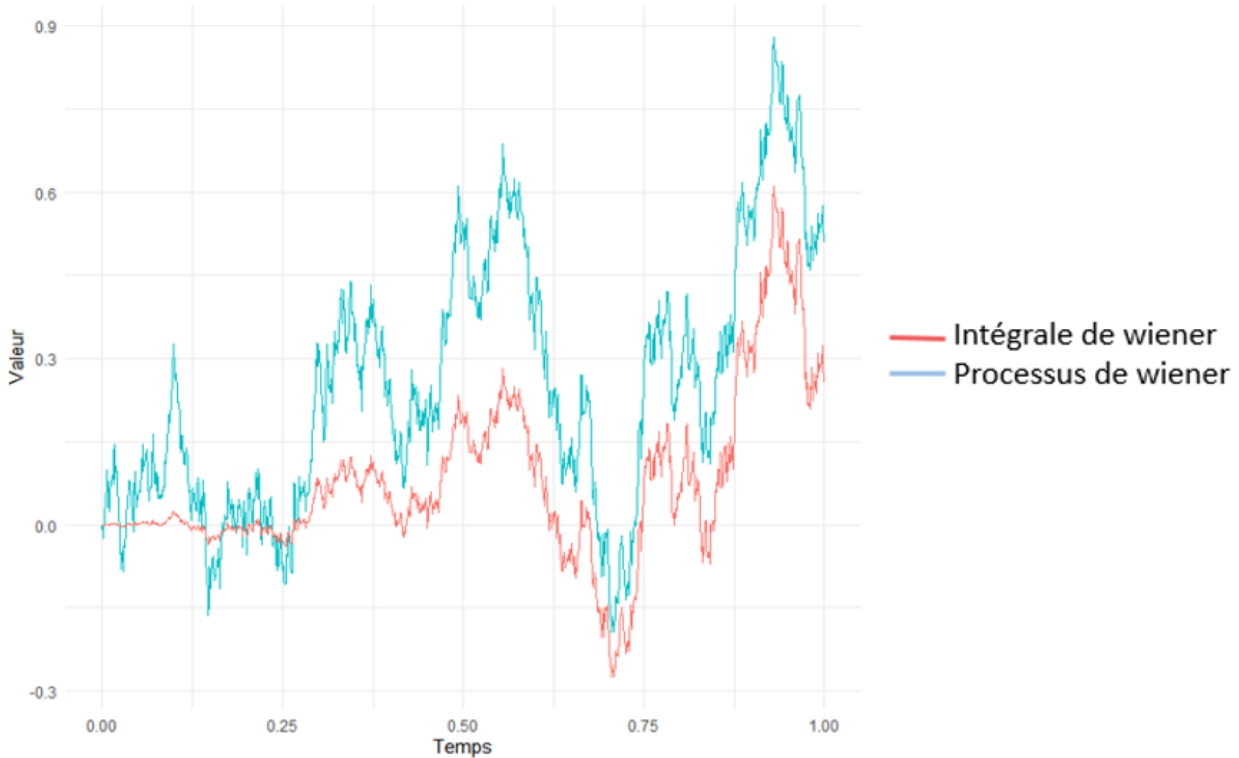


FIGURE 2.1 – Représentation graphique d'intégrale de wiener

Théorème 2.1.1. Soit $f \in \mathbb{L}_{Loc}^2$ et $M_t = \int_0^t f(s) dB_s$.

1. Le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue. La variable aléatoire M_t est d'espérance 0 et de variance $\int_0^t f^2(s) ds$.
2. Le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré de covariance $\int_0^{t \wedge s} f^2(u) du$ à accroissements indépendants.
3. Le processus $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(s) ds, t \geq 0 \right)$ est une martingale.
4. Si f et g sont dans \mathbb{L}_{Loc}^2 , on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(u) dB_u \cdot \int_0^s g(u) dB_u \right] = \int_0^{t \wedge s} f(u)g(u) du.$$

Voir[32]

2.1.3 Intégration par parties

Théorème 2.1.2. *Si f est une fonction de classe $C^1([0, t], \mathbb{R})$, alors*

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s ds.$$

On peut aussi écrire cette formule sous forme différentielle :

$$d(B_t f(t)) = f(t) dB_t + B_t f'(t) dt. \quad \text{Voir [17]}$$

2.2 Intégrale stochastique d'Itô

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré et B un Mouvement Brownien, tel que $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B(s), s \leq t\}$. On veut généraliser l'intégrale de Wiener pour des processus stochastiques $(\theta_t)_{t \geq 0}$ pour tout $t \geq 0$, par :

$$M_t(\theta_t) = \int_0^t \theta_s dB_s$$

$$M(\theta_t) = (M_t(\theta_t))_{t \geq 0}$$

Définition 2.2.1. *On note $\mathbb{M}^2[0, T]$ l'ensemble des processus progressivement si mesurable, $\{\theta_t, t \in [0, T]\}$ est (\mathcal{F}_t^B) adapté, càdlàg et si :*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s^2(\omega) ds \right] < +\infty, \quad \forall t \in [0, T].$$

Voir [39]

2.2.1 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Proposition 2.2.1. *On note $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$ et $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$.*

1. *On a*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \theta_s dB_s \right] = 0$$

et

$$\text{var} \left(\int_0^{+\infty} \theta_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \theta_s^2 ds \right]$$

2. Linéarité

Soit a et b des constantes et θ, ϕ deux processus de $\mathbb{M}^2[0, T]$.

On a :

$$\int_0^t (a\theta_s + b\phi_s) dB_s = a \int_0^t \theta_s dB_s + b \int_0^t \phi_s dB_s.$$

Voir[34]

Proposition 2.2.2. Soit $\theta \in \mathbb{M}^2[0, T]$ et $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$, alors :

1. Le processus M_t est une martingale à trajectoires continues.
2. Le processus $(M_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds, t \geq 0)$ est une martingale.

2.2.2 Processus d'Itô

Définition 2.2.2. On appelle processus d'Itô, un processus $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

avec :

1. x_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable.
2. $(b_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont des processus adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
3. $\int_0^t |b_s| ds \leq \infty$ \mathbb{P} -p.s. et $\int_0^t |\sigma_s|^2 ds \leq \infty$ \mathbb{P} -p.s. pour tout $t \in [0, T]$.

Sous sa forme différentielle, le processus d'Itô devient :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, & 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Voir[42]

2.2.3 Intégrale par rapport à un processus d'Ito

Soit X un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$, on note :

$$\int_0^t \theta_s dX_s = \int_0^t \theta_s b_s ds + \int_0^t \theta_s \sigma_s dB_s.$$

2.2.4 Formule d'Itô

Théorème 2.2.1. (*Première formule d'Itô*)

Soit X un processus d'Itô et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à dérivées bornées, alors :

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Voir[37]

Théorème 2.2.2. (*Deuxième formule d'Itô*)

Soit $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X_t un processus d'Itô, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, x_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Voir[38]

2.2.5 Formule d'intégration par parties

Proposition 2.2.3. Soient X_1 et X_2 deux processus d'Itô, tel que :

$$dX_1 = b_1 dt + \sigma_1 dB_t.$$

et

$$dX_2 = b_2 dt + \sigma_2 dB_t.$$

Alors le produit $X_1 X_2$ est un processus d'Itô et il est défini par :

$$X_1 X_2 = x_1 x_2 + \int_0^t X_1 dX_2 + \int_0^t X_2 dX_1 + \int_0^t \sigma_1 \sigma_2 ds,$$

$$d(X_1 X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + d\langle X_1, X_2 \rangle_t.$$

L'intégration de la règle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^t X_2 dX_1 = [X_1 X_2]_0^t - \int_0^t X_1 dX_2 - \int_0^t \sigma_1 \sigma_2 ds.$$

La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 , noté $\langle X_1, X_2 \rangle_t$ est défini comme le processus à variation finie :

$$\langle X_1, X_2 \rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s) ds.$$

Voir[35]

2.3 Equations différentielles stochastiques

Définition 2.3.1. *De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où dB_t est la différentielle d'un mouvement brownien standard (B_t), b et σ sont deux fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} et X_0 est une valeur initiale.

- Le coefficient b est appelé dérive, tandis que σ est le coefficient de diffusion.
- Le processus solution de l'équation (2.1) est appelé un processus de diffusion. Voir [36]

Définition 2.3.2. *Un processus stochastique à temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit de diffusion s'il est markovien, c'est-à-dire s'il possède la propriété de Markov forte et des trajectoires presque sûrement continues.*

2.3.1 Existence et unicité des solutions d'EDS

Théorème 2.3.1. *Soit $T > 0$, on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

1. *Condition de Lipschitz : $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$.*
2. *Condition de croissance : $|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|)$, $\forall t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$,*
3. *La condition initiale X_0 est indépendante de $(W_t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{E}[|X_0|^2] < \infty$.*

Alors l'EDS(2.1) admet une solution unique à trajectoire presque sûrement continue.

Théorèmes de Girsanov

L'objectif de ce chapitre est de définir le changement de probabilité et le théorème de Girsanov.

3.1 Changement de Probabilité

3.1.1 Théorème de Radon-Nikodym

Théorème 3.1.1. (Théorème de Radon-Nikodym) Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et μ, ν deux mesures positives σ -finies sur (X, \mathcal{A}) , il y a équivalence entre :

1. $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$ (on note $\nu \ll \mu$).
2. $\exists f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ μ -intégrable telle que $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu$.

En outre, la fonction f est unique (à une égalité μ -presque partout près).

On note $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ et on dit que f est la dérivée de Radon-Nikodym ou la densité de ν par rapport à μ . Voir[44]

Preuve 3.1.1. Étape 1 : cas où $\nu \leq \mu$.

On suppose dans cette étape que $\nu \leq \mu$ ou ν et μ sont des mesures finies, Alors pour toute fonction g mesurable positive, on a $\int g d\nu \leq \int g d\mu$.

En particulier, $\mathbb{L}^2(\mu) \subset \mathbb{L}^2(\nu)$, donc on peut considérer l'application linéaire

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_X f d\nu. \end{cases}$$

L'application Φ est linéaire et continue. En effet, pour $g \in \mathbb{L}^2(\mu)$, on a

$$|\Phi(g)| = \left| \int_X g \, d\nu \right| \leq \int_X |g| \, d\nu \leq \|g\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} \cdot \sqrt{\nu(X)} \leq \|g\|_{\mathbb{L}^2(\mu)} \cdot \sqrt{\nu(X)},$$

où l'on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la seconde inégalité.

Le théorème de représentation de Riesz assure alors l'existence d'une fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mu) \subset \mathbb{L}^1(\mu)$ telle que :

$$\forall g \in \mathbb{L}^2(\mu), \quad \Phi(g) = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}}$$

Autrement dit, pour tout $g \in \mathbb{L}^2(\mu)$, on a

$$\int_X g \, d\nu = \int_X fg \, d\mu.$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, comme μ est finie, $\mathbf{1}_A \in \mathbb{L}^2(\mu)$, donc on a en particulier

$$\nu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, d\nu = \int_X \mathbf{1}_A \cdot f \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Montrons maintenant que f est positive. On suppose par l'absurde que $\mu(\{f < 0\}) > 0$.

Alors il existe un entier n_0 tel que

$$\mu \left(\left\{ f \leq -\frac{1}{n_0} \right\} \right) > 0.$$

On en déduit que :

$$\nu \left(\left\{ f \leq -\frac{1}{n_0} \right\} \right) = \int_{\{f \leq -\frac{1}{n_0}\}} f \, d\mu \leq -\frac{\mu(X)}{n_0} < 0.$$

Ceci contredit que la mesure ν est positive. Ainsi, on a $\mu(\{f < 0\}) = 0$. De la même manière, on peut montrer que $\mu(\{f > 1\}) = 0$, et on en déduit en fait que f est μ -presque partout à valeurs dans $[0, 1]$.

Étape 2 : cas général

On applique l'étape 1 aux mesures finies ν et $\mu + \nu$. Il existe $f \in \mathbb{L}^1(\mu + \nu)$ avec $f \in [0, 1]$ $(\mu + \nu)$ -presque partout, tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu(A) = \int_A f \, d(\mu + \nu).$$

On a alors :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \int_A (1 - f) \, d\nu = \int_A f \, d\mu.$$

Notons $N = \{f = 1\}$. Alors

$$\mu(N) = \int_N f \, d\mu = \int_N (1 - f) \, d\nu = 0,$$

donc comme $\nu \ll \mu$, on en déduit $\nu(N) = 0$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on peut décomposer $A = (A \cap N) \cup (A \cap N^c)$, et on obtient

$$\nu(A) = \nu(A \cap N) + \nu(A \cap N^c) = \nu(A \cap N^c) = \int_A \mathbf{1}_{N^c} \cdot \frac{1}{1-f}(1-f) d\nu = \int_A \mathbf{1}_{N^c} \cdot \frac{f}{1-f} d\mu.$$

Avec $\varphi := \mathbf{1}_{N^c} \cdot \frac{f}{1-f} \geq 0$ μ -presque partout car $1-f \geq 0$ $(\mu+\nu)$ -presque partout. Par ailleurs, on a

$$\int_X \varphi d\mu = \nu(X) < \infty,$$

donc $\varphi \in \mathbb{L}^1(\mu)$. Ainsi, φ vérifie la propriété 2. du théorème.

Étape 3 : unicité.

On suppose que f et g vérifient 2. On a

$$\nu(\{f > g\}) = \int_{\{f > g\}} f d\mu = \int_{\{f > g\}} g d\mu.$$

Ainsi,

$$\int_X \mathbf{1}_{\{f > g\}}(f - g) d\mu = 0.$$

Comme $\mathbf{1}_{\{f > g\}}(f - g)$ est positive, elle est nulle μ -presque partout, donc $\mu(\{f > g\}) = 0$.

On obtient de même que $\mu(\{g > f\}) = 0$, donc $f = g$ μ -presque partout.

On traite à présent le cas où ν et μ sont σ -finies, en se ramenant au cas fini. On considère deux partitions $(F_n)_{n \geq 0}$ et $(G_n)_{n \geq 0}$ de X constituées d'éléments de \mathcal{A} vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(F_n) < \infty \quad \text{et} \quad \nu(G_n) < \infty.$$

On pose alors, pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $E_{k,\ell} := F_k \cap G_\ell$. Alors

$$\bigcup_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} E_{k,\ell} \supset F_0 \cap \left(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} G_\ell \right) = X,$$

donc $(E_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ forme une partition de X , et on a $\nu(E_{k,\ell}) \leq \nu(G_\ell) < \infty$ et $\mu(E_{k,\ell}) \leq \mu(F_k) < \infty$.

Comme \mathbb{N}^2 est dénombrable, on peut supposer que ces ensembles sont indexés par \mathbb{N} : on les note dorénavant $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu(\cdot \cap E_n)$ et $\nu_n = \nu(\cdot \cap E_n)$.

Les mesures μ_n et ν_n sont finies, donc d'après ce qui précède, il existe $f_n \in L^1(\mu_n)$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu(A \cap E_n) = \int_A f_n d\mu_n = \int_A f_n \mathbf{1}_{E_n} d\mu.$$

On définit alors $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \mathbf{1}_{E_n}$. Alors, d'après le théorème de convergence monotone, il vient

$$\int_A f d\mu = \int_A \sum_{n \geq 0} f_n \mathbf{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_A f_n \mathbf{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n \geq 0} \nu(A \cap E_n) = \nu(A).$$

L'unicité se prouve alors comme dans le cas où ν et μ sont finies. Voir [44]

3.1.2 Formule de Cameron-Martin

Théorème 3.1.2. (Formule de Cameron-Martin) Soit B un mouvement brownien par rapport à une probabilité \mathbb{P} et f une fonction de $\mathbb{L}^2([0, T])$, la variable aléatoire :

$$L_T = \exp \left(\int_0^T f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T f^2(s) ds \right)$$

est une densité de probabilité qui définit une nouvelle probabilité Q sous laquelle le processus $\{B_t^Q = B_t - \int_0^{t \wedge T} f(s) ds, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien.

Autrement dit sous Q , B est un processus d'Itô :

$$B_t = B_t^Q + \int_0^t f(s)_{s \leq T} ds.$$

Voir[3]

Preuve 3.1.2. On applique la proposition précédente avec $U = \int_0^T f(s) dB_s$, de loi gaussienne centrée de variance $\int_0^T f^2(s) ds$ et d'après le calcul de Wiener, on a :

$$\text{Cov}(U, B_t) = \mathbb{E}^P \left(B_t \int_0^T f(s) dB_s \right) = \int_0^{t \wedge T} f(s) ds.$$

Passons maintenant au cas général. Soit donc :

1. Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
2. un mouvement brownien $\{B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}); t \geq 0\}$,
3. Une filtration satisfaisant les conditions usuelles.
4. $\{X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}); t \geq 0\}$: un vecteur de processus adaptés tel que :

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T (X_t^{(i)})^2 dt < \infty \right) = 1; \quad 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq T < \infty.$$

On pose :

$$Z_t(X) = \exp \left[\sum_{i=1}^d \left(\int_0^t X_s^{(i)} dB_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^t |X_s^{(i)}|^2 ds \right) \right].$$

alors Z est une martingale locale continue telle que :

$$Z_t(X) = 1 + \sum_{i=1}^d \int_0^t Z_s(X) X_s^{(i)} dB_s^{(i)}.$$

1. Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[Z_t(X)] = 1$, On définit une nouvelle probabilité Q sur \mathcal{F}_T , définie par :

$$Q = \mathbb{E}_A(Z_T(X)), \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

2. Cette famille de probabilités satisfait la condition de consistance :

$$Q_T(A) = Q_t(A), \quad A \in \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Proposition 3.1.1. (Novikov (1972)) Si le processus X vérifie

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|X_t\|^2 dt \right) \right] < \infty, \quad T \geq 0,$$

alors $Z(X)$ est une martingale.

Théorème 3.1.3. Soit $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ un processus stochastique continu dans un espace de probabilité à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $X(t)$ est un mouvement brownien par rapport à Q (la loi de $X(t)$ par rapport à Q est la même que la loi d'un mouvement brownien n -dimensionnel).
2. (a) $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une martingale par rapport à Q ,
- (b) $X_i(t)X_j(t) - \delta_{ij}t$ est une martingale par rapport à Q pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, i.e.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Voir[11]

Lemme 3.1.1. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{G}) telles que :

$$d\nu(\omega) = f(\omega)d\mu(\omega) \quad \text{pour un certain } f \in L^1(\mu).$$

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{G}) telle que :

$$\mathbb{E}_\nu[|X|] = \int_\Omega |X(\omega)|f(\omega)d\mu(\omega) < \infty.$$

Soit \mathcal{H} une sous-tribu de \mathcal{G} ($\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$). Alors :

$$\mathbb{E}_\nu[X|\mathcal{H}] \cdot \mathbb{E}_\mu[f|\mathcal{H}] = \mathbb{E}_\mu[fX|\mathcal{H}] \quad p.s. \tag{3.1}$$

Voir[11]

3.2 Théorèmes de Girsanov

Théorème 3.2.1. (Théorème de Girsanov I) Soit $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ un processus d'Itô de la forme :

$$\begin{cases} dY(t) = a(t, \omega)dt + dB(t) & , \quad t \leq T, \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

où $T \leq \infty$ est une constante donnée et $B(t)$ est un mouvement brownien n -dimensionnel.

On pose :

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t a(s, \omega) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s, \omega) ds \right) \quad , \quad t \leq T. \quad (3.2)$$

On suppose que $a(s, \omega)$ satisfait la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T a^2(s, \omega) ds \right) \right] < \infty \quad (3.3)$$

où $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ désigne l'espérance par rapport à \mathbb{P} . On définit la mesure Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^{(n)})$ par :

$$dQ(\omega) = M_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (3.4)$$

Alors, $Y(t)$ est un mouvement brownien n -dimensionnel par rapport à la loi de probabilité Q , pour $t \leq T$. Voir [10]

Remarque 3.2.1.

1. La transformation $\mathbb{P} \rightarrow Q$ donnée par (3.4) est appelée la transformation de Girsanov des mesures.
2. La condition de Novikov (3.3) est suffisante pour garantir que $\{M_t\}_{t \leq T}$ est une martingale (par rapport à $\mathcal{F}_t^{(n)}$ et \mathbb{P}). En réalité, le résultat reste valable si on suppose seulement que $\{M_t\}_{t \leq T}$ est une martingale (Voir [?]).
3. Le théorème (3.2.1) stipule que pour tous les ensembles boréliens $F_1, \dots, F_k \subset \mathbb{R}^n$ et tous les temps $t_1, t_2, \dots, t_k \leq T$, $k = 1, 2, \dots$, on a :

$$Q[Y(t_1) \in F_1, \dots, Y(t_k) \in F_k] = \mathbb{P}[B(t_1) \in F_1, \dots, B(t_k) \in F_k] \quad (3.5)$$

4. Une manière équivalente d'exprimer (3.4) est de dire que $Q \ll \mathbb{P}$ (Q est absolument continue par rapport à \mathbb{P}) avec une dérivée de Radon-Nikodym.

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = M_T \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_T^{(n)}. \quad (3.6)$$

5. Noter que $M_T(\omega) > 0$ p.s, donc on a aussi $\mathbb{P} \ll Q$. Ainsi, les deux mesures Q et \mathbb{P} sont équivalentes. Par conséquent, on déduit de (3.5) que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y(t_1) \in F_1, \dots, Y(t_k) \in F_k] &> 0 \\ \iff Q[Y(t_1) \in F_1, \dots, Y(t_k) \in F_k] &> 0 \\ \iff \mathbb{P}[B(t_1) \in F_1, \dots, B(t_k) \in F_k] &> 0 \quad \text{pour} \quad t_1, \dots, t_k \in [0, T] \end{aligned}$$

Preuve 3.2.1. la démonstration classique consiste à utiliser le théorème de Lévy. Pour simplifier, nous supposons que $a(s, \omega)$ est borné. Et grace au théorème (3.1.3) nous devons vérifier que :

1. $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ est une martingale par rapport à Q .
2. $Y_i(t)Y_j(t) - \delta_{ij}t$ est une martingale par rapport à Q , pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pour vérifier (i) on pose $K(t) = M_t Y(t)$, et on utilise la formule d'Itô pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 dK_i(t) &= M_t dY_i(t) + Y_i(t) dM_t + dY_i(t) dM_t \\
 &= M_t(a_i(t)dt + dB_i(t)) + Y_i(t)M_t \left(\sum_{k=1}^n a_k(t)dB_k(t) \right) \\
 &\quad + (dY_i(t)) \left(M_t \sum_{k=1}^n a_k(t)dB_k(t) \right) \\
 &= M_t \left(dB_i(t) - Y_i(t) \sum_{k=1}^n a_k(t)dB_k(t) \right) \\
 &= M_t \gamma^{(i)}(t) dB(t)
 \end{aligned}$$

où $\gamma^{(i)}(t) = (\gamma_1^{(i)}(t), \dots, \gamma_n^{(i)}(t))$, avec

$$\gamma_j^{(i)} = \begin{cases} -Y_i(t)a_j(t) & \text{si } j \neq i; \\ 1 - Y_i(t)a_i(t) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Donc $K_i(t)$ est une martingale par rapport à \mathbb{P} , donc par Lemme (3.1.1) nous obtenons, pour tout $t > s$:

$$\mathbb{E}_Q[Y_i(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}[M_t Y_i(t)|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}[K_i(t)|\mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K_i(s)}{M_s} = Y_i(s),$$

ce qui montre que $Y_i(t)$ est une martingale par rapport à Q : cela prouve (1). La preuve de (2) est similaire. Voir[12]

Théorème 3.2.2. (Théorème de Girsanov II) Soit $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ un processus d'Itô de la forme :

$$\begin{cases} dY(t) = \beta(t, \omega)dt + \theta(t, \omega)dB(t) & , t \leq T \\ Y_0 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

où $B(t) \in \mathbb{R}^m$, $\beta(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ et $\theta(t, \omega) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Supposons qu'il existe des processus $u(t, \omega) \in \mathcal{W}_H^m$ et $\alpha(t, \omega) \in \mathcal{W}_H^n$ tels que :

$$\theta(t, \omega)u(t, \omega) = \beta(t, \omega) - \alpha(t, \omega) \quad (3.8)$$

et supposons que $u(t, \omega)$ satisfait la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T u^2(s, \omega) ds \right) \right] < \infty. \quad (3.9)$$

Posons :

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t u(s, \omega) dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, \omega) ds \right), \quad t \leq T \quad (3.10)$$

et

$$dQ(\omega) = M_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \text{ sur } \mathcal{F}_T^{(m)}. \quad (3.11)$$

Alors :

$$\tilde{B}(t) = \int_0^t u(s, \omega) ds + B(t); \quad t \leq T \quad (3.12)$$

est un mouvement brownien par rapport à Q et le processus $Y(t)$ admet la représentation stochastique suivante :

$$dY(t) = \alpha(t, \omega) dt + \theta(t, \omega) d\tilde{B}(t). \quad (3.13)$$

Voir[14]

Preuve 3.2.2. D'après le Théorème (3.2.1) $\tilde{B}(t)$ est un mouvement brownien par rapport à Q . En substituant dans (3.12) dans (3.7) et en utilisant (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} dY(t) &= \beta(t, \omega) dt + \theta(t, \omega) (d\tilde{B}(t) - u(t, \omega) dt) \\ &= [\beta(t, \omega) - \theta(t, \omega) u(t, \omega)] dt + \theta(t, \omega) d\tilde{B}(t) \\ &= \alpha(t, \omega) dt + \theta(t, \omega) d\tilde{B}(t). \end{aligned}$$

Voir[15]

Application du théorème de Girsanov

Ce chapitre illustre l'utilité pratique du théorème de Girsanov à travers son application à deux processus stochastiques fondamentaux : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le processus d'Itô-Lévy. En changeant de mesure de probabilité, Girsanov permet de simplifier la dynamique de ces processus, facilitant leur analyse.

4.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus stochastique très utilisé en physique, en finance et en statistiques pour modéliser une variable aléatoire qui revient vers une moyenne au cours du temps avec une certaine volatilité. C'est un processus gaussien stationnaire qui suit une dynamique de type "moyenne-réversive". il est souvent décrit par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t \tag{4.1}$$

où :

1. X_t est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à l'instant t .
2. $\theta > 0$ est le coefficient de rappel vers la position d'équilibre .
3. μ est la position d'équilibre.
4. σ est l'écart-type du bruit.
5. dB_t est l'incrément d'un mouvement brownien standard.

Dans cette section, nous étudions le cas particulier où $\mu = 0$, ce qui donne l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

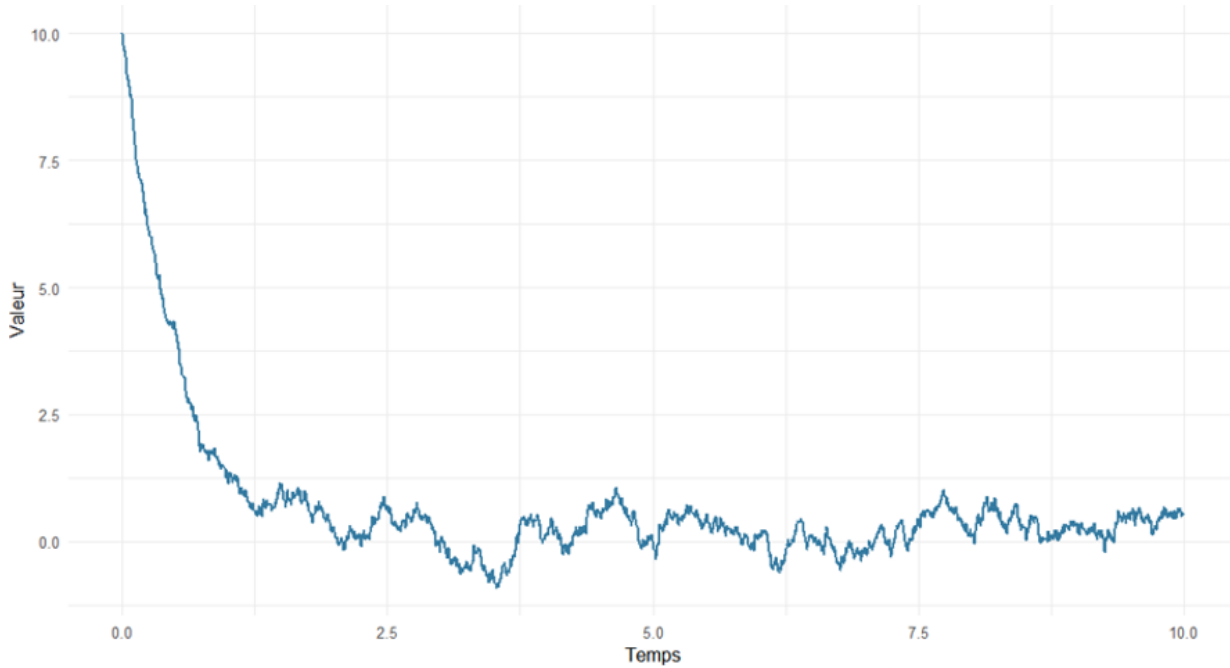


FIGURE 4.1 – Représentation graphique du processus Ornstein Uhlenbeck avec $\mu = 0, \sigma = 1, \theta = 2$

On s'intéresse à vérifier si le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus d'Itô.

Soit X_t est un processus Ornstein Uhlenbeck de la forme :

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t.$$

Sa forme intégrale est :

$$X_t = x_0 - \int_0^t (\theta X_s) ds + \int_0^t \sigma dB_s.$$

D'après la définition d'un processus d'Ito :

1. x_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable
2. $b_t = -\theta X_t$ est adapté car X_t est adapté.
3. $\int_0^t |\theta X_s| ds = \theta \int_0^t |X_s| ds < \infty$ car X_t est continu et intégrable.
4. $\int_0^t \sigma^2 ds = \sigma^2 t < \infty$.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck vérifie toutes les conditions de la définition d'un processus d'Itô. Par conséquent, c'est bien un processus d'Itô.

Application de théorème de Girsanov I sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

Soit X_t un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Par identification, on a $a_t = -\frac{\theta}{\sigma} X_t$ et l'égalité suivante est satisfaite car X_t est gaussien

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\theta}{\sigma} X_s \right)^2 ds \right) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{\theta^2}{2\sigma^2} \int_0^T (X_s)^2 ds \right) \right] < \infty$$

Alors, on pose :

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t \frac{\theta}{\sigma} X_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\theta}{\sigma} X_s \right)^2 ds \right) \quad (4.4)$$

Le processus Z_T est bien défini. On définit deux mesures de probabilité \mathbb{P} et Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^{(n)})$ par :

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = Z_T. \quad (4.5)$$

Sous la mesure Q , le processus X_t est un mouvement brownien et on a :

$$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t. \quad (4.6)$$

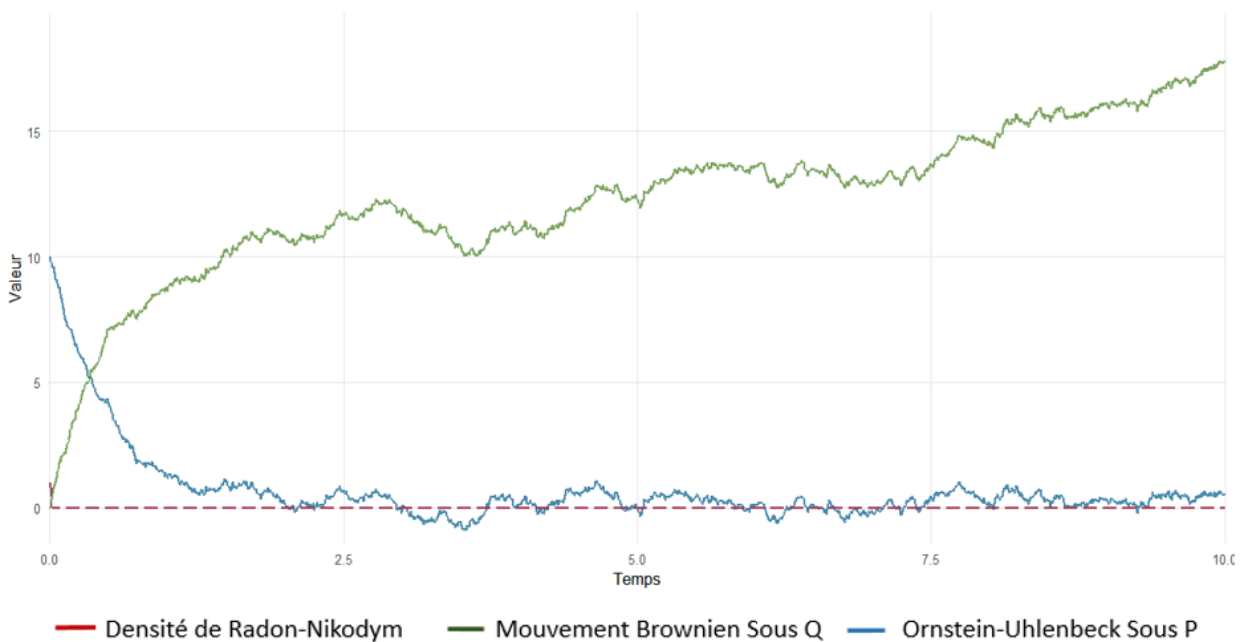


FIGURE 4.2 – Représentation graphique de l'application de théorème de Girsanov I sur Processus O-U

Interprétation :

Le graphique présenté (Figure 4.2) illustre la simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U) avant et après l'application du théorème de Girsanov I. Pour illustrer cette trajectoire, nous avons choisi les paramètres suivants : $\theta = 2$, $\sigma = 1$ et $\mu = 0$.

1. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous la mesure originale \mathbb{P}

(a) Sous la mesure \mathbb{P} , le processus X_t est décrit par l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t$$

- (b) Mean-reverting : Le terme $-\theta X_t$ force le processus à revenir vers $\mu = 0$.
- (c) Volatilité : Le terme σdB_t introduit des fluctuations aléatoires.
- (d) Les trajectoires oscillent autour de 0, avec une amplitude contrôlée par $\theta = 2$ et $\sigma = 1$.

2. Processus sous la nouvelle mesure Q :

(a) Sous la mesure Q , le processus X_t devient :

$$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t$$

- (b) Cela signifie que X_t se comporte comme un mouvement brownien multiplié par σ , sans le terme de retour à la moyenne $-\theta X_t dt$.
- (c) Le graphe montre probablement une trajectoire plus "diffusive" (comme un mouvement brownien standard) après le changement de mesure, contrastant avec le comportement "mean-reverting" sous la mesure \mathbb{P} .

Interprétation visuelle :

1. **Avant le changement de mesure (sous \mathbb{P}) :** Les trajectoires de X_t oscillent autour de zéro, avec une amplitude contrôlée par θ et σ .
2. **Après le changement de mesure (sous Q) :** Les trajectoires ressemblent à celles d'un mouvement brownien standard, sans tendance à revenir vers une moyenne, car le terme de drift a été éliminé par le changement de mesure.

Application de théorème de Girsanov II sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

Soit X_t un processus d'Ornstein Uhlenbeck de la forme défini dans (4.3) avec

$$\beta_t = -\theta X_t$$

tel que : $B_t \in \mathbb{R}^m$, $\beta_t = -\theta X_t \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$, on suppose qu'il existe aussi des processus u_t et α_t tel que :

$$\sigma_t u_t = \beta_t - \alpha_t \quad (4.7)$$

Ce qui donne pour u_t :

$$u_t = \frac{-\theta X_t - \alpha_t}{\sigma}$$

Pour que le changement de mesure soit valide, on doit vérifier :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T u_t^2 dt \right) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \frac{(\theta X_t + \alpha_t)^2}{\sigma^2} dt \right) \right] < \infty.$$

Supposons que :

$$|\theta X_t + \alpha_t| \leq C, \quad \forall t \in [0, T],$$

où C est une constante strictement positive. Cela implique :

$$(\theta X_t + \alpha_t)^2 \leq C^2.$$

La condition de Novikov , après substitution de $u_t = \frac{-\theta X_t - \alpha_t}{\sigma}$, devient :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \frac{(\theta X_t + \alpha_t)^2}{\sigma^2} dt \right) \right] < \infty.$$

Avec l'hypothèse de bornitude, on a :

$$(\theta X_t + \alpha_t)^2 \leq C^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\theta X_t + \alpha_t)^2}{\sigma^2} \leq \frac{C^2}{\sigma^2}.$$

L'intégrale devient donc bornée :

$$\int_0^T \frac{(\theta X_t + \alpha_t)^2}{\sigma^2} dt \leq \int_0^T \frac{C^2}{\sigma^2} dt = \frac{C^2 T}{\sigma^2}.$$

En prenant l'exponentielle, on obtient :

$$\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \frac{(\theta X_t + \alpha_t)^2}{\sigma^2} dt \right) \leq \exp \left(\frac{C^2 T}{2\sigma^2} \right).$$

Comme l'exponentielle est bornée par une constante déterministe, nous avons :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{C^2 T}{2\sigma^2} \right) \right] = \exp \left(\frac{C^2 T}{2\sigma^2} \right) < \infty.$$

Cette condition est satisfaite si α_t est borné ou déterministe, car X_t est un processus gaussien.

On définit le processus :

$$\begin{aligned} M_t &= \exp \left(- \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^t \frac{-\theta X_s - \alpha_s}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(-\theta X_s - \alpha_s)^2}{\sigma^2} ds \right) \\ &= \exp \left(\int_0^t \frac{\theta X_s + \alpha_s}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\theta X_s + \alpha_s)^2}{\sigma^2} ds \right) \end{aligned}$$

Par identification des terme, on obtient le terme stochastique :

$$\int_0^t \frac{\theta X_s + \alpha_s}{\sigma} dB_s$$

et le terme déterministe :

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\theta X_s + \alpha_s)^2}{\sigma^2} ds$$

Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\theta X_s + \alpha_s| \leq C$ pour tout $s \in [0, t]$, cela implique que :

$$(\theta X_s + \alpha_s)^2 \leq C^2$$

Donc, le terme déterministe devient :

$$\int_0^t \frac{(\theta X_s + \alpha_s)^2}{\sigma^2} ds \leq \int_0^t \frac{C^2}{\sigma^2} ds = \frac{C^2}{\sigma^2} t$$

En substituant cette borne dans l'expression de M_t , nous obtenons :

$$M_t = \exp \left(\int_0^t \frac{\theta X_s + \alpha_s}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2} \cdot \frac{C^2}{\sigma^2} t \right)$$

Cette expression simplifiée montre que le processus M_t est une martingale et que la condition de Novikov est satisfaite et la nouvelle mesure Q est définie par :

$$dQ = M_T d\mathbb{P} \quad \text{sur} \quad \mathcal{F}_T$$

Sous la mesure Q , le processus :

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t u_s ds$$

est un mouvement brownien standard et la dynamique de X_t devient :

$$dX_t = \alpha_t dt + \sigma d\tilde{B}_t$$

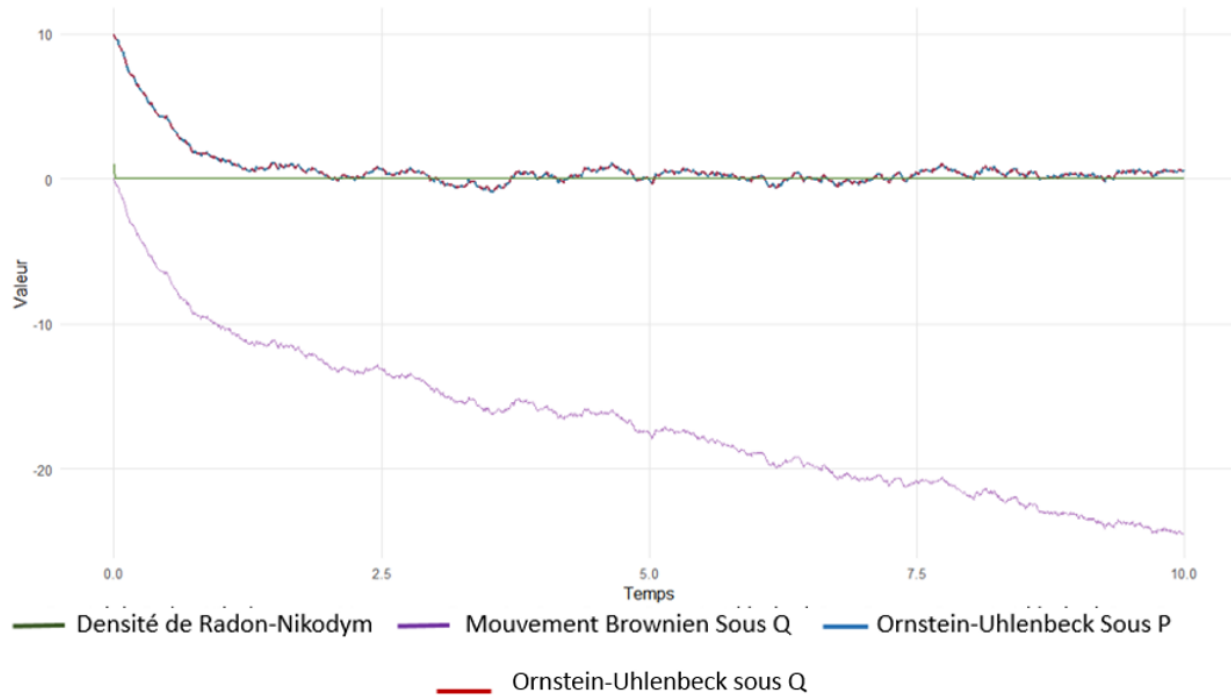


FIGURE 4.3 – Représentation graphique de l'application de théorème de Girsanov II sur Processus O-U

Interprétation :

Le graphique (Figure 4.3) illustre la simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U) avant et après l'application du théorème de Girsanov II, en mettant en évidence le changement de mesure et son impact sur la dynamique du processus.

Pour illustrer cette trajectoire, nous avons choisi les paramètres suivants : $\theta = 2$, $\sigma = 1$ et $\mu = 0$.

1. Processus sous la mesure Q

Hypothèse : On suppose que α_t est borné (par exemple, $\alpha_t = -1$) afin de satisfaire la condition de Novikov, ainsi l'équation devient :

$$dX_t = \alpha_t dt + \sigma d\tilde{B}_t = -1 dt + d\tilde{B}_t$$

- Le terme de mean-reverting $-2X_t dt$ est remplacé par un drift constant $-1 dt$.
- X_t devient un mouvement brownien avec un drift négatif. Au lieu d'osciller autour de 0
- Trajectoire erratique avec une tendance linéaire négative (pente moyenne -1).
- Contrasté avec le comportement stable sous \mathbb{P} .

Le tableau suivant, montre la différence de la dynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck lors de l'application du théorème de Girsanov I et II.

TABLE 4.1 – Comparaison entre l'application des théorèmes de Girsanov I et II au processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Aspect	Girsanov I	Girsanov II
Objectif	Supprime le drift existant (ex. $-\theta X_t$) \rightarrow mouvement brownien sous Q .	Remplace le drift par un terme personnalisé $\alpha_t \rightarrow$ dynamique ajustable sous Q .
Résultat sous Q	$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t$ (bruit pur).	$dX_t = \alpha_t dt + \sigma d\tilde{B}_t$ (drift contrôlé + bruit).
Flexibilité	Rigide : drift forcé à zéro.	Libre choix de α_t (constant, dépendant du temps ou de X_t).
Applications	Pricing neutre au risque, élimination de tendance.	Modélisation de primes de risque, contrôles externes, systèmes perturbés.
Graphique	Trajectoire erratique sans tendance.	Trajectoire avec dérive (ex. linéaire si $\alpha_t = c$).
Résumé	"Reset" du drift.	"Réglage" du drift.

4.2 Processus d'Ito-Lévy

Considérons des formules intégrales mettant en jeu les différentes intégrales stochastiques vues précédemment, on obtient ainsi une expression de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_{]0,t] \times \mathbb{R}} H(s, z) \tilde{N}(dt, dz) \quad (4.8)$$

où :

1. X_t : Le processus stochastique que l'on cherche à décrire, dépendant du temps t .
2. $b(t)$: Le terme de dérive (drift), qui décrit la tendance moyenne de X_t à évolution de manière déterministe.
3. $\sigma(t)$: Le coefficient de diffusion, qui mesure la sensibilité du processus au mouvement brownien.

4. $H(t, z)$: Une fonction qui décrit l'amplitude des sauts en fonction du temps t et de la taille du saut x .

5. $\tilde{N}(dt, dx)$: La mesure de sauts compensée, définie par

$$\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \lambda dt \nu(dz),$$

où :

(a) $N(dt, dz)$ est la mesure de Poisson aléatoire (compte les sauts de taille z dans l'intervalle dt),

(b) λ est l'intensité du processus de Poisson,

(c) $\nu(dz)$ est la mesure de Lévy (décrit la distribution des tailles de sauts).

les processus b et σ sont adaptés et le processus H est prévisible où $b \in \mathbb{L}^1(\mathbf{1}_{[0,T]}dt)$, $\sigma \in \mathbb{L}^2(\mathbf{1}_{[0,T]}dt)$ et $H \in \mathbb{L}^1(\nu(dz)\mathbf{1}_{[0,T]}dt)$.

Pour une intégrale stochastique de Lévy de la forme (4.8), les formules d'Itô sont utiles pour le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. Si X est une intégrale stochastique de Lévy avec

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t + \int_{\mathbb{R}} H_t(z) \tilde{N}(dt, dz) \quad (4.9)$$

et g une fonction de classe C^2 , alors :

$$\begin{aligned} dg(X_t) &= g'(Y_{t-}) dX_t + \frac{1}{2} g''(X_{t-}) \sigma(t)^2 dt + \\ &\int_{\mathbb{R}} [g(X_{t-} + H_t(z)) - g(X_{t-}) - g'(X_{t-}) H_t(z)] N(ds, dz) \\ &= g'(X_{t-}) dX_t + \frac{1}{2} g''(Y_{t-}) \sigma(t)^2 dt + \sum_{0 < s \leq t} [g(X_s) - g(X_{s-}) - g'(X_{s-}) \Delta X_s] \end{aligned}$$

(4.10)

Voir [48]



FIGURE 4.4 – Représentation graphique de Processus ITO-LEVY

Application de théorème de Girsanov I pour le processus d'Itô-Lévy :

Soit X_t un processus d'Itô-Lévy de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, X_t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Supposons qu'il existe des processus prévisibles $u_t = u(t, \omega)$ et $\varphi(t, z) = \varphi(t, z, \omega)$, tels que

$$\sigma_t u_t + \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, z) \gamma(t, z) \tilde{N}(dz) = 0, \quad \text{pour tout } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

De plus, supposons que

$$\begin{aligned} Z_t = \exp \left(\int_0^t -u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 - \beta(s, z)) \tilde{N}(ds, dz) \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\ln(1 - \beta(s, z)) + \beta(s, z)] \mu(dz) ds \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

soit bien défini et satisfait :

$$\mathbb{E}(Z_T) = 1.$$

On définit alors deux mesures de probabilités équivalentes \mathbb{P} et Q sur \mathcal{F}_T par

$$dQ = Z_T d\mathbb{P}$$

et X_t devient une Q -martingale locale.

$$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t + \int \gamma \tilde{N}(dt, dz). \quad \text{Voir [6]}$$

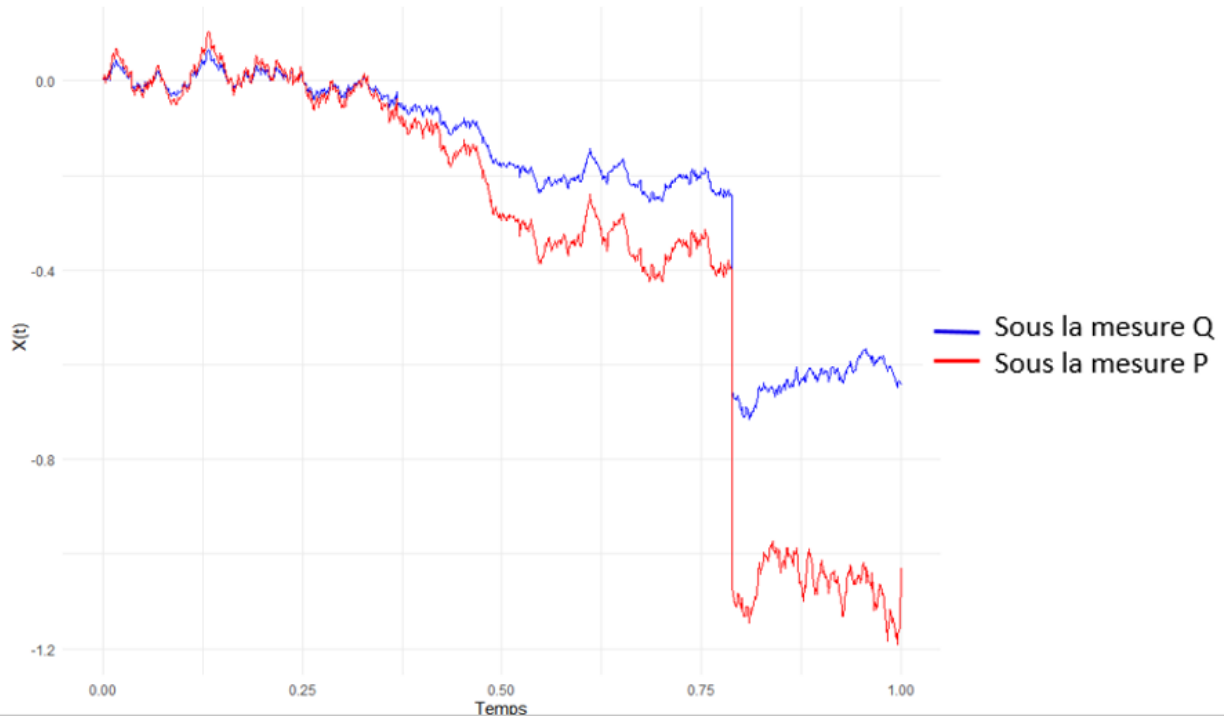


FIGURE 4.5 – Représentation graphique de l'application de théorème de Girsanov I sur Processus ITO-LEVY

Interprétation :

Le graphique (Figure 4.5) illustre la simulation d'un processus d'Itô-Lévy avant et après l'application du théorème de Girsanov I, mettant en évidence le changement de mesure et son impact sur la dynamique du processus.

1. Processus d'Itô-Lévy sous la mesure \mathbb{P} :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z) \tilde{N}(dt, dz)$$

où :

- (a) $\tilde{N}(dt, dz)$: mesure de sauts compensée sous \mathbb{P} .
- (b) b : drift (tendance).
- (c) σ : volatilité brownienne.
- (d) γ : amplitude des sauts
- (e) Partie continue : Mouvement brownien avec drift $b(t, X_t)$ et volatilité $\sigma(t, X_t)$.
- (f) Partie discontinue : Sauts aléatoires modélisés par $\tilde{N}(dt, dz)$. (Sauts abrupts : pic ou chute soudaine due à $\tilde{N}(dt, dz)$).

2. Processus d'Itô-Lévy sous la mesure Q :

- (a) **Plus de drift** : La tendance $b(t, X_t)$ a disparu (La tendance est annulée : Le drift $b(t, X_t)$ est compensé par un terme u_t).
- (b) **Sauts "équilibrés"** : Leur moyenne est ajustée pour éviter les biais (Les sauts sont rééquilibrés : leur impact moyen est neutralisé via $\beta(t, z)$).
- (c) La courbe oscille autour de zéro sans dérive systématique.
- (d) Les sauts persistent mais sont moins asymétriques

Application de théorème de Girsanov II sur le processus d'Itô-Lévy :

Soit X_t un processus d'Itô-Lévy de la forme (4.11). Supposons qu'il existe des processus prévisibles u_t et $\gamma(t, z) \leq 1$, tels que le processus Z_t défini par (4.12) existe pour tout $t \geq T$, et satisfait $\mathbb{E}(Z_T) = 1$.

On définit B_t^Q, \tilde{N}^Q par :

$$dB_t^Q = dB_t + u_t dt$$

et

$$\tilde{N}^Q(dt, dz) = \beta(t, z) \mu(dz) dt + \tilde{N}(dt, dz)$$

avec B_t^Q étant un mouvement brownien sous la mesure Q et \tilde{N}^Q une mesure aléatoire de Poisson compensée de N , dans le sens où

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s, z) \tilde{N}^Q(ds, dz), \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T$$

est une \mathcal{F}_t -martingale locale, pour tous les processus prévisibles $\varphi(s, z)$, tels que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\gamma(s, z))^2 (1 - \beta(s, z)) \mu(dz) ds < \infty \quad p.s.$$

et

$$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t + \int \gamma \tilde{N}^Q(dt, dz). \quad \text{Voir [7]}$$

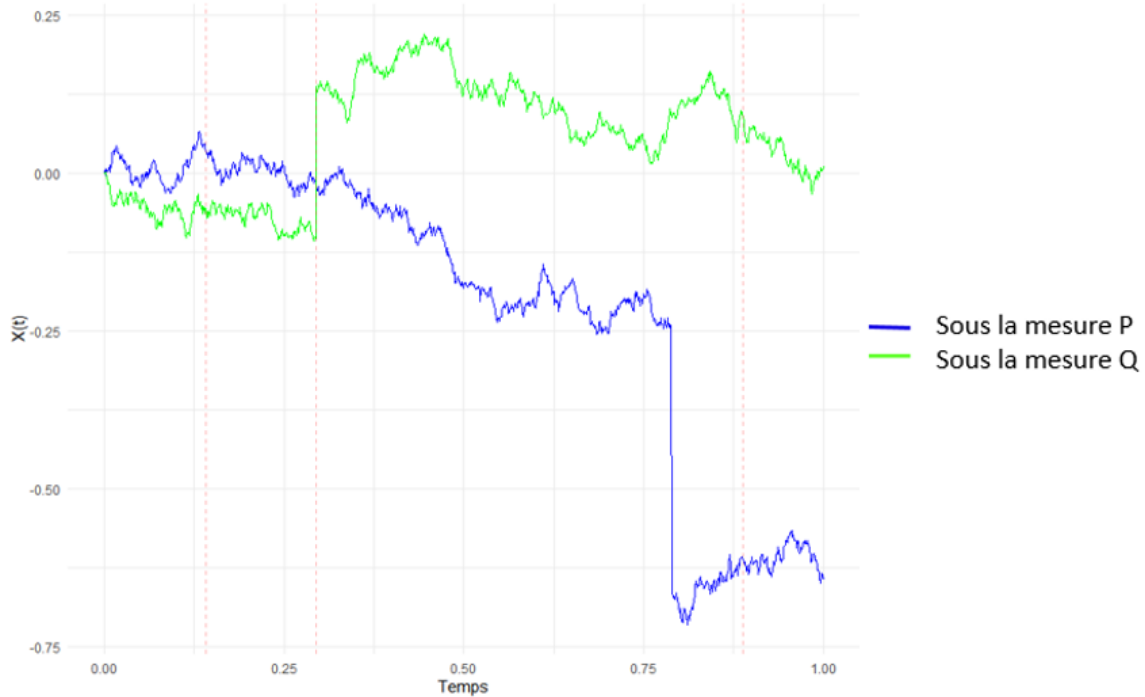


FIGURE 4.6 – Représentation graphique de l'application de théorème de Girsanov II sur Processus ITO-LEVY

Interprétation :

Le graphique (Figure 4.6) illustre la transformation d'un processus d'Itô-Lévy avant et après l'application du théorème de Girsanov II, mettant en évidence l'impact du changement de mesure sur la dynamique du processus.

1. Processus sous la mesure Q :

- (a) **Plus de drift résiduel** : La tendance est neutralisée.
- (b) **Sauts rééquilibrés** : Leur intensité moyenne est ajustée via $\beta(t, z)$
- (c) **Trajectoire centrée** : Oscillations autour d'une moyenne stable (martingale).
- (d) **Sauts persistants mais compensés** : Moins extrêmes ou moins fréquents (selon $\beta(t, z)$).

TABLE 4.2 – Comparaison entre l’application des théorèmes de Girsanov I et II au processus d’Itô-Lévy

Aspect	Girsanov I	Girsanov II
Objectif	Neutraliser uniquement le drift continu	Neutraliser le drift continu et compenser les sauts
Densité Z_t	Ajuste le mouvement brownien via u_t	Ajuste le brownien et les sauts via u_t et $\beta(t, z)$
Équation sous Q	$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t + \int \gamma \tilde{N}(dt, dz)$ (sauts inchangés)	$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t + \int \gamma \tilde{N}^Q(dt, dz)$ (sauts compensés)
Flexibilité	Limitée (ignore les sauts)	Haute (contrôle complet du drift et des sauts)
Applications	Marchés “lisses” sans sauts	Marchés avec crises/crashes (ex. options exotiques)
Représentation graphique	Bruit brownien + sauts bruts	Bruit brownien + sauts atténués
Complexité	Simple (un paramètre u_t)	Complexe (nécessite u_t et $\beta(t, z)$)
Résumé	“Reset” du drift continu	“Réglage fin” du drift et des sauts

4.3 Comparaison des applications des théorèmes de Girsanov I et II sur les processus d’Ornstien-Uhlenbeck et d’Itô-Lévy

Ce tableau met en évidence que sous la mesure Q , le processus d’Ornstein-Uhlenbeck devient un mouvement brownien pur, tandis que le processus d’Itô-Lévy conserve ses sauts, ce qui peut être limitant dans certaines applications financières où les sauts représentent des risques significatifs :

Voici un tableau comparatif entre l’application du théorème de Girsanov I au processus d’Ornstein-Uhlenbeck et au processus d’Itô-Lévy :

TABLE 4.3 – Comparaison entre l'application du théorème de Girsanov I au processus d'Ornstein-Uhlenbeck et au processus d'Itô-Lévy

Critère	Processus d'Ornstein Uhlenbeck	Processus d'Itô-Lévy
Équation sous \mathbb{P}	$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t$	$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t + \int \gamma(t, z) \tilde{N}(dt, dz)$
Objectif	Supprimer le drift $-\theta X_t$	Neutraliser uniquement le drift continu $b(t, X_t)$
Densité Z_t	$\exp\left(\int_0^t \frac{\theta}{\sigma} X_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\theta}{\sigma} X_s\right)^2 ds\right)$	$\exp\left(-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds\right)$
Équation sous \mathbb{Q}	$dX_t = \sigma d\tilde{B}_t$	$dX_t = \sigma(t, X_t) d\tilde{B}_t + \int \gamma(t, z) \tilde{N}(dt, dz)$
Impact	Mouvement brownien pur	Drift supprimé, sauts non compensés
Applications	Taux d'intérêt, physique stochastique	Limité (inadapté aux sauts)

Voici un tableau comparatif entre l'application du théorème de Girsanov II au processus d'Ornstein-Uhlenbeck et au processus d'Itô-Lévy :

TABLE 4.4 – Comparaison entre l’application du théorème de Girsanov II au processus d’Ornstein-Uhlenbeck et au processus d’Itô-Lévy

Critère	Processus d’Ornstein Uhlenbeck	Processus d’Itô-Lévy
Équation sous \mathbb{P}	$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t$	$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t + \int \gamma(t, z) \tilde{N}(dt, dz)$
Objectif	Remplacer le drift par α_t	Compenser drift et sauts via $\beta(t, z)$
Densité Z_t	$Z_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{\theta X_s + \alpha_s}{\sigma} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\theta X_s + \alpha_s}{\sigma}\right)^2 ds\right)$	$Z_t = \exp\left(-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds + \int_0^t \int \ln(1 - \beta(s, z)) \tilde{N}(ds, dz) + \text{compensation}\right)$
Équation sous Q	$dX_t = \alpha_t dt + \sigma d\tilde{B}_t$	$dX_t = (\text{drift ajusté}) dt + \sigma(t, X_t) d\tilde{B}_t + \int \gamma(t, z) \tilde{N}^Q(dt, dz)$
Impact	Drift personnalisable	Martingale locale (drift et sauts compensés)
Applications	Contrôle de systèmes dynamiques	Pricing d’options avec sauts

Conclusion

À travers ce mémoire, nous avons exploré les fondements de la théorie des processus stochastiques, de l'intégration stochastique et du changement de mesure probabiliste. Après avoir introduit les concepts essentiels et les outils du calcul stochastique, nous avons étudié en détail le théorème de Girsanov, un résultat fondamental permettant de modifier la dynamique d'un processus sous une nouvelle mesure.

Nous avons vu que le théorème de Girsanov constitue un outil puissant, non seulement sur le plan théorique, mais aussi pour de nombreuses applications pratiques. En particulier, son utilisation dans l'étude du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et des processus d'Itô-Lévy illustre son importance pour la modélisation de systèmes aléatoires complexes.

Ainsi, ce travail met en lumière l'élégance et la portée du théorème de Girsanov dans l'analyse des phénomènes aléatoires, tout en ouvrant la voie à des recherches futures, notamment dans les domaines de la finance quantitative, du contrôle optimal et de la théorie des équations différentielles stochastiques .

Bibliographie

- [1] Aldéric Joulin. *Martingales et Applications*, pages :11. Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.
- [2] Aldéric JOULIN. *Calcul Stochastique (Polycopié du Cours de Base C2)*, pages :17. Institut de Mathématiques, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2012.
- [3] Alexandre Popier. *Calcul Stochastique (Applications en Finance)*, pages :84. ENSAI, 3A, GDRIF, 2017.
- [4] Alexandre Popier. *Calcul Stochastique (Applications en Finance)*, pages :31. ENSAI, 3A, GDRIF, 2017.
- [5] Bernt Øksendal, Agnès Sulem. *Applied stochastic control of Jump Diffusions*, pages :17. Berlin, Springer, 2004.
- [6] Bernt Øksendal, Agnès Sulem. *Applied stochastic control of Jump Diffusions*, pages :15. Berlin, Springer, 2004.
- [7] Bernt Øksendal, Agnès Sulem. *Applied stochastic control of Jump Diffusions*, pages :16. Berlin, Springer, 2004.
- [8] Bernt Øksendal, Agnès Sulem. *Applied stochastic control of Jump Diffusions*, pages :19-21. Berlin, Springer, 2004.
- [9] Bernt Øksendal, Agnès Sulem. *Applied stochastic control of Jump Diffusions*, pages :21. Berlin, Springer, 2004.
- [10] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, pages :155. Springer-Verlag Heidelberg New York, France, 2000.

-
- [11] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, pages :154. Springer-Verlag Heidelberg New York, France, 2000.
- [12] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, pages :156. Springer-Verlag Heidelberg New York, France, 2000.
- [13] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, pages :156. Springer-Verlag Heidelberg New York, France, 2000.
- [14] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, pages :157. Springer-Verlag Heidelberg New York, France, 2000.
- [15] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, pages :158. Springer-Verlag Heidelberg New York, France, 2000.
- [16] Basile De Loynes. *Martingales et Processus de Levy 2A*, pages :07. ENSAI, France, 2015.
- [17] Basile De Loynes. *Martingales et Processus de Levy 2A*, pages :44. ENSAI, France, 2015.
- [18] Florin Avram. *Probabilités Avancées*, pages :04. Département de Mathématiques, Université de Pau, France, 2014.
- [19] Florin Avram. *Probabilités Avancées*, pages :05. Département de Mathématiques, Université de Pau, France, 2014.
- [20] Florin Avram. *Probabilités Avancées*, pages :31. Département de Mathématiques, Université de Pau, France, 2014.
- [21] Ioannis Karatzas, Steven Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus. Second Edition*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [22] Jean-François Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*, pages :9-11. Département Mathématiques et Applications, École normale supérieure de Paris, 2006.
- [23] Jean-François Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*, pages :11. Département Mathématiques et Applications, École normale supérieure de Paris, 2006.
- [24] Jean-François Le Gall. *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires*, pages :94. Département Mathématiques et Applications, École normale supérieure de Paris, 2006.

-
- [25] Jean Christopher Breton. *Processus Stochastiques M2 Mathématiques*, pages :31. Département de Mathématiques, Université de Pau, France, 2014.
- [26] Jean Christopher Breton. *Processus Stochastiques M2 Mathématiques*. Département de Mathématiques, Université de Pau, France, 2014.
- [27] Jean Christopher Breton. *Processus Stochastiques M2 Mathématiques*, pages :50. Département de Mathématiques, Université de Pau, France, 2014.
- [28] Jean-Christophe Breton. *Processus Stochastiques M2 Mathématiques*, pages :03. IRMAR, Institut de Recherche Mathématique de Rennes Équipe de Processus Stochastiques Université de Rennes, 2024.
- [29] Lionel Truquet. *Probabilités Pour L'ingénieur cours de master 1*, pages :07. Université Rennes I, Campus de Beaulieu France, 2012.
- [30] Lionel Truquet. *Statistiques des Processus (Cours de Master 2)*, pages :24. Université Rennes I, Campus de Beaulieu, France, 2011.
- [31] Massimiliano Gubinelli. *Processus discrets*, pages :02. Université d'Oxford, 2012.
- [32] Monique Jeanblanc. *Intégrale stochastique*, pages :21. Université d'Évry Val-d'Essonne Paris, France, 2006.
- [33] Monique Jeanblanc. *Cours de Calcul Stochastique*, pages :67. Université Évry Paris, France, 2005.
- [34] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Éléments de Calcul Stochastique*, pages :44-46. Université Évry Paris, France, 2005.
- [35] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Éléments de Calcul Stochastique*, pages :51. Université Évry Paris, France, 2005.
- [36] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Éléments de Calcul Stochastique*, pages :53. Université Évry Paris, France, 2005.
- [37] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Éléments de Calcul Stochastique*, pages :49-50. Université Évry Paris, France, 2005.
- [38] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Éléments de Calcul Stochastique*, pages :50. Université Évry Paris, France, 2005.

- [39] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Eléments de Calcul Stochastique*, pages :43. Université Évry Paris, France, 2005.
- [40] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Eléments de Calcul Stochastique*, pages :38. IRMAR, Université Évry Paris, France, 2005.
- [41] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Eléments de Calcul Stochastique*, pages :48. IRMAR, Université Évry Paris, France, 2005.
- [42] Monique Jeanblanc, Thomas Simon. *Eléments de Calcul Stochastique*, pages :51. IRMAR, Université Évry Paris, France, 2005.
- [43] Nicholas Privault. *Introduction to Stochastic Finance with Market Examples (Second Edition)*, pages :149. Université Paul Sabatier, Toulouse, 2022.
- [44] Peter Maurer. *Théorème de Radon Nikodym*, pages :1-3. ENS Rennes, 2017.
- [45] Philip Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*, pages :33. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [46] Romuald Elie, Idris KHARROUBI. *Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, pages :42. Département Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure de Paris, 2006.
- [47] Thierry Chonavel. *Equations Différentielles Stochastiques : Notes de cours*, pages :18-21. Département Mathématiques et Applications, École normale supérieure de Paris, 2011.
- [48] Thierry Chonavel. *Equations Différentielles Stochastiques : Notes de cours*, pages :21. Département Mathématiques et Applications, École normale supérieure de Paris, 2011.

Annexes

Annexe A :

A.1 Simulation d'un processus stochastique (mouvement brownien)

R Script :

```
1 # Param tres
2 T <- 1           # Horizon de temps [0, T]
3 n <- 1000       # Nombre de pas de temps
4 dt <- T / n     # Taille du pas de temps
5 m <- 3          # Nombre detrajectoires    simuler
6 # Initialisation
7 t <- seq(0, T, by = dt) # Vecteur de temps
8 X <- matrix(0, nrow = m, ncol = n + 1) # Matrice pour stocker
   lestrajectoires
9 # Simulation des trajectoires
10 set.seed(123) # Pour la reproductibilit
11 for (j in 1:m) {
12   for (i in 2:(n + 1)) {
13     # Increment gaussien :  $X_t - X_s \sim N(0, dt)$ 
14     X[j, i] <- X[j, i - 1] + rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt))
15   }
16 }
17 # Affichage des trajectoires
18 colors <- rainbow(m) # Couleurs pour les trajectoires
```

```

19 plot(t, X[1, ], type = "l", col = colors[1], ylim = range(X), xlab = "
    Temps (t)", ylab = "X_t( )",
20 main = "Simulation d'un processus stochastique")
21 for (j in 2:m) {
22   lines(t, X[j, ], type = "l", col = colors[j])
23 }
24 grid()
25 legend("topright", legend = paste("Trajectoire", 1:m), col = colors,
    lty = 1, cex = 0.8)

```

A.2 Simulation d'un mouvement brownien standard :

R Script :

```

1 # Param tres
2 T <- 1          # Horizon de temps [0, T]
3 n <- 1000      # Nombre de pas de temps
4 dt <- T / n    # Taille du pas de temps
5
6 # Initialisation
7 t <- seq(0, T, by = dt) # Vecteur de temps
8 B <- numeric(n + 1)     # Vecteur pour stocker les valeurs du
    mouvement brownien
9 B[1] <- 0               # Le mouvement brownien commence 0
10
11 # Simulation du mouvement brownien
12 set.seed(123) # Pour la reproductibilit
13 for (i in 2:(n + 1)) {
14   # Incr ment gaussien : B_t - B_s ~ N(0, dt)
15   B[i] <- B[i - 1] + rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt))
16 }
17
18 # Affichage de la trajectoire
19 plot(t, B, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
20       xlab = "Temps (t)", ylab = "B(t)",

```

```
21     main = "Simulation d'un mouvement brownien standard")
22 grid()
```

A.3 Simulation d'un mouvement brownien en 2 dimensions :

R Script :

```
1 # Param tres
2 T <- 1           # Horizon de temps [0, T]
3 n <- 1000       # Nombre de pas de temps
4 dt <- T / n     # Taille du pas de temps
5
6 # Initialisation
7 t <- seq(0, T, by = dt) # Vecteur de temps
8 Bx <- numeric(n + 1)   # Mouvement brownien en x
9 By <- numeric(n + 1)   # Mouvement brownien en y
10 Bx[1] <- 0             # D part en x = 0
11 By[1] <- 0            # D part en y = 0
12
13 # Simulation du mouvement brownien en 2D
14 set.seed(123) # Pour la reproductibilit
15 for (i in 2:(n + 1)) {
16     # Incr ments gaussiens ind pendants pour x et y
17     dBx <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt))
18     dBy <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt))
19
20     # Mise      jour des positions
21     Bx[i] <- Bx[i - 1] + dBx
22     By[i] <- By[i - 1] + dBy
23 }
24
25 # Affichage de la trajectoire 2D
26 plot(Bx, By, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
27       xlab = "Bx(t)", ylab = "By(t)",
28       main = "Simulation d'un mouvement brownien en 2D")
```

```

29 points(Bx[1], By[1], col = "green", pch = 19) # Point de d part
30 points(Bx[n + 1], By[n + 1], col = "red", pch = 19) # Point d'
    arriv e
31 grid()

```

Annexe B :

B.1 Simulation de d'intégrale de wiener et processus de wiener :

R Script :

```

1 # Charger les bibliothèques nécessaires
2 library(ggplot2)
3
4 # Paramètres de la simulation
5 n <- 1000 # Nombre de pas de temps
6 T <- 1 # Temps total
7 dt <- T/n # Intervalle de temps entre chaque pas
8
9 # Initialisation des vecteurs
10 time <- seq(0, T, by = dt) # Vecteur de temps
11 W <- numeric(n+1) # Processus de Wiener
12 I <- numeric(n+1) # Intégrale de Wiener
13
14 # Simulation du processus de Wiener et de l'intégrale de Wiener
15 set.seed(123) # Pour la reproductibilité
16 for (i in 2:(n+1)) {
17 # Increment du processus de Wiener
18 dW <- rnorm(1, mean = 0, sd = sqrt(dt))
19 W[i] <- W[i-1] + dW
20
21 # Calcul de l'intégrale de Wiener pour f(s) = s
22 I[i] <- I[i-1] + time[i-1] * dW
23 }

```

```

24
25 # Tracer le processus de Wiener et l'intégrale de Wiener
26 df <- data.frame(time, Wiener = W, Integrale = I)
27 ggplot(df, aes(x = time)) +
28   geom_line(aes(y = Wiener, color = "Processus de Wiener")) +
29   geom_line(aes(y = Integrale, color = "Intégrale de Wiener")) +
30   labs(title = "Simulation du processus de Wiener et de l'intégrale
31         de Wiener",
32         x = "Temps",
33         y = "Valeur",
34         color = "Légende") +
35   theme_minimal()

```

Annexe C :

C.1 Simulation de processus de Ornstein-Uhlenbeck :

R Script :

```

1 # Charger la librairie
2 library(ggplot2)
3
4 # Paramètres du processus
5 set.seed(123)
6 theta <- 2
7 sigma <- 1
8 x0 <- 10
9 T <- 10
10 n <- 2000
11 dt <- T / n
12 time <- seq(0, T, length.out = n + 1)
13
14 # Mouvement brownien
15 dW <- rnorm(n, mean = 0, sd = sqrt(dt))

```

```

16
17 # Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck
18 X <- numeric(n + 1)
19 X[1] <- x0
20 for (i in 1:n) {
21   X[i + 1] <- X[i] - theta * X[i] * dt + sigma * dW[i]
22 }
23
24 # Dataframe
25 data <- data.frame(
26   time = time,
27   OU = X,
28   Processus = "Ornstein-Uhlenbeck" # Ajout d'une colonne pour
      l gende
29 )
30
31 # Graphique avec l gende
32 ggplot(data, aes(x = time, y = OU, color = Processus)) +
33   geom_line(size = 1) +
34   scale_color_manual(
35     name = NULL,
36     values = c("Ornstein-Uhlenbeck" = "#357BA2")
37   ) +
38   labs(
39     x = "Temps",
40     y = "Valeur",
41
42   ) +
43   theme_minimal(base_size = 13) +
44   theme(
45     plot.title = element_text(face = "bold", hjust = 0.5),
46     legend.position = "bottom",
47     legend.text = element_text(size = 11),
48     plot.background = element_rect(fill = "white", color = NA),
49     panel.background = element_rect(fill = "white", color = NA)
50   )

```

C.2 Simulation de Théoreme de Girsanov I appliqué au processus de Ornstein-Uhlenbeck :

R Script :

```
1 library(ggplot2)
2 # Param tres de la simulation
3 set.seed(123)
4 theta <- 2
5 sigma <- 1
6 x0 <- 10
7 T <- 10
8 n <- 2000
9 dt <- T/n
10 time <- seq(0, T, length.out = n+1)
11
12 # Simulation Ornstein-Uhlenbeck
13 dW <- rnorm(n, 0, sqrt(dt))
14 X <- numeric(n+1)
15 X[1] = x0
16
17 for (i in 1:n) {
18   X[i+1] <- X[i] - theta*X[i]*dt + sigma*dW[i]
19 }
20
21 # Calcul du processus de Girsanov (inchang )
22 integral_W <- cumsum((-theta/sigma)*X[1:n]*dW)
23 integral_t <- cumsum(0.5*(theta/sigma*X[1:n])^2*dt)
24 Z <- exp(integral_W - integral_t)
25 Z <- c(1, Z)
26
27 # Mouvement brownien sous Q
28 W <- c(0, cumsum(dW))
```

```

29 W_tilde <- W + (theta/sigma)*cumsum(c(0, X[1:n]*dt))
30
31 # Dataframe (inchang )
32 data <- data.frame(
33   time = time,
34   OU = X,
35   Girsanov = Z,
36   W_tilde = W_tilde
37 )
38
39 # Graphique
40 ggplot(data, aes(x = time)) +
41   geom_line(aes(y = OU, color = "Ornstein-Uhlenbeck"),
42             linewidth = 0.8, alpha = 0.9) +
43   geom_line(aes(y = Girsanov, color = "Densit de Rdaon Nikodym"),
44             linewidth = 0.8, linetype = "longdash") +
45   geom_line(aes(y = W_tilde, color = "Mouvement Brownien sous Q"),
46             linewidth = 0.8, alpha = 0.8) +
47   scale_color_manual(
48     name = NULL,
49     values = c(
50       "Ornstein-Uhlenbeck" = "#357BA2",
51       "Densit de Rdaon Nikodym" = "#A23550",
52       "Mouvement Brownien sous Q" = "#5A8C36"
53     ),
54     guide = guide_legend(override.aes = list(
55       linetype = c("solid", "longdash", "solid"),
56       linewidth = c(1.3, 1.1, 1.1)
57     ))
58 ) +
59 labs(
60
61   x = "Temps",
62   y = "Valeur",
63
64 ) +

```

```

65 theme_minimal(base_size = 13) +
66 theme(
67   plot.title = element_text(face = "bold", hjust = 0.5, size = 14),
68   plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, color = "grey40"),
69   legend.position = "bottom",
70   legend.text = element_text(size = 11),
71   panel.grid.major = element_line(color = "grey90", linewidth =
72     0.2),
73   panel.grid.minor = element_blank(),
74   plot.background = element_rect(fill = "white", color = NA),
75   panel.background = element_rect(fill = "white", color = NA)
76 ) +
77 scale_x_continuous(expand = c(0, 0.01)) +
78 scale_y_continuous(expand = expansion(mult = c(0.03, 0.1)))
79 # V rifications
80 cat("=== Validation ===\n")
81 cat("Corr lation (dX, dW~):", round(corr(diff(X), diff(W_tilde)), 5),
82   "\n")
83 cat("Moyenne de Z:", round(mean(Z), 5), "\n")

```

C.3 Simulation de Théoreme de Girsanov II appliqué au processus de Ornetien-Uhlenbeck :

R Script :

```

1 library(ggplot2)
2 # Param tres de la simulation
3 set.seed(123)
4 theta <- 2      # Param tre de retour      la moyenne
5 sigma <- 1     # Volatilit
6 x0 <- 10      # Valeur initiale
7 T <- 10      # Horizon temporel
8 n <- 2000    # Nombre de pas de temps
9 dt <- T/n    # Pas de temps

```

```

10 time <- seq(0, T, length.out = n+1)
11
12 # Simulation du processus Ornstein-Uhlenbeck sous P
13 dW <- rnorm(n, 0, sqrt(dt)) # Bruit brownien sous P
14 X <- numeric(n+1)
15 X[1] <- x0
16
17 for (i in 1:n) {
18   X[i+1] <- X[i] - theta * X[i] * dt + sigma * dW[i] # dXt = - Xt
19     dt + dBt
20 }
21 # Terme additionnel at (suppos constant pour l'exemple)
22 alpha <- 1.5
23 alpha_t <- rep(alpha, n)
24
25 # Processus u_t = (- Xt - at) / (pour le changement de mesure)
26 u_t <- (-theta * X[1:n] - alpha_t) / sigma
27
28 # Processus de Girsanov Mt = exp( u_s dB_s - 0.5 u_s ds)
29 integral_W <- cumsum(u_t * dW)
30 integral_t <- cumsum(0.5 * u_t^2 * dt)
31 M_t <- exp(integral_W - integral_t)
32 M_t <- c(1, M_t) # M0 = 1
33
34 # Mouvement brownien sous Q: B~t = Bt + u_s ds
35 B_t <- c(0, cumsum(dW))
36 B_tilde <- B_t + cumsum(c(0, u_t * dt))
37
38 # Dynamique de Xt sous Q: dXt = at dt + dB~t
39 X_Q <- numeric(n+1)
40 X_Q[1] <- x0
41 for (i in 1:n) {
42   X_Q[i+1] <- X_Q[i] + alpha_t[i] * dt + sigma * (B_tilde[i+1] - B_
43     tilde[i])

```

```

44 # Dataframe pour visualisation
45 data <- data.frame(
46   time = time,
47   OU_P = X,      # Processus sous P
48   OU_Q = X_Q,    # Processus sous Q
49   M_t = M_t,     # Martingale de Girsanov
50   B_tilde = B_tilde # Brownien sous Q
51 )
52 # Graphique
53 ggplot(data, aes(x = time)) +
54   geom_line(aes(y = OU_P, color = "Ornstein-Uhlenbeck sous P"),
55             linewidth = 0.8) +
56   geom_line(aes(y = OU_Q, color = "Ornstein-Uhlenbeck sous Q"),
57             linewidth = 0.8, linetype = "dashed") +
58   geom_line(aes(y = M_t, color = "Densit de Radon-Nikodym (Mt)"),
59             linewidth = 0.8, alpha = 0.7) +
60   geom_line(aes(y = B_tilde, color = "Mouvement Brownien sous Q"),
61             linewidth = 0.6, alpha = 0.6) +
62   scale_color_manual(
63     name = NULL,
64     values = c(
65       "Ornstein-Uhlenbeck sous P" = "#357BA2",
66       "Ornstein-Uhlenbeck sous Q" = "#A23550",
67       "Densit de Radon-Nikodym (Mt)" = "#5A8C36",
68       "Mouvement Brownien sous Q" = "#8C36A2"
69     )
70   ) +
71   labs(
72     x = "Temps",
73     y = "Valeur",
74   ) +
75   theme_minimal(base_size = 12) +
76   theme(
77     plot.title = element_text(face = "bold", hjust = 0.5),
78     legend.position = "bottom",
79     panel.grid.major = element_line(color = "grey90", linewidth =

```

```

    0.2),
76   panel.grid.minor = element_blank()
77   )
78 # V rifications
79 cat("=== Validation ===\n")
80 cat("Moyenne de Mt (doit tre ~1):", round(mean(M_t), 4), "\n")
81 cat("Corr lation (dX sous Q, dB~t):", round(cor(diff(X_Q), diff(B_
    tilde[-1])), 4), "\n")

```

B.4 Simulation de processus de Ito-Lévy :

R Script :

```

1  if (!require("Sim.DiffProc")) install.packages("Sim.DiffProc")
2  if (!require("ggplot2")) install.packages("ggplot2")
3  library(Sim.DiffProc)
4  library(ggplot2)
5  set.seed(123) # Pour la reproductibilit
6  T <- 1 # Temps final
7  N <- 1000 # Nombre de pas de temps
8  dt <- T/N # Taille du pas de temps
9  x0 <- 0 # Valeur initiale du processus
10 b <- function(t, x) 0.1 * x # D rive (drift)
11 sigma <- function(t, x) 0.2 * sqrt(1 + x^2) # Diffusion
12 gamma <- function(t, x, z) 0.5 * z * x # Amplitude des sauts
13 lambda <- 2 # Intensit du processus de Poisson
14 simuler_sauts <- function() {
15   N_sauts <- rpois(1, lambda * T) # Nombre de sauts sur [0, T]
16   if (N_sauts == 0) return(list(temps = numeric(0), tailles = numeric
17     (0)))
18   list(
19     temps = sort(runif(N_sauts, 0, T)), # Temps des sauts
20     uniform ment r partis
21     tailles = rcauchy(N_sauts) # Tailles des sauts (loi de
22     Cauchy)

```

```

20 )
21 }
22 X <- numeric(N + 1) # Initialisation du processus
23 X[1] <- x0          # Condition initiale
24 sauts <- simuler_sauts() # Simulation des sauts
25 dB <- rnorm(N, 0, sqrt(dt)) # Incr ments du mouvement brownien
26 jump_indices <- integer(0) # Indices des sauts
27
28 for (i in 1:N) {
29   t <- (i - 1) * dt
30   dx <- b(t, X[i]) * dt + sigma(t, X[i]) * dB[i] # Partie diffusion
31
32   # Gestion des sauts dans l'intervalle ]t, t + dt]
33   idx <- which(sauts$temps > t & sauts$temps <= t + dt)
34   if (length(idx) > 0) {
35     for (k in idx) {
36       dx <- dx + gamma(t, X[i], sauts$tailles[k]) # Ajout des sauts
37     }
38     jump_indices <- c(jump_indices, i + 1) # Stockage des indices de
39     saut
40   }
41   X[i + 1] <- X[i] + dx # Mise jour du processus
42 }
43 df <- data.frame(
44   temps = seq(0, T, length.out = N + 1),
45   valeur = X,
46   saut = seq_along(X) %in% jump_indices
47 )
48 graph <- ggplot(df, aes(x = temps, y = valeur)) +
49   geom_line(color = "blue") +
50   geom_point(data = subset(df, saut), color = "red", size = 2, shape
51     = 4) +
52   labs(
53     x = "Temps",
54     y = "X(t)" +

```

```

54 theme_minimal()
55
56 print(graph) # Affichage obligatoire

```

B.5 Simulation de Théoreme de Girsanov I appliqué au processus de Ito-Lévy

R Script :

```

1 # Installer les packages si n cessaire
2 if (!require("Sim.DiffProc")) install.packages("Sim.DiffProc")
3 if (!require("ggplot2")) install.packages("ggplot2")
4 if (!require("dplyr")) install.packages("dplyr")
5
6 library(Sim.DiffProc)
7 library(ggplot2)
8 library(dplyr)
9
10 # Param tres de base
11 set.seed(123)
12 T <- 1 # Horizon temporel
13 N <- 1000 # Nombre de pas de temps
14 dt <- T/N # Pas de temps
15 x0 <- 0 # Valeur initiale
16
17 # Fonctions caract ristiques du processus sous P
18 b <- function(t, x) 0.1 * x # D rive
19 sigma <- function(t, x) 0.2 * sqrt(1 + x^2) # Diffusion
20 gamma <- function(t, x, z) 0.5 * z * x # Amplitude des sauts
21
22 # Param tres du processus de sauts (Poisson compos )
23 lambda <- 2 # Intensit des
24 sauts
25 # Simulation des sauts (sous P)

```

```

26 simuler_sauts <- function() {
27   N_sauts <- rpois(1, lambda * T)
28   if (N_sauts == 0) return(list(temps = numeric(0), tailles = numeric
29     (0)))
30   list(
31     temps = sort(runif(N_sauts, 0, T)),           # Temps des sauts
32     tailles = rcauchy(N_sauts)                   # Tailles des sauts (
33       loi de Cauchy)
34   )
35 }
36
37 # Fonction pour simuler X sous P
38
39 simuler_X_P <- function() {
40   X <- numeric(N + 1)
41   X[1] <- x0
42   sauts <- simuler_sauts()
43   dB <- rnorm(N, 0, sqrt(dt))                    # Mouvement brownien
44   jump_indices <- integer(0)
45
46   for (i in 1:N) {
47     t <- (i - 1) * dt
48     dx <- b(t, X[i]) * dt + sigma(t, X[i]) * dB[i]
49
50     # Gestion des sauts
51     idx <- which(sauts$temps > t & sauts$temps <= t + dt)
52     if (length(idx) > 0) {
53       for (k in idx) {
54         dx <- dx + gamma(t, X[i], sauts$tailles[k])
55       }
56       jump_indices <- c(jump_indices, i + 1)
57     }
58     X[i + 1] <- X[i] + dx
59   }
60   return(list(X = X, sauts = sauts, jump_indices = jump_indices))
61 }

```

```

60 # Simulation du processus sous P
61 sim_P <- simuler_X_P()
62 X_P <- sim_P$X
63 sauts_P <- sim_P$sauts
64 jump_indices_P <- sim_P$jump_indices
65
66 # Fonction pour calculer Z_t (density process)
67 calculer_Z <- fonction(u, phi, dB, sauts) {
68   Z <- numeric(N + 1)
69   Z[1] <- 1
70
71   # Composante brownienne
72   integrale_B <- cumsum(-u * dB) - 0.5 * cumsum(u^2) * dt
73
74   # Composante sauts
75   integrale_sauts <- 0
76   if (length(sauts$temps) > 0) {
77     for (k in 1:length(sauts$temps)) {
78       t_k <- sauts$temps[k]
79       i_k <- floor(t_k / dt) + 1
80       z_k <- sauts$tailles[k]
81       phi_k <- phi # Ici, phi est constant pour simplifier
82       integrale_sauts <- integrale_sauts + log(1 - phi_k)
83     }
84   }
85
86   # Correction drift des sauts
87   correction_sauts <- lambda * T * (log(1 - phi) + phi) #
      Approximation si phi constant
88
89   Z <- exp(integrale_B + integrale_sauts + correction_sauts)
90   return(Z)
91 }
92
93 # Choix de u(t) et phi(t,z) pour annuler la d rive (condition de
      Girsanov)

```

```

94 u <- function(t, x) b(t, x) / sigma(t, x) # u(t) = b(t,X_t)/sigma(t,
      X_t)
95 phi <- 0.3 # Choix arbitraire (doit vérifier des conditions
      techniques)
96
97 # Calcul de Z_t
98 dB_P <- rnorm(N, 0, sqrt(dt)) # Mouvement brownien sous P
99 Z <- calculer_Z(u = u(seq(0, T, dt), X_P[-length(X_P)]), phi, dB_P,
      sauts_P)
100
101 # Simulation de X sous Q (en utilisant Z_t)
102 X_Q <- X_P / Z # Transformation de Girsanov (approximation)
103
104 # Création des data.frames pour ggplot
105 df_P <- data.frame(
106   temps = seq(0, T, length.out = N + 1),
107   valeur = X_P,
108   mesure = "P"
109 )
110
111 df_Q <- data.frame(
112   temps = seq(0, T, length.out = N + 1),
113   valeur = X_Q,
114   mesure = "Q"
115 )
116
117 df_combined <- rbind(df_P, df_Q)
118
119 # Graphique comparant P et Q
120 ggplot(df_combined, aes(x = temps, y = valeur, color = mesure)) +
121   geom_line() +
122   labs(
123     x = "Temps",
124     y = "X(t)"
125   ) +
126   theme_minimal() +

```

```
127 scale_color_manual(values = c("P" = "blue", "Q" = "red"))
```

B.6 Simulation de Théoreme de Girsanov II appliqué au processus de Ito-Lévy :

R Script :

```
1 # Installer les packages si n cessaire
2 if (!require("Sim.DiffProc")) install.packages("Sim.DiffProc")
3 if (!require("ggplot2")) install.packages("ggplot2")
4 if (!require("dplyr")) install.packages("dplyr")
5
6 library(Sim.DiffProc)
7 library(ggplot2)
8 library(dplyr)
9
10 # Param tres de base
11 set.seed(123)
12 T <- 1
13 N <- 1000
14 dt <- T / N
15 x0 <- 0
16
17 # Fonctions caract ristiques du processus sous P
18 b <- function(t, x) 0.1 * x
19 sigma <- function(t, x) 0.2 * sqrt(1 + x^2)
20 gamma <- function(t, x, z) 0.5 * z * x
21
22 # Param tres du processus de sauts
23 lambda <- 2
24
25 # Simulation des sauts (sous P ou Q, selon les param tres)
26 simuler_sauts <- function() {
27   N_sauts <- rpois(1, lambda * T)
28   if (N_sauts == 0) return(list(temps = numeric(0), tailles = numeric
```

```

(0))
29 list(
30     temps = sort(runif(N_sauts, 0, T)),
31     tailles = rcauchy(N_sauts)
32 )
33 }
34
35 # Fonction pour simuler X sous P
36 simuler_X_P <- function() {
37     X <- numeric(N + 1)
38     X[1] <- x0
39     sauts <- simuler_sauts()
40     dB <- rnorm(N, 0, sqrt(dt))
41     jump_indices <- integer(0)
42     for (i in 1:N) {
43         t <- (i - 1) * dt
44         dx <- b(t, X[i]) * dt + sigma(t, X[i]) * dB[i]
45         # Gestion des sauts
46         idx <- which(sauts$temps > t & sauts$temps <= t + dt)
47         if (length(idx) > 0) {
48             for (k in idx) {
49                 dx <- dx + gamma(t, X[i], sauts$tailles[k])
50             }
51             jump_indices <- c(jump_indices, i + 1)
52         }
53         X[i + 1] <- X[i] + dx
54     }
55     return(list(X = X, sauts = sauts, jump_indices = jump_indices))
56 }
57 # Simulation sous P
58 sim_P <- simuler_X_P()
59 X_P <- sim_P$X
60 sauts_P <- sim_P$sauts
61 jump_indices_P <- sim_P$jump_indices
62 # D finir u(t,x) pour Girsanov II
63 u <- function(t, x) b(t, x) / sigma(t, x)

```

```

64 # Simulation sous Q (Girsanov II)
65 simuler_X_Q <- function() {
66   X <- numeric(N + 1)
67   X[1] <- x0
68   dB_Q <- rnorm(N, mean = 0, sd = sqrt(dt))
69   u_vals <- u(seq(0, T - dt, length.out = N), X[-(N + 1)]) #
70     Utilisation de X en cours de simulation
71   sauts_Q <- simuler_sauts()
72   for (i in 1:N) {
73     t <- (i - 1) * dt
74     dB_mod <- dB_Q[i] - u_vals[i] * dt
75     dx <- sigma(t, X[i]) * dB_mod
76     idx <- which(sauts_Q$temps > t & sauts_Q$temps <= t + dt)
77     if (length(idx) > 0) {
78       for (k in idx) {
79         dx <- dx + gamma(t, X[i], sauts_Q$tailles[k])
80       }
81     }
82     X[i + 1] <- X[i] + dx
83   }
84   return(list(X = X, sauts = sauts_Q))
85 }
86 # Simulation sous Q
87 sim_Q <- simuler_X_Q()
88 X_Q <- sim_Q$X
89 sauts_Q <- sim_Q$sauts
90 # Pr paration des donn es pour ggplot
91 df_P <- data.frame(
92   temps = seq(0, T, length.out = N + 1),
93   valeur = X_P,
94   mesure = "sous P"
95 )
96 df_Q <- data.frame(
97   temps = seq(0, T, length.out = N + 1),
98   valeur = X_Q,
99   mesure = "sous Q (Girsanov II)"

```

```
99 )
100 df_all <- bind_rows(df_P, df_Q)
101 # Visualisation
102 ggplot(df_all, aes(x = temps, y = valeur, color = mesure)) +
103   geom_line() +
104   labs(
105     x = "Temps",
106     y = "X(t)"
107   ) +
108   theme_minimal() +
109   scale_color_manual(values = c("sous P" = "blue", "sous Q (Girsanov
110     II)" = "green")) +
111   geom_vline(xintercept = sauts_Q$temps, color = "red", linetype = "
112     dashed", alpha = 0.3)
```