

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Biomathématique

Thème

**Existence et unicité des solutions des équations
différentielles semi-linéaires d'ordre fractionnaire**

Présenté Par :

Mlle KHELLADI Khedidja Samah

Devant le jury composé de :

BALASKA Lamia	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
BENKHEDDA Hanane	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
MEKHALFI Kheira	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadreur

Année Universitaire : 2025/2026

Remerciements

Je rends grâce à Allah, Le Tout-Puissant, qui m'a accompagnée et m'a accordé la force, la patience et la santé tout au long de ce parcours.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon encadrante, Madame **MEKHALFI Kheira**, pour sa rigueur scientifique et ses précieux conseils qui ont guidé mes recherches.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury. Je salue l'honneur que me fait Madame **BALASKA Lamia** en acceptant la présidence de cette soutenance, ainsi que Madame **BENKHEDDA Hanane** pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce manuscrit.

Je remercie l'ensemble du corps professoral du département de mathématiques pour leur contribution précieuse à ma formation universitaire.

Du fond du cœur, je remercie ma famille toute entière, parents, grands-parents, frères, sœurs, belles-sœurs, neveux et nièces, ainsi que mes amies et toutes les personnes qui me sont chères, pour leur amour, leurs prières et leur présence chaleureuse tout au long de ce parcours.

Je tiens également à remercier ma chère **AMINA CHAILI**, pour ses précieux conseils, son aide généreuse et ses encouragements sincères, tant dans la réalisation de ce travail que tout au long de mon parcours de master.

Je remercie l'ensemble de ma promotion de Master Biomathématiques pour les moments partagés tout au long de ces années. Une mention particulière à ma chère **MANEL BAKHTI**, pour sa complicité, sa générosité et tout ce que nous avons traversé ensemble.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont partagé mon quotidien et m'ont encouragée jusqu'à l'aboutissement de ce mémoire.

Dédicace

*À la mémoire de mon cher grand-père **Ahmed KHELLADI**, que Dieu le Tout-Puissant lui accorde Sa miséricorde et l'accueille en Son vaste paradis.*

*À mon très cher grand-père **Mohamed LARBI BEN DAHOUA**, la personne que j'aime le plus au monde.*

Tu m'as appris à lire, à écrire et à compter, et tu m'as transmis, avec une patience infinie, le goût de l'effort et la confiance en moi. Tout au long de ma vie, tu t'es sacrifié discrètement pour me voir avancer et sourire. Qu'Allah te préserve, te comble de bonheur et de santé, et te récompense par les plus hauts degrés du Paradis.

*À ma chère grand-mère **Khedidja BEN DADA**, dont j'ai hérité le caractère et la force, avec tout mon amour et mon admiration.*

*À mes très chers parents, **Merouane** et **Nadia**, pour les valeurs transmises, les sacrifices accomplis dans le silence et la présence rassurante dont ils ont entouré chacun de mes pas.*

*À **S. MAZOUZI**, pour sa douceur, sa gentillesse et son attention constante, pour chaque mot d'encouragement et chaque geste bienveillant qui ont accompagné chaque étape de ce parcours.*

*À mes chers frères **Mustapha**, **Ali** et **Ahmed**, et mes chères sœurs **Abir**, **Aya** et **Meriem**, pour votre affection et tout ce que nous avons vécu ensemble.*

*À mes chères belles-sœurs **Bouchra** et **Salih**, pour la bienveillance qu'elles apportent à notre famille.*

À vous tous, je dédie humblement le fruit de ce travail.

Résumé :

Ce mémoire étudie l'existence et l'unicité des solutions intégrales d'équations différentielles fractionnaire semi-linéaires à retard fini et infini via la dérivée de Riemann-Liouville. Sous condition de Lipschitz, le théorème de Banach assure l'unicité, sans cette condition, l'alternative de Leray-Schauder garantit l'existence si le semi-groupe est compact. Ces résultats sont illustrés par un modèle de croissance tumorale, une plaque viscoélastique en silicone médical et des équations différentielles fractionnaire dans $L^2[0, \pi]$.

Abstract :

This dissertation studies the existence and uniqueness of mild solutions for semi-linear fractional differential equations with finite and infinite delay in the framework of the Riemann–Liouville fractional derivative. Banach's Fixed Point Theorem is used to establish uniqueness, while the Leray–Schauder nonlinear alternative provides existence results. The theory is illustrated by a tumor growth model and an infinite-memory viscoelastic plate model.

الملخص

يتناول هذا العمل دراسة وجود ووحدانية الحلول المعتدلة للمعادلات التفاضلية الكسرية شبه الخطية ذات التأخير المحدود وغير المحدود في إطار مشتقة ريمان-ليوفيل الكسرية. وقد استعملت مبرهنة النقطة الثابتة لبيانات الوحدانية، بينما استخدم بديل ليراي-شودر غير الخطي لإثبات الوجود واختتمت الدراسة بتطبيقاتين يتمثلان في نموذج لنمو الأورام ونموذج لصفحة لزجة مرنة ذات ذاكرة غير محدودة

Table des matières

Introduction générale	6
1 Préliminaires	8
1.1 Notations et définitions	8
1.2 Théorie des C_0 Semi-groupes	11
1.3 Calcul fractionnaire	14
1.3.1 Fonctions spéciales	14
1.3.2 Intégration et dérivation fractionnaire	22
1.4 Théorèmes de point fixe	29
2 Équations différentielles semi-linéaires d'ordre fractionnaire à retard fini	30
2.1 Introduction	30
2.2 Résultats principaux	31
2.3 Application biologique : Modèle de croissance tumorale	39
3 Équations différentielles semi-linéaires d'ordre fractionnaire à retard infini	43
3.1 Introduction	43
3.2 Quelques exemples d'espaces de phase	44
3.3 Résultats principaux	45
3.4 Application en physique : Modèle de plaque viscoélastique avec mémoire infinie	54
Conclusion générale	62
Bibliographie	63

Notations et symboles

Ensembles

- $\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$ Ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{C}$ Ensemble des nombres complexes.
- $[a, b]$ Intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
- $C([a, b], \mathbb{R})$ Ensemble des fonctions réelles continues sur $[a, b]$.
- $C([a, b], E)$ Espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans E .
- $L^p(\Omega)$ Espace des fonctions de puissance p -ième intégrable.
- $H^k(\Omega)$ Espace de Sobolev d'ordre k .

Fonctions et opérateurs

- $\Gamma(z)$ Fonction Gamma d'Euler.
- $B(z, w)$ Fonction Bêta.
- $I_a^\alpha f$ Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f .
- $D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f .
- ${}^C D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de f .
- $D^n f = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ Dérivée ordinaire d'ordre n de f .
- $\|x\|$ Norme de l'élément x dans un espace de Banach.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Produit scalaire dans un espace de Hilbert.

Abréviations

- R-L Riemann-Liouville.
- EDF Équation différentielle fractionnaire.
- EDP Équation aux dérivées partielles.
- C_0 -semi-groupe Semi-groupe fortement continu.

Introduction générale

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut être vue comme une dérivée d'ordre moins un. On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre entier successifs ont admettant un analogue d'ordre fractionnaire .

En 1695, Leibniz dans une lettre à L'Hospital voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière d'une fonction. Dans sa réponse, L'Hospital s'interrogea sur la signification qu'on pourrait donner à la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. En effet, l'ordre 0 qui désigne la continuité tandis que l'ordre 1 qui désigne la dérivabilité classique. La réponse de Leibniz contenait cette phrase célèbre : " cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on pourra tirer des conséquences utiles ".

Depuis cette époque, la dérivation d'ordre non entier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens célèbres, tels Euler (1730), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville (1832-1873), Riemann (1847) et Laurent (1884). C'est seulement lors de ces dernières décennies que cette théorie commence à toucher un nombre important de domaines grâce à une explosion des activités de recherche sur l'application du calcul fractionnaire touchant la physique, la mécanique, la biologie, l'électrotechnique, l'électrochimie, etc. [17, 15].

La théorie du calcul fractionnaire est presque aussi vieille que le calcul lui-même. Aujourd'hui, un certain nombre d'ouvrages ont été publiés sur ce domaine et ses applications. On cite par exemple le livre de Samko, Kilbas et Marichev [17], qui est considéré comme une encyclopédie de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire. On peut citer également les travaux de Miller et Ross [12] ainsi que ceux de Podlubny [15].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude des équations différentielles fractionnaire semi-linéaires à retard, en utilisant la **dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville**. Ce choix est motivé par le fait que cette dérivée est particulièrement adaptée pour modéliser les phénomènes à mémoire, tels que la pro-

pagation des épidémies, la croissance tumorale ou le comportement des matériaux viscoélastiques [17].

Ce mémoire contient trois chapitres répartis comme suit :

- **Le premier chapitre** est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : espaces fonctionnels [5], théorie des C_0 -semi-groupes [7, 8], fonctions spéciales (Gamma et Bêta) [17], intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville [15], ainsi que les théorèmes de point fixe de Banach et de Leray-Schauder.
- **Le deuxième chapitre** est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions (mild solutions) pour une classe d'équations différentielles fractionnaire semi-linéaires à **retard fini**, formulées dans l'espace des fonctions continues $C([-r, b], E)$. Les résultats reposent sur le théorème de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder [4, 1]. Ce chapitre est illustré par un exemple concret de croissance tumorale inspiré du modèle malthusien [9].
- **Le troisième chapitre** traite le cas plus complexe des équations à **retard infini**, formulées dans un espace de phase $\mathcal{B}$ vérifiant les axiomes de Hale et Kato [7, 8]. Nous présentons plusieurs exemples d'espaces de phase (C_γ , C_g , etc.) avant d'établir les résultats d'existence et d'unicité [3]. Un exemple de plaque viscoélastique en silicone médicale [13] illustre l'application de ces résultats.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre rassemble les notions fondamentales utilisées dans ce mémoire. Nous présentons successivement les espaces fonctionnels classiques [5], la théorie des C_0 -semi-groupes [7], le calcul fractionnaire avec les intégrales et dérivées de Riemann-Liouville [11, 12, 15, 17, 14, 16], ainsi que les théorèmes de point fixe de Banach et Leray-Schauder.

1.1 Notations et définitions

Dans cette section, nous introduisons les notations, définitions et résultats préliminaires qui seront utilisés tout au long de ce travail.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel normé). [5] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation),
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité),
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Définition 1.1.2 (Espace de Banach). [5] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est un espace de Banach s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|$, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E converge vers un élément de E .

Définition 1.1.3 (Espace de Hilbert). [5] Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui est complet pour la norme :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.4 (Espace L^p). [5] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$. On note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Muni de cette norme, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach. Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Définition 1.1.5 (Espace de Sobolev H^k). [5] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ est défini par :

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\},$$

où $D^\alpha u$ désigne la dérivée faible d'ordre α . Muni de la norme :

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

$H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note $H_0^k(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$. En particulier :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Propriétés 1.1.1 (Base de fonctions propres). Considérons l'opérateur linéaire

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ défini sur son domaine } D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi) \subset L^2(0, \pi).$$

Les valeurs propres de $-A$ sont données par $\lambda_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et les fonctions propres associées sont :

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

La famille $\{e_n\}_{n \geq 1}$ forme une base orthonormée complète de $L^2(0, \pi)$. Tout élément $u \in L^2(0, \pi)$ s'exprime par :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n(x), \quad \text{avec } \langle u, e_n \rangle = \int_0^\pi u(x) e_n(x) dx.$$

Précisons maintenant les normes usuelles associées aux espaces introduits ci-dessus :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et J un intervalle réel compact. On note $C(J, E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de J dans E , muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup \{\|y(t)\| : t \in J\}.$$

Pour toute fonction $\psi \in C([-r, 0], E)$, la norme est définie par :

$$\|\psi\|_C = \sup \{\|\psi(\theta)\| : \theta \in [-r, 0]\}.$$

De même, pour toute fonction $\phi \in C([-r, b], E)$, la norme est définie par :

$$\|\phi\|_D = \sup \{\|\phi(\theta)\| : \theta \in [-r, b]\}.$$

On désigne par $\mathcal{B}(E)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E , muni de la norme :

$$\|N\|_{\mathcal{B}(E)} = \sup \{ \|Ny\| : \|y\| = 1 \}.$$

Définition 1.1.6 (Intégrale de Bochner). Soit $f : J \rightarrow E$ mesurable. On dit que f est intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite de fonctions étagées $\{f_n\}$ telle que :

- $f_n(t) \rightarrow f(t)$ pour presque tout $t \in J$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \|f_n(t) - f(t)\| dt = 0$.

Dans ce cas, $\int_J f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f_n(t) dt$. L'espace $L^1(J, E)$ est l'ensemble de ces fonctions avec :

$$\|f\|_{L^1} = \int_J \|f(t)\| dt.$$

Proposition 1.1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $M \subset C(J, E)$. On dit que M est relativement compact dans $C(J, E)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) M est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante $b \geq 0$ telle que

$$\|f\|_{\infty} \leq b, \quad \forall f \in M;$$

(ii) M est équicontinu, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in J$,

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon, \quad \forall f \in M;$$

(iii) pour tout $x \in J$, l'ensemble $\{f(x) \in E : f \in M\}$ est relativement compact dans E .

Définition 1.1.7. Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ une application.

- f est dite compacte si l'image $f(E)$ est relativement compacte dans F .
- f est dite complètement continue si elle est continue et si l'image de tout ensemble borné de E est relativement compacte dans F .

Théorème 1.1.1 (Arzelà-Ascoli). Soit F une famille des fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$. Alors F est relativement compacte (précompact) dans $\mathcal{C}[a, b]$ si F est équicontinue et uniformément bornée.

Définition 1.1.8 (Produit de convolution). Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle produit de convolution de f et g , noté $f * g$, la fonction définie par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, b].$$

1.2 Théorie des C_0 Semi-groupes

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu de la théorie des C_0 semi-groupes qui est très importante dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires avec retard.

Définition 1.2.1. On appelle C_0 -semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(E)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $T(0) = I$, où I est l'opérateur identité sur E .
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, pour tous $t, s \geq 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, pour tout $x \in E$.

Définition 1.2.2. On appelle générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ l'opérateur A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in E ; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Définition 1.2.3. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire. On définit l'ensemble résolvant de A par :

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(E) \}$$

La résolvante de l'opérateur A est l'application :

$$R(\cdot, A) : \rho(A) \rightarrow \mathcal{B}(E),$$

définie par :

$$\lambda \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Théorème 1.2.1 (Hille–Yosida). Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire. Alors A est le générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur E si et seulement si :

- ◇ A est fermé et $D(A)$ est dense dans E ,
- ◇ Pour tout $\lambda > 0$, on a $\lambda \in \rho(A)$,
- ◇ Pour tout $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{1}{\lambda^n}.$$

Proposition 1.2.1. Un opérateur linéaire A engendre un semi-groupe de classe C_0 si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $D(A)$ est dense dans E ,

(ii) la condition de Hille–Yosida est vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que $[\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et :

$$\sup \{ (\lambda - \omega)^n \|(\lambda I - A)^{-n}\| : \lambda > \omega, n \in \mathbb{N} \} \leq M,$$

où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de l'opérateur A et I l'opérateur identité sur E .

Proposition 1.2.2 (Cas particulier important). *Si $M = 1$ et $\omega = 0$, la condition générale se réduit à :*

$$\forall \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{1}{\lambda^n},$$

qui est exactement la condition du Théorème de Hille–Yosida (1.2.1) pour les contractions.

Définition 1.2.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A : E \rightarrow E$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou opérateur contractant) s'il existe une constante k telle que $0 < k < 1$ et*

$$\|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Exemple 1.2.1. *Soit :*

$$C = \{f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est uniformément continue et bornée}\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_C = \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |f(\alpha)|.$$

L'espace C est un espace de Banach. Définissons :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t + \alpha), \quad t \geq 0, \alpha \in [0, +\infty[.$$

Clairement $T(t)$ est linéaire. De plus, pour $f \in C$:

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_C &= \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |T(t)f(\alpha)| \\ &= \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |f(t + \alpha)|. \end{aligned}$$

Posons $\xi = \alpha + t$. Alors :

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_C &= \sup_{\xi \in [t, +\infty[} |f(\xi)| \\ &\leq \sup_{\xi \in [0, +\infty[} |f(\xi)| \\ &= \|f\|_C. \end{aligned}$$

Donc $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés et

$$\|T(t)\|_C = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Vérifions les propriétés :

$$i) T(0)f = f(0 + \alpha) = f(\alpha) \text{ donc } T(0) = I.$$

ii) Pour $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} (T(t+s)f)(\alpha) &= f(t+s+\alpha) \\ &= T(t)(T(s)f)(\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$T(t+s) = T(t)T(s).$$

iii)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)f - f\|_C &= \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\alpha \in [0, +\infty[} |f(\alpha + t) - f(\alpha)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

car f est uniformément continue. Par conséquent, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe.

Soit $A : D(A) \subset C \rightarrow C$ le générateur infinitésimal.

i) Si $f \in D(A)$, alors pour tout α :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t + \alpha) - f(\alpha)}{t} \\ &= f'(\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$D(A) \subset \{f \in C \mid f' \in C\} \quad \text{et} \quad Af = f'.$$

ii) Réciproquement, si $f \in C$ et $f' \in C$, alors :

$$\left| \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| = \left| \frac{f(t + \alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|.$$

Par le théorème des accroissements finis(?),

$$\frac{f(t + \alpha) - f(\alpha)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} f'(\tau) d\tau.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} (f'(\tau) - f'(\alpha)) d\tau \right| \longrightarrow 0 \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0,$$

car f' est uniformément continue.

Donc :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_C \longrightarrow 0.$$

Ainsi $f \in D(A)$.

Finalement,

$$D(A) = \{f \in C \mid f' \in C\} \quad \text{et} \quad Af = f'.$$

Définition 1.2.5 (Semi-groupe compact). *Un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit compact si $T(t)$ est un opérateur compact pour tout $t > 0$, c'est-à-dire que pour tout ensemble borné $B \subset E$, l'ensemble $T(t)B = \{T(t)x : x \in B\}$ est relativement compact dans E .*

Remarque 1.2.1. *La compacité du semi-groupe est une propriété importante qui permet d'appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli et d'obtenir la compacité de l'opérateur de Leray-Schauder. De nombreux semi-groupes issus d'équations aux dérivées partielles paraboliques sont compacts.*

Remarque 1.2.2. *L'opérateur linéaire $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ défini sur : $D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi) \subset L^2(0, \pi)$ engendre un C_0 -semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ qui s'exprime explicitement à l'aide de sa base de fonctions propres $\{e_n\}_{n \geq 1}$ par :*

$$T(t)u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle u, e_n \rangle e_n(x), \quad \forall u \in L^2(0, \pi).$$

Cette représentation sera fondamentale pour exprimer les solutions des équations aux dérivées partielles fractionnaires (EDP) avec retard étudiées à la fin des chapitres 2 et 3.

1.3 Calcul fractionnaire

1.3.1 Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales étendent aux nombres réels ou complexes des notions comme la factorielle. La fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta en sont deux exemples essentiels. Elles sont définies par des intégrales et interviennent dans la résolution d'équations différentielles fractionnaire.

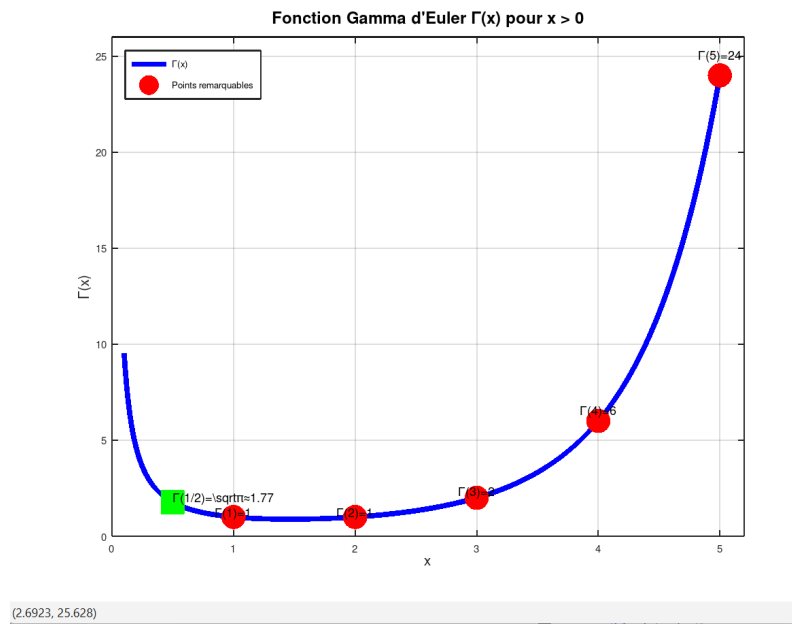
La fonction Gamma :

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction d'Euler Gamma qui généralise la factorielle $n!$ à des arguments réels ou complexes non entiers.

Définition 1.3.1. *La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$.

FIGURE 1.1 – Fonction Gamma $\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

ù

Proposition 1.3.1. *L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

En particulier, pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples aux points $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Preuve 1.3.1. On démontre cette proposition par une intégration par parties de (1.3.1) :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Le terme entre crochets s'annule car : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^z = 0$ pour $\operatorname{Re}(z) > 0$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt}_{\Gamma(z)} \\ &= z \Gamma(z). \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

En utilisant la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Proposition 1.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \text{ avec } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve 1.3.2. On commence par calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Par définition nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Effectuons le changement de variable : $t = u^2$ avec $dt = 2u du$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} (u^2)^{-1/2} \cdot 2u du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss donne : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, utilisons la relation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ de manière récurrente :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

On peut écrire ce produit sous la forme :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(\prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Explicitons ce produit :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right) &= \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n (2k-1).\end{aligned}$$

Or
$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

En multipliant et divisant par $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n!$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n n!}.\end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on obtient :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 1.3.1. *Autres représentations de la fonction Gamma :*

La fonction Gamma peut également s'écrire sous différentes formes selon le contexte :

◇ **Représentation par un produit infini (Euler) :**

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Cette formule montre que $\Gamma(z)$ a des pôles simples aux entiers négatifs ou nuls.

◇ **Représentation par intégrale de Weierstrass :**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni ($\gamma \approx 0.577216$).

La fonction Bêta

Dans le cadre du calcul fractionnaire, la **fonction bêta** intervient de manière fondamentale, notamment via la fonction Gamma, pour définir les opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Elle facilite ainsi considérablement la manipulation et la résolution d'équations différentielles fractionnaire complexes.

Définition 1.3.2. La fonction $B(z, \omega)$ est définie par l'intégrale d'Euler de seconde espèce :

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0.$$

Cette intégrale est convergente pour tout $z, \omega \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(z) > 0$ et $\operatorname{Re}(\omega) > 0$.

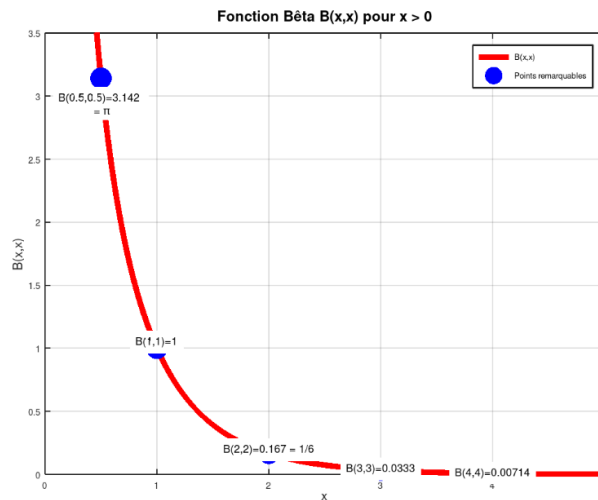


FIGURE 1.2 – Fonction Bêta $B(x, x)$ pour $x > 0$.

Proposition 1.3.3. *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0.$$

Il en résulte que la fonction Bêta est symétrique : $B(z, \omega) = B(\omega, z)$.

Proposition 1.3.4. *Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(p) > 0$ et $\Re(q) > 0$, la fonction bêta vérifie les propriétés suivantes :*

- $B(p, q) = B(q, p)$.
- $B(p, q) = B(p + 1, q) + B(p, q + 1)$.
- $B(p, q + 1) = \frac{q}{p} B(p + 1, q) = \frac{q}{p + q} B(p, q)$.
- $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1} (\cos t)^{2q-1} dt$.

Preuve 1.3.3. 1. *D'après la définition de la fonction bêta,*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$, on obtient

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = B(q, p).$$

2. *En utilisant la relation*

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z),$$

on a

$$B(p, q + 1) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q + 1)}{\Gamma(p + q + 1)} = \frac{q}{p + q} B(p, q).$$

Ainsi,

$$B(p, q) = \frac{p + q}{q} B(p, q + 1) = \frac{p}{q} B(p, q + 1) + B(p, q + 1).$$

Or,

$$\frac{p}{q} B(p, q + 1) = \frac{\Gamma(p + 1) \Gamma(q)}{\Gamma(p + q + 1)} = B(p + 1, q).$$

D'où

$$B(p, q) = B(p + 1, q) + B(p, q + 1).$$

3. *En utilisant la définition de la fonction bêta via la fonction gamma,*

$$B(p, q + 1) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q + 1)}{\Gamma(p + q + 1)} = \frac{q}{p} \frac{\Gamma(p + 1) \Gamma(q)}{\Gamma(p + q + 1)}.$$

Ainsi,

$$B(p, q + 1) = \frac{q}{p} B(p + 1, q).$$

En combinant avec le résultat précédent,

$$B(p, q + 1) = \frac{q}{p + q} B(p, q).$$

4. En partant de

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt,$$

on écrit

$$(1-t)^{p-1} = t^{p-1} \left(\frac{1-t}{t} \right)^{p-1} = t^{p-1} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{p-1}.$$

Posons

$$r = \frac{1}{t} - 1, \quad t = \frac{1}{r+1}, \quad dt = -\frac{dr}{(r+1)^2}.$$

Lorsque t varie de 0 à 1, r varie de $+\infty$ à 0. On obtient alors

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{r^{p-1}}{(1+r)^{p+q}} dr.$$

En renommant la variable d'intégration,

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

Montrons maintenant que

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1} (\cos t)^{2q-1} dt.$$

À partir de

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

effectuons le changement de variable

$$t = \sin^2 \theta, \quad dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Comme

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta,$$

il vient

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta.$$

■

Cas particuliers en utilisant la relation avec la fonction Gamma, on obtient les valeurs particulières suivantes :

- $B(1, 1) = 1.$
- $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$
- $B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2.$
- $B(1, 2) = \frac{1}{2}.$

Preuve 1.3.4. En utilisant la relation fondamentale $B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$ et les valeurs connues de la fonction Gamma, on obtient les résultats suivants.

Cas 1 : Calcul de $B(1, 1)$

$$B(1, 1) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1)} = \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)}.$$

On sait que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1$. Donc :

$$B(1, 1) = \frac{1 \times 1}{1} = 1.$$

Cas 2 : Calcul de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)]^2}{\Gamma(1)}.$$

On sait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$. Donc :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{1} = \pi.$$

Cas 3 : Calcul de $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

On sait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc :

$$B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{\sqrt{\pi} \times 1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \times 2 = 2.$$

Cas 4 : Calcul de $B(1, 2)$

$$B(1, 2) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(1+2)} = \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(3)}.$$

On sait que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$ et $\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2 \times 1 = 2$. Donc :

$$B(1, 2) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

■

La fonction de Mittag-Leffler

la fonction de Mittag-Leffler généralise la fonction exponentielle et interviendra de manière récurrente dans les estimations et les solutions explicites.

Définition 1.3.3 (Fonction de Mittag-Leffler). *On appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta > 0.$$

Pour $\beta = 1$:

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0.$$

Et pour $\alpha = 1, \beta = 1$, on a :

$$E_{1,1}(z) = e^z.$$

Cette dernière joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

Propriétés 1.3.1. 1. $E_{1,1}(z) = e^z$

$$2. E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$3. E_{1,3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

$$4. E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$$

$$5. E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$$

$$6. \forall m \in \mathbb{N}, \quad E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right]$$

1.3.2 Intégration et dérivation fractionnaire

Le calcul fractionnaire constitue une généralisation du calcul classique aux ordres non entiers. Il fournit des outils mathématiques adaptés à l'étude de nombreux phénomènes à mémoire.

Intégration fractionnaire de Riemann-Liouville :

Nous présentons dans cette partie un opérateur fondamental du calcul fractionnaire, largement utilisé dans l'étude des équations différentielles fractionnaire.

Définition 1.3.4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Riemann-Liouville de f , notée $I_a^\alpha f$, l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

Exemple 1.3.1. *Considérons la fonction f définie par :*

$$f(x) = (x - a)^\beta, \quad x \in [a, b], \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0.$$

Alors, on a :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt.$$

En effectuant le changement de variable : $t = a + (x - a)\xi$, on obtient :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^\beta (1 - \xi)^{\alpha-1} d\xi.$$

En tenant compte de la fonction Bêta, on obtient :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}.$$

Cas particuliers :

- Si $\alpha = 1$, on retrouve l'intégrale classique : $I_a^1(x - a)^\beta = \frac{(x - a)^{\beta+1}}{\beta + 1}$.
- Si $\beta = 0$, on obtient : $I_a^\alpha 1 = \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$.

Dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville :

La dérivation fractionnaire prolonge la dérivation classique aux ordres non entiers. On utilise ici la définition de Riemann-Liouville, qui repose sur l'opérateur d'intégration fractionnaire.

Définition 1.3.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\alpha) \in]n - 1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in C([a, b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f , notée $D_a^\alpha f$, la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D^n [I_a^{n-\alpha} f(x)] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right], \end{aligned}$$

où :

$$n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 \text{ et } [\cdot] \text{ désigne la partie entière.}$$

Remarque 1.3.2. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ne possède pas, en général, la propriété de commutativité, c'est-à-dire que pour deux ordres fractionnaires α et β , on a :*

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta \neq D_a^{\alpha+\beta} \neq D_a^\beta \circ D_a^\alpha$$

Exemple 1.3.2. On considère la fonction constante f définie par :

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1. \end{aligned}$$

Calculer explicitement les expressions de $D_0^{\frac{1}{2}}f$, puis de $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ ainsi que $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f$.

En utilisant la définition classique de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour une puissance (sachant que $1 = x^0$), on applique la formule générale

$$D_0^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha)} x^{\gamma - \alpha}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 0$, nous obtenons immédiatement :

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}}1 &= \frac{\Gamma(0 + 1)}{\Gamma(0 + 1 - \frac{1}{2})} x^{0 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Calculons à présent la composition successive de ces deux opérateurs, soit $D_0^{\frac{1}{2}}(D_0^{\frac{1}{2}}1)$. Par la définition de la dérivation fractionnaire :

$$D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}1 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x - t)^{\frac{1}{2} - 1} D_0^{\frac{1}{2}}1(t) dt.$$

En remplaçant la première dérivée fractionnaire trouvée et en utilisant $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ l'expression devient :

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x (x - t)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (x - t)^{-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Afin d'évaluer l'intégrale présente à l'intérieur, effectuons un changement de variable par substitution directe en posant $t = x \cdot r$, ce qui donne $dt = x dr$. Les bornes de l'intégrale se transforment alors comme suit :

- Si $t = 0$, alors $r = 0$,
- Si $t = x$, alors $r = 1$.

En injectant ce changement dans l'intégrale, nous pouvons factoriser la variable x :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}} dt &= \int_0^1 (xr)^{-\frac{1}{2}}(x-xr)^{-\frac{1}{2}} x dr \\
 &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}} x dr \\
 &= x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1} \int_0^1 r^{-\frac{1}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}} dr \\
 &= x^0 \int_0^1 r^{\frac{1}{2}-1} (1-r)^{\frac{1}{2}-1} dr
 \end{aligned}$$

On reconnaît sous cette forme la définition intégrale exacte de la fonction Bêta d'Euler $B(p, q) = \int_0^1 r^{p-1} (1-r)^{q-1} dr$ évaluée pour $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}} dt &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{\Gamma(1)} \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

L'intégrale est donc une valeur constante égale à π , indépendante de la variable temporelle x .

Revenons maintenant au calcul de la dérivée fractionnaire composée. En substituant cette valeur π , on obtient :

$$\begin{aligned}
 D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx}(\pi) \\
 &= \frac{1}{\pi} 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

D'autre part, évaluons la dérivée fractionnaire globale d'ordre direct :

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Par application directe de l'opérateur de Riemann-Liouville d'ordre 1 (qui coïncide avec la dérivée classique d'une fonction constante) :

$$\begin{aligned}
 D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} 1 &= D_0^1 1 \\
 &= \frac{d}{dx}(1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour cet exemple particulier impliquant une fonction constante, nous remarquons l'identité suivante :

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 &= D_0^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Relation entre l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville

Lemme 1.3.1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$n - 1 < \Re(\alpha) < n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et soit $f \in C([a, b])$. Alors, on a :

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Preuve 1.3.5. D'après la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville on a

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = D^n (I_a^{n-\alpha} (I_a^\alpha f))(x).$$

En utilisant la propriété de semi-groupe des intégrales fractionnaires :

$$I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha = I_a^n$$

On obtient :

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = D^n (I_a^n f)(x).$$

Or, la relation classique entre l'intégrale d'ordre entier et la dérivée d'ordre entier donne :

$$D^n (I_a^n f)(x) = f(x).$$

Par conséquent :

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x),$$

ce qui achève la démonstration.

Dérivée fractionnaire de Caputo

Bien que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville constitue un outil fondamental du calcul fractionnaire, son utilisation dans les problèmes appliqués présente certaines difficultés, notamment dans le traitement des conditions initiales exprimées à l'aide de dérivées classiques. Afin de surmonter cet inconvénient, Caputo a proposé, une autre définition mieux adaptée à la modélisation des phénomènes physiques.

Définition 1.3.6 (Dérivée de Caputo). Soient $\Re(\alpha) \in]n - 1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Caputo de f notée ${}^C D_a^\alpha$, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= I_a^{n-\alpha} [D^n f(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1, x > a). \end{aligned} \quad (1.1)$$

On note ${}^C D_0^\alpha$ par ${}^C D^\alpha$.

Remarque 1.3.3. Contrairement à la dérivée de Riemann–Liouville, obtenue en appliquant d’abord l’intégrale fractionnaire puis la dérivation classique, la dérivée de Caputo est définie en effectuant ces deux opérations dans l’ordre inverse. Cette particularité facilite l’introduction des conditions initiales classiques.

Exemple 1.3.3. Considérons la fonction

$$f(x) = (x - a)^\beta, \quad \beta \geq 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in [n - 1, n[$. Alors,

$${}^C D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \quad \beta > n - 1.$$

Par ailleurs,

$${}^C D_a^\alpha (x - a)^\beta = 0, \quad \beta \in \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Ainsi,

$${}^C D_a^\alpha (x - a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, & \beta > n - 1, \\ 0, & \beta \in \{0, 1, \dots, n - 1\}. \end{cases}$$

Remarque 1.3.4. La dérivée fractionnaire de Caputo d’une fonction constante est nulle. En effet, si

$$f(t) = C,$$

où C est une constante, alors

$${}^C D_a^\alpha C = 0.$$

Proposition 1.3.5 (Linéarité). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$n - 1 < \Re(\alpha) < n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et soient f et g deux fonctions admettant des dérivées fractionnaire de Caputo d’ordre α . Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$${}^C D_a^\alpha (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda {}^C D_a^\alpha f(x) + \mu {}^C D_a^\alpha g(x).$$

Relation entre l’intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les opérateurs fractionnaire de Caputo entretiennent une relation étroite avec l’intégrale fractionnaire. Les résultats suivants traduisent cette complémentarité et seront utiles dans la suite de ce travail.

Lemme 1.3.2. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$n - 1 < \Re(\alpha) < n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et soit $f \in C^n([a, b])$. Alors,

$$({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

Preuve 1.3.6. *D'après la relation entre les dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville, on a*

$${}^C D_a^\alpha g(x) = D_a^\alpha g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha},$$

où $g = I_a^\alpha f$. Ainsi,

$$({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = (D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}.$$

Or, d'après le Lemme(1.3.2)

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

Par ailleurs, comme $k \leq n-1 < \Re(\alpha)$, on a

$$(I_a^\alpha f)^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Par conséquent,

$$({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x),$$

ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 1.3.3. *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que*

$$n-1 < \Re(\alpha) < n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et soit $f \in C^n([a, b])$. Alors,

$$(I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k,$$

où

$$n = [\Re(\alpha)] + 1.$$

Preuve 1.3.7. *D'après la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo,*

$${}^C D_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x).$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire d'ordre α , on obtient

$$(I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f)(x) = I_a^\alpha (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x).$$

Grâce à la propriété de semi-groupe des intégrales fractionnaire, il vient

$$(I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f)(x) = I_a^n f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I_a^n f^{(n)}(x) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{\Gamma(n)} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt.$$

En répétant ce procédé successivement, on arrive à

$$I_a^n f^{(n)}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$(I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

La démonstration est donc complète. ■

1.4 Théorèmes de point fixe

Dans cette section nous présentons deux théorèmes de point fixe qui sont utilisés dans la suite pour montrer l'existence et l'unicité de solution intégrale.

Théorème 1.4.1 (Contraction de Banach). *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$ une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que :*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Alors f possède un unique point fixe $x^ \in X$, c'est-à-dire $f(x^*) = x^*$.*

Théorème 1.4.2 (Leray-Schauder). *Soit E un espace de Banach et $U \subset E$ un ensemble convexe tel que $0 \in U$. Soit $F : U \rightarrow U$ un opérateur complètement continu. Alors, on a les alternatives suivantes :*

1. F possède un point fixe $x^* \in U$, c'est-à-dire $F(x^*) = x^*$.
2. l'ensemble $\{x \in U : x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1\}$ est non borné dans E .

Équations différentielles semi-linéaires d'ordre fractionnaire à retard fini

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et l'unicité des solutions pour des équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires d'ordre fractionnaire à retard fini. L'outil de base dans notre étude est la théorie des C_0 semi-groupes et l'argument du point fixe. On cite, à titre d'exemple, les travaux de Agarwal et al. [1], Belmekki et al. [3, 4] ainsi que les ouvrages de référence sur le calcul fractionnaire [12, 15].

On considère le problème suivant :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), \quad t \in J := [0, b], \quad (2.1)$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0], \quad (2.2)$$

où :

- D^α est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville standard.
- $f : J \times C([-r, 0], E) \rightarrow E$ est une fonction continue.
- $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach réel $(E, \|\cdot\|)$ et on note :

$$M = \sup\{\|T(t)\|_{B(E)} : t \in J\}.$$

- $\varphi : [-r, 0] \rightarrow E$ est une fonction continue donnée avec $\varphi(0) = 0$.

Cette condition assure la compatibilité entre la condition initiale et la solution intégrale en $t = 0$.

Pour toute fonction y définie sur $[-r, b]$ et pour tout $t \in J$, nous notons y_t l'élément de $C([-r, 0], E)$ défini par :

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

- $y_t(\cdot)$ représente l'historique de l'état depuis l'instant $t - r$ jusqu'à l'instant présent t .

Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution du problème (2.1)–(2.2).

Définition 2.1.1. *On dit qu'une fonction continue $y : [-r, b] \rightarrow E$ est une mild solution du problème (2.1)–(2.2) si $y(t) = \varphi(t)$, $t \in [-r, 0]$ et*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y_s) ds, \quad t \in J. \quad (2.3)$$

2.2 Résultats principaux

On va donner un premier résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)–(2.2) en utilisant le théorème de la contraction de Banach.

Théorème 2.2.1. *Soit $f : J \times C([-r, 0], E) \rightarrow E$ une fonction continue. Supposons que la condition suivante est vérifiée :*

(A1) *Il existe une constante $k \geq 0$ telle que :*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k \|u - v\|_C, \quad \text{pour } t \in J \text{ et } u, v \in C([-r, 0], E). \quad (2.4)$$

Si

$$\frac{kMb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \quad (2.5)$$

alors il existe une unique mild solution du problème (2.1)–(2.2) sur $[-r, b]$.

Preuve 2.2.1. *On transforme le problème (2.1)–(2.2) en un problème du point fixe.*

On considère l'opérateur $F : C([-r, b], E) \rightarrow C([-r, b], E)$ défini par :

$$F(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-r, 0], \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y_s) ds, & t \in [0, b]. \end{cases}$$

Soient $y, z \in C([-r, b], E)$, alors pour tout $t \in [0, b]$, on a :

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) [f(s, y_s) - f(s, z_s)] ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F(z)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) [f(s, y_s) - f(s, z_s)] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(E)} |f(s, y_s) - f(s, z_s)| ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k \|y_s - z_s\|_C ds. \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in [0, b]$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(z)\|_D &\leq \frac{Mk}{\Gamma(\alpha)} \|y - z\|_D \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{Mk t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y - z\|_D \\ &\leq \frac{Mk b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y - z\|_D. \end{aligned}$$

Par la condition (2.5), l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui est l'unique solution mild du problème (2.1)–(2.2).

Ensuite, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder appliquée aux opérateurs complètement continus.

Le lemme suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal ■

Lemme 2.2.1 (Gronwall). *Soient φ , ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s) ds, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.6)$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.7)$$

Preuve 2.2.2. Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s) ds$.

En multipliant les deux membres de (2.6) par $\psi(t)$, on obtient :

$$F'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + \psi(t)F(t),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t).$$

$$\text{Posons } G(t) = F(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

Alors :

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on déduit par intégration :

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(-\int_a^s \psi(u) du\right) ds.$$

Or, d'après (2.6), on a

$$y(t) \leq \varphi(t) + F(t) = \varphi(t) + G(t) \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

D'où le résultat voulu. ■

Théorème 2.2.2. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*

(A2) *Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \in J}$ est compact pour $t > 0$.*

(A3) *Il existe des fonctions $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ telles que :*

$$|f(t, u)| \leq p(t) + q(t)\|u\|_C, \quad \forall t \in J, \forall u \in C([-r, 0], E). \quad (2.8)$$

Alors le problème (2.1)–(2.2) admet au moins une mild solution sur $[-r, b]$.

Preuve 2.2.3. *Transformons le problème (2.1)–(2.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $F : C([-r, b], E) \rightarrow C([-r, b], E)$ défini comme dans le Théorème 2.2.1.*

La démonstration est donnée en quatre étapes.

Étape 1 : F est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite de $C([-r, b], E)$ telle que $y_n \rightarrow y$. Alors pour $t \in [0, b]$ on a :

$$F(y_n)(t) - F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) [f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)] ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned} |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T(t-s)\|_{B(E)} |f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)| ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_{ns}) - f(s, y_s)| ds. \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in [-r, b]$, nous avons :

$$\|F(y_n) - F(y)\|_D \leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, y_n) - f(\cdot, y)\|_D.$$

Comme $y_n \rightarrow y$ et f est continue, on a :

$$f(\cdot, y_n) \rightarrow f(\cdot, y) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\|F(y_n) - F(y)\|_D \leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, y_n) - f(\cdot, y)\|_D \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Donc F est continu.

Étape 2 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble borné.

Soit $\rho > 0$ et considérons $B_\rho = \{y \in C([-r, b], E) : \|y\|_\infty \leq \rho\}$. Pour tout $y \in B_\rho$ et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y_s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |T(t-s)| |f(s, y_s)| ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (A3), on obtient :

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(E)} (p(t) + q(t)\|y\|_C) ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (\|p\|_\infty + \rho\|q\|_\infty) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{t^\alpha}{\alpha} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Ainsi,

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|p\|_\infty + \rho\|q\|_\infty) \leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|p\|_\infty + \rho\|q\|_\infty).$$

On pose alors :

$$\delta = \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|p\|_\infty + \rho\|q\|_\infty) < +\infty.$$

Donc,

$$\|F(y)\|_\infty \leq \delta.$$

Par conséquent, $F(B_\rho)$ est borné dans $C([-r, b], E)$.

Étape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équi-continu.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_2 > \tau_1$ et $y \in B_\rho$. On a :

$$\begin{aligned} |F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} T(\tau_2 - s) f(s, y_s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1} T(\tau_1 - s) f(s, y_s) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{\tau_1} \left((\tau_2 - s)^{\alpha-1} T(\tau_2 - s) - (\tau_1 - s)^{\alpha-1} T(\tau_1 - s) \right) f(s, y_s) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} T(\tau_2 - s) f(s, y_s) ds \right] \right|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\tau_1} \left| (\tau_2 - s)^{\alpha-1} T(\tau_2 - s) - (\tau_1 - s)^{\alpha-1} T(\tau_1 - s) \right| |f(s, y_s)| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} |T(\tau_2 - s)| |f(s, y_s)| ds \right) \\ &\leq \frac{(\|p\|_\infty + \rho\|q\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\tau_1} \left| (\tau_2 - s)^{\alpha-1} T(\tau_2 - s) - (\tau_1 - s)^{\alpha-1} T(\tau_1 - s) \right| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} |T(\tau_2 - s)| ds \right). \end{aligned}$$

Comme $\tau_2 \rightarrow \tau_1$, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro et puisque $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un opérateur compact fortement continu, ceci implique la continuité uniforme d'opérateurs.

Puisque $F(B_\rho)$ est une famille équicontinue et uniformément bornée. On conclut d'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli que l'ensemble $\{F(y)(t) : y \in B_\rho\}$ est relativement compact dans E .

Étape 4 : Estimations a priori.

Il reste à démontrer que l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{y \in C([-r, b], E) : y = \lambda F(y) \text{ pour un certain } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné. Soit $y \in \mathcal{E}$ un élément quelconque. Alors, pour chaque $t \in J$, on a :

$$y(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y_s) ds.$$

En utilisant l'hypothèse **(A3)** (2.8), on obtient pour $t \in J$:

$$|y(t)| \leq \frac{Mb^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y_s\|_C ds.$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \max\{|y(s)| : -r \leq s \leq t\}, \quad t \in J.$$

Soit $t^* \in [-r, t]$ tel que $\mu(t) = |y(t^*)|$.

- Si $t^* \in [0, b]$, alors par l'inégalité précédente et puisque $t^* \leq t$, nous avons pour tout $t \in J$:

$$\mu(t) \leq \frac{Mb^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds.$$

- Si $t^* \in [-r, 0]$, alors $\mu(t) = \|\varphi\|_C$ et l'inégalité précédente reste trivialement vérifiée.

En appliquant le lemme de Gronwall généralisé (Lemme 2.2.1), on obtient :

$$\mu(t) \leq \frac{Mb^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left[1 + \frac{M\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \exp \left(\frac{M\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right] := \Lambda.$$

Par conséquent, on a :

$$\|y\|_\infty \leq \max\{\|\varphi\|_C, \Lambda\}, \quad \forall y \in \mathcal{E}.$$

Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné. En conséquence de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, nous déduisons que l'opérateur F possède un point fixe qui est une mild solution du problème (2.1)–(2.2) sur l'intervalle $[-r, b]$. ■

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème (2.1)–(2.2).

Théorème 2.2.3. *Supposons que les conditions du Théorème 2.2.2 sont vérifiées. Supposons de plus qu'il existe une constante positive k telle que :*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k \|u - v\|_C, \quad \text{pour } t \in J \text{ et tout } u, v \in C([-r, 0], E).$$

Alors le problème (2.1)–(2.2) a une solution unique sur $[-r, b]$.

Preuve 2.2.4. *L'existence d'au moins une solution intégrale $y(t)$ du problème (2.1)–(2.2) est assurée par le Théorème 2.2.2. Pour prouver l'unicité de $y(t)$, soit $z(t)$ une autre solution du problème (2.1)–(2.2).*

Pour $t \in [-r, 0]$, on a $y(t) = z(t) = \varphi(t)$, donc $\|y_t - z_t\|_C = 0$. Et pour $t \in [0, b]$, nous avons :

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) [f(s, y_s) - f(s, z_s)] ds \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_s) - f(s, z_s)| ds \\ &\leq \frac{Mk}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y_s - z_s\|_C ds. \end{aligned}$$

Posons $w(t) = \sup\{|y(s) - z(s)| : -r \leq s \leq t\}$. Pour tout $t \in [0, b]$, l'inégalité précédente devient :

$$w(t) \leq \frac{Mk}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s) ds.$$

En vertu du lemme de Gronwall (2.2.1) appliqué à la fonction $w(t)$ avec une condition initiale nulle ($\varphi(t) = 0$), nous déduisons que :

$$w(t) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, b].$$

Comme $w(t) \geq 0$ par définition, on en conclut que $w(t) = 0$ pour tout $t \in [0, b]$. Par conséquent, $y(t) = z(t)$ pour tout $t \in [-r, b]$, ce qui prouve l'unicité de la mild solution. ■

Exemple 2.2.1. *Pour illustrer les résultats théoriques d'existence et d'unicité établis dans ce chapitre à l'aide du théorème du point fixe de Banach, nous considérons l'équation aux dérivées partielles fractionnaire fonctionnelle à retard fini suivante :*

$$(P1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + Q(t, u(t-r, x)), & x \in [0, \pi], \quad t \in [0, b], \quad \alpha \in (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in [0, b], \\ u(t, x) = \phi(t, x), & x \in [0, \pi], \quad t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Ou :

- $r > 0$ représente le retard fini.
- $\phi : [-r, 0] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction décrivant la condition initiale, supposée continue.
- $Q : [0, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée qui vérifie une condition de Lipschitz par rapport à sa deuxième variable.

Modélisation dans un espace de Banach :

Pour transformer ce système en un problème abstrait de la forme :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t),$$

nous choisissons l'espace d'état $E = L^2[0, \pi]$ muni de son produit scalaire et de sa norme usuels :

$$(w, v) = \int_0^\pi w(x)v(x) dx \quad \text{et} \quad \|w\| = \left(\int_0^\pi |w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ par :

$$Aw = w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

dont le domaine de définition dense $D(A)$ est donné par :

$$D(A) = \{w \in E : w, w' \text{ sont absolument continues, } w'' \in E \text{ et } w(0) = w(\pi) = 0\}.$$

Il est bien connu que les valeurs propres de A sont $\lambda_n = -n^2$ pour $n = 1, 2, \dots$ et les fonctions propres orthogonales associées dans $L^2[0, \pi]$ sont :

$$w_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ainsi, pour tout $w \in D(A)$, l'opérateur A peut être représenté sous sa forme spectrale :

$$Aw = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 (w, w_n) w_n.$$

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique (et donc fortement continu) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur E , explicitement défini par :

$$T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (w, w_n) w_n, \quad \forall w \in E$$

Puisque $\lambda_n = -n^2 \leq -1$ pour tout $n \geq 1$, la norme de l'opérateur vérifie la borne supérieure :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} \leq e^{-t} \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, la constante classique de majoration du semi-groupe est donnée par :

$$M = \sup_{t \in [0, b]} \|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} = 1.$$

Formulation Abstraite :

On définit maintenant la fonction d'état $y(t) \in E$, l'historique $y_t \in C([-r, 0], E)$, et la non-linéarité $f : [0, b] \times C([-r, 0], E) \rightarrow E$ par :

1. $y(t)(x) = u(t, x)$ pour $t \in [0, b]$ et $x \in [0, \pi]$,
2. $\varphi(\theta)(x) = \phi(\theta, x)$ pour $\theta \in [-r, 0]$ et $x \in [0, \pi]$,
3. $f(t, \psi)(x) = Q(t, \psi(-r)(x))$ pour $\psi \in C([-r, 0], E)$ et $x \in [0, \pi]$.

Le système d'équations initial se réécrit de façon équivalente sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), & t \in [0, b] \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (2.9)$$

vérifions de la condition de Lipschitz :

Pour appliquer le Théorème théorique du chapitre, nous supposons que la fonction $Q(t, \cdot)$ est uniformément lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \geq 0$ telle que :

$$|Q(t, \xi_1) - Q(t, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall t \in [0, b], \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Vérifions en détail l'hypothèse de Lipschitz pour l'opérateur non-linéaire f . Soient $\psi_1, \psi_2 \in C([-r, 0], E)$. Par définition de la norme dans $E = L^2[0, \pi]$, nous calculons :

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|^2 = \int_0^\pi |f(t, \psi_1)(x) - f(t, \psi_2)(x)|^2 dx.$$

En remplaçant par l'expression de f , on obtient :

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|^2 = \int_0^\pi |Q(t, \psi_1(-r)(x)) - Q(t, \psi_2(-r)(x))|^2 dx.$$

En appliquant la condition de Lipschitz sur la fonction Q :

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\|^2 &\leq \int_0^\pi (L|\psi_1(-r)(x) - \psi_2(-r)(x)|)^2 dx \\ &= L^2 \int_0^\pi |\psi_1(-r)(x) - \psi_2(-r)(x)|^2 dx \\ &= L^2 \|\psi_1(-r) - \psi_2(-r)\|^2. \end{aligned}$$

En extrayant la racine carrée des deux côtés :

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L\|\psi_1(-r) - \psi_2(-r)\|.$$

Par définition de la norme dans l'espace des fonctions continues à retard fini $\|\cdot\|_C$:

$$\|\psi_1(-r) - \psi_2(-r)\| \leq \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)\| = \|\psi_1 - \psi_2\|_C.$$

Par conséquent, nous obtenons de manière rigoureuse :

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L\|\psi_1 - \psi_2\|_C.$$

Conclusion :

Le problème (2.2.1) est une contraction stricte si et seulement si le coefficient multiplicatif devant la norme est strictement inférieur à 1, à savoir :

$$\frac{Lb^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \quad (2.10)$$

Si cette condition de petitesse sur la taille de l'intervalle b ou sur la force de la non-linéarité L est respectée, le principe de contraction de Banach garantit que l'opérateur $\mathcal{F}$ possède un unique point fixe $y^* \in C([-r, b], E)$. Ce point fixe unique constitue la mild solution unique du système d'équations aux dérivées partielles fractionnaires à retard fini initial.

2.3 Application biologique : Modèle de croissance tumorale

La croissance d'une tumeur cancéreuse est souvent modélisée à l'aide du **modèle malthusien classique**, introduit par Thomas Malthus, qui suppose une croissance exponentielle :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN(t), & 0 < t < T, \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

Interprétation mathématique des paramètres biologiques :

- $N(t)$ représente le nombre de cellules tumorales à l'instant t ,
- $r > 0$: Le taux intrinsèque de croissance tumorale (vitesse brute de prolifération des cellules en l'absence de contraintes).
- N_0 : Représente la **population tumorale initiale** (le nombre ou le volume de cellules cancéreuses présentes au moment du diagnostic, à l'instant $t = 0$).
- $\frac{dN}{dt}$: Représente la **vitesse instantanée de croissance** de la tumeur (la variation du nombre de cellules cancéreuses par unité de temps).

Où la solution explicite est $N(t) = N_0 e^{rt}$. Ce modèle suppose que le taux de prolifération cellulaire à l'instant t ne dépend que de l'état actuel $N(t)$, autrement dit que la tumeur « oublie » immédiatement son passé.

Cependant, ce modèle présente des limitations biologiques importantes. En cancérologie, le cycle de division cellulaire — qui comprend plusieurs phases (phase G1, phase S de synthèse de l'ADN, phase G2 et phase M de mitose) — dure en moyenne entre 16 et 24 heures selon le type de tumeur. Ainsi, une cellule qui se divise à l'instant t est le résultat d'un processus initié τ heures auparavant. Le modèle classique ignore complètement ce délai biologique, ce qui conduit à des prédictions inexactes de l'évolution tumorale.

De plus, les tissus biologiques présentent des propriétés **viscoélastiques** et des **comportements héréditaires** — c'est-à-dire que leur état actuel dépend de toute leur histoire passée — que le calcul différentiel classique d'ordre entier ne peut pas

modéliser fidèlement. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, grâce à sa définition intégrale, capture naturellement cet effet de mémoire à longue portée.

Pour remédier à ces limitations, on considère une **équation différentielle fractionnaire à retard**, qui intègre à la fois :

- l'effet mémoire via la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville D^α ,
- le délai biologique du cycle cellulaire via le terme $N(t - \tau)$.

On considère le problème suivant :

$$D^\alpha N(t) = r N(t - \tau), \quad t \in [0, b], \quad (2.11)$$

avec la condition initiale :

$$N(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

où :

- $N(t)$ représente le nombre de cellules tumorales à l'instant t ,
- D^α est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0, 1)$, qui modélise la mémoire du tissu tumoral,
- $r > 0$ est le taux de croissance cellulaire (nombre de divisions par unité de temps),
- $\tau > 0$ est le retard représentant la durée du cycle de division cellulaire,
- $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ est l'historique initial de la population tumorale.

Interprétation biologique :

Le terme $N(t - \tau)$ traduit le fait que le nombre de nouvelles cellules produites à l'instant t est proportionnel au nombre de cellules qui ont entamé leur cycle de division il y a τ unités de temps. L'ordre fractionnaire $\alpha \in (0, 1)$ quantifie l'intensité de l'effet mémoire : plus α est petit, plus la mémoire est longue et plus le passé lointain influence la dynamique présente. Lorsque $\alpha \rightarrow 1$, on retrouve le modèle classique à retard entier.

Afin d'appliquer les résultats du théorème de Banach (1.4.1), on reformule le problème (2.11) sous la forme abstraite :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), \quad t \in [0, b],$$

en posant :

- $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue $|\cdot|$, qui est un espace de Banach réel,
- $A = 0$: l'opérateur nul sur $\mathbb{R}$, générateur infinitésimal du semi-groupe identité $T(t)x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. En particulier $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} = 1$ pour tout $t \geq 0$, donc $M = \sup_{t \in [0, b]} \|T(t)\| = 1$,
- $f : [0, b] \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, \psi) = r \psi(-\tau)$, qui représente le taux de prolifération cellulaire avec retard.

Vérification de la condition de Lipschitz (A1) :

Pour tous $t \in [0, b]$ et $\psi_1, \psi_2 \in C([- \tau, 0], \mathbb{R})$, on calcule :

$$\begin{aligned} |f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)| &= |r \psi_1(-\tau) - r \psi_2(-\tau)| \\ &= r |\psi_1(-\tau) - \psi_2(-\tau)| \\ &\leq r \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)| \\ &= r \|\psi_1 - \psi_2\|_C. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est justifiée par le fait que $-\tau \in [-\tau, 0]$, donc l'évaluation en un point est majorée par le supremum sur tout l'intervalle. Ainsi, la condition (A1) est satisfaite avec la constante de Lipschitz $k = r$.

Interprétation médicale : Cette condition signifie que si deux patients présentent des historiques tumoraux ψ_1 et ψ_2 proches (au sens de la norme $\|\cdot\|_C$), alors leurs taux de prolifération à l'instant t sont également proches, à un facteur r près. C'est une propriété de **stabilité** du modèle par rapport aux données initiales.

Application du théorème de Banach :

Le semi-groupe associé à $A = 0$ est le semi-groupe identité, c'est-à-dire $T(t)x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. Sa norme vérifie $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} = 1$ pour tout $t \geq 0$, donc :

$$M = \sup_{t \in [0, b]} \|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} = 1.$$

D'autre part, on a établi que la constante de Lipschitz est $k = r$. En substituant $k = r$ et $M = 1$ dans la condition (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{kMb^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} &= \frac{r \times 1 \times b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \frac{r b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

La condition d'unicité (2.5) est donc vérifiée si et seulement si :

$$\frac{r b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1,$$

ce qui est équivalent à :

$$r b^\alpha < \Gamma(\alpha + 1).$$

Sous cette condition, toutes les hypothèses du théorème de Banach (1.4.1) sont satisfaites, et on conclut à l'existence et à l'unicité d'une mild solution $N \in C([- \tau, b], \mathbb{R})$ du problème (2.11), c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction continue $N : [-\tau, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$N(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) r N(s-\tau) ds, \quad t \in [0, b],$$

avec $N(t) = \phi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$.

Interprétation médicale :

L'unicité de la solution signifie que pour des données initiales $\phi(t)$ fixées (état de la tumeur avant $t = 0$), il existe **une et une seule** trajectoire possible pour l'évolution tumorale. Ce résultat est fondamental en oncologie car il garantit la **prédictibilité** du modèle : deux médecins utilisant les mêmes données initiales obtiendront exactement les mêmes prédictions.

Interprétation de la condition : La condition $\frac{r b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1$ a une signification médicale claire :

- Si le taux de croissance r est élevé (tumeur agressive), l'intervalle d'observation b doit être court pour garantir l'unicité.
- Si α est petit (forte mémoire), b^α est plus grand, ce qui rend la condition plus difficile à satisfaire.
- La fonction $\Gamma(\alpha + 1)$ joue le rôle d'un facteur de normalisation lié à l'ordre fractionnaire.

Conclusion :

Cet exemple illustre comment les résultats théoriques établis dans ce chapitre s'appliquent à un modèle biologique concret de croissance tumorale. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville capture l'effet mémoire inhérent aux processus biologiques, tandis que le retard τ modélise le délai du cycle de division cellulaire. Selon la durée d'observation b et le taux de croissance r :

- si $\frac{r b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1$: le principe de contraction de Banach garantit l'existence et l'**unicité** de la mild solution,
- sinon : l'alternative de Leray-Schauder garantit l'**existence** d'au moins une solution.

Équations différentielles semi-linéaires d'ordre fractionnaire à retard infini

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de solutions intégrales pour des équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires d'ordre non entier à retard infini. L'outil de base dans notre étude est la théorie des C_0 semi-groupes et l'argument du point fixe.

On citera à titre d'exemple les travaux de Agarwal et al. [1], Belmekki et al. [3, 4] ainsi que les ouvrages de référence sur le calcul fractionnaire [12].

On considère le problème suivant :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), \quad t \in J = [0, b], \quad (3.1)$$

$$y_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (3.2)$$

où

- D^α désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,
- $f : J \times \mathcal{B} \rightarrow E$ est une fonction continue,
- $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$,
- $\varphi \in \mathcal{B}$ est une fonction continue telle que $\varphi(0) = 0$,
- $(E, |\cdot|)$ est un espace de Banach réel.

Pour tout $t \in J$, la fonction $y_t \in \mathcal{B}$ est définie par :

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in (-\infty, 0].$$

$\mathcal{B}$ est l'espace de phase constitué de fonctions définies de $(-\infty, 0]$ à valeurs dans E , vérifiant certains axiomes présentés par Hale et Kato [7].

Dans la littérature consacrée aux équations à retard fini, l'espace de phase est souvent l'espace de toutes les fonctions continues sur $[-r, 0]$, muni de la norme uniforme. Quand le retard est infini, la notion de l'espace de phase $\mathcal{B}$ joue un rôle

important dans l'étude qualitative et quantitative, un choix habituel est l'espace $\mathcal{B}$ des fonctions appliquant $(-\infty, 0]$ dans E muni de la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Nous supposons que $\mathcal{B}$ satisfait les axiomes suivants :

(H1) Si $y : (-\infty, \sigma + b] \rightarrow E$, $b > 0$, est continue sur $[\sigma, \sigma + b]$ et $y_{\sigma} \in \mathcal{B}$, alors pour chaque $t \in [\sigma, \sigma + b]$ les conditions suivantes sont réalisées :

(i) y_t est dans $\mathcal{B}$;

(ii) $|y(t)| \leq H\|y_t\|_{\mathcal{B}}$;

(iii) $\|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup\{|y(s)| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma)\|y_{\sigma}\|_{\mathcal{B}}$.

(H2) Pour la fonction $y(\cdot)$ dans (A1), $t \rightarrow y_t$ est une fonction continue sur $[\sigma, \sigma + b]$ à valeurs dans $\mathcal{B}$.

(H3) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Ici $H \geq 0$ est une constante, $K, M : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, K est continue, M est localement bornée et H, K, M sont indépendantes de $y(t)$.

Remarque 3.1.1 (Constantes associées à l'espace de phase). Pour $b > 0$, on définit les constantes suivantes :

$$K_b = \sup\{K(t) : t \in [0, b]\}, \quad M_b = \sup\{M(t) : t \in [0, b]\},$$

où K et M sont les fonctions apparaissant dans l'axiome (A1)(iii). Ces constantes sont finies car K est continue et M est localement bornée.

3.2 Quelques exemples d'espaces de phase

Exemple 3.2.1. [8] On note par :

$\mathcal{BC}$ l'espace des fonctions continues bornées définies de $(-\infty, 0]$ dans E

$\mathcal{BUC}$ l'espace des fonctions continues uniformément bornées définies de $(-\infty, 0]$ dans E

$$\mathcal{C}^{\infty} = \{\phi \in \mathcal{BC} : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \phi(\theta) \text{ existe dans } E\}$$

$$\mathcal{C}^0 = \{\phi \in \mathcal{BC} : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \phi(\theta) = 0\}, \text{ muni de la norme uniforme}$$

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : \theta \leq 0\}.$$

Nous savons que les espaces $\mathcal{BUC}$, $\mathcal{C}^{\infty}$ et $\mathcal{C}^0$ satisfont les conditions (A1) – (A3).

$\mathcal{BC}$ satisfait (A2),(A3) mais (A1) n'est pas satisfait.

Exemple 3.2.2. [8] Les espaces $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{UC}_g$, $\mathcal{C}_g^0$ et $\mathcal{C}_g^\infty$.

Soit $g : (-\infty, 0] \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction continue. Nous définissons

$$\mathcal{C}_g = \{\phi \in \mathcal{C}((-\infty, 0], E) : (\phi(\theta)/g(\theta)) \text{ est bornée sur } (-\infty, 0]\}$$

$$\mathcal{UC}_g = \{\phi \in \mathcal{C}_g : (\phi(\theta)/g(\theta)) \text{ est uniformément continue sur } (-\infty, 0]\}$$

$$\mathcal{C}_g^0 = \{\phi \in \mathcal{C}_g : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} (\phi(\theta)/g(\theta)) = 0\}, \text{ muni de cette norme}$$

$$\|\phi\| = \sup \left\{ \frac{|\phi(\theta)|}{g(\theta)} : -\infty < \theta \leq 0 \right\}.$$

Considérons les conditions suivantes sur la fonction g .

$$(\mathcal{G}) : \sup_{0 \leq t \leq a} \sup \left\{ \frac{g(\theta+t)}{g(\theta)} : -\infty < \theta \leq -t \right\} < \infty \text{ pour tout } a > 0$$

Alors nous savons que l'espace $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_g^0$ satisfont la condition (A3). Ils satisfont les conditions (A1) et (A2) si $(\mathcal{G})$ est réalisée.

Exemple 3.2.3. [8] L'espace $\mathcal{C}_\gamma$.

Pour n'importe quelle constante réelle γ , nous définissons l'espace fonctionnel $\mathcal{C}_\gamma$ par

$$\mathcal{C}_\gamma = \{\phi \in \mathcal{C}((-\infty, 0], E) : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{\gamma\theta} \phi(\theta) \text{ existe dans } E\}.$$

Muni de la norme suivante :

$$\|\phi\| = \sup \{e^{\gamma\theta} |\phi(\theta)| : \theta \leq 0\}.$$

Alors dans l'espace $\mathcal{C}_\gamma$ (voir [8]) les axiomes (A1) et (A3) sont satisfaits.

Pour plus de détails sur la théorie d'espace de phase, le livre de Hino et al [8] contient une bibliographie approfondie et une discussion détaillée sur ce sujet.

3.3 Résultats principaux

Notre résultat principal dans ce chapitre est basé sur l'argument du point fixe utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Avant de prouver nos résultats principaux pour le problème (3.1) – (3.2), on donnera la définition de sa mild solution.

Définition 3.3.1. On dit que la fonction continue $y : (-\infty, b] \rightarrow E$ est une mild solution du problème (3.1) – (3.2) si :

1. $y_0 = \varphi \in \mathcal{B}$ et

$$2. \ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y_s) ds, \ t \in J.$$

Considérons l'espace suivant :

$$\mathcal{B}_b = \{y : (-\infty, b] \rightarrow E : y|_J \in C(J, E) \text{ et } y_0 \in \mathcal{B}\}$$

où $y|_J$ est la restriction de y sur J . Soit $\|\cdot\|_b$ la semi-norme dans $\mathcal{B}_b$ définie par :

$$\|y\|_b = \|y_0\|_{\mathcal{B}} + \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq b\}, \ y \in \mathcal{B}_b.$$

Notre premier résultat d'existence du problème (3.1) – (3.2) est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.3.1. Soit $f : J \times \mathcal{B} \rightarrow E$ continue. Supposons qu'il existe une constante positive k telle que

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k \|u - v\|_{\mathcal{B}}, \quad \text{pour } t \in J \text{ et } u, v \in \mathcal{B}$$

Si

$$\frac{kMK_b b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \quad (3.3)$$

où :

$$K_b = \sup\{|K(t)| : t \in [0, b]\}.$$

Alors il existe une solution intégrale unique du problème (3.1) – (3.2) sur $(-\infty, b]$.

Preuve 3.3.1. Transformons le problème en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : \mathcal{B}_b \rightarrow \mathcal{B}_b$ défini par :

$$N(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, y_s) ds, & t \in J. \end{cases}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{B}$, nous définissons la fonction $x(\cdot)$ par :

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0], \\ 0, & t \in J. \end{cases}$$

Alors $x \in \mathcal{B}_b$. En posant $y(t) = z(t) + x(t)$, il est clair que y satisfait l'équation de la mild solution si et seulement si z vérifie $z_0 = 0$ et :

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, z_s + x_s) ds, \quad t \in J.$$

Soit $\mathcal{B}_b^0 = \{z \in \mathcal{B}_b : z_0 = 0\}$. Pour tout $z \in \mathcal{B}_b^0$, la semi-norme devient une norme :

$$\|z\|_b = \|z_0\|_{\mathcal{B}} + \sup_{t \in [0, b]} |z(t)| = \sup_{t \in [0, b]} |z(t)|.$$

Ainsi, $(\mathcal{B}_b^0, \|\cdot\|_b)$ est un espace de Banach. Définissons l'opérateur $P : \mathcal{B}_b^0 \rightarrow \mathcal{B}_b^0$ par :

$$P(z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) f(s, z_s + x_s) ds.$$

L'existence d'un point fixe pour N est équivalente à l'existence d'un point fixe pour P . Nous allons montrer que P est une contraction.

En effet, soient $z, \bar{z} \in \mathcal{B}_b^0$, alors pour tout $t \in [0, b]$ nous avons :

$$\begin{aligned} |P(z)(t) - P(\bar{z})(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} T(t-s) [f(s, z_s + x_s) - f(s, \bar{z}_s + x_s)] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T(t-s)\| |f(s, z_s + x_s) - f(s, \bar{z}_s + x_s)| ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k \|z_s - \bar{z}_s\|_B ds \\ &\leq \frac{Mk}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} K_b \sup_{s \in [0, t]} |z(s) - \bar{z}(s)| ds \\ &\leq \frac{MkK_b}{\Gamma(\alpha)} \|z - \bar{z}\|_b \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{MkK_b t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|z - \bar{z}\|_b. \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0, b]$, nous avons :

$$\|P(z) - P(\bar{z})\|_b \leq \frac{MkK_b b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|z - \bar{z}\|_b.$$

Par la condition (3.3) l'opérateur P est une contraction et donc P a un unique point fixe z par le principe de contraction de Banach, alors $y = z + x$ est un point fixe de N qui est une solution intégrale unique du problème (3.1) – (3.2). ■

Nous présentons maintenant un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder.

Lemme 3.3.1 (Gronwall généralisé). Soient $v, w : [0, b] \rightarrow [0, +\infty[$ des fonctions continues. Si $w(\cdot)$ est non décroissante et s'il existe des constantes $a > 0$ et $0 < \alpha < 1$ telles que :

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^\alpha} ds,$$

alors il existe une constante $k = k(\alpha)$ telle que

$$v(t) \leq w(t) + k a \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^\alpha} ds,$$

pour tout $t \in [0, b]$

Preuve 3.3.2. Pour $\varphi \in C([0, b], \mathbb{R}_+)$, définissons l'opérateur linéaire

$$(T\varphi)(t) := a \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds, \quad t \in [0, b].$$

Par hypothèse, on a $v \leq w + Tv$ sur $[0, b]$. En itérant cette inégalité (et en utilisant la monotonie et la linéarité de T), on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$v \leq \sum_{n=0}^{N-1} T^n w + T^N v.$$

Étape 1 : calcul explicite de $T^n w$:

Posons $\varphi_1(t) = t^{-\alpha}$. En utilisant la formule de convolution des fonctions puissances (fonction Bêta)

$$\int_0^t (t-s)^{p-1} s^{q-1} ds = B(p, q) t^{p+q-1}, \quad p, q > 0,$$

un calcul par récurrence montre que le n -ième noyau itéré $\varphi_n := \varphi_{n-1} * \varphi_1$ (convolution de Volterra) s'écrit

$$\varphi_n(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} t^{n(1-\alpha)-1}.$$

Par conséquent,

$$(T^n w)(t) = a^n \frac{\Gamma(1-\alpha)^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} \int_0^t (t-s)^{n(1-\alpha)-1} w(s) ds.$$

Étape 2 : majoration par le noyau $(t-s)^{-\alpha}$:

Remarquons l'identité d'exposants

$$n(1-\alpha) - 1 = -\alpha + (n-1)(1-\alpha).$$

Comme $0 \leq t-s \leq b$ et $(n-1)(1-\alpha) \geq 0$, il vient :

$$(t-s)^{n(1-\alpha)-1} \leq b^{(n-1)(1-\alpha)} (t-s)^{-\alpha}, \quad n \geq 1.$$

D'où, pour tout $n \geq 1$,

$$(T^n w)(t) \leq a^{n-1} \frac{\Gamma(1-\alpha)^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} b^{(n-1)(1-\alpha)} \cdot a \int_0^t (t-s)^{-\alpha} w(s) ds.$$

Étape 3 : convergence de la série et définition de $k(\alpha)$:

Posons

$$k(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \frac{\Gamma(1-\alpha)^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} b^{(n-1)(1-\alpha)}.$$

Cette série converge pour tout $a, b > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$: en effet, par la formule de Stirling, $\Gamma(n(1 - \alpha))$ croît plus vite que toute suite géométrique en n , ce qui assure la convergence par le critère de d'Alembert (le rapport des termes consécutifs tend vers 0). On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T^n w)(t) \leq k(\alpha) a \int_0^t (t-s)^{-\alpha} w(s) ds.$$

Étape 4 : le reste $T^N v$ tend vers 0 :

Puisque v est continue sur $[0, b]$, elle y est bornée : $V := \sup_{t \in [0, b]} v(t) < \infty$. Le même calcul qu'à l'étape 1 donne :

$$(T^N v)(t) \leq V a^N \frac{\Gamma(1 - \alpha)^N}{\Gamma(N(1 - \alpha) + 1)} b^{N(1 - \alpha)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

toujours en raison de la croissance factorielle de $\Gamma(N(1 - \alpha) + 1)$.

Conclusion. En faisant tendre $N \rightarrow \infty$ dans l'inégalité $v \leq \sum_{n=0}^{N-1} T^n w + T^N v$, on obtient :

$$v(t) \leq w(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (T^n w)(t) \leq w(t) + k(\alpha) a \int_0^t (t-s)^{-\alpha} w(s) ds, \quad \forall t \in [0, b],$$

ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 3.3.2. Soit $f : J \times \mathcal{B} \rightarrow E$ continue. Supposons que :

(H1) Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \in J}$ est compact pour $t > 0$.

(H2) Il existe des fonctions $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ telles que :

$$|f(t, u)| \leq p(t) + q(t) \|u\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall t \in J \text{ et pour } u \in \mathcal{B}.$$

Alors le problème (3.1) – (3.2) admet une mild solution sur $(-\infty, b]$.

Preuve 3.3.3. Transformons le problème (3.1) – (3.2) en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur $P : \mathcal{B}_b^0 \rightarrow \mathcal{B}_b^0$ défini comme dans le Théorème (3.3.1). La démonstration consiste à vérifier que l'opérateur P satisfait les conditions de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Nous procédons en quatre étapes :

Étape 1 : P est continu.

Soit $\{z_n\}$ une suite de $\mathcal{B}_b^0$ telle que $z_n \rightarrow z$. Pour tout $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned} |P(z_n)(t) - P(z)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(E)} |f(s, z_{ns} + x_s) - f(s, z_s + x_s)| ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, z_{ns} + x_s) - f(s, z_s + x_s)| ds. \end{aligned}$$

D'après l'axiome (A2), la continuité de $z_n \rightarrow z$ implique la continuité des trajectoires dans l'espace de phase $\mathcal{B}$. Comme f est une fonction continue, par le théorème de convergence dominée, nous obtenons :

$$\|P(z_n) - P(z)\|_b \leq \frac{Mb^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f(\cdot, z_n + x) - f(\cdot, z + x)\|_b \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

L'opérateur P est donc continu sur $\mathcal{B}_b^0$.

Étape 2 : P transforme tout ensemble borné en un ensemble borné.

Soit $\rho > 0$ et considérons la boule $B_\rho = \{z \in \mathcal{B}_b^0 : \|z\|_b \leq \rho\}$. Pour tout $z \in B_\rho$ et $t \in J$, l'axiome (A1) permet d'estimer le terme de retard par :

$$\begin{aligned} \|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}} &\leq \|z_s\|_{\mathcal{B}} + \|x_s\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_b \sup_{0 \leq \tau \leq s} |z(\tau)| + M_b \|z_0\|_{\mathcal{B}} + M_b \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_b \rho + M_b \|\varphi\|_{\mathcal{B}} := \rho^*. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de croissance sur f , il vient :

$$\begin{aligned} |P(z)(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (p(s) + q(s) \|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}}) ds \\ &\leq \frac{M(\|p\|_\infty + \rho^* \|q\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\|P(z)\|_b \leq \frac{Mb^\alpha(\|p\|_\infty + \rho^* \|q\|_\infty)}{\Gamma(\alpha + 1)} := \delta.$$

Ainsi, $P(B_\rho)$ est uniformément borné dans $\mathcal{B}_b^0$.

Étape 3 : P transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_2 > \tau_1$ et $z \in B_\rho$. Nous évaluons la différence :

$$\begin{aligned} |P(z)(\tau_2) - P(z)(\tau_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}| \|T(\tau_2 - s)\| |f(s, z_s + x_s)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1} \|T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)\| |f(s, z_s + x_s)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} \|T(\tau_2 - s)\| |f(s, z_s + x_s)| ds. \end{aligned}$$

Comme $\tau_2 \rightarrow \tau_1$, les termes du membre de droite tendent vers zéro. La compacité de $T(t)$ pour $t > 0$ assure la continuité dans la topologie uniforme des opérateurs. En vertu du théorème d'Arzelà-Ascoli (1.1.1), $P(B_\rho)$ est relativement compact, donc P est complètement continu.

Étape 4 : Estimations a priori.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E} = \{z \in \mathcal{B}_b^0 : z = \lambda P(z) \text{ pour un certain } 0 < \lambda < 1\}$. Soit $z \in \mathcal{E}$, pour chaque $t \in J$, on a :

$$|z(t)| \leq \frac{Mb^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{M\|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}} ds.$$

D'après l'axiome (A1), posons $v(t) = K_b \sup_{0 \leq s \leq t} |z(s)| + M_b \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$. L'inégalité devient :

$$v(t) \leq \left(\frac{MK_b b^\alpha \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} + M_b \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \right) + \frac{MK_b \|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall (2.2.1), il existe une constante Λ telle que $v(t) \leq \Lambda$, d'où $\|z\|_b \leq \Lambda/K_b$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc borné. Par l'alternative de Leray-Schauder, P possède un point fixe z , ce qui implique que $y = z + x$ est une mild solution du problème sur $(-\infty, b]$. ■

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème (3.1) – (3.2).

Théorème 3.3.3. Supposons que les conditions du Théorème (3.3.2) sont vérifiées. Supposons de plus qu'il existe une constante positive ℓ telle que :

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq \ell \|u - v\|_{\mathcal{B}}, \quad \text{pour } t \in J \text{ et tout } u, v \in \mathcal{B}.$$

Alors le problème (3.1) – (3.2) a une solution unique sur $(-\infty, b]$.

Preuve 3.3.4. Soient y et $\bar{y}$ deux solutions du problème. Pour $t \in (-\infty, 0]$, nous avons $y(t) = \bar{y}(t) = \varphi(t)$, donc $\|y_t - \bar{y}_t\|_{\mathcal{B}} = 0$. Pour $t \in [0, b]$, on a :

$$\begin{aligned} |y(t) - \bar{y}(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(E)} |f(s, y_s) - f(s, \bar{y}_s)| ds \\ &\leq \frac{Mk}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y_s - \bar{y}_s\|_{\mathcal{B}} ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'axiome (A1) de l'espace de phase $\mathcal{B}$, et puisque $y_0 = \bar{y}_0$, nous avons :

$$\|y_s - \bar{y}_s\|_{\mathcal{B}} \leq K(s) \sup_{0 \leq \xi \leq s} |y(\xi) - \bar{y}(\xi)|.$$

Posons :

$$w(t) = \sup\{|y(s) - \bar{y}(s)| : 0 \leq s \leq t\}.$$

L'inégalité devient :

$$w(t) \leq \frac{MkK_b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s) ds.$$

Par une application directe du lemme de Gronwall (Lemme 2.2.1), nous obtenons $w(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, b]$. Par conséquent, $y(t) = \bar{y}(t)$ pour tout $t \in (-\infty, b]$, ce qui prouve l'unicité de la solution. ■

Exemple 3.3.1. Pour valider et mettre en lumière la portée pratique des résultats abstraits développés tout au long de ce troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'une équation aux dérivées partielles fractionnaire fonctionnelle différentielle possédant un retard infini. Le modèle se présente sous la forme du système intégral-différentiel suivant :

$$(P2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \int_{-\infty}^0 P(\theta) g(t, u(t + \theta, x)) d\theta, & x \in [0, \pi], t \in [0, b], \alpha \in (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in [0, b], \\ u(t, x) = u_0(t, x), & x \in [0, \pi], t \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

où :

- $P : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de pondération (noyau de mémoire) continue.
- $g : [0, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ modélise les effets non linéaires cumulés du passé.
- $u_0 : (-\infty, 0] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ représente l'historique initial de l'état, supposé continu.

Cadre fonctionnel et opérateur linéaire :

Le traitement de ce type d'équations nécessite l'introduction d'un espace de Banach approprié pour l'espace d'état. Nous choisissons naturellement l'espace des fonctions de carré intégrable $E = L^2[0, \pi]$ muni de sa norme de Hilbert classique :

$$\|w\| = \left(\int_0^\pi |w(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On injecte dans cet espace l'opérateur différentiel linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ défini rigoureusement par $Aw = w''$ pour tout élément appartenant à son domaine de définition dense :

$$D(A) = \{w \in E : w, w' \text{ sont absolument continues, } w'' \in E \text{ et } w(0) = w(\pi) = 0\}$$

Sous cette formulation, l'opérateur A admet une décomposition spectrale basée sur ses valeurs propres $\lambda_n = -n^2$ et la base hilbertienne de fonctions propres associées :

$$w_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$$

pour $n = 1, 2, \dots$ de sorte que :

$$Aw = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 (w, w_n) w_n, \quad \forall w \in D(A)$$

Cet opérateur engendre un semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ uniformément borné et compact sur E , dont l'expression explicite est donnée par :

$$T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (w, w_n) w_n, \quad \forall w \in E$$

Étant donné que la première valeur propre vérifie $\lambda_1 = -1$, la norme de ce semi-groupe est immédiatement majorée par $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} \leq e^{-t} \leq 1$. La constante de borne supérieure est donc $M = \sup_{t \in [0, b]} \|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} = 1$.

Formulation abstraite du problème :

Afin de faire correspondre notre système d'équations aux dérivées partielles à l'équation différentielle abstraite étudiée dans ce chapitre, nous posons pour $t \in [0, b]$, $\theta \in (-\infty, 0]$ et $x \in [0, \pi]$:

1. $y(t)(x) = u(t, x)$,
2. $\phi(\theta)(x) = u_0(\theta, x)$,
3. $f(t, \varphi)(x) = \int_{-\infty}^0 P(\theta)g(t, \varphi(\theta)(x)) d\theta, \quad \forall \varphi \in \mathcal{B}$.

À l'aide de ces définitions, le système initial se transpose fidèlement sous la forme abstraite condensée :

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), & t \in [0, b], \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Vérification des hypothèses :

Pour garantir la régularité du terme non linéaire et appliquer nos théorèmes d'existence, nous introduisons les deux conditions concrètes suivantes :

- (i) Le noyau de mémoire P est absolument intégrable sur l'intervalle infini, c'est-à-dire :

$$\|P\|_{L^1} = \int_{-\infty}^0 |P(\theta)| d\theta < \infty.$$

- (ii) La fonction g satisfait une condition de croissance par rapport à sa composante d'état : il existe une fonction continue et croissante $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ telle que :

$$|g(t, v)| \leq \psi(|v|), \quad \forall (t, v) \in [0, b] \times \mathbb{R}.$$

Démontrons à présent de façon rigoureuse la continuité et la majoration de la non-linéarité f . En appliquant la propriété de croissance de la fonction ψ combinée à la définition de la norme de l'espace de phase $\mathcal{B}$, nous pouvons écrire pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$|f(t, \varphi)(x)| \leq \int_{-\infty}^0 |P(\theta)| \cdot |g(t, \varphi(\theta)(x))| d\theta \leq \int_{-\infty}^0 |P(\theta)| \psi(|\varphi(\theta)(x)|) d\theta.$$

Par définition de la borne supérieure dans l'espace des fonctions continues uniformément bornées, on sait que pour chaque $\theta \leq 0$, l'évaluation ponctuelle est dominée par la norme globale, soit $|\varphi(\theta)(x)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$. Comme ψ est une fonction croissante, il vient :

$$|f(t, \varphi)(x)| \leq \int_{-\infty}^0 |P(\theta)| \psi(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}) d\theta = \psi(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}) \int_{-\infty}^0 |P(\theta)| d\theta$$

En passant à la norme L^2 dans E , nous obtenons la majoration uniforme de l'opérateur :

$$\|f(t, \varphi)\| \leq \|P\|_{L^2} \psi(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}) \quad (3.5)$$

L'intégrabilité de P (hypothèse **(i)**) couplée à la continuité de g permet, par une application directe du théorème de convergence dominée de Lebesgue, d'affirmer que l'application f est continue de $\mathcal{B}$ dans E .

Conclusion

Toutes les conditions structurelles requises par le théorème (3.3.2) du présent chapitre se trouvent pleinement satisfaites. Par conséquent, s'il existe une constante $L > 0$ liée à la dynamique du système permettant de valider l'inégalité de contraction sur l'intervalle $[0, b]$:

$$\frac{Lb^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}(1 + M) < 1, \quad (3.6)$$

alors le problème intégral-différentiel fractionnaire à retard infini initial admet une mild solution unique $u \in C((-\infty, b], L^2[0, \pi])$.

3.4 Application en physique : Modèle de plaque viscoélastique avec mémoire infinie

Présentation du problème physique :

Les matériaux viscoélastiques, tels que les polymères, les caoutchoucs et les tissus biologiques, présentent une propriété fondamentale : leur comportement mécanique actuel dépend non seulement de l'état présent mais de toute leur histoire de déformation passée [10]. Cette propriété, appelée mémoire infinie, ne peut pas être modélisée fidèlement par les équations différentielles classiques d'ordre entier [6].

Contexte physique : Considérons une plaque mince en silicone médicale (épaisseur $h = 2$ mm, domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ m²), soumise à une charge dynamique. Le silicone est un matériau viscoélastique dont le temps de relaxation caractéristique est $\tau \approx 0.1$ seconde. Le comportement de cette plaque dépend de toutes les déformations subies.

Pourquoi le silicone ? Le silicone médical est utilisé dans les prothèses, les implants mammaires et les valves cardiaques. Sa compréhension mécanique est cruciale pour la sécurité des patients.

Modélisation mathématique :

On considère le problème suivant inspiré de [13] :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t, x) + \Delta^2 u(t, x) = \int_{-\infty}^t g(t-s) \Delta^2 u(s, x) ds + f(t, u_t), & x \in \Omega, t \in [0, b], \\ u(t, x) = \Delta u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, b], \\ u(\theta, x) = \varphi(\theta, x), & \theta \in (-\infty, 0], x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

où :

- D_t^α est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0, 1)$,
- $u(t, x)$ représente le déplacement vertical de la plaque au point x et au temps t (en millimètres),
- Δ^2 est l'opérateur de rigidité (bilan des moments fléchissants),
- $g(s) = e^{-s/\tau}$ est la **fonction de relaxation** (noyau de mémoire) avec $\tau > 0$ le temps de relaxation,
- $f(t, u_t)$ modélise les effets non linéaires cumulés du passé,
- $\varphi(\theta, x)$ représente l'**historique infini** des déformations.

Interprétation physique : Le terme intégral $\int_{-\infty}^t g(t-s) \Delta^2 u(s, x) ds$ traduit le fait que la contrainte actuelle dans la plaque dépend de toutes les déformations passées, pondérées par la fonction de relaxation g . Plus le temps écoulé est grand, moins l'effet est important (décroissance exponentielle).

Choix de l'espace de phase $\mathcal{B}$:

Pour modéliser l'historique infini, nous choisissons l'espace de phase $\mathcal{B} = \mathcal{C}_\gamma$ avec poids exponentiel défini par

$$\mathcal{C}_\gamma = \left\{ \psi : (-\infty, 0] \rightarrow L^2(\Omega) \mid \frac{\psi(\theta)}{e^{\gamma\theta}} \text{ est continue et bornée} \right\}, \quad (3.8)$$

muni de la norme :

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta \leq 0} \frac{\|\psi(\theta)\|_{L^2(\Omega)}}{e^{\gamma\theta}},$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre de décroissance.

Pourquoi ce choix ? La fonction de poids $e^{\gamma\theta}$ décroît exponentiellement quand $\theta \rightarrow -\infty$. Cela signifie que les événements très lointains du passé ont une influence de plus en plus faible sur l'état présent ce qui est physiquement raisonnable pour un matériau viscoélastique.

Vérification des axiomes de Hale-Kato :

Soit $y : (-\infty, b] \rightarrow E$ une fonction continue sur $[\sigma, \sigma + b]$ telle que $y_\sigma \in \mathcal{C}_\gamma$. Fixons $t \in [\sigma, \sigma + b]$.

Vérification de (H1)

(i) $y_t \in \mathcal{C}_\gamma$. Par définition de l'historique, $y_t(\theta) = y(t+\theta)$ pour tout $\theta \in (-\infty, 0]$. La continuité de y sur $[\sigma, \sigma + b]$ et l'hypothèse $y_\sigma \in \mathcal{C}_\gamma$ assurent que y_t est continue sur $(-\infty, 0]$ et que la quantité $\|y_t(\theta)\|/e^{\gamma\theta}$ reste bornée lorsque $\theta \rightarrow -\infty$. Par conséquent, $y_t \in \mathcal{C}_\gamma$.

(ii) Majoration ponctuelle. Pour $\theta = 0$, on a :

$$\|y_t\|_{\mathcal{C}_\gamma} = \sup_{\theta \leq 0} \frac{\|y(t+\theta)\|}{e^{\gamma\theta}} \geq \frac{\|y(t)\|}{e^0} = \|y(t)\|.$$

Ainsi $\|y(t)\| \leq H\|y_t\|_{\mathcal{C}_\gamma}$ avec $H = 1$.

(iii) Décomposition de la norme. On distingue deux cas selon la position de θ par rapport à $-t$.

Cas 1 : $\theta \in [-t, 0]$ (c'est-à-dire $t + \theta \geq 0$).

$$\begin{aligned} \frac{\|y(t+\theta)\|}{e^{\gamma\theta}} &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|y(s)\| \cdot \sup_{-t \leq \theta \leq 0} e^{-\gamma\theta} \\ &= e^{\gamma t} \sup_{0 \leq s \leq t} \|y(s)\|. \end{aligned}$$

Cas 2 : $\theta \in (-\infty, -t)$ (c'est-à-dire $t + \theta < 0$).

$$\begin{aligned} \frac{\|y(t+\theta)\|}{e^{\gamma\theta}} &= \frac{\|y(t+\theta)\|}{e^{\gamma(t+\theta)}} \cdot e^{\gamma t} \\ &\leq e^{\gamma t} \sup_{\xi \leq 0} \frac{\|y(\xi)\|}{e^{\gamma\xi}} \\ &= e^{\gamma t} \|y_0\|_{\mathcal{C}_\gamma}. \end{aligned}$$

En combinant les deux cas, on obtient :

$$\|y_t\|_{\mathcal{C}_\gamma} \leq e^{\gamma t} \sup_{0 \leq s \leq t} \|y(s)\| + e^{\gamma t} \|y_0\|_{\mathcal{C}_\gamma},$$

ce qui donne l'axiome (H1)(iii) avec $K(t) = e^{\gamma t}$ et $M(t) = e^{\gamma t}$.

Vérification de (H2) La continuité de l'application $t \mapsto y_t$ de $[\sigma, \sigma + b]$ dans $\mathcal{C}_\gamma$ découle directement de la continuité de y sur $[\sigma, \sigma + b]$ et de la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\gamma}$.

Vérification de (H3) L'espace $\mathcal{C}_\gamma$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\gamma}$ est complet (c'est un espace de Banach), comme démontré dans

Remarque 3.4.1 (Constantes associées). Pour $b > 0$, on définit les constantes :

$$K_b = \sup_{t \in [0, b]} K(t) = e^{\gamma b}, \quad M_b = \sup_{t \in [0, b]} M(t) = e^{\gamma b},$$

qui sont finies car K est continue et M est localement bornée sur $[0, +\infty)$.

L'espace $\mathcal{C}_\gamma$ satisfait les axiomes de Hale-Kato avec $H = 1$, $K(t) = e^{\gamma t}$ et $M(t) = e^{\gamma t}$. Nous pouvons maintenant formuler le problème de la plaque dans le cadre abstrait.

Formulation abstraite du problème :

Afin de faire correspondre notre système à l'équation abstraite étudiée dans ce chapitre, nous posons :

1. $E = L^2(\Omega)$, muni de sa norme hilbertienne classique :

$$\|w\| = \left(\int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

2. $A = -\Delta^2$ avec domaine $D(A) = \{w \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\}$. L'opérateur A engendre un C_0 -semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ compact sur E , avec :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} \leq e^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, $M = \sup_{t \in [0, b]} \|T(t)\| = 1$.

3. $y(t)(x) = u(t, x)$, état dans E au temps t .

4. $y_t(\theta)(x) = u(t + \theta, x)$, historique dans $\mathcal{B}$.

5. $\varphi(\theta)(x) = u_0(\theta, x)$, historique initial.

6. $f(t, \psi)(x) = \int_{-\infty}^0 g(-\theta) \Delta^2 \psi(\theta)(x) d\theta + \tilde{f}(t, \psi)$.

Le problème (3.7) se transpose sous la forme abstraite condensée :

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), & t \in [0, b], \\ y_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Vérification des hypothèses :

Hypothèse (H1) — Compacité du semi-groupe : L'opérateur $A = -\Delta^2$ avec conditions de Dirichlet est autoadjoint positif sur $E = L^2(\Omega)$. Il admet une décomposition spectrale :

$$Aw = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle w, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad \text{avec } \lambda_n = n^4 \text{ et } \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

Le semi-groupe associé $T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle w, \varphi_n \rangle \varphi_n$ est analytique et compact pour $t > 0$ car $\lambda_n \rightarrow +\infty$. De plus, $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(E)} \leq e^{-\pi^4 t} \leq 1$, d'où $M = 1$.

Hypothèse (H2) — Condition de croissance sur f : Pour le terme de mémoire, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^0 g(-\theta) \Delta^2 \psi(\theta) d\theta \right\| &\leq \int_{-\infty}^0 e^{\theta/\tau} \|\Delta^2 \psi(\theta)\| d\theta \\ &\leq \int_{-\infty}^0 e^{\theta/\tau} e^{\gamma\theta} \|\psi\|_{\mathcal{B}} d\theta \\ &= \|\psi\|_{\mathcal{B}} \int_{-\infty}^0 e^{\theta(1/\tau + \gamma)} d\theta \\ &= \frac{\tau}{1 + \gamma\tau} \|\psi\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $|f(t, \psi)| \leq p(t) + q(t) \|\psi\|_{\mathcal{B}}$ avec $p, q \in C([0, b], \mathbb{R}_+)$, ce qui vérifie la condition (H2) du théorème (1.4.2)

Application du théorème de contraction de Banach :

Pour l'unicité, vérifions la condition de contraction du théorème (1.4.1).

Étape 1 : Calcul de la constante de Lipschitz k

La fonction f contient un terme intégral avec le noyau $g(s) = e^{-s/\tau}$. La constante de Lipschitz est donnée par la norme L^1 de g :

$$k = \|g\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} e^{-s/\tau} ds = [-\tau e^{-s/\tau}]_0^{+\infty} = 0 - (-\tau) = \tau. \quad (3.10)$$

Étape 2 : Constantes de l'espace de phase

D'après [8], les fonctions K et M de l'axiome (A1)(iii) sont :

$$K(t) = e^{\gamma t}, \quad M(t) = 1.$$

Sur l'intervalle $[0, b]$, on a donc :

$$K_b = \sup_{t \in [0, b]} K(t) = e^{\gamma b}, \quad M_b = 1. \quad (3.11)$$

Étape 3 : Condition de contraction

La condition d'unicité s'écrit :

$$\frac{k \cdot M \cdot K_b \cdot b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \quad (3.12)$$

En remplaçant $k = \tau$, $M = 1$ et $K_b = e^{\gamma b}$:

$$\frac{\tau \cdot e^{\gamma b} \cdot b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1. \quad (\star)$$

Étape 4 : Vérification numérique

Prenons $\alpha = 0.8$, $\tau = 0.1$ s (silicone), $\gamma = 0.1$. On calcule $\Gamma(1.8) \approx 0.9314$.

- Pour $b = 0.5$ s : $K_b = e^{0.05} \approx 1.051$, $b^{0.8} = 0.5^{0.8} \approx 0.574$

$$\text{Facteur} = \frac{0.1 \times 1.051 \times 0.574}{0.9314} \approx 0.065 < 1. \quad \checkmark$$

- Pour $b = 1.0$ s : $K_b = e^{0.1} \approx 1.105$, $b^{0.8} = 1$

$$\text{Facteur} = \frac{0.1 \times 1.105 \times 1}{0.9314} \approx 0.119 < 1. \quad \checkmark$$

- Pour $b = 2.0$ s : $K_b = e^{0.2} \approx 1.221$, $b^{0.8} \approx 1.741$

$$\text{Facteur} = \frac{0.1 \times 1.221 \times 1.741}{0.9314} \approx 0.228 < 1. \quad \checkmark$$

Conclusion : Pour une plaque en silicone avec $\tau = 0.1$ s, la condition $(\star)$ est vérifiée pour des durées d'observation $b \leq 2$ secondes. Le théorème (1.4.1) garantit l'existence et l'unicité d'une mild solution.

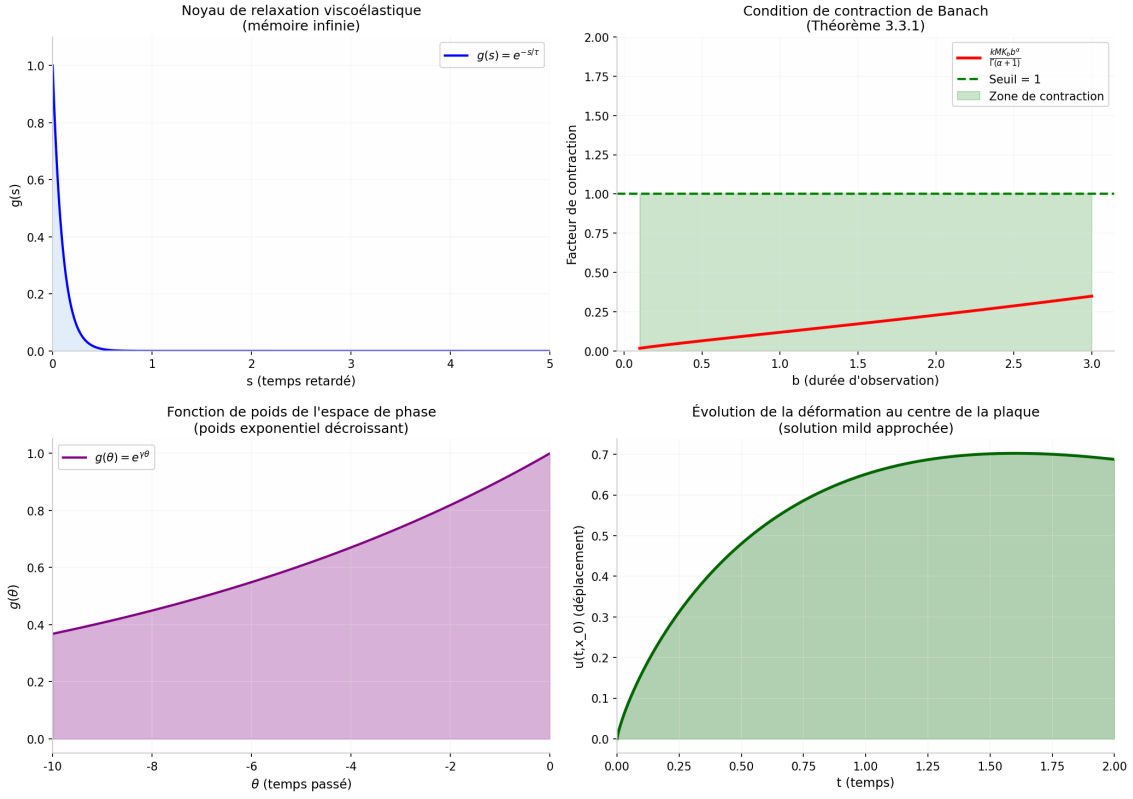


FIGURE 3.1 – Illustration des résultats obtenus pour le modèle de plaque viscoélastique à mémoire infinie.

Interprétation de la Figure

La Figure(3.1) regroupe quatre graphes illustrant les principales propriétés du modèle fractionnaire de plaque viscoélastique à mémoire infinie. Ils permettent de mettre en évidence le rôle de la mémoire, de vérifier les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité et d'interpréter le comportement de la solution du modèle.

Premier graphe : Noyau de relaxation viscoélastique. Le premier graphe représente le noyau de relaxation

$$g(s) = e^{-s/\tau},$$

qui décrit l'influence des déformations passées sur l'état actuel du matériau. On observe une décroissance exponentielle lorsque le temps retardé s augmente. Ainsi, les déformations récentes ont une influence plus importante que les déformations anciennes. Toutefois, puisque $g(s)$ reste strictement positif pour tout $s \geq 0$, toutes les déformations passées continuent à intervenir dans la réponse du matériau, ce qui traduit la mémoire infinie caractéristique des matériaux viscoélastiques.

Deuxième graphe : Condition de contraction de Banach. Le deuxième graphe représente l'évolution du facteur de contraction

$$\frac{kM_b K_b b^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

en fonction de la durée d'observation b . La droite horizontale correspond à la valeur critique 1. On constate que la courbe demeure entièrement en dessous de cette limite, ce qui montre que l'opérateur considéré est contractant sur l'intervalle étudié. Cette vérification graphique confirme que les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont satisfaites et garantit ainsi l'existence et l'unicité de la solution mild du problème.

Troisième graphe : Fonction de poids de l'espace de phase. *Le troisième graphe illustre la fonction de poids*

$$g(\theta) = e^{\gamma\theta}, \quad \theta \leq 0,$$

utilisée dans la définition de l'espace de phase. Cette fonction attribue un poids plus important aux états récents qu'aux états plus anciens. Lorsque θ tend vers $-\infty$, le poids décroît progressivement, ce qui traduit la diminution de l'influence des états éloignés dans le passé tout en conservant l'effet de mémoire infinie du système.

Quatrième graphe : Évolution de la déformation de la plaque. *Le quatrième graphe illustre qualitativement l'évolution de la déformation au centre de la plaque au cours du temps. La déformation augmente rapidement au début sous l'effet de la charge appliquée, puis sa croissance ralentit progressivement jusqu'à tendre vers un état quasi stationnaire. Ce comportement est caractéristique des matériaux viscoélastiques, pour lesquels les effets de mémoire amortissent progressivement la réponse mécanique.*

En conclusion, la Figure met en évidence la cohérence entre le modèle mathématique et le phénomène physique étudié. Les résultats obtenus montrent que le noyau de relaxation décrit correctement l'effet mémoire, que la condition de contraction est vérifiée, que l'espace de phase est adapté à un système à mémoire infinie et que l'évolution de la déformation est conforme au comportement attendu d'une plaque viscoélastique.

Bilan des résultats obtenus

Synthèse comparative

Afin de mettre en évidence les principales différences entre les deux cadres théoriques étudiés dans ce mémoire, nous présentons le tableau comparatif suivant. Celui-ci résume les caractéristiques essentielles des problèmes à retard fini et à retard infini, ainsi que les outils mathématiques mobilisés pour établir les résultats d'existence et d'unicité des solutions.

Critère	Retard fini (Chapitre 2)	Retard infini (Chapitre 3)
Historique du système	Mémoire limitée à l'intervalle $[-r, 0]$.	Mémoire complète sur $(-\infty, 0]$.
Espace de travail	$C([-r, 0], E)$ muni de la norme uniforme.	Espace de phase abstrait $\mathcal{B}$ satisfaisant les axiomes de Hale–Kato.
Condition initiale	$\varphi \in C([-r, 0], E)$.	$\varphi \in \mathcal{B}$ avec fonction de poids.
Cadre analytique	Analyse sur un intervalle borné.	Analyse dans un espace de phase adapté à une mémoire infinie.
Outil principal	Théorèmes du point fixe de Banach et Larey-Schauder et le lemme de Gronwall classique.	Théorèmes du point fixe de Banach et Larey-Schauder et le lemme de Gronwall généralisé.
Hypothèse essentielle	Condition de Lipschitz sur le terme non linéaire.	Condition de Lipschitz et axiomes de Hale–Kato.
Application étudiée	Croissance tumorale avec retard fini.	Plaque viscoélastique à mémoire infinie.
Résultat obtenu	Existence et unicité d'une solution mild.	Existence et unicité d'une solution mild.
Interprétation	Le comportement du système dépend uniquement d'un passé récent.	Toute l'histoire du système intervient dans son évolution, avec une influence décroissante des états les plus anciens.

TABLE 3.1 – Comparaison entre les équations différentielles fractionnaires à retard fini et à retard infini

Le Tableau (3.1) met en évidence l'évolution du cadre théorique entre les deux chapitres. Le passage d'un retard fini à un retard infini permet de modéliser des phénomènes possédant une mémoire plus réaliste, au prix d'un cadre fonctionnel plus riche reposant sur les espaces de phase abstraits et les axiomes de Hale–Kato. Malgré cette généralisation, les deux études aboutissent au même résultat fondamental : sous des hypothèses appropriées, le problème considéré admet une solution mild unique.

Conclusion générale

Au terme de ce travail, nous avons établi un cadre théorique rigoureux pour l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions intégrales d'équations différentielles fractionnaire semi-linéaires à retard fini et infini. Sous une hypothèse de Lipschitz, le théorème de contraction de Banach garantit l'existence et l'unicité de la solution. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder assure l'existence d'au moins une solution, pourvu que le semi-groupe associé soit compact. Ces résultats, obtenus dans le cadre de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, constituent une avancée significative dans la compréhension des systèmes dynamiques héritant d'une mémoire et d'un retard.

La pertinence de ces résultats théoriques a été démontrée à travers deux exemples concrets issus de domaines applicatifs majeurs. D'une part, un modèle de croissance tumorale a permis d'illustrer le cas du retard fini, mettant en évidence l'apport des outils fractionnaire pour modéliser la prolifération cellulaire. D'autre part, un modèle de plaque viscoélastique en silicone médical a validé notre approche dans le cadre du retard infini, soulignant l'intérêt de ces équations pour décrire les comportements mécaniques des matériaux à mémoire. Ces applications attestent de la solidité du formalisme développé et de sa capacité à traduire des phénomènes réels complexes.

Ce mémoire ouvre plusieurs voies de recherche prometteuses. Il serait naturel d'étendre ces résultats aux dérivées fractionnaire de Hilfer, qui généralisent à la fois les approches de Riemann-Liouville et de Caputo. Par ailleurs, l'étude de la stabilité des solutions obtenues, le traitement des équations différentielles fractionnaire à impulsions, ainsi que le passage aux inclusions différentielles fractionnaire constituent des prolongements théoriques pertinents. Enfin, il paraît particulièrement judicieux d'envisager l'étude de ces équations à retard dans le cadre de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, dont les conditions initiales s'expriment de manière plus physique et mieux adaptées aux problèmes de modélisation en biologie et en mécanique.

Bibliographie

- [1] Agarwal, R. P., Belmekki, M. et Benchohra, M., *A Survey on Semilinear Differential Equations and Inclusions Involving Riemann-Liouville Fractional Derivative*, *Advances in Difference Equations*, vol. 2009, Art. ID 981728, 2009.
- [2] Anaya, K., Abdelli, M. et Messaoudi, S., *Decay rate of a weakly dissipative viscoelastic plate equation with infinite memory*, *Arab Journal of Mathematical Sciences*, vol. 27, pp. 1–20, 2020.
- [3] Belmekki, M., Mekhalfi, K. et Ntouyas, S. K., *Existence and Uniqueness for Semilinear Fractional Differential Equations with Infinite Delay via Resolvent Operators*, *J. Fract. Calc. Appl.*, vol. 4(2), pp. 267–282, 2013.
- [4] Belmekki, M., Mekhalfi, K. et Ntouyas, S. K., *Semilinear functional differential equations with fractional order and finite delay*, *Malaya J. Mat.*, vol. 1(1), pp. 73–81, 2012.
- [5] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Dunod, Paris, 2005.
- [6] Dafermos, C. M., *Asymptotic stability in viscoelasticity*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 37, pp. 297–308, 1970.
- [7] Hale, J. K. et Kato, J., *Phase space for retarded equations with infinite delay*, *Funkcial. Ekvac.*, vol. 21, pp. 11–41, 1978.
- [8] Hino, Y., Murakami, S. et Naito, T., *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [9] Malthus, T. R., *An Essay on the Principle of Population*, J. Johnson, Londres, 1798.
- [10] Magin, R., *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, Connecticut, 2006.
- [11] Mekhalfi, K., *Équations Différentielles d'Ordre Fractionnaire : Cours et Exercices*, *Polycopié pédagogique*, Université de Aïn Témouchent, 2021-2022.
- [12] Miller, K. S. et Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [13] Mustafa, M. I. et Kafini, M., *Decay rates for memory-type plate system with delay and source term*, *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 40, pp. 883–895, 2017.
- [14] Oldham, K. B. et Spanier, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.

- [15] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [16] Riesz, M., *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, *Acta Mathematica*, vol. 81, pp. 1-222, 1949.
- [17] Samko, S. G., Kilbas, A. A. et Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.