

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département de Mathématiques et Informatique



Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Spécialité : Biomathématique

Thème

## Contrôle optimal et ses applications

Présenté Par :

Mlle : REZOUG Ahlem

Devant le jury composé de :

|                     |     |                           |           |
|---------------------|-----|---------------------------|-----------|
| Hamid KHIAR         | MCB | UAT.B.B (Ain Temouchent)  | Président |
| Abdelkader BENAÏSSA | MCB | UAT.B.B (Ain Temouchent ) | Examineur |
| Mohammed HARIRI     | MCA | UAT.B.B (Ain Temouchent ) | Encadrant |

*Année Universitaire 2025/2026*

---

# Remerciements

---

Je rends grâce à Allah le tout-puissant, qui a éclairé mon chemin vers le savoir et m'a accordé la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail. À lui reviennent toutes les louanges, au début comme à la fin.

**À mon éminent professeur et encadreur, Mohammed HARIRI :**

Je vous exprime ma profonde gratitude et mes sincères remerciements pour avoir généreusement partagé votre temps et votre vaste savoir. Vous avez été un soutien exemplaire et un guide précieux à chaque étape de cette recherche. Que Dieu vous récompense de la meilleure des manières.

**Aux honorables membres du jury, mosieur Hamid KHIAR et mosieur Abdelkader BENAÏSSA :**

J'adresse mes vifs remerciements et ma profonde considération aux membres du jury pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail, et de partager avec moi ce moment scientifique solennel. J'apprécie énormément vos remarques et vos corrections qui sauront, sans nul doute, enrichir cette recherche et lui conférer toute sa rigueur académique.

**À mes chers parents, sources de tendresse et de sacrifice :**

À mon père, qui a semé en moi l'ambition et a balisé, par son labeur et sa sueur, mon chemin vers la réussite. À ma mère, dont les prières nocturnes furent pour moi un rempart protecteur et une lueur d'espoir. Je vous dédie le fruit de cet effort, car vous êtes le pilier inébranlable sur lequel je me suis appuyé et le secret de chaque succès que j'ai accompli. Que Dieu vous préserve et vous garde comme une couronne sur ma tête.

**À mes frères :**

À vous avec qui j'ai partagé le poids des jours et la beauté des souvenirs, merci d'avoir toujours été à mes côtés. Je vous remercie pour l'immensité de votre amour et vos encouragements incessants qui m'ont donné l'énergie d'aller de l'avant.

**À mes chers collègues et compagnons de route :**

À tous ceux que j'ai côtoyés sur les bancs de l'université, merci pour ces moments précieux et ces échanges scientifiques fructueux. Vous avez été la meilleure des compagnies durant ce long voyage.

Enfin, j'adresse mes plus vifs remerciements à tous ceux qui, de près ou de loin, par un effort ou par une prière, ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.

*R. Ahlem.*

---

# Dédicace

---

*Je dédie ce modeste travail  
À mes très chers parents,  
À mes frères,  
À toute ma famille,  
Et à toute la promotion du Master Biomathématiques .*

*R. Ahlem.*

## ملخص

يُعدّ التحكم الأمثل مجالاً أساسياً في الرياضيات التطبيقية، ويقع عند تقاطع نظرية الأنظمة الديناميكية والتحليل والتحسين. يهدف هذا المجال إلى تحديد طريقة تحكم تسمح للنظام بالانتقال من حالة ابتدائية إلى حالة مرغوبة مع تقليل دالة التكلفة التي تمثل، بحسب السياق، استهلاك الطاقة، أو خطأ المسار، أو زمن الانتقال، أو التكلفة الاقتصادية.

في هذه الأطروحة، نعرض أولاً الأسس الرياضية اللازمة لدراسة التحكم الأمثل، بما في ذلك الأنظمة الديناميكية، ونتائج وجود الحلول ووحدانياتها، وبعض مفاهيم التحكم. ثم نصيغ المسألة العامة للتحكم الأمثل من خلال تقديم متغيرات الحالة، وطرق التحكم المسموح بها، والقيود، ودالة التكلفة. ونولي اهتماماً خاصاً للطرق النظرية الرئيسية في هذا المجال، ولا سيما مبدأ بونترياجين الأقصى، والبرمجة الديناميكية، ومعادلة هاميلتون-جاكوبي-بيلمان، والتحكم الخطي التربيعي القائم على معادلة ريكاتي.

وأخيراً، يُخصص قسم عددي باستخدام برنامج MATLAB لتوضيح النتائج النظرية المتعلقة بالأنظمة الخطية وغير الخطية. تُظهر المحاكاة التي تم الحصول عليها فعالية الأساليب المدروسة في تثبيت الأنظمة الديناميكية وتحسين أدائها مع تقليل جهد التحكم.

وبذلك، يُبرز هذا العمل أهمية التحكم الأمثل نظرياً وعملياً في تطبيقاته المتعددة في مجالات الأتمتة والهندسة والاقتصاد وأنظمة الطاقة.

### الكلمات المفتاحية

التحكم الأمثل، الأنظمة الديناميكية، مبدأ بونترياجين الأقصى، البرمجة الديناميكية، معادلة ريكاتي، معادلة هاميلتون-جاكوبي-بيلمان، MATLAB.

---

# Résumer

---

Le contrôle optimal constitue un domaine fondamental des mathématiques appliquées, situé à l'intersection de la théorie des systèmes dynamiques, de l'analyse et de l'optimisation. Il a pour objectif de déterminer une commande permettant de faire évoluer un système d'un état initial vers un état souhaité tout en minimisant une fonctionnelle de coût représentant, selon le contexte, une dépense énergétique, une erreur de trajectoire, une durée de transfert ou un coût économique.

Dans ce mémoire, nous présentons d'abord les bases mathématiques nécessaires à l'étude du contrôle optimal, notamment les systèmes dynamiques, les résultats d'existence et d'unicité des solutions, ainsi que quelques notions de convexité. Nous formulons ensuite le problème général du contrôle optimal en introduisant les variables d'état, les commandes admissibles, les contraintes et la fonctionnelle de coût. Une attention particulière est accordée aux principales méthodes théoriques du domaine, en particulier le principe du maximum de Pontryagin, la programmation dynamique, l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, ainsi que le contrôle linéaire quadratique fondé sur l'équation de Riccati.

Enfin, une partie numérique sous MATLAB est consacrée à l'illustration des résultats théoriques sur des systèmes linéaires et non linéaires. Les simulations obtenues montrent l'efficacité des méthodes étudiées pour stabiliser les systèmes dynamiques et améliorer leurs performances tout en limitant l'effort de commande.

Ce travail met ainsi en évidence l'intérêt du contrôle optimal aussi bien sur le plan théorique que dans ses nombreuses applications en automatique, en ingénierie, en éco-

nomie et dans les systèmes énergétiques.

**Mots-clés**

Contrôle optimal, systèmes dynamiques, principe du maximum de Pontryagin, programmation dynamique, équation de Riccati, Hamilton-Jacobi-Bellman, MATLAB.

---

# Abstract

---

Optimal control is a fundamental area of applied mathematics, situated at the intersection of dynamical systems theory, analysis, and optimization. Its objective is to determine a control that allows a system to evolve from an initial state to a desired state while minimizing a cost functional representing, depending on the context, energy expenditure, trajectory error, transfer time, or economic cost.

In this thesis, we first present the mathematical foundations necessary for the study of optimal control, including dynamical systems, existence and uniqueness results for solutions, and some notions of convexity. We then formulate the general problem of optimal control by introducing state variables, admissible controls, constraints, and the cost functional. Particular attention is paid to the main theoretical methods in the field, especially Pontryagin's maximum principle, dynamic programming, the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, and linear quadratic control based on the Riccati equation.

Finally, a numerical section using MATLAB is devoted to illustrating the theoretical results on linear and non-linear systems. The simulations obtained demonstrate the effectiveness of the methods studied for stabilizing dynamic systems and improving their performance while limiting the control effort.

This work thus highlights the relevance of optimal control both theoretically and in its numerous applications in automation, engineering, economics, and energy systems.

## **Keywords**

Optimal control, dynamic systems, Pontryagin's maximum principle, dynamic pro-

gramming, Riccati equation, Hamilton-Jacobi-Bellman, MATLAB.

---

# Table des matières

---

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Abstract</b>                                                  | <b>8</b>  |
| <b>Notations mathématiques</b>                                   | <b>12</b> |
| <b>Introduction</b>                                              | <b>17</b> |
| <b>1 Préliminaires</b>                                           | <b>19</b> |
| 1.1 Systèmes dynamiques(existence et unicité) . . . . .          | 19        |
| 1.1.1 Classification des systèmes dynamiques . . . . .           | 20        |
| 1.1.2 Notion de trajectoire . . . . .                            | 21        |
| 1.1.3 Existence et unicité des solutions . . . . .               | 21        |
| 1.2 Notions de convexité . . . . .                               | 23        |
| 1.2.1 Ensemble convexe . . . . .                                 | 24        |
| 1.2.2 Fonction convexe . . . . .                                 | 24        |
| 1.2.3 Caractérisations de la convexité . . . . .                 | 24        |
| 1.2.4 Combinaisons convexes . . . . .                            | 25        |
| 1.2.5 Fonctionnelles convexes . . . . .                          | 26        |
| <b>2 Problème de contrôle optimal</b>                            | <b>27</b> |
| 2.1 Formulation du problème de contrôle optimal . . . . .        | 28        |
| 2.1.1 Variable d'état et variable de commande . . . . .          | 28        |
| 2.1.2 Contraintes dans un problème de contrôle optimal . . . . . | 30        |
| 2.1.3 Fonctionnelle de coût . . . . .                            | 31        |
| 2.2 Existence d'un optimum (idées générales) . . . . .           | 34        |

---

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.1    | Difficultés possibles . . . . .                                         | 34        |
| 2.2.2    | Rôle de la convexité . . . . .                                          | 35        |
| 2.2.3    | Hypothèses classiques d'existence . . . . .                             | 35        |
| <b>3</b> | <b>Méthodes théoriques</b>                                              | <b>39</b> |
| 3.1      | Pontryagin (Hamiltonien, conditions nécessaires) . . . . .              | 40        |
| 3.2      | LQR et Riccati (solution explicite et stabilité) . . . . .              | 48        |
| 3.2.1    | Contrôle linéaire quadratique (LQR) . . . . .                           | 48        |
| 3.2.2    | Équation de Riccati . . . . .                                           | 51        |
| 3.3      | HJB (programmation dynamique) . . . . .                                 | 54        |
| 3.4      | Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) . . . . .                     | 55        |
| 3.5      | Comparaison entre Pontryagin et Bellman . . . . .                       | 58        |
| <b>4</b> | <b>Applications</b>                                                     | <b>61</b> |
| 4.1      | Première application : contrôle optimal d'un système linéaire . . . . . | 61        |
| 4.2      | Outils numériques utilisés sous MATLAB . . . . .                        | 63        |
| 4.3      | Présentation du système non linéaire . . . . .                          | 67        |
| 4.3.1    | Évolution des états du système non linéaire . . . . .                   | 70        |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                    | <b>74</b> |

---

# Principales notations utilisées

---

Dans tout ce mémoire, on note par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels, par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbb{R}^n$  l'espace d'état de dimension  $n$ , et par  $\mathbb{R}^m$  l'espace des commandes de dimension  $m$ .

L'intervalle de temps considéré est noté  $[t_0, t_f]$ , où  $t_0$  désigne l'instant initial et  $t_f$  l'instant final.

Le vecteur d'état du système à l'instant  $t$  est noté

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

tandis que la commande est notée

$$u(t) \in \mathbb{R}^m.$$

L'état initial est noté

$$x(t_0) = x_0.$$

Le système dynamique général étudié dans ce mémoire est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \geq 0 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

où

$$f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

désigne la fonction de dynamique.

Dans le cas d'un système linéaire dépendant du temps, on écrit

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2)$$

où

$$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Dans le cas linéaire autonome, le système s'écrit

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (3)$$

On note par  $\mathcal{U}_{ad}$  l'ensemble des commandes admissibles. Selon le cadre considéré, on pourra prendre par exemple :

$$\mathcal{U}_{ad} = L^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \quad \text{ou} \quad \mathcal{U}_{ad} = L^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^m).$$

Pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne est notée  $\|x\|$ , et pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire est noté

$$\langle x, y \rangle = x^\top y.$$

La transposée d'une matrice  $A$  est notée  $A^\top$ , et la matrice identité d'ordre  $n$  est notée  $I_n$ .

Les matrices symétriques positives semi-définies seront notées

$$Q \geq 0,$$

et les matrices symétriques définies positives seront notées

$$R > 0.$$

La fonctionnelle de coût associée au problème de contrôle optimal est notée

$$J(u) \quad \text{ou} \quad J(x, u).$$

Dans le cas général, elle est donnée par

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(x(t_f)),$$

où  $L(t, x, u)$  désigne le coût instantané et  $\Phi(x(t_f))$  le coût terminal.

Dans le cas quadratique, on considère souvent la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)] dt + \frac{1}{2} x(t_f)^\top S x(t_f),$$

où

$$Q, S \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad R \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Les contraintes sur l'état et la commande sont écrites sous la forme

$$x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

et une contrainte terminale peut s'écrire

$$x(t_f) \in M \quad \text{ou} \quad x(t_f) = x_f.$$

Une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite convexe si

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

De même, un ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in C, \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Le problème de contrôle optimal consiste à déterminer une commande optimale

$$u^* \in \mathcal{U}_{ad}$$

telle que

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u).$$

La trajectoire optimale associée est notée  $x^*(t)$ , et le couple optimal est noté  $(x^*, u^*)$ .

Dans le cadre du principe du maximum de Pontryagin, on introduit l'hamiltonien

$$H(t, x, u, p) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + L(t, x, u),$$

où

$$p(t) \in \mathbb{R}^n$$

désigne la variable adjointe.

Le système hamiltonien associé s'écrit

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), u^*(t), p(t)),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t), p(t)).$$

En présence d'un coût terminal  $\Phi$ , la condition terminale s'écrit

$$p(t_f) = \nabla \Phi(x^*(t_f)).$$

Dans le cas du régulateur linéaire quadratique (LQR), on considère le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

avec la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)] dt + \frac{1}{2} x(t_f)^\top S x(t_f).$$

La commande optimale est alors donnée par

$$u^*(t) = -R^{-1}B^\top P(t)x(t),$$

où  $P(t)$  est la solution de l'équation de Riccati.

L'équation différentielle de Riccati s'écrit

$$-\dot{P}(t) = A^\top P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^\top P(t) + Q,$$

avec la condition terminale

$$P(t_f) = S.$$

Dans le cas stationnaire, l'équation de Riccati algébrique est donnée par

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0.$$

Enfin, la fonction valeur du problème de contrôle optimal est notée

$$V(t, x),$$

et définie par

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s)) ds + \Phi(x(t_f)) \right\}.$$

Elle satisfait formellement l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \inf_{u \in U} [L(t, x, u) + \langle \nabla_x V(t, x), f(t, x, u) \rangle],$$

avec la condition terminale

$$V(t_f, x) = \Phi(x).$$

## Abréviations

- **EDO** : Équation Différentielle Ordinaire
- **PMP** : Principe du Maximum de Pontryagin
- **LQR** : Régulateur Linéaire Quadratique
- **HJB** : Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman
- **ARE** : Équation Algébrique de Riccati
- **DRE** : Équation Différentielle de Riccati
- **CO** : Contrôle Optimal
- **ECA** : Ensemble des Commandes Admissibles
- **EI** : État Initial
- **EF** : État Final

---

# Introduction

---

Le contrôle optimal constitue un domaine central des mathématiques appliquées, situé à l'intersection de l'analyse des équations différentielles de l'optimisation et de la modélisation. Son objectif principal est de déterminer une commande permettant de faire évoluer un système dynamique d'un état initial vers un état désiré tout en minimisant ou en maximisant un critère de performance donné. Ce critère peut représenter un coût énergétique, un temps de transfert, une consommation de ressources, un rendement économique ou tout autre indicateur pertinent selon l'application considérée.

L'étude du contrôle optimal nécessite une base mathématique solide. En effet, avant d'aborder les méthodes de résolution, il est indispensable de rappeler certaines notions fondamentales relatives aux systèmes dynamiques, à l'existence et à l'unicité des solutions des équations différentielles, ainsi qu'à la convexité qui intervient de manière essentielle dans les problèmes d'optimisation. Ces notions constituent le socle théorique sur lequel repose toute la suite du travail.

L'objectif de ce mémoire est de présenter les principes fondamentaux du contrôle optimal, d'exposer quelques méthodes théoriques classiques et de montrer leur intérêt à travers des applications. Nous commencerons par introduire les outils mathématiques nécessaires. Nous présenterons ensuite les éléments de base d'un problème de contrôle optimal, notamment la fonctionnelle de coût, les contraintes, l'état du système et la commande. Puis nous étudierons quelques méthodes théoriques importantes, telles que le principe du maximum de Pontryagin, le problème linéaire quadratique, l'équation de Riccati et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Enfin, une application numérique

permettra d'illustrer ces résultats sur des systèmes linéaires et non linéaires.

Ce mémoire est organisé comme suit :

**Le premier chapitre** est consacré aux rappels mathématiques nécessaires, notamment les systèmes dynamiques, les résultats d'existence et d'unicité, ainsi que quelques notions de convexité.

**Le deuxième chapitre** introduit le problème de contrôle optimal dans sa formulation générale : fonctionnelle de coût, contraintes, variables d'état et de commande, ainsi que quelques idées sur l'existence d'un optimum.

**Le troisième chapitre** présente les principales méthodes théoriques du contrôle optimal, en particulier le principe du maximum de Pontryagin, le contrôle linéaire quadratique, l'équation de Riccati et l'approche de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Enfin, **le dernier chapitre** est consacré à des applications numériques sous MATLAB, permettant de résoudre et d'illustrer des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes linéaires et non linéaires.

Ainsi, ce travail vise à fournir une vision à la fois théorique et pratique du contrôle optimal, en mettant en évidence son importance mathématique et son intérêt dans divers domaines d'application.

# Préliminaires

---

Avant d'aborder la théorie du contrôle optimal, il est nécessaire de rappeler quelques résultats fondamentaux de l'analyse mathématique et des équations différentielles. En effet, un problème de contrôle optimal repose toujours sur un système dynamique décrivant l'évolution du phénomène étudié. La compréhension de ce système exige la connaissance des notions de solution, de trajectoire, d'existence et d'unicité. Par ailleurs, les outils de l'optimisation font largement intervenir la convexité, aussi bien pour les ensembles admissibles que pour les fonctionnelles à minimiser. Ce chapitre a donc pour but d'introduire ces éléments de base.

## 1.1 Systèmes dynamiques(existence et unicité)

### Définition 1.1.1. [11]

*Un système dynamique est un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un état au cours du temps. En général, cet état est représenté par une fonction*

$$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

*où  $x(t)$  désigne l'état du système à l'instant  $t$ .*

*Dans de nombreux cas, cette évolution est régie par une équation différentielle ordinaire de la forme*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

*accompagnée d'une condition initiale*

$$x(t_0) = x_0.$$

Ici,  $f$  est une application donnée,  $t_0$  est l'instant initial, et  $x_0$  est l'état initial du système.

Cette équation signifie que la vitesse de variation de l'état dépend du temps et de l'état lui-même. Lorsqu'une commande intervient, le système prend souvent la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où  $u(t)$  représente la commande appliquée au système. Dans ce premier chapitre, nous nous limitons essentiellement au cas sans commande explicite afin de poser les bases analytiques nécessaires

**Exemple 1** : croissance exponentielle Le modèle

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ , décrit une croissance ou une décroissance exponentielle. Sa solution est

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

**Exemple 2** : système linéaire

Un système dynamique linéaire s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b,$$

où  $A$  est une matrice de taille  $(n \times n)$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.1.1 Classification des systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques peuvent être classés selon plusieurs critères :

— **Systèmes autonomes** :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

La dynamique ne dépend pas explicitement du temps.

— **Systèmes non autonomes :**

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

où  $f$  dépend explicitement du temps  $t$ .

Cette distinction est importante en contrôle optimal, car les méthodes de résolution diffèrent fortement selon que le système est linéaire ou non linéaire.

### 1.1.2 Notion de trajectoire

Une **trajectoire** est une solution  $x(t)$  du système dynamique associée à une condition initiale donnée. L'ensemble des trajectoires permet de décrire tous les comportements possibles du système. En contrôle optimal, la trajectoire dépend non seulement de l'état initial, mais aussi de la commande appliquée.

### 1.1.3 Existence et unicité des solutions

L'un des premiers problèmes qui se pose lorsqu'on étudie une équation différentielle est le suivant : existe-t-il une solution ? Et si oui, cette solution est-elle unique ? Ces deux questions sont fondamentales. En effet, si la solution n'existe pas, le modèle n'a pas de sens du point de vue mathématique. Si elle n'est pas unique, alors l'évolution du système n'est pas déterminée de manière univoque par les données initiales.

#### a. Problème de Cauchy

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

On cherche une fonction  $x(t)$ , définie dans un voisinage de  $t_0$ , vérifiant cette équation et la condition initiale.

#### b. Théorème de cauchy-lipschitz

Le résultat fondamental est le théorème de Cauchy-Lipschitz, aussi appelé théorème de Picard-Lindelöf.

**Théorème 1.1.2.** [6]

Soit  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Si  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la variable  $x$ , alors pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in D$ , il existe un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  sur lequel le problème de Cauchy admet une unique solution.

La condition de Lipschitz par rapport à  $x$  signifie que, dans un voisinage convenable, il existe une constante  $L > 0$  telle que :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

pour tous  $x$  et  $y$  du voisinage considéré.

Cette hypothèse garantit que deux solutions issues de la même condition initiale ne peuvent pas se séparer.

**Démonstration**

L'idée de la démonstration repose sur une reformulation intégrale du problème. En intégrant l'équation différentielle, on obtient :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

On définit alors un opérateur

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Chercher une solution revient à chercher un point fixe de l'opérateur  $T$ . Sous l'hypothèse de Lipschitz et sur un intervalle suffisamment petit, on montre que  $T$  est contractant. Le théorème du point fixe de Banach permet alors d'obtenir l'existence et l'unicité d'un point fixe, donc d'une solution unique.

**c. Théorème de Peano****Théorème 1.1.3.** [6, 9]

Si la fonction  $f$  est continue, alors le problème de Cauchy admet au moins une solution locale.

*Ce théorème est plus faible que celui de Cauchy-Lipschitz, car il n'assure pas l'unicité.*

**Exemple :**

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction  $f(x) = \sqrt{|x|}$  est continue, mais elle n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0. Ce problème admet plusieurs solutions, par exemple la solution triviale  $x(t) = 0$ , mais aussi d'autres solutions non triviales. Cela montre que la continuité seule ne suffit pas à garantir l'unicité.

#### d. Inégalité de Gronwall

L'inégalité de Gronwall est un outil très utile pour établir l'unicité et la stabilité des solutions.

**Lemme 1.1.4.** (*Lemme de Gronwall.*)[5, 3]

*Soit  $u$  une fonction continue positive telle que*

$$u(t) \leq a + b \int_{t_0}^t u(s) ds$$

*pour tout  $t \geq t_0$ , où  $a, b \geq 0$ . Alors :*

$$u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}.$$

Cette inégalité permet notamment de majorer la différence entre deux solutions, ce qui joue un rôle fondamental en théorie du contrôle.

## 1.2 Notions de convexité

La convexité occupe une place majeure en optimisation et par conséquent, en contrôle optimal. Elle intervient dans la définition des ensembles admissibles, dans l'étude des fonctionnelles de coût et dans l'existence des solutions optimales.

### 1.2.1 Ensemble convexe

**Définition 1.2.1.** [6, 10]

Un ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est dit **convexe** si pour tous  $x, y \in C$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in C.$$

Autrement dit, tout segment reliant deux points de  $C$  reste entièrement contenu dans  $C$ .

#### *Exemples*

1. Une droite, un segment, un disque, une boule sont des ensembles convexes ;
2. en revanche, un anneau ou une couronne circulaire n'est pas convexe.

### 1.2.2 Fonction convexe

**Définition 1.2.2.** [6, 10]

Soit  $C$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Une fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **convexe** si pour tous  $x, y \in C$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Elle est dite **strictement convexe** si l'inégalité est stricte pour  $x \neq y$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Géométriquement, cela signifie que le graphe de la fonction se situe en dessous de toute corde reliant deux points de ce graphe.

### 1.2.3 Caractérisations de la convexité

Pour une fonction dérivable, la convexité peut être caractérisée par une inégalité tangente.

**Proposition 1.2.3.** Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur un ouvert convexe  $C$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si :

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x), \quad \forall x, y \in C.$$

Autrement dit, le graphe de  $f$  est au-dessus de toutes ses tangentes.

Si  $f$  est deux fois continûment dérivable, alors on a le critère suivant :

**Proposition 1.2.4.** *Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert convexe  $C$ . La fonction  $f$  est convexe sur  $C$  si et seulement si sa matrice hessienne  $D^2 f(x)$  est positive semi-définie pour tout  $x \in C$ .*

Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, cela revient à dire que :

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

**Remarque 1.2.1.** *(Importance de la convexité en optimisation).*

La convexité simplifie fortement les problèmes d'optimisation. En effet, lorsqu'on minimise une fonction convexe sur un ensemble convexe, tout minimum local est aussi un minimum global. Cette propriété est particulièrement importante en contrôle optimal, car elle permet de garantir l'existence, l'unicité ou la stabilité de la solution optimale dans certaines situations.

Par exemple, dans le problème de contrôle linéaire quadratique, la fonctionnelle coût est généralement convexe, voire strictement convexe, ce qui assure une bonne structure mathématique du problème.

### 1.2.4 Combinaisons convexes

Une combinaison de la forme

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i,$$

où

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

est appelée **combinaison convexe** des points  $x_1, \dots, x_m$ .

Un ensemble est convexe si et seulement s'il contient toute combinaison convexe finie de ses points.

### 1.2.5 Fonctionnelles convexes

Dans les espaces fonctionnels, on rencontre des fonctionnelles de la forme :

$$J(u) = \int_0^T L(t, u(t)) dt.$$

La convexité de  $L$  par rapport à la variable  $u$  entraîne souvent la convexité de la fonctionnelle  $J$ . Cette observation est fondamentale en contrôle optimal, puisque la recherche d'une commande optimale se ramène souvent à la minimisation d'une fonctionnelle sur un ensemble admissible.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions fondamentales qui seront utilisées dans la suite du mémoire. Nous avons d'abord présenté la notion de système dynamique, qui sert à modéliser l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Nous avons ensuite étudié les résultats essentiels relatifs à l'existence et à l'unicité des solutions des équations différentielles, notamment à travers les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et de Peano, ainsi que l'inégalité de Gronwall. Enfin, nous avons introduit les principales notions de convexité, indispensables à l'étude des problèmes d'optimisation et de contrôle optimal.

# Problème de contrôle optimal

---

## Introduction

Après avoir rappelé, dans le chapitre précédent, les notions fondamentales liées aux systèmes dynamiques, à l'existence et à l'unicité des solutions, ainsi qu'à la convexité, nous abordons maintenant le coeur du contrôle optimal. L'objectif de ce chapitre est de présenter la formulation générale d'un problème de contrôle optimal, en précisant les notions de **variable d'état**, de **commande**, de **contraintes** et de **fonctionnelle de coût**. Nous donnerons également quelques idées générales sur l'existence d'une solution optimale.

Un problème de contrôle optimal consiste à agir sur un système dynamique au moyen d'une commande choisie de façon appropriée, afin d'obtenir le meilleur comportement possible selon un critère donné. Ce critère est généralement exprimé par une fonctionnelle à minimiser ou à maximiser. Ainsi, le contrôle optimal associe deux aspects essentiels : d'une part, la dynamique du système, et d'autre part, la recherche d'un optimum.

## 2.1 Formulation du problème de contrôle optimal

### 2.1.1 Variable d'état et variable de commande

#### 1.Variable d'état

La variable d'état représente l'ensemble des grandeurs nécessaires pour décrire complètement le système à un instant donné. Elle est généralement notée

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

où  $n$  désigne la dimension de l'espace d'état.

Par exemple :

1. dans un problème de mécanique, l'état peut contenir la position ou la vitesse ;
2. dans un problème économique, l'état peut représenter un capital ou un stock ;
3. dans un problème biologique, l'état peut décrire l'évolution d'une population ou d'une concentration.

#### 2.Variable de commande

La commande est la grandeur sur laquelle on peut agir pour influencer l'évolution du système. Elle est notée

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

où  $U$  est l'ensemble des valeurs admissibles de la commande.

La commande peut représenter, selon le contexte :

1. une force appliquée à un système mécanique ;
2. une tension ou un courant dans un système électrique ;
3. un taux d'investissement en économie ;
4. une dose de traitement en biologie ou en médecine.

Dans le cadre du contrôle optimal, la commande n'est pas imposée à l'avance : elle doit être choisie parmi un ensemble admissible de manière à optimiser un certain critère.

### a. Dynamique du système contrôlé

Un système contrôlé est généralement décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f],$$

avec la condition initiale

$$x(t_0) = x_0.$$

Ici :

1.  $x(t)$  est l'état ;
2.  $u(t)$  est la commande ;
3.  $f$  décrit la dynamique du système ;
4.  $t_0$  est le temps initial ;
5.  $t_f$  est le temps final.

La fonction  $f$  peut être linéaire ou non linéaire. Le choix de la commande  $u$  modifie la trajectoire  $x$ , ce qui permet d'orienter le système vers un objectif donné.

### b. Ensemble des commandes admissibles

Toutes les fonctions de commande ne sont pas nécessairement autorisées. En pratique, on impose souvent des restrictions physiques, techniques ou économiques. On définit donc un ensemble de commandes admissibles, souvent noté  $\mathcal{U}_{ad}$ .

En général, une commande admissible est une fonction mesurable

$$u : [t_0, t_f] \rightarrow U$$

telle que :

1.  $u(t) \in U$  pour presque tout  $t \in [t_0, t_f]$  ;
2. la solution associée  $x(t)$  existe ;
3. certaines contraintes supplémentaires sont vérifiées.

Ainsi, l'ensemble admissible peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u(\cdot); u(t) \in U \text{ p.p. sur } [t_0, t_f]\}.$$

Dans beaucoup de cas, l'ensemble  $U$  est supposé fermé et convexe, parfois compact.

### 2.1.2 Contraintes dans un problème de contrôle optimal

Les problèmes de contrôle optimal sont généralement soumis à plusieurs types de contraintes.

#### 1. Contraintes dynamiques

Ce sont les contraintes imposées par l'équation d'évolution :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)).$$

Elles traduisent le fait que l'état du système ne peut pas évoluer arbitrairement.

#### 2. Contraintes sur l'état

On peut imposer que l'état appartienne à un ensemble admissible :

$$x(t) \in K \subset \mathbb{R}^n.$$

Par exemple :

1. une température doit rester dans un intervalle donné ;
2. une population doit rester positive ;
3. une vitesse ne doit pas dépasser une limite.

#### 3. Contraintes sur la commande

La commande peut également être bornée :

$$u(t) \in U.$$

Par exemple :

1. une tension ne peut pas dépasser une valeur maximale ;
2. une force de commande est limitée par les capacités de l'actionneur ;

3. un taux d'injection ou de consommation doit rester dans un domaine permis.

#### 4. Contraintes initiales et finales

Le problème est souvent complété par :

1. une condition initiale

$$x(t_0) = x_0,$$

2. une condition terminale fixée ou partiellement fixée

$$x(t_f) = x_f,$$

ou plus généralement

$$x(t_f) \in M,$$

où  $M$  est un ensemble donné.

Ces contraintes jouent un rôle important dans la formulation du problème, car elles déterminent le type de trajectoires admissibles.

### 2.1.3 Fonctionnelle de coût

#### 1. Définition générale

##### Définition 2.1.1. [8]

*Le but du contrôle optimal est d'optimiser une fonctionnelle coût. Dans la plupart des cas, on cherche à minimiser une expression de la forme*

$$J(u) = \Phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt.$$

*Ici :*

1.  $\Phi(x(t_f))$  représente le coût terminal ;
2.  $L(t, x(t), u(t))$  représente le coût instantané ou densité de coût.

*La quantité  $J(u)$  mesure la performance globale de la commande  $u$ .*

**Remarque 2.1.1.** *La fonctionnelle coût peut avoir plusieurs significations :*

1. *minimisation d'une énergie consommée ;*
2. *minimisation d'un temps de transfert ;*

3. minimisation d'une erreur par rapport à une trajectoire cible ;
4. minimisation d'un coût économique ;
5. compromis entre performance et effort de commande.

Ainsi, le contrôle optimal consiste à trouver une commande admissible  $u^*$  telle que

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u).$$

## 2. Exemples de fonctionnelles coût

**Exemple 1 :** coût énergétique

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)|^2 dt.$$

Ce critère pénalise les commandes de grande amplitude.

**Exemple 2 :** coût terminal

$$J(u) = |x(t_f) - x_f|^2.$$

On cherche ici à amener le système aussi près que possible d'un état cible.

**Exemple 3 :** coût mixte

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} (|x(t)|^2 + |u(t)|^2) dt.$$

Ce type de fonctionnelle est très fréquent en contrôle linéaire quadratique.

## 3. Formulation mathématique générale du problème

Un problème de contrôle optimal peut être formulé ainsi :

Trouver une commande  $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$  telle que la trajectoire associée  $x^*(\cdot)$  vérifie

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

et que la fonctionnelle de coût soit minimale :

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u).$$

Autrement dit, il s'agit de résoudre le problème

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ \Phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt \right\}$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

et éventuellement sous d'autres contraintes sur  $x$  et  $u$ .

## 4. Exemples simples de problèmes de contrôle optimal

### a. Problème de transfert minimal

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x_0,$$

avec  $u(t) \in [-1, 1]$ .

On cherche à transférer le système de  $x_0$  vers  $x_f$  en un temps minimal. La fonctionnelle de coût est alors

$$J(u) = t_f.$$

Ici, le problème consiste à trouver la commande qui permet d'atteindre la cible le plus rapidement possible .

### b. Problème quadratique

Considérons le système linéaire

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

et la fonctionnelle

$$J(u) = \int_0^T (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt + x(T)^T S x(T),$$

où  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont des matrices symétriques positives ou semi-positives. Ce problème joue un rôle fondamental en théorie du contrôle, car il conduit au problème dit linéaire quadratique, qui admet une structure particulièrement riche.

## 2.2 Existence d'un optimum (idées générales)

La question naturelle qui se pose est la suivante : le minimum recherché existe-t-il réellement ? autrement dit, existe-t-il une commande admissible  $u^*$  qui réalise la valeur minimale de la fonctionnelle coût ?

Cette question est délicate. En effet, il ne suffit pas que la fonctionnelle soit définie : encore faut-il que le minimum soit atteint dans l'ensemble admissible.

### 2.2.1 Difficultés possibles

L'existence d'un optimum peut échouer dans plusieurs situations :

1. l'ensemble des commandes admissibles n'est pas compact ;
2. la fonctionnelle coût n'est pas semi-continue inférieurement ;
3. les trajectoires admissibles peuvent s'échapper ;
4. une suite minimisante peut exister sans converger vers une commande admissible.

Ainsi, il ne suffit pas de construire une suite  $(u_n)$  telle que

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u),$$

il faut encore pouvoir extraire une sous-suite convergente dont la limite reste admissible.

### 2.2.2 Rôle de la convexité

La convexité intervient ici de manière essentielle. Lorsque :

1. l'ensemble des commandes admissibles est convexe ;
2. la dynamique possède de bonnes propriétés de régularité ;
3. la fonctionnelle coût est convexe par rapport à la commande.

on dispose souvent de meilleurs résultats d'existence. La convexité permet de contrôler le comportement des suites minimisantes et facilite le passage à la limite.

Une approche classique (idée de la méthode directe) pour montrer l'existence d'un optimum repose sur la méthode directe du calcul des variations. Son principe est le suivant :

1. on considère une suite minimisante  $(u_n)$  telle que

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u);$$

2. on montre que cette suite est bornée dans un espace fonctionnel approprié ;
3. on extrait une sous-suite convergente, au moins faiblement ;
4. on prouve que la limite  $u^*$  est encore admissible ;
5. on établit que

$$J(u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n),$$

ce qui permet de conclure que  $u^*$  est optimale.

Cette stratégie demande souvent des hypothèses de compacité, de convexité et de semi-continuité inférieure.

### 2.2.3 Hypothèses classiques d'existence

Dans un problème de contrôle optimal, l'objectif est de déterminer une commande admissible qui minimise une fonctionnelle de coût donnée. Cependant, l'existence d'une commande optimale n'est pas toujours automatique. Pour garantir cette existence, on impose généralement certaines hypothèses sur l'ensemble des commandes admissibles,

la dynamique du système et la fonction de coût. On considère un système contrôlé de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

où  $x(t)$  désigne l'état du système et  $u(t)$  la commande. La fonctionnelle de coût est donnée sous la forme de Lagrange par :

$$J(u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt.$$

Les hypothèses classiques d'existence sont les suivantes :

1. **L'ensemble  $U$  des commandes admissibles est non vide et compact :** Cette hypothèse signifie qu'il existe au moins une commande admissible et que l'ensemble des valeurs possibles de la commande est fermé et borné. Elle permet d'éviter que les commandes prennent des valeurs arbitrairement grandes et assure la possibilité d'extraire une sous-suite convergente à partir d'une suite de commandes admissibles.
2. **La fonction  $f(t, x, u)$  est continue par rapport à ses variables :** La fonction  $f$  décrit la dynamique du système. Sa continuité signifie que de petites variations du temps  $t$ , de l'état  $x$  ou de la commande  $u$  entraînent de petites variations de la dynamique. Cette hypothèse assure donc une dépendance régulière du système par rapport aux données du problème.
3. **La fonction  $f$  est lipschitzienne par rapport à  $x$ , uniformément par rapport à  $u$  :** Cette condition signifie qu'il existe une constante  $L_f > 0$  telle que :

$$\|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \leq L_f \|x_1 - x_2\|,$$

pour tous  $x_1, x_2$  et pour toute commande admissible  $u$ . Cette hypothèse permet de garantir l'existence et l'unicité de la trajectoire associée à une commande donnée.

4. **La fonction  $L(t, x, u)$  est continue et convexe par rapport à  $u$  :** La fonction  $L$  représente le coût instantané du système. Sa continuité garantit que le coût varie de manière régulière avec l'état et la commande. Sa convexité par rapport à  $u$  signifie que, pour deux commandes admissibles  $u_1$  et  $u_2$ , et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$L(t, x, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \lambda L(t, x, u_1) + (1 - \lambda)L(t, x, u_2).$$

Cette propriété est cruciale dans les preuves d'existence, car elle permet de conserver le caractère minimisant lors du passage à la limite.

5. **La fonctionnelle de coût est coercive :** La coercivité signifie que la fonctionnelle de coût pénalise suffisamment les commandes de grande norme. Autrement dit, si la norme de la commande devient très grande, alors le coût  $J(u)$  devient lui aussi grand. Cette hypothèse empêche l'utilisation de commandes trop grandes ou non réalistes dans la recherche du minimum.

Sous ces hypothèses, on peut établir des théorèmes d'existence affirmant qu'il existe au moins une commande admissible  $u^*$  telle que :

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u).$$

La commande  $u^*$  est alors appelée **contrôle optimal**.

**Le résultat général :** Si le système dynamique est **bien posé**, si l'ensemble des commandes admissibles est suffisamment régulier et si la fonctionnelle de coût possède de bonnes propriétés de convexité et de semi-continuité, alors le problème de contrôle optimal admet au moins une solution optimale. Ce type de résultat est fondamental pour justifier mathématiquement les méthodes de recherche de la commande optimale.

**Remarque 2.2.1.** (sur l'unicité de l'optimum).

- *L'existence d'un optimum ne signifie pas nécessairement son unicité. Il peut exister plusieurs commandes différentes produisant le même coût minimal. L'unicité est généralement assurée sous des hypothèses plus fortes, par exemple lorsque la fonctionnelle de coût est strictement convexe et que le système possède une structure adaptée.*

*Dans les problèmes quadratiques, l'unicité est souvent obtenue grâce à la stricte convexité du terme en commande.*

- *Lien avec les méthodes théoriques*

*La formulation générale établie dans ce chapitre prépare l'étude des méthodes de résolution. Une fois le problème posé, plusieurs outils peuvent être utilisés pour caractériser ou calculer la commande optimale :*

1. *le principe du maximum de Pontryagin ;*

2. *la programmation dynamique ;*
3. *l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ;*
4. *l'équation de Riccati dans le cas linéaire quadratique.*

Ces méthodes seront présentées dans le chapitre suivant.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation générale d'un problème de contrôle optimal. Nous avons défini les notions de variable d'état, de variable de commande et d'ensemble des commandes admissibles. Nous avons ensuite introduit les différentes contraintes pouvant intervenir dans le problème, ainsi que la fonctionnelle de coût qui mesure la performance de la commande choisie. Enfin, nous avons donné quelques idées générales sur l'existence d'une solution optimale, en soulignant le rôle joué par la convexité, la compacité et la semi-continuité.

Ces éléments constituent la base théorique nécessaire pour aborder, dans le chapitre suivant, les principales méthodes d'analyse et de résolution des problèmes de contrôle optimal.

# Méthodes théoriques

---

## Introduction

Après avoir présenté, dans le chapitre précédent, la formulation générale d'un problème de contrôle optimal, nous abordons maintenant les principales méthodes théoriques permettant de caractériser ou de déterminer une commande optimale. Ces méthodes occupent une place centrale dans la théorie du contrôle, car elles fournissent soit des conditions nécessaires d'optimalité, soit des outils permettant d'obtenir explicitement la solution dans certains cas particuliers.

Parmi les approches les plus importantes figurent **le principe du maximum de Pontryagin**, **la méthode du contrôle linéaire quadratique (LQR)**, **l'équation de Riccati** et l'approche par **programmation dynamique**, qui conduit à **l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)**. Ces méthodes sont complémentaires : certaines sont générales et s'appliquent à des systèmes non linéaires, tandis que d'autres sont particulièrement adaptées aux systèmes linéaires et aux critères quadratiques.

L'objectif de ce chapitre est de présenter ces méthodes, d'en expliquer l'idée fondamentale et d'en montrer le rôle dans la résolution des problèmes de contrôle optimal.

## 3.1 Pontryagin (Hamiltonien, conditions nécessaires)

### 1. Présentation générale

Le principe du maximum de Pontryagin constitue l'un des résultats fondamentaux du contrôle optimal. Il fournit des conditions nécessaires que doit satisfaire une commande optimale. Autrement dit, si une commande  $u^*(t)$  est optimale, alors elle doit vérifier un ensemble de relations portant à la fois sur la dynamique du système, une variable auxiliaire appelée **variable adjointe**, et une fonction particulière **appelée hamiltonien**.

Cette méthode a été développée dans les années 1950 par Pontryagin et ses collaborateurs. Elle généralise les idées classiques du calcul des variations à des systèmes gouvernés par des équations différentielles avec commande.

#### Définition 3.1.1. (du Hamilton)

Pour appliquer le principe du maximum, on introduit la fonction de Hamilton, ou hamiltonien, définie par

$$H(t, x, u, p) = L(t, x, u) + p^T f(t, x, u), \quad (3.1)$$

où  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  est la variable adjointe.

Le hamiltonien regroupe en une seule expression :

- le coût instantané  $L$ ,
- la dynamique du système  $f$ ,
- l'effet de la variable adjointe  $p$ .

Il joue un rôle central dans l'énoncé du principe du maximum.

### 2. Formulation du problème

Considérons le problème (1) de contrôle optimal standard suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u) = \Phi(x(T)) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt \quad (3.2)$$

sous la contrainte dynamique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$

On cherche une commande admissible  $u^*(t)$  telle que le coût soit minimal.

### 3. Énoncé du principe du maximum

**Théorème 3.1.2.** (*Principe du maximum de Pontryagin*) [6, 8]

Supposons que les fonctions  $f$ ,  $L$  et  $\Phi$  soient de classe  $C^1$ , et que  $u^*(t)$  soit un contrôle optimal associé à la trajectoire optimale  $x^*(t)$ . Alors il existe une fonction adjointe  $p(t)$ , non identiquement nulle, telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

**1. Équation d'état :**

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = f(x^*(t), u^*(t), t).$$

**2. Équation adjointe**

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p(t), t).$$

Autrement dit

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right)^\top p(t).$$

**3. Condition d'optimalité sur le contrôle**

Si  $U$  est convexe et si  $u^*(t)$  est intérieur à  $U$ , alors :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = 0.$$

Plus généralement, dans un problème de minimisation, on a :

$$H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = \min_{v \in U} H(x^*(t), v, p(t), t).$$

#### 4. Condition de transversalité

Si l'état final  $x(T)$  est libre, alors :

$$p(T) = \nabla \Phi(x^*(T)).$$

Si l'état final est fixé, cette condition n'est pas imposée.

**Démonstration.** On introduit la fonction adjointe  $p(t)$  afin d'intégrer la contrainte dynamique dans la fonctionnelle de coût. Comme la trajectoire vérifie :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

on peut écrire :

$$J(u) = \Phi(x(T)) + \int_0^T [L(x, u, t) + p^T(t) (f(x, u, t) - \dot{x}(t))] dt.$$

Cette expression est égale au coût initial, car le terme  $f(x, u, t) - \dot{x}(t)$  est nul le long des trajectoires admissibles.

On calcule maintenant la variation première de  $J$ . Soient  $\delta x$  et  $\delta u$  de petites variations de l'état et du contrôle. On obtient :

$$\delta J = \nabla \Phi(x(T))^T \delta x(T) + \int_0^T [L_x^T \delta x + L_u^T \delta u + p^T (f_x \delta x + f_u \delta u - \delta \dot{x})] dt.$$

Le terme contenant  $\delta \dot{x}$  est intégré par parties :

$$-\int_0^T p^T \delta \dot{x} dt = -p(T)^T \delta x(T) + p(0)^T \delta x(0) + \int_0^T \dot{p}^T \delta x dt.$$

Comme l'état initial est fixé, on a :

$$\delta x(0) = 0.$$

Donc :

$$\delta J = [\nabla \Phi(x(T)) - p(T)]^T \delta x(T) + \int_0^T [L_x + f_x^T p + \dot{p}]^T \delta x dt + \int_0^T [L_u + f_u^T p]^T \delta u dt.$$

Or, par définition du Hamiltonien :

$$H(x, u, p, t) = L(x, u, t) + p^T f(x, u, t).$$

Donc :

$$H_x = L_x + f_x^T p,$$

et :

$$H_u = L_u + f_u^T p.$$

Pour que la variation soit minimale pour toute variation admissible de l'état, on impose :

$$\dot{p}(t) = -H_x(x^*(t), u^*(t), p(t), t).$$

De plus, si  $x(T)$  est libre, alors le coefficient de  $\delta x(T)$  doit être nul :

$$p(T) = \nabla \Phi(x^*(T)).$$

Il reste la variation par rapport au contrôle. Pour un contrôle optimal intérieur, on doit avoir :

$$H_u(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = 0.$$

Si le contrôle est soumis à une contrainte  $u(t) \in U$ , la condition devient :

$$H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = \min_{v \in U} H(x^*(t), v, p(t), t).$$

Cela donne les conditions nécessaires du principe de Pontryagin.

**Remarque 3.1.1.** *Le principe du maximum transforme le problème initial en un système couplé formé de :*

- l'équation d'état, résolue vers l'avant dans le temps ;
- l'équation adjointe, résolue vers l'arrière ;
- une condition de minimisation ponctuelle du hamiltonien.

*Ainsi, une commande optimale ne peut pas être choisie arbitrairement. Elle doit être compatible avec la trajectoire d'état et avec l'évolution de la variable adjointe.*

- Cas où la commande est intérieure

Si l'ensemble  $U$  est ouvert et si la commande optimale  $u^*(t)$  appartient à l'intérieur de  $U$ , alors la condition d'optimalité peut s'écrire sous forme différentielle :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = 0.$$

Cette relation est souvent utilisée pour exprimer la commande optimale en fonction de l'état et de l'adjoint.

**Exemple 1 :** (problème quadratique simple)

On considère :

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt$$

sous la contrainte :

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x_0.$$

L'état final  $x(T)$  est libre. Le Hamiltonien est :

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + pu.$$

Les conditions de Pontryagin donnent :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = u,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x,$$

et :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + p = 0.$$

Donc :

$$u^*(t) = -p(t).$$

Ainsi :

$$\dot{x} = -p,$$

et :

$$\dot{p} = -x.$$

En dérivant la première équation :

$$\ddot{x} = -\dot{p}.$$

Comme  $\dot{p} = -x$ , on obtient :

$$\ddot{x} = x.$$

La solution générale est :

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Puisque :

$$u^*(t) = \dot{x}(t),$$

on a :

$$u^*(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

La condition initiale donne :

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0.$$

Comme l'état final est libre et qu'il n'y a pas de coût final, on a :

$$p(T) = 0.$$

Or :

$$u^*(T) = -p(T) = 0.$$

Donc :

$$u^*(T) = C_1 e^T - C_2 e^{-T} = 0.$$

Ainsi :

$$C_1 e^T = C_2 e^{-T},$$

d'où :

$$C_2 = C_1 e^{2T}.$$

En utilisant  $C_1 + C_2 = x_0$ , on obtient :

$$C_1(1 + e^{2T}) = x_0.$$

Donc :

$$C_1 = \frac{x_0}{1 + e^{2T}},$$

et :

$$C_2 = \frac{x_0 e^{2T}}{1 + e^{2T}}.$$

Finalement, le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \frac{x_0}{1 + e^{2T}} e^t - \frac{x_0 e^{2T}}{1 + e^{2T}} e^{-t}.$$

**Exemple 2 :**(minimisation du temps)

On veut transférer le système :

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

de l'état initial :

$$x(0) = x_0 > 0,$$

vers l'état final :

$$x(T) = 0,$$

en temps minimal, avec la contrainte :

$$-1 \leq u(t) \leq 1.$$

Le coût est :

$$J(u) = \int_0^T 1 \, dt = T.$$

Le Hamiltonien est :

$$H(x, u, p) = 1 + pu.$$

L'équation adjointe est :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Donc :

$$p(t) = C,$$

où  $C$  est une constante. La condition de minimisation du Hamiltonien impose :

$$u^*(t) = \arg \min_{-1 \leq v \leq 1} (1 + pv).$$

Si  $p > 0$ , alors le minimum est atteint pour :

$$u^*(t) = -1.$$

Comme on veut ramener  $x_0 > 0$  vers 0, le choix optimal est bien :

$$u^*(t) = -1.$$

La trajectoire optimale est donc :

$$\dot{x}(t) = -1.$$

Ainsi :

$$x(t) = x_0 - t.$$

La condition finale  $x(T) = 0$  donne :

$$x_0 - T = 0.$$

Donc :

$$T^* = x_0.$$

Le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = -1, \quad 0 \leq t \leq x_0.$$

**Remarque 3.1.2.** *Le principe de Pontryagin donne des conditions nécessaires d'optimalité. Cela signifie que tout contrôle optimal doit vérifier ces conditions. Mais, en général, ces conditions ne garantissent pas toujours que le contrôle obtenu est effectivement optimal. Pour obtenir une condition suffisante, on ajoute souvent des hypothèses de convexité, par exemple :*

$$H(x, u, p, t)$$

*convexe par rapport à  $u$ , et la fonctionnelle de coût convexe. Dans le cas linéaire-quadratique, ces conditions permettent généralement d'obtenir l'optimalité globale.*

## 3.2 LQR et Riccati (solution explicite et stabilité)

### 3.2.1 Contrôle linéaire quadratique (LQR)

Le problème de contrôle linéaire quadratique constitue l'un des plus importants en théorie du contrôle optimal [12]. Il concerne des systèmes linéaires avec une fonctionnelle de coût quadratique. Ce cadre est très étudié parce qu'il est à la fois mathématiquement riche et partiellement utile. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

1.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est d'état,
2.  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est la commande,
3.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
4.  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

La fonctionnelle de coût associée à ce problème s'écrit :

$$J(u) = \frac{1}{2}x(T)^\top Sx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Ru(t)] dt, \quad (3.4)$$

où :

- $Q$  est une matrice symétrique semi-définie positive,
- $S$  est une matrice symétrique semi-définie positive,
- $R$  est une matrice symétrique définie positive.

#### Signification du critère :

Le terme quadratique

$$x(t)^\top Qx(t)$$

pénalise l'écart de l'état, tandis que le terme

$$u(t)^\top Ru(t)$$

pénalise l'effort de la commande. Le problème consiste donc à trouver un compromis optimal entre la performance du système et le coût de la commande.

## 2. Application du principe de Pontryagin

Le Hamiltonien associé à ce problème s'exprime sous la forme :

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2}(x^\top Qx + u^\top Ru) + p^\top (Ax + Bu).$$

La condition d'optimalité

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

donne

$$Ru(t) + B^\top p(t) = 0.$$

comme  $R$  est inversible, on obtient

$$u^*(t) = -R^{-1}B^\top p(t).$$

La commande optimale s'exprime donc en fonction de la variable adjoint.

### 3. Système état-adjoint

On obtient alors le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^\top p(t),$$

et

$$\dot{p}(t) = -Qx(t) - A^\top p(t),$$

avec condition terminale

$$p(T) = Sx(T).$$

Ce système couplé peut être simplifié grâce à l'équation de Riccati.

### 4. Problème LQR à horizon fini

**Théorème 3.2.1.** (*LQR à horizon fini [12, 2, 1]*)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t), \quad x(0) = x_0,$$

et le coût :

$$J(u) = \frac{1}{2}x(T)^\top Sx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Ru(t)] dt$$

Si :

$$Q = Q^\top \succeq 0, \quad S = S^\top \succeq 0, \quad R = R^\top \succ 0,$$

alors le contrôle optimal est donnée par la loi de retour d'état :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^\top P(t)x(t),$$

où  $P(t)$  est la solution différentielle de Riccati :

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q,$$

soumise à la condition terminale :

$$P(T) = S.$$

La fonction valeur associée est :

$$V(t, x) = \frac{1}{2}x^T P(t)x$$

.

### 3.2.2 Équation de Riccati

#### 1. L'idée fondamentale

Dans le problème LQR, on cherche une relation entre l'adjoint  $p(t)$  et l'état du système  $x(t)$ . On suppose une relation de la forme :

$$p(t) = P(t)x(t),$$

où  $P(t)$  est une matrice carré à déterminer. En remplaçant cette expressions dans les équations du système, on obtient une équation différentielle matricielle appelée **équation de Riccati**.

#### 2. Équation de Riccati différentielle

La matrice  $p(t)$  vérifie :

$$-\dot{P}(t) = A^\top P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^\top P(t) + Q,$$

avec la condition terminale :

$$P(T) = S.$$

Cette équation joue un rôle fondamental, car elle permet de déterminer directement la commande optimale.

### 3. Expression de la commande optimale

Une fois  $p(t)$  connue, la commande optimale s'écrit sous forme de retour d'état :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t).$$

Ans, la commande optimale est proportionnelle à l'état. C'est une loi de commande en boucle fermée.

### 4. LQR à horizon infini

On considère maintenant coût :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt.$$

Le système est toujours :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Dans ce cas, on cherche une matrice de constante  $P$ . L'équation différentielle de Riccati devient l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Le contrôle optimal est alors

$$u^*(t) = -Kx(t)$$

où  $K = R^{-1}B^T P$ . Le système en boucle fermée devient :  $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$ .

**Remarque 3.2.1.** (*Cas stationnaire*).

Lorsque l'horizon de temps est infini ou lorsque le système stationnaire, on cherche souvent une matrice constante  $P$  vérifiant **l'Équation Algébrique de Riccati (EAR)** :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Dans ce cas, la commande optimale s'écrit :

$$u^*(t) = -Kx(t), \quad K = R^{-1}B^T P.$$

Cette structure en boucle fermée à gain constant est extrêmement prisée en automatique et en ingénierie.

**Théorème 3.2.2.** (Stabilité pour le LQR à horizon infini [12])

Supposons que les matrices :

$$Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0.$$

Si le couple  $(A, B)$  est stabilisable et si le couple  $(Q^{1/2}, A)$  est détectable, alors l'Équation Algébrique de Riccati (EAR) :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

admet une solution symétrique positive :

$$P = P^T \geq 0.$$

Le retour d'état :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$$

stabilise le système, c'est-à-dire que la matrice :

$$A = A - BR^{-1}B^T P$$

est stable. Autrement dit, toutes ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.

## 5. Intérêt de l'équation de Riccati

L'équation de Riccati fournit une méthode très efficace pour résoudre le problème LQR. Elle permet :

1. de calcul explicite de la commande optimale.
2. Construction d'une loi de retour d'état.

3. d'analyse la stabilité du système en boucle fermée.

Elle constitue donc un outil fondamental dans le contrôle des systèmes linéaires.

## 3.3 HJB (programmation dynamique)

### 1. Principe général

La programmation dynamique, introduite par Bellman, repose sur l'idée que toute stratégie optimale possède une propriété de cohérence interne : à partir de n'importe quel instant intermédiaire, la suite de la commande doit rester optimale pour le problème restant à résoudre.

Cette idée est connue sous le nom de **principe d'optimalité de Bellman**.

### 2. Fonction valeur

Pour formaliser cette approche, on introduit la **fonction valeur**

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot)} \left\{ \Phi(x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(s, x(s), u(s)) ds \right\},$$

où  $x(s)$  est la trajectoire issue de l'état  $x$  à l'instant  $t$ .

La fonction valeur représente le coût minimal qu'il reste à payer à partir de l'instant  $t$  et de l'état  $x$ .

### 3. Idée du principe d'optimalité

Si l'on considère un petit intervalle  $[t, t + h]$ , alors on peut écrire

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot)} \left( \int_t^{t+h} L(s, x(s), u(s)) ds + V(t + h, x(t + h)) \right).$$

En faisant tendre  $h$  vers zéro, on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

## 3.4 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

### 1. Équation générale

Sous des hypothèses de régularité suffisantes, la fonction valeur  $V(t, x)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \min_{u \in U} \{L(t, x, u) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x, u)\},$$

avec condition terminale

$$V(t_f, x) = \Phi(x).$$

Cette équation est appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

**Remarque 3.4.1.** *L'équation HJB caractérise directement la valeur optimale du problème. Contrairement au principe du maximum de Pontryagin, qui fournit des conditions nécessaires portant sur une trajectoire optimale, l'équation HJB donne une caractérisation globale du problème via la fonction valeur.*

*Elle permet en principe d'obtenir à la fois :*

- le coût optimal,
- la commande optimale,
- la stratégie optimale en retour d'état.

### 2. Loi de commande optimale

Une fois la fonction valeur connue, la commande optimale peut être obtenue en minimisant le terme

$$L(t, x, u) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x, u).$$

Ainsi,

$$u^*(t, x) = \arg \min_{u \in U} \{L(t, x, u) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x, u)\}.$$

On obtient donc une commande optimale sous forme de retour d'état.

### 3. Démonstration par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

On définit la fonction valeur :

$$V(t, x) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} x(T)^\top S x(T) + \frac{1}{2} \int_t^T (x(s)^\top Q x(s) + u(s)^\top R u(s)) ds \right\}.$$

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman est :

$$0 = V_t(t, x) + \min_u \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \frac{1}{2} u^\top R u + V_x^\top (Ax + Bu) \right\}.$$

On cherche une solution sous la forme quadratique :

$$V(t, x) = \frac{1}{2} x^\top P(t) x.$$

Alors :

$$V_t(t, x) = \frac{1}{2} x^\top \dot{P}(t) x,$$

et :

$$V_x(t, x) = P(t) x.$$

En remplaçant dans l'équation HJB, on obtient :

$$0 = \frac{1}{2} x^\top \dot{P} x + \min_u \left\{ \frac{1}{2} x^\top Q x + \frac{1}{2} u^\top R u + x^\top P (Ax + Bu) \right\}.$$

On minimise maintenant par rapport à  $u$ . Le terme dépendant de  $u$  est :

$$\frac{1}{2} u^\top R u + x^\top P B u.$$

Comme  $R > 0$ , cette fonction est strictement convexe en  $u$ . La condition du minimum est donc :

$$R u + B^\top P x = 0.$$

Ainsi :

$$u^*(t) = -R^{-1} B^\top P(t) x(t).$$

On remplace ce contrôle optimal dans l'équation HJB. On obtient :

$$0 = \frac{1}{2}x^T \dot{P}x + \frac{1}{2}x^T Qx + x^T PAx - \frac{1}{2}x^T PBR^{-1}B^T Px.$$

Comme :

$$x^T PAx = \frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x,$$

on obtient :

$$0 = \frac{1}{2}x^T \left[ \dot{P} + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \right] x.$$

Cette relation doit être vraie pour tout  $x$ . Donc :

$$\dot{P} + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Ainsi :

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q.$$

Enfin, comme :

$$V(T, x) = \frac{1}{2}x^T Sx,$$

on obtient :

$$P(T) = S.$$

Le théorème est démontré.

## 4. Lien avec le Hamiltonien

Si l'on définit le Hamiltonien :

$$H(t, x, u, p) = L(t, x, u) + p^T f(t, x, u),$$

alors l'équation HJB peut s'écrire :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \min_{u \in U} H(t, x, u, \nabla_x V(t, x)).$$

Cela montre le lien profond entre l'approche de Pontryagin et celle de Bellman.

**Remarque 3.4.2.** (*Avantages et limites*).

*L'approche de Hamilton-Jacobi-Bellman présente un grand intérêt théorique, car elle fournit souvent des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Cependant, sa résolution est difficile en pratique, car il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire, souvent posée dans un espace de grande dimension. Cette difficulté est connue sous le nom de malédiction de la dimension.*

## 3.5 Comparaison entre Pontryagin et Bellman

Les méthodes de Pontryagin et de Bellman sont étroitement liées, mais elles se distinguent par leur point de vue.

### 1. Méthode de Pontryagin

- fournit des conditions nécessaires d'optimalité ;
- repose sur un système d'équations différentielles couplées ;
- adaptée à l'étude des trajectoires optimales ;
- souvent plus pratique pour les calculs analytiques locaux.

### 2. Méthode de Bellman

- repose sur la fonction valeur ;
- conduit à une équation aux dérivées partielles ;
- donne une vision globale du problème ;
- permet d'obtenir des lois de retour d'état.

Dans les problèmes simples, les deux approches conduisent à des résultats cohérents. Et dans le cas **LQR**, elles mènent toutes deux à l'équation de Riccati.

## 3. Cas particulier du problème LQR vu par HJB

Pour le problème linéaire quadratique, on cherche souvent une fonction valeur de la forme

$$V(t, x) = \frac{1}{2} x^T P(t) x,$$

où  $P(t)$  est une matrice symétrique.

En remplaçant cette expression dans l'équation HJB, on retrouve précisément l'équation de Riccati :

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q,$$

avec

$$P(T) = S.$$

Cela montre que l'équation de Riccati constitue le point de rencontre entre le principe du maximum et la programmation dynamique dans le cadre linéaire quadratique.

## 4. Importance de ces méthodes dans les applications

Les méthodes théoriques présentées dans ce chapitre jouent un rôle majeur dans les applications du contrôle optimal :

- en robotique, pour planifier des trajectoires optimales ;
- en aéronautique, pour le guidage et la stabilisation ;
- en économie, pour la gestion optimale des ressources ;
- en biomathématiques, pour la recherche de stratégies thérapeutiques ;
- énergie, pour le pilotage optimal des systèmes électriques et hybrides.

Le choix de la méthode dépend fortement du type de problème étudié, de sa dimension, de sa structure et des objectifs poursuivis.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales méthodes théoriques du contrôle optimal. Nous avons d'abord étudié le principe du maximum de Pontryagin, qui fournit des conditions nécessaires d'optimalité à travers le hamiltonien, l'équation adjointe et la condition de minimisation. Nous avons ensuite introduit le problème de contrôle linéaire quadratique, particulièrement important pour les systèmes linéaires. Dans ce cadre, nous avons montré le rôle central de l'équation de Riccati, qui permet d'obtenir

explicitement la commande optimale sous forme de retour d'état. Enfin, nous avons présenté l'approche par programmation dynamique et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui donnent une caractérisation globale du problème à travers la fonction valeur.

# Applications

---

## Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment les résultats théoriques du contrôle optimal peuvent être exploités numériquement à l'aide du logiciel MATLAB. Ce dernier constitue un outil très utilisé en mathématiques appliquées, en automatique et en ingénierie, grâce à ses bibliothèques de calcul matriciel, de résolution d'équations différentielles, d'optimisation et de visualisation graphique.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord une application numérique sur un système linéaire, traitée par la méthode du contrôle linéaire quadratique. Nous étudions ensuite un système non linéaire, résolu par une approche directe de discrétisation et d'optimisation numérique. Ces deux exemples permettent d'illustrer concrètement l'intérêt du contrôle optimal, aussi bien dans un cadre théorique bien structuré que dans des situations plus générales.

## 4.1 Première application : contrôle optimal d'un système linéaire

### 1. Présentation du système

Nous considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce système représente un modèle simple de type double intégrateur, souvent utilisé en automatique pour modéliser le mouvement d'un mobile où :

1.  $x_1(t)$  représente la position,
2.  $x_2(t)$  représente la vitesse,
3.  $u(t)$  représente l'accélération ou la force de commande.

Le problème consiste à ramener l'état vers l'origine tout en limitant l'effort de commande.

## 2. Fonctionnelle de coût

On choisit la fonctionnelle quadratique suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt,$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Le choix de la matrice  $Q$  signifie que l'on pénalise davantage l'erreur sur la position que celle sur la vitesse. Le paramètre  $R$  pénalise l'énergie de la commande.

## 3. Solution théorique

Dans le cadre du problème LQR, la commande optimale est donnée par

$$u^*(t) = -Kx(t),$$

où la matrice de gain  $K$  est obtenue à partir de la solution de l'équation de Riccati.

Sous MATLAB, cette matrice peut être calculée directement par la commande **lqr**.

## 4.2 Outils numériques utilisés sous MATLAB

MATLAB offre plusieurs fonctions adaptées à la résolution de problèmes de contrôle optimal. Parmi les plus utiles dans ce travail, on peut citer :

- **lqr**, qui permet de calculer la commande optimale dans le cadre linéaire quadratique ;
- **ode45**, utilisée pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires ;
- **fmincon**, employée pour la minimisation sous contraintes dans les problèmes non linéaires ;
- **plot**, **stairs**, **legend**, **xlabel**, **ylabel**, permettant la représentation graphique des états et des commandes.

L'idée générale de la simulation est la suivante : une fois le modèle dynamique défini et la fonctionnelle coût choisie, on applique soit une méthode analytique exploitable numériquement, soit une méthode directe consistant à discrétiser la commande et à chercher numériquement la meilleure stratégie.

## Code MATLAB

### 1. Évaluation des états du système linéaire

```
clc;
clear;
close all;

% Time interval
t = linspace(0,10,500);

% Linear system
A = [0 1;
     -1 -2];

% Initial condition
x0 = [2; 1];

% State evolution
x = zeros(2,length(t));

for k = 1:length(t)
    x(:,k) = expm(A*t(k))*x0;
end

% Plot
figure;
plot(t,x(1,:), 'LineWidth',2);
hold on;
plot(t,x(2,:), 'LineWidth',2);

grid on;
xlabel('Temps','FontSize',14);
ylabel('États','FontSize',14);
title('Évolution des états du système linéaire','FontSize',16);

legend('$x_1(t)$','$x_2(t)$','Interpreter','latex','FontSize',14);

xlim([0 10]);
ylim([-1 2.3]);

set(gca,'FontSize',13);
```

Ce programme utilise le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il donne une évolution où  $x_1(t)$  augmente légèrement au début puis décroît vers zéro,

tandis que  $x_2(t)$  devient négatif avant de converger aussi vers zéro.

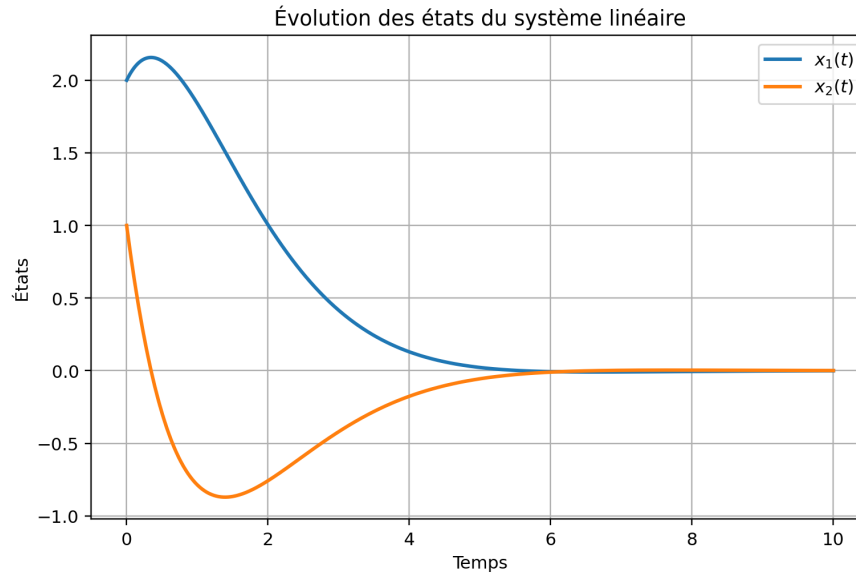


FIGURE 4.1 – Évolution des états obtenue via la résolution de l'équation de Riccati.

La **figure 4.1** représente l'évolution temporelle des deux états  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  d'un système linéaire. On observe que  $x_1(t)$  augmente légèrement au début, puis décroît progressivement vers zéro. De son côté,  $x_2(t)$  diminue rapidement, prend des valeurs négatives, puis revient lentement vers zéro. Cette évolution montre que les deux états convergent vers l'origine lorsque le temps augmente. Le comportement obtenu traduit donc la stabilité asymptotique du système linéaire étudié.

## 2. Commande optimale obtenue via l'équation de Riccati

La **figure 4.2** représente l'évolution temporelle de la commande optimale  $u(t)$  obtenue à partir de l'équation de Riccati. On observe que la commande est fortement négative au début, ce qui signifie qu'une action importante est appliquée pour corriger rapidement l'état initial du système. Ensuite, son amplitude diminue progressivement et la commande se rapproche de zéro lorsque le temps augmente.

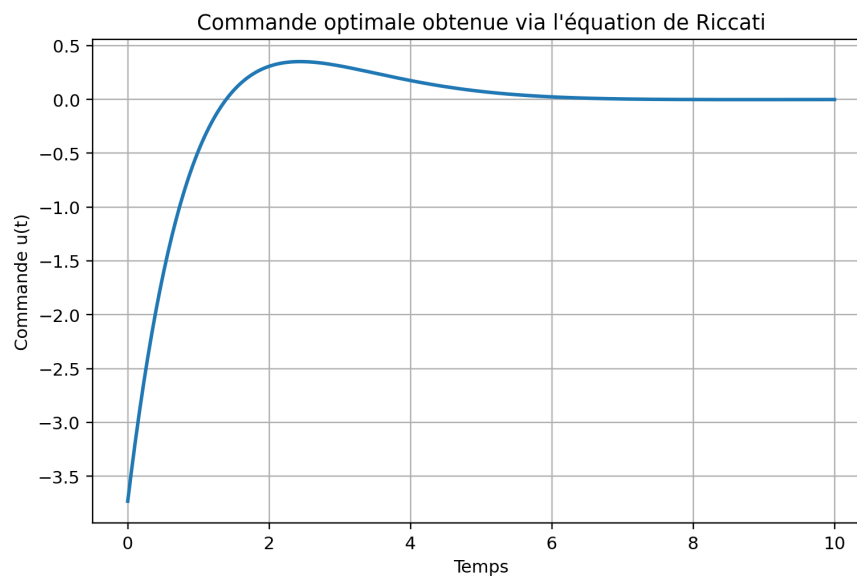


FIGURE 4.2 – commande optimale obtrnue via l'équation de Riccati

Cette évolution montre que le contrôleur agit fortement pendant la phase transitoire, puis réduit son effort lorsque le système se rapproche de l'équilibre. La convergence de  $u(t)$  vers zéro indique que l'état du système est stabilisé et qu'il n'est plus nécessaire d'appliquer une commande importante.

### 3. Portrait de phase du système linéaire

La [figure 4.3](#) représente le portrait de phase du système linéaire, c'est-à-dire l'évolution de la vitesse  $x_2(t)$  en fonction de la position  $x_1(t)$ . La trajectoire part de la condition initiale donnée et se dirige progressivement vers le point d'équilibre  $(0, 0)$ . On remarque que le mouvement n'est pas rectiligne : l'état  $x_2(t)$  devient d'abord négatif, ce qui traduit une phase de correction dynamique, puis la trajectoire revient vers l'origine.

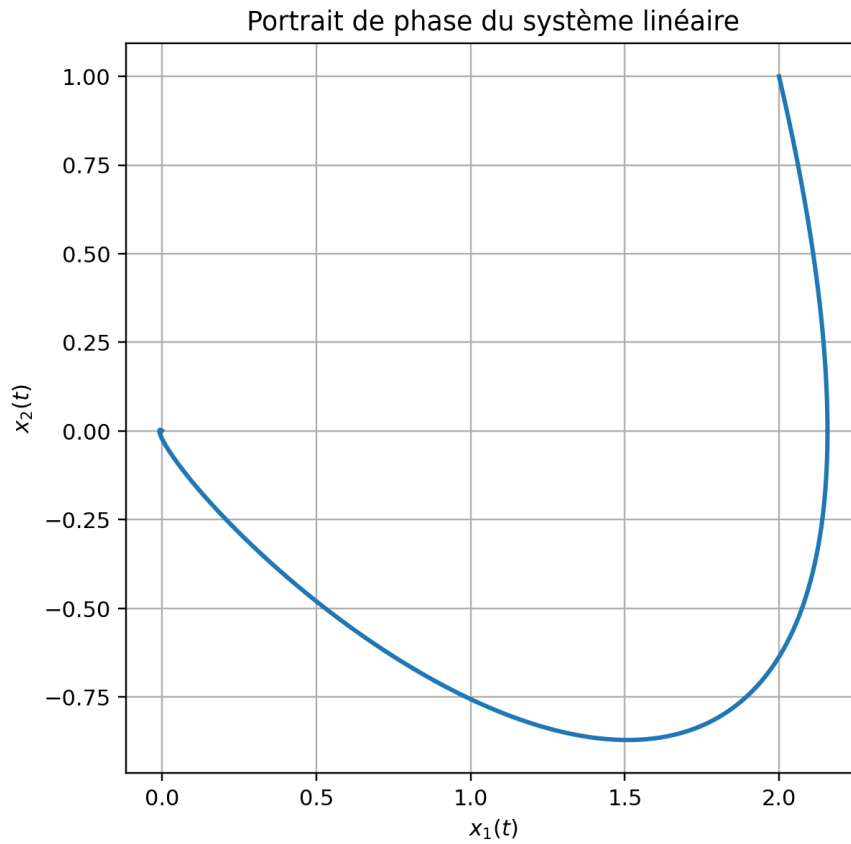


FIGURE 4.3 – Portrait de phase du système linéaire

Cette convergence vers  $(0, 0)$  montre que le système en boucle fermée est stable. Le portrait de phase confirme donc que la commande appliquée permet de ramener les états du système vers l'équilibre.

### 4.3 Présentation du système non linéaire

Nous considérons maintenant le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\sin(x_1(t)) + u(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce système peut représenter un pendule commandé, où :

1.  $x_1(t)$  est l'angle,

2.  $x_2(t)$  est la vitesse angulaire,
3.  $u(t)$  est le couple de commande appliqué.

Le caractère non linéaire provient du terme  $\sin(x_1)$ , qui rend la résolution analytique plus difficile que dans le cas linéaire.

## 1. Fonctionnelle de coût

Nous cherchons à minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \alpha u^2(t)) dt,$$

où  $\alpha > 0$  est un paramètre de pondération.

Dans la suite, on choisit par exemple

$$\alpha = 0.1.$$

Ce choix signifie que l'on veut ramener l'état vers zéro tout en limitant l'amplitude de la commande.

## 2. Méthode numérique adoptée

Dans ce cas non linéaire, nous utilisons une **méthode directe** :

1. l'intervalle de temps  $[0, T]$  est discrétisé en  $N$  sous-intervalles ;
2. la commande est supposée constante sur chaque sous-intervalle ;
3. le système dynamique est simulé numériquement pour une commande donnée ;
4. la fonctionnelle coût est évaluée ;
5. la meilleure commande est déterminée par une routine d'optimisation, ici **fmincon**.

Cette méthode transforme le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation de dimension finie.

### 3. Discrétisation

Soit  $N$  le nombre de subdivisions et  $h = \frac{T}{N}$  le pas de temps. On approxime la commande par une suite

$$u_1, u_2, \dots, u_N.$$

Sur chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , on prend

$$u(t) \approx u_k.$$

L'évolution du système peut être approchée numériquement par une méthode d'Euler .

## 4. Formulation numérique du problème

Le problème devient alors :

trouver le vecteur

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

qui minimise le coût discret

$$J_N(U) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k) + \alpha u_k^2) h.$$

## 5. Représentation linéaire de l'équation de Riccati avec MATLAB

Dans le cadre du contrôle optimal des systèmes linéaires, l'équation de Riccati joue un rôle central. Elle intervient notamment dans le problème du contrôle linéaire quadratique, souvent appelé problème **LQR** (Linear Quadratic Regulator). Cette approche consiste à déterminer une loi de commande optimale permettant de stabiliser un système dynamique linéaire tout en minimisant une fonctionnelle coût quadratique.

## 6. Implémentation sous MATLAB

La résolution numérique de ce problème peut être réalisée sous MATLAB à l'aide de la fonction 'care', qui permet de calculer directement la solution de l'équation algébrique de Riccati.

### 4.3.1 Évolution des états du système non linéaire

Les solutions numériques montrent que les deux états  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  évoluent progressivement vers zéro. Au début, on observe une phase transitoire due aux conditions initiales et à la présence du terme non linéaire  $\sin(x_1)$ . Ensuite, l'effet de la commande par retour d'état permet d'amortir les oscillations et de ramener le système (4.1) vers son point d'équilibre.

```

clc;
clear;
close all;

% Intervalle de temps
tspan = [0 10];

% Condition initiale
x0 = [1.5; 0.5];

% Parametres de la commande
k1 = 2;
k2 = 2;

% Resolution numerique du systeme non lineaire
[t,x] = ode45(@t,x) systeme_non_lineaire(t,x,k1,k2), tspan, x0);

% Trace des etats
figure;
plot(t,x(:,1),'LineWidth',2);
hold on;
plot(t,x(:,2),'LineWidth',2);

grid on;
xlabel('Temps');
ylabel('Etats');
title('Evolution des etats du systeme non lineaire');
legend('x_1(t)','x_2(t)');

% Fonction du systeme non lineaire
function dx = systeme_non_lineaire(t,x,k1,k2)

    % Etats
    x1 = x(1);
    x2 = x(2);

    % Loi de commande par retour d'etat
    u = -k1*x1 - k2*x2;

    % Systeme non lineaire
    dx = zeros(2,1);
    dx(1) = x2;
    dx(2) = -sin(x1) + u;

end

```

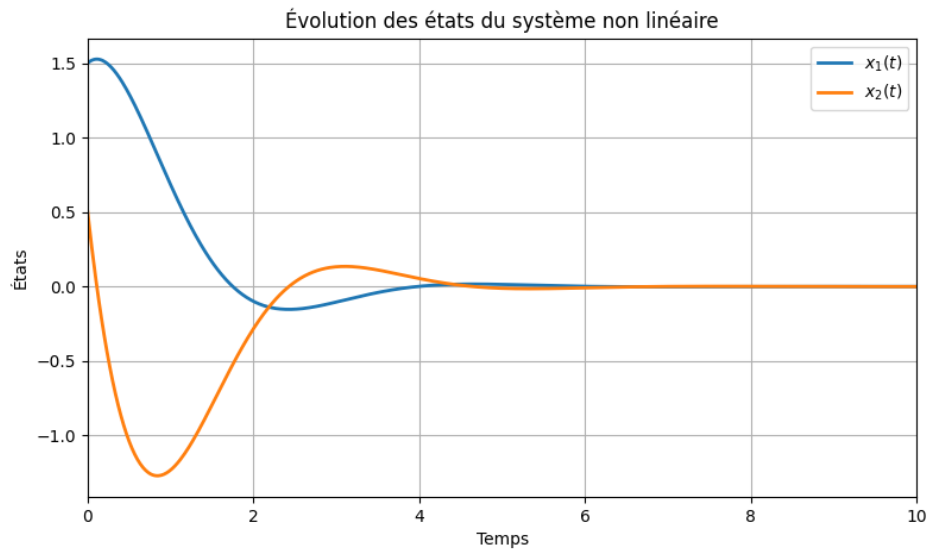


FIGURE 4.4 – Évolution des états du système non linéaire

La convergence des deux courbes vers l'origine indique que la commande choisie assure la stabilisation du système non linéaire. Ainsi, malgré le caractère non linéaire du modèle, les résultats numériques confirment l'efficacité de la loi de commande appliquée.

## Conclusion

Ce chapitre a permis de confronter les concepts théoriques du contrôle optimal à la réalité de la simulation numérique via l'environnement MATLAB. À travers l'étude d'un système linéaire de type double intégrateur, nous avons validé l'efficacité de l'approche linéaire quadratique (LQR). Les simulations ont mis en évidence la convergence asymptotique des états vers l'origine, illustrant le compromis idéal établi par la fonctionnelle de coût entre la rapidité de stabilisation et la minimisation de l'effort de commande.

Par ailleurs, l'introduction des outils de discrétisation pour les systèmes non linéaires souligne les limites des résolutions analytiques pures et ouvre la voie aux méthodes d'optimisation numérique directe, telles que la routine `fmincon`. L'ensemble de ces simulations confirme que MATLAB constitue un levier indispensable pour concevoir, valider et visualiser des lois de commande optimales, validant ainsi l'ensemble des développements théoriques présentés dans les chapitres précédents de ce mémoire.

---

# Conclusion et Perspectives

---

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié le contrôle optimal et certaines de ses applications à travers une approche à la fois théorique et numérique. Nous avons d'abord rappelé les notions fondamentales relatives aux systèmes dynamiques, à l'existence et à l'unicité des solutions, ainsi qu'à la convexité, qui jouent un rôle essentiel dans l'analyse des problèmes d'optimisation. Nous avons ensuite présenté la formulation générale d'un problème de contrôle optimal, en introduisant les variables d'état, les commandes admissibles, les contraintes et la fonctionnelle de coût.

Dans un second temps, nous avons exposé les principales méthodes théoriques du contrôle optimal, notamment le principe du maximum de Pontryagin, le contrôle linéaire quadratique, l'équation de Riccati et l'approche par programmation dynamique à travers l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Ces outils permettent de caractériser les commandes optimales et fournissent un cadre rigoureux pour l'analyse des systèmes contrôlés.

Enfin, nous avons illustré ces résultats à l'aide d'applications numériques réalisées sous MATLAB, d'une part sur un système linéaire, et d'autre part sur un système non linéaire. Les simulations obtenues montrent clairement l'efficacité des méthodes de contrôle optimal pour stabiliser les systèmes dynamiques tout en minimisant un critère de performance.

Ainsi, le contrôle optimal apparaît comme un domaine riche et fondamental, à la fois sur le plan mathématique et sur le plan applicatif. Il constitue un outil puissant pour

l'étude et la commande de nombreux systèmes rencontrés en physique, en ingénierie, en économie et dans plusieurs autres disciplines. Ce travail peut être prolongé par l'étude de problèmes plus complexes, notamment les systèmes à retard, les systèmes stochastiques, les systèmes distribués ou encore les méthodes numériques avancées du contrôle optimal.

---

# Bibliographie

---

- [1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer, 2004.
- [2] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, and S. V. Fomin. *Optimal Control*. Springer, New York, 1987.
- [3] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [4] M. Benabdallah and M. Hariri. On the stability of the quasi-linear implicit equations in Hilbert spaces. *Khayyam Journal of Mathematics*, 5(1) :105–112, 2019. <https://doi.org>.
- [5] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2017.
- [6] A. E. Bryson and Y. C. Ho. *Applied Optimal Control : Optimization, Estimation, and Control*. CRC Press, 1975.
- [7] M. Hariri, Z. Bouteffal, N. Beghersa, and M. Benabdallah. On the stability of a strongly stabilizing control for degenerate systems in Hilbert spaces. *Demonstratio Mathematica*, 56(1) :1–10, 2023.
- [8] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory : An Introduction*. Dover Publications, Mineola, New York, 2004.
- [9] F. L. Lewis, D. Vrabie, and V. L. Syrmos. *Optimal Control*. Wiley, 3rd edition, 2012.
- [10] D. Liberzon. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory : A Concise Introduction*. Princeton University Press, 2006.

- 
- [11] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [12] S. P. Sethi and G. L. Thompson. *Optimal Control Theory : Applications to Management Science and Economics*. Springer, New York, 2nd edition, 2000.