وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بلحاج بوشعيب – عين تموشنت-

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير

قسم : العلوم الإقتصادية

مطبوعة بيداغوجية لفائدة طلبة السنة أولى جذع مشترك

محاضرات و مسائل محلولة في مقياس -الإحصاء 02 -

من إعداد:

د. مطهري كمال

السنة الجامعية: 2025 – 2026

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرس المحتويات:

المحور الأول:

مفاهيم عامة حول علم الاحصاء و نظريات المجموعات

أولا- علم الإحصاء:

1- تعريف علم الإحصاء:

يعتبر علم الإحصاء فرع من فروع الرياضيات و هو العلم الذي يهتم بجمع البيانات، تلخيصها وتبويبها للاستفادة منها في وصف الظواهر وتحليلها وقياس واستقراء الوقائع للتنبؤ بسلوك الظاهرة في الحاضر و في المستقبل بغرض إتخاذ القرارات السليمة و المناسبة بشأن الظواهر المدروسة.

ويعرف علم الإحصاء بأنه" العلم الذي يبحث في طرق جمع البيانات وعرضها وتحليلها وتفسيرها، فالإحصاء بهذا التعريف هو أسلوب منطقي منتظم موحد يعالج الموضوعات و الخصائص التي يمكن أن يعبر عنها بصورة عددية "

كما يعرف علم الإحصاء كذلك على أنه "العلم الذي يدرس مختلف طرق ووسائل جمع البيانات الكمية عن مختلف الظواهر الاقتصادية والاجتماعية وغيرها، وترتيب هذه البيانات وتبويبها وتحليلها وتفسيرها وتقديمها بأشكال وصور ملائمة بهدف تسهيل اتخاذ القرار على أساس سليم"

و ينقسم علم الإحصاء إلى نوعين أساسين وهما الإحصاء الوصفي و الإحصاء الإستدلالي.

1-1- الإحصاء الوصفي(Descriptive statistics) :

ويعرف على انه فرع من فروع علم الإحصاء الذي يبحث في جمع وتنظيم وترتيب البيانات وعرضها جدوليا و بيانيا، وحساب بعض المؤشرات الإحصائية بغرض استخلاص نتائج تستخدم في اتخاذ بعض القرارات.

ومن أبرز خصائص هذا النوع من الإحصاء و المتعلق بفحوي مطبوعتنا هاته ما يأتي :

- يتم جمع البيانات وتحليلها ومن ثم إجراء العمليات الإحصائية عليها مثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري، وتستخدم هذه المقاييس الناتجة في فهم البيانات، ولكن لا يمكن استخدام هذا النوع من الإحصاء في التعميم، أي إنها تكون قيم خاصة بالعينة ، وذلك لأن المقاييس الناتجة تعطى كقيمة رقمية محددة ودقيقة.

- يقوم الإحصاء الوصفي بتلخيص وترتيب خصائص مجموعة البيانات المأخوذة من عينة أو مجتمع، بحيث إنه وبعد عملية جمع هذه البيانات يقوم بإجراء العمليات الإحصائية مثل المتوسط الحسابي لمتغيِر واحد، أو ربما يقوم بدراسة العلاقة بين المتغيرات المختلفة من البيانات المجموعة.

1-2- الإحصاء الاستدلالي (statistical inference) :

وهو الفرع الثاني من فروع علم الإحصاء والذي يهتم بدراسة جزء من المجتمع (دراسة العينات) ، والقيام بعملية التقدير واختبار الفرضيات، من أجل تعميم النتائج على المجتمع التي تمت منه المعاينة.

فالتقدير هو اجياد قيم تقديرية لمعلمات المجتمع الأصلي و هو محل الظاهرة موضوع البحث. و تكون إما قيمة وحيدة و يسمى التقدير بنقطة أو ضمن فترة ويسمى التقدير بفترة الثقة.

أما إختبار الفرضيات: هي طريقة لاتخاذ القرارات باستخدام البيانات، للوصول إلى القرار بشأن قبول أو رفض الفرضيات المقترحة .

2- وظائف علم الإحصاء:

إن علم الإحصاء له العديد من الوظائف التي تساهم في استخلاص حقائق تنبؤات عديدة متعلقة بموضوع الدراسة، ومن أهم الوظائف ما يلي:

- تحديد المشكلة عن الظاهرة المراد دراستها و تحديد نوع البيانات اللازمة وطرق تحليلها
- جمع البيانات أو المعلومات ، سواء عن طريق أسلوب الحصر الشامل أو المعاينة، ويقصد به أسلوب العينات مع الأخذ بعين الاعتبار طبيعة المجتمع المدروس وطبيعة البيانات المطلوبة.
- تلخيص البيانات وتبويبها ثم عرضها في جداول إحصائية أو رسومات بيانية أو أشكال هندسية مختلفة، وهي مرحلة تساعد فيما بعد على تحليل هذه البيانات.
- وصف البيانات بعد تلخيصها في مجموعة من المقاييس الوصفية التي توزيع الظاهرة موضوع البحث بطريقة مختصرة، و قياس درجة التباين او عدم تجانس توزيع بيانات هذه الظاهرة.
- التفسير الإحصائي: بعد الانتهاء من مرحلة وصف البيانات تكون أمام الباحث نتائج رقمية محددة. وبعد التأكدمن صحتها يتعين عليه تفسير هذه النتائج بحكم خبرته وتجربته التي تتوافق مع طبيعة التحليل الإحصائي.
- إتخاد القرار و التنبؤ الإستدلالي بالتغيرات التي تؤثر في ظاهرة ما عن طريق استخدام طرق القياس والتحليل الإحصائي.

3- مصطلحات و مفاهيم متعلقة بالإحصاء:

3-1- الوحدة الإحصائية (Statistical unit): وتسمى أيضا بالعنصر أو المفردة التي تجرى عليها الدراسة الإحصائية أو المعاينة والتي نتحصل منها على المعلومات والبيانات، وهي عنصر فعال في عملية التحليل، " فيشترط في الوحدة أن تكون خاضعة لتعريف دقيق وواضح، فهي قد تكون شيئا حيويا مثل شخص، طالب، موظف ...، وقد تكون شيئا ماديا مثل :مؤسسة، سيارة، علبة ...، كما قد تكون شيئا معنويا مثل فكرة..."

مثال: دراسة إحصائية حول سن الطلبة بكلية الإقتصاد بجامعة عين تموشنت إذن فالوحدة الإحصائية هي: الطالب في جامعة عين تموشنت.

3-2- المجتمع الإحصائي(Population): وهو عبارة عن مجموع الوحدات الإحصائية المراد دراستها، والتي تشترك فيما بينها في الصفة الأساسية المراد تحليلها، ويشترط في المجتمع الإحصائي أن يكون معرفا تعريفا جيد. وهناك نوعين: مجتمع محدود أو نهائي و مجمتع غير محدود أو نهائي.

فبأخد نفس المثال السابق فالمجتمع الإحصائي يتمثل في : طلبة كلية الإقتصاد بجامعة عين تموشنت .

3-3- المتغير الإحصائي(Statistical variable):

هو الخاصية التي يرغب الباحث في دراستها أو هو القاسم المشترك بين عناصر المجتمع، وتكون قابلة للتغير من فرد إلى أخر من مشاهدة إلى أخرى، فهي التي تسمح بالتفريق بين وحدات المجتمع، فبواسطتها يمكن للباحث أن يفرق بين الوحدات الإحصائية، لأن في البداية كل الوحدات متشابكة أمامه، فمثلا مجموعة من الطلاب لا اختلاف بينهم طالما لم تكن هناك ميزة أو خاصية تفرقهم عن بعضهم البعض، فصفة العمر أو السن في المثال السابق تمكن الباحث من التفريق بينهم." فالمتغير الإحصائي في هذه الحالة هو عمر الطلبة.

ويمكن تقسيم المتغير الإحصائي إلى قسمين: المتغر الكمي (الرقمي أو العددي) و المتغير النوعي (الكيفي)

أ- المتغيرات الكيفية (النوعية): هي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها كما، أي غير قابلة للقياس بل يقاس تكرارها فقط وهي عبارة عن صفات، وتنقسم بدورها إلى قسمين :

* **متغيرات كيفية قابلة للترتيب:** وهي تلك المتغيرات الوصفية التي يمكن ترتيبها حسب رتبة ما، إما تصاعديا أو تنازليا، مثل مستوى الدراسي، تقدير الشهادات ...

* **متغيرات كيفية غير قابلة للترتيب (إسمية)** : وهي تلك المتغيرات الوصفية التي لا يمكن ترتيبها مثل الجنسية، الجنس، الحالة العائلية، اللون...

ب- المتغيرات الكمية: هي عبارة عن متغيرات عددية أي يكون معبر عنها في شكل أرقام " فهي تلك المتغيرات التي يمكن قياسها، وهي أكثر المتغيرات انتشارا واستعمالا لأن لغة الإحصاء هي لغة الأرقام مثل: الأجور، :الاستهلاك، عدد الأبناء،... ، والمتغيرات الكمية تنقسم بدورها إلى نوعين:

* **متغيرات كمية متقطعة** (منفصلة): هي تلك المتغيرات التي يتم التعبير عنها على شكل أرقام صحيحة لا يمكن تجزئتها، مثل عدد الأطفال ، عدد الغيابات ،...

* **متغيرات كمية مستمرة** (متصلة): هي تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة، ونظرا للعدد غير المتناهي لهذه القيم نقسم بيانات الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى الفئات" ، مثل الطول، السن، الوزن...

ج- العينة:"هي جزء من مجتمع الظاهرة محل الدراسة تؤخذ بطريقة معينة بحيث تعبر عنه أصدق تمثيلا بغرض التعرف على خصائص هذا المجتمع".

4- مصادر وأساليب جمع البيانات:

4-1- مصادر جمع البيانات: هناك مصدرين لجمع المعلومات و البيانات المصادر التاريخية (غير المباشرة) و المصادر الميدانية (المباشرة).

أ– المصادر التاريخية : تحتوي على بيانات منشورة وجاهزة للاستخدام تكون قد جمعت من قبل مثل الوثائق والمطبوعات والسجلات والنشرات والبحوث والدراسات الإحصائية التي تصدرها المصالح والمنشآت والهيئات العامة والخاصة وتنقسم المصادر التاريخية إلى نوعين:

ب– مصادر أولية: وهي التي يقوم بتفريغها وتبويبها ونشرها نفس الجهة التي قامت بجمع بياناتها الأولية، كنشرات الديوان الوطني للإحصاء.

ث– مصادر ثانوية : وهي التي يقوم بتفريغها وتبويبها ونشرها جهة أخرى خلاف تلك التي قامت بجمع بياناتها الأولية، كإحصاءات هيئة الأمم، وهيئة التغذية والزراعة والجداول الإحصائية الموجودة في كتب المؤلفين.

ج– المصادر الميدانية: يمكن الحصول منها على بيانات من الميدان بشكل دقيق و مفصل، و هي أكثر الطرق المستعملة في البحوث حاليا. و هناك طريقتان لجمع البيانات:

– **المقابلة الشخصية:** وهي أن يدون الباحث الإجابة التي يدلي بها المبحوث عند مقابلته له.

– **التسجيل الذاتي:** عن طريق الاستقصاء، وترسل بالبريد أو الهاتف أو البريد الالكتروني

4–2–أساليب جمع البيانات:

أ– **أسلوب الحصر الشامل أو المسح** : ويتطلب هذا الأسلوب دراسة كل وحدة في المجتمع، وهو دقيق جدا، ونسبة الخطأ فيه ضئيلة جدا ، إلا أنه يتطلب مجهودا ووقتا طويلا و تكاليف كثيرة.

ب– أسلوب العينات : يتطلب هذا الأسلوب دراسة جزء من المجتمع بحيث يراعى في اختيار العينة أن تكون ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا، ويستخدم أسلوب العينات إذا كان المجتمع أكبر مما تسمح به إمكانيات الباحث، أو إذا كان المجتمع متجانسا؛ بحيث أن دراسة عينة مأخوذة من مجتمع متجانس تؤدي إلى نفس النتائج التي نحصل عليها من دراسة نفس المجتمع . و يتميز هذا الأسلوب بتقليل الجهد، الوقت و التكلفة ، لكن بالمقابل نتائج دراسة العينات تشوبها الدقة و الثقة.

كما يتوقف نجاح هذا الأسلوب على نوع العينة المختارة (حجم و طريقة إختيار مفردات العينة) و من أهم أنواع المعاينات مايلي :

– **المعاينة غير الاحتمالية** : يتم اختيار مفردات العينة بطريقة غير عشوائية أي مقصودة وينزع منها عنصر الصدفة حيث تختار مفردات العينة بصورة تحقق الهدف من المعاينة، ومن أنواعها :

- **المعاينة الحصصية:** يتم فيها تقسيم المجتمع إلى حصص أو مجموعات و يختار من كل مجموعة عدد معين و مناسب لموضوع البحث.

- **المعاينة المصادفة** : حيث يثم إختيار العينة من مجتمع البحث بحسب الظروف المصادفة للباحث .

- **المعاينة العمدية (القصدية)**: سحب عينة من مجتمع البحث بانتقاء عناصر مثالية و المناسبة لموضوع البحث (إذا كان البحث حول طبيعة الاهتمامات الاجتماعية للطلبة فسنختار طلبة العلوم الاجتماعية لأنهم أكثر اهتماما وباعتبارهم عناصر مثالية.)

–**المعاينة الاحتمالية (العشوائية)**: بحيث يكون لكل عنصر من مجتمع البحث نفس الحظ أو إحتمال الظهور في العينة عن طريق السحب العشوائي دون تكرار أو نسيان ومن أنواعها:

– **المعاينة البسيطة** : هي أبسط أنواع العينات و تستخدم في حالة تجانس أفراد المجتمع محل الدراسة في الظاهرة موضوع الدراسة و معرفة جميع أفراده، فيتم اختيار الأفراد بطريقة السحب غير المتحيز

– **المعاينة المنتظمة**: نفس طريقة المعاينة البسيطة ولكن بترتيب وترقيم مجتمع البحث فإذا كان حجم مجتمع البحث هو 1000 فإننا نرقم مفرداته من 1 إلى 1000 ثم نقسم 1000 على حجم العينة ليفترض أنه 100 فنجد 10 = 100 /1000 فينتج لنا 100 جزءا كل جزء فيه 10 مفردات مرتبة.

– **المعاينة الطبقية**: حيث يتم تقسيم مجتمع البحث إلى طبقات ولكل طبقة خصائص مشتركة تختلف عن الأخرى، وتسمح بدرجة عالية من التمثيل وتقليل هامش الخطأ (تقسيم مجتمع بلد ما إلى طبقات حسب الديانات).

–**المعاينة العنقودية**: السحب بالصدفة من خلال تقسيم المجتمع إلى عناقيد (عند القيام ببحث حول أساتذة الجامعات الجزائرية فإننا نقسم المجتمع حسب الجامعات وهو العنقود الأول ثم الكليات وهو العنقود الثاني ثم الأقسام وهو العنقود الثالث، ويتم إختيار عينات من كل قسم تمثل في مجموعها العينة الكلية التي تشملها الدراسة.

ثانيا– نظرية المجموعات:

1– المجموعات (Sets)

إن دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة وضرورية لدراسة الاحتمال.

المجموعة: هي تجمع أي عدد من العناصر أو الأشياء وسنمثل المجموعة بحروف لاتينية كبيرة مثل: ..... ,A,B,C وعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل .... a, b, c

يستعمل الرمز ∈ ليعني (ينتمي إلى) والرمز ∉ ليعني (لا ينتمي إلى) وهكذا فإن:

$a \in A$ تعني أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A.

أما $b \notin A$ تعني أن العنصر b لا ينتمي إلى المجموعة A.

وعند دراسة أي مجموعة يجب التأكد من أنها معرفة تماما وذلك يعني أنه إذا أعطينا أي عنصر فإنه سيكون بإمكاننا معرفة فيما إذا كان هذا العنصر منتميا للمجموعة أو غير منتم إليها.

2- طرق وصف المجموعة:

هناك طريقتان لوصف المجموعات:

2-1 طريقة العد (**Roster Method**)

وذلك بوضع جميع عناصر المجموعة بين حاصرتين (حاضنتين) crochets

مثل: A = (a,b,c,d)

أو B = (H,T)

C = (1,2,3, ….., 10)

2-2- طريقة القانون (**Rule method**)

وذلك بوصف المجموعة بقانون يوضع بين حاضنتين فمثلا:

A = (x/7 عدد صحيح موجب أقل من x)

B = (x/ هي قسم بيداغوجي في جامعة غرداية x)

3- تعاريف حول المجموعات:

3-1- المجموعة الخالية (Empty set): هي المجموعة التي فيها عناصر مطلقا، ونعبر عنها بالرمز Ø أو { }

3-2- المجموعة الجزئية (subset): القول أن A مجموعة جزئية من B ونرمز لها $B \subset A$ إذا كان عناصر A منتميا للمجموعة B (A محتواة في B)

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

3-3- التساوي (**Equality**)

نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B أي A=B إذا كانت A، B تحتويا على نفس العناصر، يكون ذلك إذا تحقق الشرطان $B \subset A$ و $A \subset B$

مثال: A = (a,b,c) B = (a,b,c)

3-4 المجموعة الكلية (**Universal set**)

المجموعة الكلية هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات تحت البحث باعتبارها مجموعات جزئية منها.

4- العمليات الجبرية على المجموعات (**Set Operations**)

4-1- الاتحاد (Union): اتحاد المجموعتين A، B أي $A \cup B$ هو مجموعة العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما، وبعبارة أخرى:

$$A \cup B = \left\{x/x \in B \text{ أو } x \in A\right\}$$

مثال: إذا كان: $A = \{1,2,3\} \quad B = \{3,4,5\}$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

2–4 التقاطع (Intersection)

تقاطع المجموعتين A، B أي $A \cap B$ هو مجموعة العناصر المشتركة بين A و B أي هو مجموعة العناصر المنتمية إلى A و B في نفس الوقت. وبعبارة أخرى:

$$A \cap B = \left\{x/x \in B \text{ و } x \in A\right\}$$

مثال: إذا كان $A = \{3,8,10\} \quad B = \{8,12,16\}$

$$A \cap B = \{8\}$$

3–4 المتممة (Complement):

متممة A (بالنسبة إلى المجموعة الكلية Ω) هو مجموعة العناصر المنتمية إلى المجموعة الكلية Ω ولا تنتمي إلى A ونمثلها بالرمز A^c، وبعبارة أخرى:

$$A^c = \{x/x \in \Omega; x \notin A\}$$

إذا كان:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5\}$$
$$\Omega = \{2,3\}$$
$$A^c = \overline{A} = \{1,4,5\}$$

ملاحظة: إذا لم يوجد عناصر مشتركة بين مجموعتين نقول أن المجموعتين منفصلتان في بعضهما البعض، أي أنه إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن A و B منفصلتان (Disjoint)

5– خواص العمليات الجبرية على المجموعات:

1–5: خاصية التبديل (Commutative laws)

- خاصية التبديل للاتحاد: $A \cup B = B \cup A$
- خاصية التبادل للتقاطع: $A \cap B = B \cap A$

2–5 خاصية التجميع (Associative Laws)

- خاصية التجميع للاتحاد $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- خاصية التجميع للتقاطع $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3-5 خاصية التوزيع (Distibutive Laws)

- خاصية التوزيع للتقاطع على الاتحاد $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- خاصية التوزيع للاتحاد على التقاطع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4-5 قوانين ديمور غان (De Morgan's Laws)

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

6- فضاء العينة (Sample space)

يستعمل علم الإحصاء في استقراء النتائج من المشاهدات والقياسات التي يسجلها العلماء الباحثون نتيجة إجراء التجارب.

1-6 التجربة الإحصائية (Statistical Experiment): هي كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل حتمي.

مثال:

- عند رمي قطعة نقود فإن النتيجة تكون إما صورة أو كتابة.
- عند رمي زهرة النرد فإن الوجه الذي يظهر إلى أعلى يحمل أحد الأعداد التالية: 1، 2، 3، 4، 5، 6، أي أن النتيجة لا تكون معروفة بشكل حتمي قبل إجراء التجربة.

2-6 فضاء العينة(Ω) لتجربة إحصائية: هو مجموعة النتائج الممكنة لتلك التجربة وأي عنصر في فضاء العينة يسمى نقطة فضاء العينة (A Sample Point)

3-6 الحادث (Event): هو أي مجموعة جزئية لفضاء العينة S بشرط أن مجموعة Ω منتهية، يتكون فقط من أحد النتائج الممكنة للتجربة ويرمز له بالحروف اللاتينية.... A, B, C

مثال: عند رمي زهرة النرد تكون النتائج الممكنة أو فضاء العينة كالتالي:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{3\}, \qquad B = \{2,6\}, \qquad C = B = \{1,4,5\}$$

تمارين المحول الأول

التمرين 01:

حدد المجتمع الإحصائي الوحدة الإحصائية المتغير الاحصائي ونوعه من واقع العبارات التالية:

- مدة حياة المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع.
- دراسة المستوى التعليمي للعمال بإدارة عمومية.
- قياس نسبة السكر في الدم لدى 80 مريض .
- عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 200 مسكن بولاية عين تموشنت .
- دراسة الأجور الشهرية لعمال مؤسسة ما.
- عدد السيارات في بلد ما حسب الصنف.
- تصنيف الأحزاب السياسية حسب عدد الأصوات المكتسبة في الانتخابات.
- دراسة المستوى المعيشي للعائلات في مدينة ما.

حل التمرين 01:

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الاحصائي	نوع المتغير
المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع	مصباح واحد	مدة حياة المصابيح	كمي مستمر
العمال بإدارة عمومية	عامل واحد	المستوى التعليمي	كيفي قابل للترتيب
80 مريض	مريض واحد	قياس نسبة السكر	كمي مستمر
200 مسكن بولاية عين تموشنت	مسكن واحد	عدد الغرف في المسكن	كمي متقطع
عمال مؤسسة ما	عامل واحد	الأجور الشهرية	كمي مستمر
عدد السيارات	سيارة واحدة	صنف السيارة	كيفي غير قابل للترتيب
الأحزاب السياسية	الحزب الواحد	عدد الأصوات المكتسبة	كمي متقطع
عائلات مدينة ما	عائلة واحدة	المستوى المعيشي	كيفي قابل للترتيب

التمرين 02:

قامت شركة صناعية بدراسة إحصائية لمعرفة مدى رضا المستهلكين حول جودة إحدى المنتوجات التابعة لها.

- ما هو الهدف من هذه الدراسة ؟
- حدد مجتمع الدراسة، المتغير المدروس ونوعه ؟
- ما هو الأسلوب الأنسب لإجراء الدراسة ؟
- ما هو مصدر جمع البيانات؟

حل التمرين 02:

- **الهدف من الدراسة** : معرفة مدى رضا المستهلكين حول جودة إحدى المنتوجات التابعة للشركة
- **مجتمع الدراسة**: المستهلكين
- **المتغير المدروس**: مدى رضا المستهلك
- **نوع المتغير**: كيفي قابل للترتيب
- **أسلوب الدراسة** : إن الأسلوب الأنسب لجمع بيانات الدراسة هو أسلوب المعاينة و ذلك لصعوبة الحصر الشامل لكافة مستهلكي منتوج الشركة .
- **مصدر جمع البيانات** : الإتصال المباشر بالمستهلكين عن طريق الإستجواب أو توزيع إستبيان .

التمرين 03:

لنفترض أن المجموعة A تتكون من 3 عناصر: $A = \{2,4,6\}$

1) أوجد مجموعة أجزاء المجموعة A.

2) إذا كان $Card\ A = 52$، فابحث عن CardP(A)

3) لتكن A و B مجموعتين، بين أن: $A - B = A \cap \bar{B}$

حل التمرين 03:

1) $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$

2) $Card\ A = 52 \Longrightarrow CardP(A) = 2^{52}$

3)
$$\begin{aligned} A - B &= \left\{x: x \in A \text{ و } x \notin B\right\} \\ &= \left\{x: x \in A \text{ و } x \notin \bar{B}\right\} \\ &= A \cap \bar{B} \end{aligned}$$

التمرين04:

نقوم برمي زهرة النرد مرة واحدة. لتكن المجموعة S مجموعة النتائج الممكنة:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

لتكن الأحداث التالية:

A: الحصول على عدد أصغر من 3.

B: الحصول على عدد زوجي.

أوجد المجموعات التالية:

$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad \bar{A}, \qquad A - B, \qquad B - A$$

حل التمرين 04:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,2\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$
$$A \cap B = \left\{x: x \in B \text{ أو } x \in A\right\} = \{1,2,4,6\}$$
$$\bar{A} = \left\{x: x \in S \text{ و } x \notin A\right\} = \{3,4,5,6\}$$
$$\bar{B} = \left\{x: x \in S \text{ و } x \notin B\right\} = \{1,3,5\}$$
$$A - B = \{1\}$$
$$B - A = \{4,6\}$$

التمرين 05:

ليكن A و B مجموعتين جزئيتين من المجموعة S. بيّن أن:

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

حل التمرين 05:

1)

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \left\{x: x \in S \text{ و } x \in \overline{A \cup B}\right\} \\
&= \left\{x: x \in S \text{ و } x \notin \overline{A \cup B}\right\} \\
&= \left\{x: x \in S \text{ و } x \notin A \text{ و } x \notin B\right\} \\
&= \left\{x: x \in S \text{ و } x \in \bar{A} \cap \bar{B}\right\} \\
&= \left\{x: x \in S \text{ و } x \in \bar{A} \cap \bar{B}\right\}
\end{aligned}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

02)
$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \left\{x : x \in S \text{ و } x \in \overline{A \cap B}\right\}\\ &= \left\{x : x \in S \text{ و } x \notin \overline{A \cap B}\right\}\\ &= \left\{x : x \in S \text{ و } x \notin A \text{ و } x \notin B\right\}\\ &= \left\{x : x \in S \text{ و } x \in \bar{A} \text{ و } x \in \bar{B}\right\}\\ &= \left\{x : x \in S \text{ و } x \in \bar{A} \cup \bar{B}\right\}\\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B}\end{aligned}$$

3) لدينا:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

نضع: $C = \bar{B}$

$$A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \ldots\ldots ①$$

نعرف أن:

$$B \cup \bar{B} = S$$
$$A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap S) = A \ldots\ldots ②$$

نعوض المعادلة ② في المعادلة ① نجد:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

التمرين 06:

لتكن المجموعات A,B,C. بيّن أن:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

حل التمرين 06:

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= \left\{x : x \in A \text{ و } x \in (B \cup C)\right\}\\ &= \left\{x : x \in A \text{ و } x \in B \text{ و } x \in C)\right\}\\ &= \left\{x : (x \in A \text{ و } x \in B) \text{ و } (x \in A \text{ و } x \in C)\right\}\\ &= \left\{x : x \in A \cap B \text{ و } x \in A \cap C)\right\}\\ &= \{x : x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\}\\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

المحور الثاني:

طرق العد و أساسيات الإحتمالات

أولا – طرق العد (التحليل التوافقي)

من بين القواعد بالغة الأهمية في دراستنا للإحصاء و الاحتمالات التي يجب التعرض إليها والوقوف عندها هي قوانين " طرق العد" أو ما يسمى بالتحليل التوافقي (combinatorial analysis).

1– المبدأ الأساسي للعد (Principle of counting):

إذاكنا أمام تجربة عدد إمكانات نتائجهاكبير جدا وه تتحقق انطلاقا من مرتبة معينة من تجربة أولى بسيطة ذات نتيجة متمايزة متبوعة بتجربة ثانية ذات n_2 نتيجة متمايزة... إلخ. فإن عدد الإمكانات المختلفة الممكنة للتجربة الكلية تكون:

$$\boxed{n = n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots n_k}$$

مثال01:

ليكن لدينا مجموعة مؤلفة من 12 تلميذ منهم 7 بنات و 5 أولاد. نختار تلميذين بشكل أن يكون لدينا بنت و ولد.

– ما هي عدد الإمكانات الممكنة المتاحة لنا؟

حسب المبدأ الأساسي للعدد يكون لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} n &= n_1 \times n_2 \\ &= 7 \times 5 \\ &= 35 \end{aligned}}$$

مثال 02 :

نرمي قطعة نقود وحجر نرد. ما هي عدد النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة؟

نلاحظ أن القطعة تحمل وجهين، H, T. أما حجر النرد فإنه يحمل ستة أوجه هي 1، 2، 3، 4، 5، 6.

ومنه حسب ما سبق عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة هي $2 \times 6 = 12$

2– الترتيبة (Arrangement):

تسمى ترتيبة لـ k عنصرا متمايزا مأخوذا من n عنصر $(k \leq n)$ كل متتالية مرتبة لهذه العناصرو نميز ما بين:

♦ **تعريف الترتيبة (بدون تكرار)**

تسمى ترتيبة (بدون تكرار) لـ k عنصرا متمايزا مأخوذا من n عنصر $(k \leq n)$ كل متتالية مرتبة بدون تكرار لهذه العناصر. ونرمز لعدد التراتيب لـ k عنصر من بين n بـ A_n^k، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots..(n-p+1)$$

إن هذه العناصر يتم أخذها بالمراحل التالية:

- اختيار العنصر الأول: يتم اختياره بـ n طريقة
- اختيار العنصر الثاني: يتم اختياره بـ $(n-1)$ طريقة

وهكذا........

إختيار العنصر k يتم اختياره بـ $(n-k+1)$ طريقة.

ومنه حسب المبدأ الأساسي للعد فإن عدد الطرق الممكنة هي:

$$(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

♦ **تعريف الترتيبة (مع التكرار)**

في الحالة عدد التراتيب مع التكرار يعطى بالعلاقة التالية:

$$A_n^k = n^k$$

مثال:

- ما هي عدد الكلمات ذات 8 التي يمكن تشكيلها من الكلمة mathématique؟

حسب ما سبق لدينا:

$$A_n^k = \frac{12!}{8!}$$
$$= 12 \times 11 \times 10 \times 9$$
$$= 11880$$

3– التبديلة (permutation):

♦ **تعريف تبديلة (بدون التكرار):**

ندعو تبديلة بدون تكرار من المرتبة n كل متتالية مرتبة لهذه العناصر التي عددها n.

$$p_n = n!$$

الواقع كل تبديلة هو عبارة عن تقابل هذه المجموعة ذات n عنصر في ذاتها وأيضا إن نعبر عن ذلك بقولنا إن كل تبديلة ذات n عنصر عني تكافئي ترتيبه لعنصر هي تكافئي ترتيبه n عنصر مأخوذة من n أي n = p.

عدد التباديل ذات n عنصر يعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n = n!$$

مثال:

- بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من أربعة أرقام من الأرقام التالية 4، 3، 2، 1 ؟

الحل:

يتم ذلك بـ $4!$ طريقة أي: $P_4 = 4! = 24$

♦ تعريف تبديلة (مع التكرار)

قد يحدث أنه من بين n عنصر الذي نبحث عن عدد التباديل الخاصة به، يوجد هناك r عنصر متماثل في هذه الحالة عدد التباديل يكون كما يلي:

$$P_n(r) = \frac{P_n}{P_r} = \frac{n!}{r!}$$

ملاحظة:

إذا كانت التكرارت غير موجودة $r_1 = 1$

تعميم:

$$P_n(r_1, r_2, \dots\dots, r_k) = \frac{n!}{r_1 \times r_2 \dots\dots\dots\dots \times r_k}$$

حيث أن:

$$r_1 + r_2 + \cdots \dots\dots. + r_k = n$$

4- التوفيقة (combinaison):

ندعو توفيقة ذات k عنصر مأخوذة من n عنصر $(k \leq n)$ كل متتالية غير مرتبة لهذه العناصر وعدد التوفيقات لـ k عنصر من بين n نرمز له بـ C_n^k ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

مثال:

لدينا 8 رجال و6 نساء يتقدمون للتوظيف لأربعة مناصب شغل.

- ما هو عدد الإمكانات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة؟
- ما هي عدد الإمكانات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة علما أننا أخذنا رجلين وامرأتين؟

الحل:

لدينا هنا سحب بدون تكرار وغير مرتب. إذن عدد الإمكانات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة هو:

$$C_n^k = \frac{14!}{4!\,10!} \quad = 6006$$

1- حسب المبدأ الأساسي للعد يكون لدينا:

$$C_8^2 . C_6^2 = \frac{8!}{2!\,6!}\,\frac{6!}{2!\,4!} = 420$$

ثانيا- مفاهيم أساسية متعلقة بالاحتمالات:

إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيرا في حياتنا اليومية، فمثلا يقال أن من المحتمل نزول المطر اليوم، ويقال أن احتمال نجاح أحد في الاختبار أكبر من احتمال نجاح الآخر، ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار، ويقال أن من المؤكد موت الإنسان، ويقال أن من الممكن انتقال المرض من المريض إلى آخر، وللتطرق إلى المفاهيم الأساسية المتعلقة بالاحتمالات فإننا لابد أن نتطرق لكثير من المفاهيم مثل مفهوم التجربة العشوائية والأحداث... إلخ.

1- تعريف التجربة و الحدث العشوائي:

1-1- التجربة و أنواعها:

لابد في البداية من إيضاح مفهوم التجربة بشكل عام والتجربة الاحتمالية بشكل خاص، فتعرف التجربة بشكل عام بأنها كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس، وليس من الضروري أن تكون الملاحظة عددية، وتتعلق نتائج أي تجربة بهذه الدرجة أو تلك بجملة الشروط التي تجرى ضمنها، وبناء على درجة ارتباط نتائج التجربة بجملة من الشروط، فهي تنقسم إلى نوعين: تجربة نظامية وتجربة احتمالية.

أ- التجربة النظامية:

هي كل تجربة يمكن تحديد نتيجتها مسبقا على أساس المسلمات أو القوانين العلمية، انطلاقا من جملة الشروط المعطاة والمرتبطة بالظاهرة، حيث أننا نجد هذا النوع من التجارب في مجال العلوم التقنية (الفيزياء والكيمياء) مثل تفاعل ذرتين من الهيدروجين مع ذرة واحدة من الأكسجين للحصول على الماء.

ب- التجربة الاحتمالية (العشوائية):

هي كل تجربة يمكن تكرارها، أو يمكن فهمها على أنها قابلة للتكرار عددا اختياريا من المرات تحت نفس الشروط، لكن لا نحصل بالضرورة على نفس النتائج عكس التجربة النظامية، فنتائج التجربة الاحتمالية لا يمكن معرفتها مسبقا لأنها تعتمد على عوامل الصدفة والعشوائية مثل رمي قطعة نقد مرة واحدة أو رمي زهرة نرد مرة واحدة. تؤكد نظرية الاحتمالات كأي نظرية على بعض التصورات، نبدؤها بمجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، هذه الأخيرة يطلق عليها بمجموعة الأساس، حيث يرمز لها بالحرف E، كما تعرض على شكل مجموعة رياضية $E = \{...\}$، وعدد عناصرها يرمز له بالرمز: $|E|$.

__مثال:__ نرمي زهرة نرد مرة واحدة.

- حدد E، ثم احسب $|E|$؟

الحل: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$، أما $|E| = 6$

1-2- تعريف وأنواع الحدث العشوائي:

نعرّف أولا الحدث العشوائي ثم نتطرق إلى أنواعه.

أ- تعريف الحدث العشوائي:

الحدث هو مجموعة جزئية من مجموعة الأساس، فهو يتكون من إحدى النتائج الممكنة للتجربة، فبعد التجربة نحكم فيما إذا تحقق أو لم يتحقق هذا الحدث الذي يهتم بإحدى هذه النتائج، ويرمز له بالحروف اللاتينية: (A,B,C...)، ويعرض على شكل مجموعة رياضية $A = \{...\}$، ويرمز لعدد عناصر الحدثA بالرمز $|A|$، أي إذا كان A حدثا ممكنا (أي غير مستحيل) فهو مجموعة جزئية من E، أي: E يحتوي على A.

ب- أنواع الحدث العشوائي:

ينقسم الحدث العشوائي إلى عدة أنواع، هي:

- **الحدث البسيط:**

هو الحدث غير القابل للتجزئة، مثلا نقول أن الحدث 5 هو حدث بسيط عند رمي زهرة نرد، لأن الرقم 5 لا يمكن تقسيمه إلى أحداث أخرى، أي: $A = \{5\}$

- **الحدث المركب**:

هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى أحداث بسيطة، مثلا نقول أن الحدث A عبارة عن ظهور رقم فردي عند رمي زهرة النرد، $A = \{1,3,5\}$، فهذا الحدث له إمكانية تفكيكه إلى ثلاثة أحداث بسيطة مثل: $A = \{1\}$، $A = \{3\}$، $A = \{5\}$.

- **الحدث الأكيد**:

هو الحدث الذي يحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، مثل الحصول على رقم أقل من 7 عند رمي زهرة نرد واحدة، أي A=E.

- **الحدث المستحيل**:

هو الحدث الذي لا يتضمن على أي نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، أي $A = \emptyset$ مثل الحصول على رقم أكبر من 6 عند رمي زهرة نرد مرة واحدة.

- **الحدث العكسي (المتمم، المكمل)**:

ليكن الحدث A حدثا مرتبطا بنتيجة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، فالحدث المتكون من جميع النتائج غير المنتمية للحدث A يطلق عليه بالحدث العكسي، يرمز له بالرمز: $\bar{A}$، ومنه نظهر العلاقات التالية:

$A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = E$

* **الأحداث المتنافية (غير المتلائمة)**

هي الأحداث التي يستحيل حدوثها في آن واحد حيث أن وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر، أو إذا كانا غير متقاطعين أي: $A \cap B = \emptyset$

* **الأحداث غير المتنافية (المتلائمة)**

هي الأحداث التي لا يستحيل وقوعها في آن واحد حيث أن وقوع أحدها لا ينفي وقوع الآخر أو إذا كانا متقاطعين أي: $A \cap B \neq \emptyset$

مثال 2.1: عند رمي زهرة نرد مرة واحدة على الأرض، فإن مجموعة الأساس لهذه التجربة $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- نفترض أن:

A: عبارة عن حدث يمثل ظهور عدد فردي.

B: عبارة عن حدث يمثل ظهور عدد زوجي.

C: عبارة عن حدث يمثل ظهور عدد أولي.

المطلوب:

- حدد نوع الحدثين (A و B)، (A و C) (B و C) مع التعليل؟

الحل:

$$A = \{1,3,5\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$
$$C = \{2,3,5\}$$

نقول عن الحدثين (A و B) أنهما حدثين متنافيين، لأنه لا يمكن أن يكون العدد فرديا وزوجيا في نفس الوقت، وبالتالي يكون $A \cap B = \emptyset$

بينما نقول عن الحدثين (A و C) أنها حدثين غير متنافيين، لأنه يمكن أن يكون العدد فرديا وأوليا في نفس الوقت، وبالتالي يكون $A \cap C \neq \emptyset$ أي $A \cap C \neq \{3,5\}$

في حين عن الحدثين (B و C) أنها حدثان غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجيا وأوليا في نفس الوقت، وبالتالي يكون $B \cap C \neq \emptyset$ أي $B \cap C \neq \{2\}$

*** الأحداث المستقلة (غير المترابطة)**

هي الأحداث التي عندما يقع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الأحداث الأخرى، مثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقد هي أحداث مستقلة لأن نتائج الرمية الأولى لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية والثالثة... إلخ، أو سحب كرة من صندوق مع الإرجاع به n كرة هي أحداث مستقلة لأن السحب القبلي لا يؤثر على السحب الموالي (البعدي).

*** الأحداث غير المستقلة (المترابطة)**

هي الأحداث التي عندما يقع أحدها يؤثر ويتأثر بوقوع الأحداث الأخرى أو وقوع أحدها يكون مشروطا أو مرتبطا بوقوع الأحداث الأخرى، مثلا سحب كرة من صندوق بدون إرجاع به n كرة هي أحداث غير مستقلة لأن السحب القبلي يؤثر على السحب الموالي (البعدي).

2- تعريف الاحتمال:

إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة وقوع حدث معين، لذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس فرصة وقوع هذه الأحداث، فالمقياس الكمي الذي يقيس فرصة وقوع حدث معين يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد، فكلما زادت فرصة وقوع الحدث كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد، وكلما قلّت فرصة وقوع الحدث كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر، فإذا كانت لدينا تجربة عشوائية وكانت مجموعة الأساس E تحتوي على عدد من الإمكانيات أو النتائج يرمز لها بالرمز N، وكان الحدث A يحتوي على n من الإمكانيات، ومنه لكي تتحقق النتيجة التي تهمنا المتعلقة بالحدث A تسمى احتمال تحقق الحدث

العشوائي A ويرمز له بالرمز: P(A)، هذا الأخير يمثل نسبة حظوظ تحقق الحدث العشوائي A والذي يساوي حاصل قسمة عدد عناصر الحدث A على عدد عناصر E، ومنه يمكن التعبير عن ذلك بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحدث } A}{\text{عدد الحالات الممكنة (الإجمالية)}} = \frac{n}{N} = \frac{|A|}{|E|}$$

ومنه كقاعدة عامة فإذا افترضنا أنه لكل حدث A من المجموعة E توجد قيمة P(A) تعبر عن احتمال الحدث A فلابد من تحقق البديهية التالية: $0 \leq P(A) \leq 1$

- إذا كان: A حدث أكيد $\Longrightarrow A = E \Longrightarrow P(A) = 1$
- إذا كان: A حدث مستحيل $\Longrightarrow A = \emptyset \Longrightarrow P(A) = 0$
- إذا كان: A حدث ممكن $0 < P(A) < 1$

ملاحظة: كثيرا ما يتم الخلط بين مفهوم الحدث والاحتمال لارتباطهما ببعض البعض، فالحدث العشوائي هو واقعية أو نتيجة ما، أما الاحتمال فهو عدد بين الصفر والواحد يعبّر عن حظوظ وقوع الحدث (ليس شرطا أن يكون زمن وقوع الحدث هو المستقبل، فقد يكون الماضي أو الحاضر).

3- خواص حساب الاحتمالات:

تتمثل خواص حساب الاحتمالات في تحديد العلاقة بين الاحتمال الكلاسيكي والاحتمال التجريبي، وتبيين كلا من القواعد العامة والمبادئ الأساسية لحسابه، بالإضافة إلى توضيح الفرق بين حساب كل من الاحتمال الكلي والاحتمال السببي.

3-1- الاحتمال الكلاسيكي والاحتمال التجريبي:

سنتطرق أولا إلى الاحتمال الكلاسيكي، ثم إلى الاحتمال التجريبي، وأخيرا إلى العلاقة بين الاحتمال الكلاسيكي والاحتمال التجريبي.

أ- الاحتمال الكلاسيكي (النظري، التقليدي):

الاحتمال الكلاسيكي يدعى أيضا بالاحتمال النظري، فهو ذلك الاحتمال القائم على فرضية تتمثل في تكرار التجربة العشوائية ما نهاية مرة (∞)، فهذا الاحتمال يأخذ قيمة ثابتة، مثلا لو نرمي قطعة نقد ما لا نهاية مرة فإن احتمال ظهور صورة (F) أو ظهور كتابة (P) هو 0.5.

ب- الاحتمال التجريبي (النسبي):

الاحتمال التجريبي مبني على فكرة التكرار النسبي أي هو ذلك الاحتمال القائم على فرضية تتمثل في تكرار التجربة العمومية n مرة، ثم تسجل النتائج (X)، ثم يتم حساب النسبة $F_n = \frac{x}{n}$، فهذا الاحتمال يأخذ قيمة

متغيرة، مثلا نفترض أننا قمنا برمي زهرة النرد 500 مرة، وكان الرقم 2 ظهر 200 مرة، فإن التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي هو النسبة بين عدد مرات ظهور الرقم 2 والعدد الكلي لمرات رمي زهرة النرد، أي:

$$f_n = \frac{x}{n} = \frac{200}{500} = 0.4$$

ج- العلاقة بين الاحتمال الكلاسيكي والاحتمال التجريبي:

لقد لاحظ علماء الإحصاء من خلال تجارب عملية أنه كلما كان n في الاحتمال التجريبي كبيرا جدا، فإن الاحتمال التجريبي n يتقرب من نهاية ثابتة وهي الاحتمال النظري P(A)، نعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{n} \rightarrow P(A) = \frac{x}{n}$$

مثال:

عند الاطلاع على سجلات أحد مستشفيات التوليد، وجدنا عدد المواليد كان موضحا في الجدول التالي، هذا الأخير يبين العلاقة بين عدد الذكور والاحتمال التجريبي:

الاحتمال التجريبي (f_n)	**عدد الذكور (n)**	**عدد المواليد (X)**
$\frac{8}{20} = 0.4$	8	20
$\frac{48}{100} = 0.48$	48	100
$\frac{101}{200} = 0.505$	101	200
$\frac{152}{300} = 0.507$	152	300
$\frac{205}{400} = 0.513$	205	400
$\frac{254}{500} = 0.508$	254	500
$\frac{403}{800} = 0.504$	403	800

من خلال هذا الجدول يتبين لنا أنه كلما زادت (n) فإن (f_n) يختلف اختلافا بسيطا حتى يستقر إلى عدد محدود (قيمة قريبة من 0.50).

3-2- قواعد حساب الاحتمالات:

تنقسم قواعد حساب الاحتمالات إلى عمليات أو قواعد الجمع التي تطبق على الأحداث المتنافية وغير المتنافية، وعمليات أو قواعد الضرب التي تطبق على الأحداث المستقلة وغير المستقلة، ونشير إلى قاعدة عامة في نظرية الاحتمالات، تتمثل هذه الأخيرة في أن الرمز $\cup$ يقرأ اتحاد ويكون في محل "أو" أي يتم حسابه عن طريق الجمع "+"، بينما الرمز $\cap$ يقرأ تقاطع ويكون في محل "و"، أي يتم حسابه عن طريق الضرب "×".

أ- قاعدة جمع الأحداث المتنافية:

إن احتمال وقوع حدث A أو حدث B يساوي جمع احتمالي الحدثين، أي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

* حالة خاصة: إذا كان لدينا ثلاث أحداث متنافية A, B,C، فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

إذن يمكن تعميم هذه الحالة، حيث تكون صحيحة عند وجود عدد غير منتهي

من الأحداث المتتابعة $_1, A_2, \dots, A_n$ والمتنافية مثنى مثنى، أي:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

مثال:

عند رمي زهرة نرد مرة واحدة على الأرض، فما هو احتمال الحصول على الرقم 3 أو 5؟

الحل: لدينا $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

وعليه: $P(3 \cup 5) = P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

ب- قاعدة جمع الأحداث غير المتنافية:

إن احتمال وقوع الحدث A أو الحدث B يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا، أي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

كما أن احتمال وقوع الحدث A وعدم وقوع الحدث B يساوي احتمال الحدث A مطروحا منه احتمال تحققهما معا، أي:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

* **حالة خاصة:** إذا كان لدينا ثلاثة أحداث غير متنافية مثنى مثنى، C،B،A، فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + -P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C\ )$$

مثال:

عند رمي زهرة نرد مرة واحدة على الأرض، فإن مجموعة الأساس لهذه التجربة هي: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- نفترض أن:

A: عبارة عن حدث يمثل حدوث ظهور عدد فردي.

B: عبارة عن حدث يمثل ظهور عدد زوجي.

C: عبارة عن حدث يمثل ظهور عدد أولي.

المطلوب:

أحسب الاحتمالات التالية: $P(A \cap B)$، $P(A \cap C)$، $P(B \cap C)$؟

الحل:

$$A = \{1,3,5\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$
$$C = \{2,3,5\}$$
$$(A \cap B) = \emptyset$$
$$(A \cap C) = \{3,5\}$$
$$(B \cap C) = \{2\}$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{3}{6}$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{3}{6}$$
$$P(C) = \frac{|C|}{|E|} = \frac{3}{6}$$
$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|E|} = 0$$
$$P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|E|} = \frac{2}{6}$$

$$P(B \cap C) = \frac{|B \cap C|}{|E|} = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - 0 = 1$$
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ج- قاعدة ضرب الأحداث المستقلة:

إن احتمال وقوع حدثين مستقلين أو أكثر معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع كل واحد من هذه الأحداث ببعضها البعض.

- فإذا كان لدينا حدثان مستقلان A و B، فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال:

نرمي قطعة نقد مرتين متتاليتين، فإذا كان A عبارة عن حدث يمثل الحصول على صورة عند الرمية الأولى كان B عبارة عن حدث يمثل الحصول على صورة عند الرمية الثانية.

المطلوب:

- ما هو احتمال الحصول على النتيجة صورة؟

الحل:

نتائج رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين هي أحداث مستقلة لأن نتائج رمي قطعة نقد عند الرمية الأولى لا تؤثر على نتائج رمي قطعة نقد عند الرمية الثانية، فإن احتمال الحصول على النتيجة صورة هو:

$$P(F) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- أما إذا كان لدينا ثلاثة أحداث مستقلة A، B، C، فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

مثال:

يختار بشكل عشوائي 3 عبوات أدوية من إنتاج أحد المصانع وبعد معاينة محتوياتها تبين أن هناك عبوات معيبة.

- أحسب احتمال أن تكون العبوات الثلاثة معيبة؟

الحل:

- يرمز للحدث A بأنه العبوة الأولى للدواء.
- يرمز للحدث B بأنه العبوة الثانية للدواء.
- يرمز للحدث C بأنه العبوة الثالثة للدواء.
- يرمز للحدث D بأنه العبوة المعيبة.

$$P(D) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

- وعليه يمكن تعميم مفهوم استقلالية الأحداث على أكثر من حدثين شريطة أن يكون استقلالها محققا مثنى مثنى وعندها يكون:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

د- قاعدة ضرب الأحداث غير المستقلة:

- إذا كان لدينا حدثين غير مستقلين A و B، فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

وتقرأ كالآتي: "احتمال وقوع كل من الحدثين A و B يساوي احتمال وقوع الحدث A مضروبا في احتمال وقوع الحدث B علما أن الحدث A قد تحقق فعلا".

* إن $P(B/A)$ يعبر عن الاحتمال الشرطي للحدث B، وفي هذا الصدد نعطي تعريفا للاحتمال الشرطي.

4- تعريف الاحتمال الشرطي:

إذا كان الحدثان A، $B \subset E$، وكان وقوع الحدث B يتوقف على وقوع الحدث A، فإن احتمال وقوع الحدث B المشروط (المرتبط) بوقوع الحدث A يدعى بالاحتمال الشرطي، ويرمز له بالرمز $P(B/A)$ أو $P_A(B)$، حيث يقرأ احتمال وقوع الحدث B علما (بشرط) أن الحدث A قد تحقق فعلا، ويتم حساب $P(B/A)$ وفق المعادلة التالية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; P(A) \neq 0$$

وعليه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

وإذا كان وقوع الحدث A يتوقف على وقوع الحدث B، فإن احتمال وقوع الحدث A المشروط (المرتبط) بوقوع الحدث B يدعى بالاحتمال الشرطي ويرمز له بالرمز $P(A/B)$ أو $_B(A)$ ، حيث يقرأ احتمال وقوع الحدث A علما (بشرط) أن الحدث B قد تحقق فعلا، ويتم حساب $P(A/B)$ وفق المعادلة التالية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) \neq 0$$

وعليه: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$

- أما إذا كان لدينا ثلاثة أحداث غير مستقلة A، B، C، فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

مثال:

صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء، سحبت منه 3 كرات بدون إعادة على التوالي.

- ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاثة كلها بيضاء؟

الحل:

- ليكن A هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الأول.

- ليكن B هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني.

- ليكن C هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الثالث.

إذن: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{504} = 0.24$

- وعليه يمكن تعميم مفهوم عدم استقلالية الأحداث على أكثر من حدثين شريطة أن يكون عدم استقلالها محققا مثنى مثنى، وعندها يكون:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times \ \dots \ \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

مثال:

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء، سحبت منه 7 كرات بدون إعادة وعلى التوالي.

- ما هو احتمال أن تكون الكرات السبعة كلها بيضاء؟

الحل:

- ليكن A_1 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الأول.

- ليكن A_2 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني.

- ليكن A_3 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الثالث.

- ليكن A_4 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الرابع.

- ليكن A_5 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب الخامس.

- ليكن A_6 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب السادس.

- ليكن A_7 هو حدث يمثل الحصول على كرة بيضاء في السحب السابع.

إذن:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times \ \dots \ \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}$$

أي:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7) \\ &= P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times \ \dots \ \times P(A_7/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_6 \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{5040}{604800} = 0.0083 \end{aligned}$$

مثال:

أجرى طالب بعد تخرجه مسابقتين A و B، فإذا كان احتمال أن ينجح في المسابقة A هو 0.6 واحتمال أن ينجح في المسابقة B هو 0.3، و احتمال أن ينجح في المسابقتين معا هو 0.1.

المطلوب:

1- ما هي العلاقة التي تربط الحدثين A و B مع التعليل؟

2- ما هو احتمال أن ينجح في المسابقة A أو B؟

3- ما هو احتمال أن ينجح في المسابقة A فقط؟

4- علما أن هذا الطالب نجح في المسابقة A، ما هو احتمال نجاحه في المسابقة B؟

5- علما أن هذا الطالب نجح في المسابقة B، ما هو احتمال نجاحه في المسابقة A؟

الحل:

1- نوع الحدثين A و B مع التعليل: الحدثان غير متنافيين لأن تحقق الحدث A لا يمنع تحقق الحدث B في نفس الوقت أي $A \cap B \neq \emptyset$

2- احتمال أن ينجح في المسابقة A أو B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 01 = 0.8$$

3- احتمال أن ينجح في المسابقة A فقط:

إن احتمال أن ينجح في المسابقة A فقط يعني النجاح في المسابقة A والرسوب في المسابقة B أي:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 01 = 0.5$$

4- علما أن هذا الطالب نجح في المسابقة A، احتمال نجاحه في المسابقة B:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(0.1)}{(0.6)} = 0.167$$

5- علما أن هذا الطالب نجح في المسابقة B، احتمال نجاحه في المسابقة A:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(0.1)}{(0.3)} = 0.33$$

- **قواعد أساسية لحساب الاحتمالات:**

يمكن ذكر بعض المبادئ الأساسية لحساب الاحتمالات كالآتي:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$
$$P(A \cup B) = P(B \cup A)$$
$$[P(A \cap (B \cup C)] = [P(A \cap B) \cup P(A \cap C)]$$

$$[P(A \cup (B \cap C)] = [P(A \cup B) \cap P(A \cup C)]$$
$$[P(A \cup B) \cap C)] = [P(A \cap C) \cup P(B \cap C)]$$
$$[P(A \cup (B \cup C)] = [P(A \cup B) \cup P(C)] = P(A \cup B \cup C)$$
$$[P(A \cap (B \cap C)] = [P(A \cap B) \cap P(C)] = P(A \cap B \cap C)$$
$$[P(A \cap (B \cap A)] = P(A \cap B)$$

- إذا كان لدينا A و B حدثان متنافيان ومكملان بالنسبة لـ E، فإن:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$$
$$P(A \cap \bar{A}) = P(\emptyset) = 0$$

وينتج عن ذلك:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\bar{\bar{A}}) = P(A)$$

- إذا كان لدينا حدثان A و B، فإن:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

أي: $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$، فهي تمثل إحدى بديهيات دو مرقان.

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

أي: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ فهي تمثل إحدى بديهيات دو مرقان.

$$P(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}) = P(A \cup B)$$

أي: $P(A \cup B) = P(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = P(A \cap B)$$

أي : $P(A \cap B) = P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$

- إذا كان لدينا حدثين مستقلين A و B، فإن:

$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(B)$$

وينتج عن ذلك أن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(A) \times P(B)$$
$$P(B \cap A) = P(B) \times P(A/B) = P(B) \times P(A)$$

- إذا كان لدينا حدثين مستقلين A و B فإن أيضا $\bar{A}$ و $\bar{B}$ حدثيان مستقلان، A و $\bar{B}$ حدثان مستقلان أيضا، $\bar{A}$ و B حدثان مستقلان أيضا.

- إذا كان لدينا حدثين A و B متنافيين فهذا لا يعني بالضرورة أن $\bar{A}$ و $\bar{B}$ حدثين متنافيين أيضا.

- إذا كان لدينا حدثين A و B متنافيين فهذا يعني بالضرورة أن A و B حدثين مستقلين A و B لأن:

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A) \times (P\,B/A) = 0 \Rightarrow P(B/A) = 0$$

- إذا كان لدينا ثلاثة أحداث A، B، C مستقلة بصفة مجتمعة فإن:

$$\begin{Bmatrix} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ \text{و} \\ P(A \cap C) = P(A) \times P(B) \\ \text{و} \\ P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \\ \text{و} \\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) \end{Bmatrix}$$

- إذا كان لدينا ثلاثة أحداث A، B، C مستقلة مثنى مثنى فإن:

$$\begin{Bmatrix} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ \text{و} \\ P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \\ \text{و} \\ P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \end{Bmatrix}$$

- إذا كان لدينا ثلاثة أحداث A، B، C مستقلة بصفة مجتمعة، فهذا يعني أنها مستقلة مثنى مثنى والعكس غير صحيح، أي إذا كانت هذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى، فهذا لا يعني أنها مستقلة بصفة مجتمعة.

- إذا كان لدينا حدثين مستقلين A و B، A و C حدثين مستقلين أيضا، B و C حدثين متنافيين، فإن الحدثين A و $(B \cup)$ مستقلين أيضا، ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي:

$$\begin{Bmatrix} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ \text{و} \\ P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \Rightarrow P(A \cap (B \cup C) = P(A) \times (P(B \cup C) \\ \text{و} \\ P(B \cap C) = 0 \end{Bmatrix}$$

5- الاحتمال الكلي والاحتمال السببي(نظرية بايز):

سنتطرق أولا إلى الاحتمال الكلي ثم إلى الاحتمال السببي.

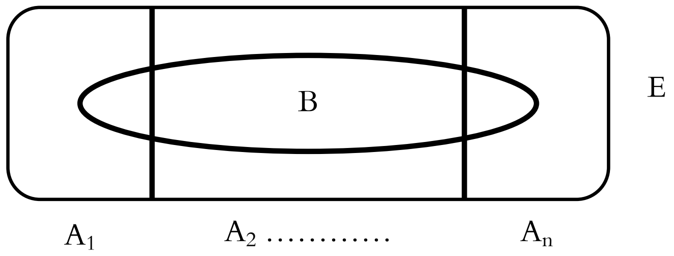
5-1- نظرية الاحتمال الكلي:

يعرف الاحتمال الكلي بأنه لا يتحقق الحدث B إلا بتحقق الأحداث المتنافية $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ والتي تشكل تجزئة لمجموعة الأساس E وتحقق الشروط الثلاثة (حسب بديهية كالماغوروف):

$$\begin{Bmatrix} P(A_i) \geq 0 \\ (A_i \cap A_j) = \emptyset \\ (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = E \end{Bmatrix}$$

ويمكن تلخيص هذا الاحتمال الكلي في الشكل التالي:

الشكل رقم 01: قاعدة الاحتمال الكلي



فحسب قاعدة جمع الاحتمالات نجد أن:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

أي: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$

وباستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات على المقدار $\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$ نجد أن:

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \times P(B/A_n)$$

وعليه يعبر عن الاحتمال الكلي حسب القانون التالي: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(\quad_i).P(B/A_n)$

مثال :

إذا كان 10% من المدخنين في مدينة سطيف يفضلون نوعا معينا من السجائر A والبقية منهم يفضلون النوع B، وتشير الإحصائيات أن الفئة المدخنة هي فئة الشباب وفئة الكهول فقط، حيث فئة الشباب تمثل 15% من الذين يفضلون النوع A و10% من فئة الكهول تستهلك النوع B، نختار عشوائيا أحد المدخنين.

1. ما هو احتمال أن يكون من فئة الشباب علما أنه من الذين يفضلون النوع B؟
2. ما هو احتمال أن يكون من فئة الشباب؟
3. ما هو احتمال أن يكون من فئة الكهول؟

الحل:

ملاحظة هامة: تسهيلا لحل مسائل الاحتمالات خاصة المعقدة منها، بحيث تكون المسألة العشوائية مشكلة من سلسلة من التجارب الجزئية، مثلا اختيار عشوائي لصندوق من بين 3 صناديق، ثم سحب كرة عشوائيا من الصندوق

الذي نحصل عليه في المرحلة الأولى، نلجأ إلى ترجمة المسألة الاحتمالية إلى شجرة احتمالية تحمل كل الأحداث الممكنة، وكذا احتمالات كل حدث في كل مرحلة.

نقوم أولا رسم الشجرة الاحتمالية، حيث نرمز إلى:

A: المدخنين في مدينة سطيف يفضلون النوع الأول من السجائر.

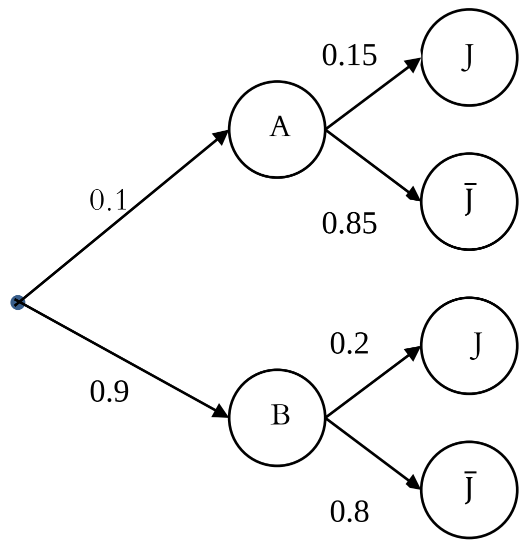
B: المدخنين في مدينة سطيف يفضلون النوع الثاني من السجائر.

J: المدخنين من فئة الشباب.

$\bar{J}$: المدخنين من فئة الكهول.

1- احتمال أن يكون من فئة الشباب علما أنه من الذين يفضلون النوع B:

من خلال الشجرة الاحتمالية يتبين لنا أن: $P(B \cap J) = P(B).P\left(\frac{J}{B}\right) = (0.9 \times 0.2) = 0.15$



2- احتمال أن يكون المدخن من فئة الشباب:

$$P(J) = P[(A \cap J) \cup (B \cap J)]$$
$$P(J) = P(A \cap J) \cup P(B \cap J)$$
$$P(J) = [P(A).P(J/A)] + [P(B).P(J/B)]$$
$$P(J) = (0.1 \times 0.15) + (0.9 \times 0.2) = 0.015 + 0.18 = 0.195$$

3- احتمال أن يكون المدخن من فئة الكهول:

الطريقة الأولى:

$$P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - 0.195 = 0.805$$

الطريقة الثانية:

$$P(\bar{J}) = P[(A \cap \bar{J}) \cup (B \cap \bar{J})]$$
$$P(\bar{J}) = P(A \cap \bar{J}) \cup P(B \cap \bar{J})$$
$$P(\bar{J}) = [P(A).P(\bar{J}/A)] + [P(B).P(\bar{J}/B)]$$
$$P(\bar{J}) = (0.1 \times 0.85) + (0.9 \times 0.8) = 0.085 + 0.72 = 0.805$$

2-5- الاحتمال السببي (نظرية بايز):

هذه النظرية تعتبر من أهم مبرهنات نظرية الاحتمالات، حيث تسمى هذه النظرية أيضا بنظرية الاحتمال السبي لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما هو المسبب لوقوع حدث آخر، أي هي تهتم بكيفية حساب الاحتمال الشرطي للأحداث المتنافية التي تشكل مجموعة كلية ومرافقة للحدث المراد حسابه، فرضا أنه لدينا الأحداث المتنافية $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ والتي مجموعها يشكل مجموعة الأساس (فراغ العينة) E، وأن $P(A_i) > 0$، فمن أجل الحدث B، حيث أن $P(B) > 0$ يكون لدينا:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

أي:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

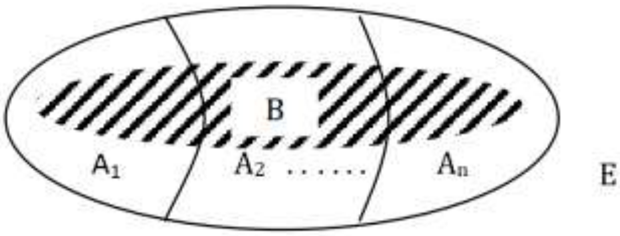
$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P(A_n/B) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_n).P(B/A_n)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

ويمكن تلخيص هذا الاحتمال (السببي) في الشكل التالي:

الشكل رقم 02: قاعدة الاحتمال السببي (نظرية بايز)



ملاحظة: يمكن تعميم نظرية بايز، حيث إذا كان لدينا $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ أحداث عشوائية تنتمي إلى E، وكلها متكاملة بالنسبة إليها، وكان لدينا حدث عشوائي B مرتبط بـ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$، فإن:

$$P(A_1/B) + P(A_2/B) + \cdots + P(A_n/B) = 1$$

- نفس المثال السابق المتعلق بالمدخنين الذي يفضلون السجائر من النوع A والسجائر من النوع B.

علما أن هذا المدخن من فئة الشباب، ما هو احتمال أن يكون:

أ- من الذين يفضلون النوع A؟ ب- من الذين يفضلون النوع B؟

أ- علما أنه من فئة الشباب، احتمال أن يكون المدخن من الذين يفضلون النوع A:

$$P(A/J) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)} = \frac{P(A).P(J/A)}{P(A).P(J/A) + P(B).P(J/B)}$$

$$= \frac{(0.1\times0.15)}{(0.1\times0.15)+(0.9\times0.2)} = \frac{(0.015)}{(0.195)} = 0.0769 \approx 0.08$$

ب- علما أنه من فئة الشباب، احتمال أن يكون المدخن من الذين يفضلون النوع B:

$$P(B/J) = \frac{P(B \cap J)}{P(J)} = \frac{P(B).P(J/B)}{P(A).P(J/A) + P(B).P(J/B)}$$

$$= \frac{(0.9\times0.2)}{(0.1\times0.15)+(0.9\times0.2)} = \frac{(0.18)}{(0.195)} \approx 0.32 = 0.9232$$

تمارين المحور الثاني

التمرين 01:

يحتوي صندوق على 12 كرة منها 5 بيضاء و 3 حمراء و 4 زرقاء، نقوم بسحب ثلاث كرات في آن واحد.

أحسب:

1. احتمال أن تكون كل الكرات المسحوبة حمراء؟.
2. احتمال أن تكون كرتان حمراء وواحدة بيضاء؟.
3. احتمال أن تكون كرتان بيضاء والأخرى من لون آخر ؟.
4. احتمال أن تكون على الأقل واحدة بيضاء؟.
5. احتمال أن تكون كل كرة من الألوان الثلاث؟.
6. إذا كان سحب الكرات الواحدة تلو الأخرى **الحالة الأولى:** بدون إرجاع و **الحالة الثانية** : بالإرجاع ، أحسب في كلا الحالتين احتمال الحصول على :

أ- كرية بيضاء ثم حمراء ثم زرقاء. ب- 03 كريات بيضاء ج- كرية بيضاء واحدة

حل التمرين 01:

1) احتمال الكرية المسحوبة حمراء

عدد الحالات الكلية C_{12}^{3}

$$P(A)=\frac{C_3^3.C_9^0}{C_{12}^3}$$

2) احتمال الحصول على كرتين حمراء وواحدة بيضاء:

الحدث B: $P(B)=\frac{C_3^2.C_5^1.C_4^0}{C_{12}^3}$

3) الحصول على كرتين بيضاء والأخرى من لون آخر:

$$P(C)=\frac{C_5^2.C_3^1.C_4^0+\ C_5^2.C_4^1.C_3^0}{C_{12}^3}$$

4) الحصول على كرية بيضاء على الأقل:

$$P(D)=\frac{C_5^1.C_7^2+\ C_5^2.C_7^1+\ C_5^3.C_7^0}{C_{12}^3}$$

5) الحصول على كرة من كل لون:

$$P(E)=\frac{C_5^1.C_3^1.C_4^1}{C_{12}^3}$$

II / السحب الواحد تلوى الأخرى:

• **الحالة الأولى**: بدون إرجاع ⇦ (ترتيبة بدون تكرار)

أ/ كرية بيضاء ثم حمراء ثم زرقاء:

$$P(A)=\frac{A_5^1.A_3^1.A_4^1}{A_{12}^3}$$

ب/ الحصول على ثلاثة كريات بيضاء:

$$P(B)=\frac{A_5^1.A_4^1.A_3^1}{A_{12}^3}$$

ج/ الحصول على كرية بيضاء واحدة:

$$P(C)=\left(\frac{A_5^1.A_7^1.A_6^1}{A_{12}^3}\right)\times 3$$

الحالة الثانية: الواحدة تلوى الأخرى وبالإرجاع (ترتيبة بالتكرار)

• عدد الحالات الكلية $\tilde{A}_{12}^3$

أ) كرية بيضاء ثم حمراء ثم زرقاء:

$$P(A)=\frac{\tilde{A}_5^1.\tilde{A}_3^1.\tilde{A}_4^1}{\tilde{A}_{12}^3}=\frac{5^1.3^1.4^1}{12^3}$$

ب) ثلاث كريات بيضاء:

$$P(B)=\frac{\tilde{A}_5^1.\tilde{A}_5^1.\tilde{A}_5^1}{\tilde{A}_{12}^3}=\frac{5^3}{12^3}$$

ج) كرية بيضاء واحدة:

$$P(C)=\left(\frac{\tilde{A}_5^1.\tilde{A}_7^1.\tilde{A}_7^1}{\tilde{A}_{12}^3}\right)\times 3=\left(\frac{5^1.7^2}{12^3}\right)\times 3$$

تمرين2:

قام ثلاث جنود قناصين بإطلاق النار على هدف معين، إذا علمت أن الحادث A_i هو إصابة الهدف من طرف الجندي i وأن احتمال إصابة الهدف من طرف الجندي الأول هو P(A1)=0.6 ، والجندي الثاني هو P(A2)=0.7 ، والجندي الثالث هو P(A3)=0.5 . المطلوب:

1. ما هو احتمال إصابة الهدف بطلقة واحدة؟.
2. ما هو احتمال إصابة الهدف بطلقتين؟.
3. ما هو احتمال عدم إصابة الهدف؟.

حل التمرين 02:

$$P(A_1) = 0.6 \quad P(A_2) = 0.7 \quad P(A_3) = 0.5$$

1) الحادث B هو إصابة الهدف بطلقة واحدة، وبالتالي فالهدف يمكن إصابته من طرف الجندي الأول أو الثاني أو الثالث:

$$P(B) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$

وبما أن الحوادث مستقلة مثنى مثنى:

$$\Rightarrow P(B) = [P(A_1).P(\bar{A}_2).P(\bar{A}_3)] + [P(\bar{A}_1) + P(A_2) + P(\bar{A}_3)] + [P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(A_3)]$$

$$\Rightarrow P(B) = (0{,}6.0{,}3.0{,}5) + (0{,}4.0{,}7.0{,}5) + (0{,}4.0{,}3.0{,}0.5)$$

$$\Rightarrow \mathrm{P(B)} = 0.29$$

2) الحدث C هو إصابة الهدف بطلقتين:

$$P(C) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\Longrightarrow\ [P(A_1).P(A_2).P(A_3)] +\ [P(A_1).P(\bar{A}_2).P(A_3)] +\ [P(\bar{A}_1).P(A_2).P(A_3)]$$

$$\Rightarrow P(C) =\ [0{,}6.0{,}7.0{,}5] +\ [0{,}6.0{,}3.0{,}5] +\ [0{,}4.0{,}7.0{,}5]$$

$$\Rightarrow P(C) =\ 0{,}44$$

3/ ليكن الحادث E هو عدم إصابة الهدف:

$$P(E) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$$
$$\Rightarrow P(E) = P(\bar{A}_1).P(\bar{A}_2).P(\bar{A}_3)$$
$$\Rightarrow P(E) = 0{,}4.0{,}3.0{,}5$$
$$\Rightarrow P(E) = 0{,}06$$

التمرين 3:

عند الإعلان عن نتائج السنة الجامعية وجد أنه في كل 100 طالب يوجد 20 طالب راسب .فإذا اخترنا طالبين بطريقة عشوائية من مجموعة ما.

1-ما هو احتمال أن يكون الطالب الأول راسب؟.

2-ما هو احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب؟.

3-ما هو احتمال أن يكون كلاهما راسبين؟.

حل التمرين 03:

1) الحادث A هو أن الطالب الأول راسب:

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0,2$$

2) الحادث B هو الطالب الثاني راسب بشرط أن الطالب الأول راسب (يبقى 19 طالبا راسبا من بين 99 طالبا)

$$\left.\begin{matrix} \text{طالب } 100 & \to A & \to B \\ & \dfrac{20}{100} & \dfrac{19}{99} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(B/A) = \frac{19}{99} = 0,19$$

3) احتمال أن يكون كلاهما راسبا:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$\Longrightarrow P(A \cap B) = 0,2.0,192 = 0,384$$

التمرين 04: في مدينة معينة نسبة المصابين بمرض(M) هي 10 % و نسبة الذين يمارسون الرياضة (S) هي 45 % ، من بين المصابين بالمرض 15 % يمارسون الرياضة.

- من بين الذين يمارسون الرياضة ، ما هي نسبة المصابين بالمرض (M).

حل التمرين 04:

$$P(M) = 10\% \quad P(S) = 45\% \quad P(S/M) = 15\%$$

المطلوب هو: $P(M/S) = ?$

$$P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}$$

لإيجاد : $P(M/S)$

$$P(M \cap S) = P(S/M).P(M)$$
$$\Longrightarrow 0,15.0,1 = 0,015$$

ومنه:

$$P(M/S) = \frac{0,015}{0,45} = 0.033$$

التمرين 05:

في مكتب للبريد ثلاثة أقسام A . B. C تقوم بتوزيع الخطابات ، نعلم من التجارب السابقة للمكتب أن A يرتكب خطأ واحد في كل مائة خطاب و B يرتكب 05 أخطاء في كل مائة خطاب و C يرتكب 03 أخطاء في كل مائة خطاب . كما نعلم أن القسم A يقوم بتوزيع 25 % من الخطابات و B يقوم بتوزيع 45% منها و يتولى C الباقي منها.

1- ما هي نسبة الأخطاء في خطابات المكتب

2- في حالة حدوث خطأ ، ما هو إحتمال أن يكون B مسؤولا عنه؟

حل التمرين 05:

E هو حادث وقوع الخطأ

$$P(E/A)=\frac{1}{100} \qquad P(E/B)=0{,}05 \qquad P(E/C)=0{,}03$$

$$P(A)=0{,}25 \qquad P(B)=0{,}45 \qquad P(C)=0{,}3$$

1) نسبة الأخطاء في خطابات الكتب (نظرية الاحتمال الكلي)

$$P(E)=P(E/A).P(A)+P(E/B).P(B)+P(E/C).P(C)$$

$$P(E)=0{,}01.0{,}25+0{,}05.0{,}45+0{,}03.0{,}30$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(E)=0{,}034$$

2) احتمال أن يكون B هو المسؤول عن الخطأ (نظرية بايز)

$$P(B/E)=\frac{P(B).P(E/B)}{P(E)}=\frac{0{,}45.0{,}05}{0{,}034}$$

$$P(B/E)=0{,}66$$

المحور الثالث:

المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

- ✓ المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة) **Discrete Random Variables**
- ✓ المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) **Continuous Random Variables**

أولا- المتغيرات العشوائية المنفصلة :

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة. X, Y, Z,... ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، *x, y, z, ...*، ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X، X:{x=0,1,2,3,4} .

2- عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 05 دقائق Y، Y:{y=0,1,2,3,....}.

3- عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.

4- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 500 وحدة كل موسم.

5- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل $\boldsymbol{X}$ يأخذ القيم، $X:\{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$، وكان $P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X = x_i) = f(x_i)$، أي أن:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

$\boldsymbol{X = x_i}$	x_1	x_2	$\vdots$	x_n	$\sum$
$\boldsymbol{f(x_i) = p(X = x_i)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\vdots$	$f(x_n)$	**1**

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الاحتمال، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

$$1-\quad 0<f(x_i)<1$$
$$2-\quad \sum f(x_i)=1$$

مثـال :

إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من المنتوج الجزائري 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من المنتوجات الأخرى 0.40، اشترى أحد العملاء وحدتين.

المطلوب:

1- كون فراغ العينة.

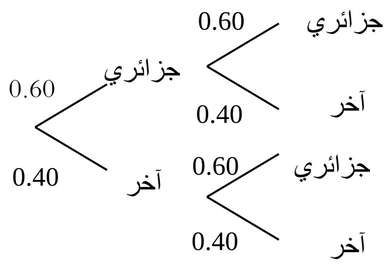
2- إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري ، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X\leq 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\leq 1.5)$
- حدد قيمة الوسيط، والمنوال لعدد الوحدات المشتراة.

الحـل:

1-تكوين فراغ العينة:

التجربة هنا هو شراء وحدتين من المنتجات المعروضة للبيع، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:



	عدد الوحدات $(\mathbf{X})$	$P(X=xi)=f(x)$
(جزائري ، جزائري)	2	0.36
(آخر ، جزائري)	1	0.24
(جزائري ، آخر)	1	0.24
(آخر ، آخر)	0	0.16

- التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري X :

من المعلوم أن العميل اشترى وحدتين ، وأن المتغير العشوائي هو عدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري ، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

x=0 إذا كانت وحدتين من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)

$x=1$ إذا كـان أحـد العبـوتين مـن المنتـوج الجزائـري ، أي إذا كانـت نتيجـة التجربـة (آخـر، جزائـري) أو (جزائري، آخر)

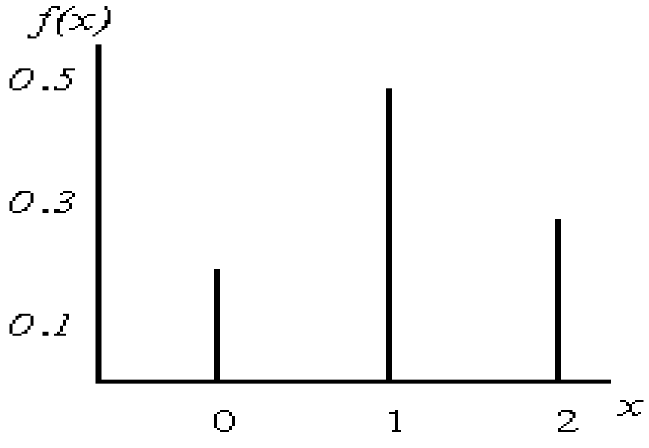
$x=2$ إذا كان العبوتين من النوع الجزائري، أي إذا كانت نتيجة التجربة (جزائري, جزائري)

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري

$X = xi$	$P(X = xi) = f(x)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
$\sum$	1

- رسم دالة الاحتمال ***f(x)***:



- تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي $F(x)$:

التوزيع التجميعي، هو جدول يشمل الاحتمالات الناتجة من حساب الاحتمال $P(X \leq x)$ ، ويرمز له بالرمز $F(x)$ ، أي أن دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{F(xi) = P(X \leq xi)}$$

ومن ثم يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري كما يلي:

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد الوحدات المشتراه من المنتوج الجزائري

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0)=P(X\le 0)=0.16$
1	0.48	$F(1)=P(X\le 1)=0.16+0.48=0.64$
2	0.36	$F(2)=P(X\le 2)=0.64+0.36=1.00$
$\sum$	**1**	

- حساب الاحتمالات:- $P(X=1)$ ، $P(X\le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\le 1.5)$

$$P(X=1)=f(1)=0.48$$
$$P(X\le 1)=F(1)=0.64$$
$$P(X=1.5)=f(1.5)=0$$
$$P(X\le 1.5)=F(1.5)=F(1)=0.64$$

2- الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

أ- يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بالرمز μ (ميو)، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\mu=\sum x_i f(x_i)}$$

ب- وأما التباين ويرمز له بالرمز σ^2 (سيجما)، فيحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2&=\sum (x_i-\mu)^2 f(x_i)\\&=\sum x_i^2 f(x_i)-\mu^2\end{aligned}}$$

مثال :

نفس المثال السابق أحسب ما يلي:

أ- الوسط الحسابي لعدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري.

ب- احسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المشتراة من المنتوج الجزائري.

ت- أوجد معامل الاختلاف النسبي:

الحل

أ- الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الجزائري:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة (8-3)، (8-4) وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: $\sum x_i \ f(x_i)\ ,\ \sum x_i^2 \ f(x_i)$، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu = \sum x_i \ f(x_i) = 1.20$

ب- ولحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \ f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

ت- معامل الاختلاف النسبي هو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

ثانيا – المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغير **X** عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المنزرعة بالأعلاف في المملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من (30-40)، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

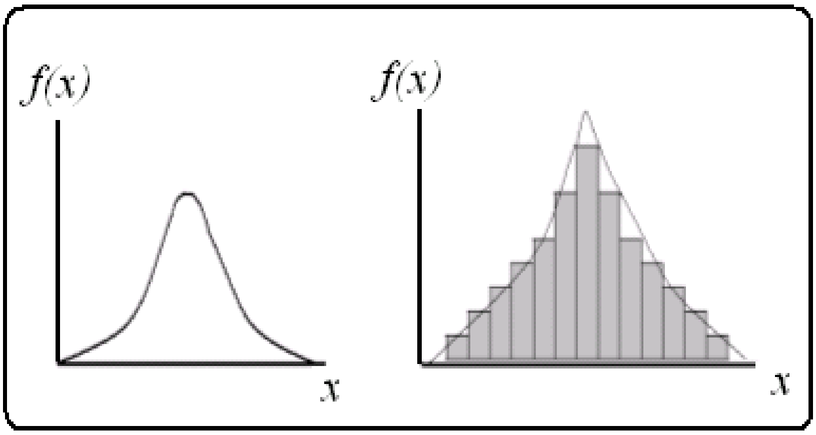
وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر Continuous Probability

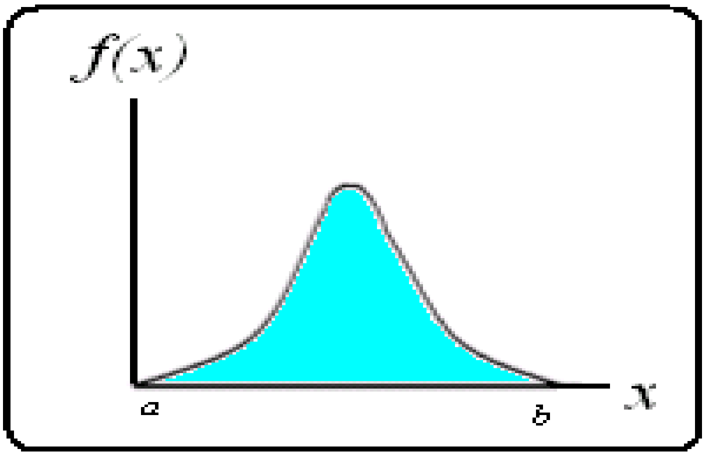
عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو

أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:

منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر



والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة ***f(x)*** بدالة كثافة الاحتمال *(p.d.f)* Probability Distribution Function، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X=\{x:a\leq x\leq b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



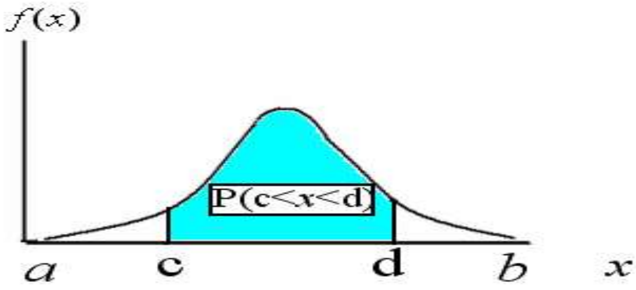
فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

- ✓ الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x)\succ 0$ ، $x\in(a,b)$
- ✓ التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى **a** حتى الحد الأعلى **b** يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح، أي أن:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = 1}$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x=a$ حتى $x=b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b) .

✓ لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c<x<d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x=c$ حتى $x=d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$\boxed{p(c<x<d)=\int^{x=d} f(x)dx=[g(x)]_c^d=g(d)-g(c)}$$

✓ في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x=value)$ مساويا للصفر، أي أن:

$$\boxed{p(x=value)=0}$$

ولكي يمكننا حساب الاحتمالات، يجب عرض بعض قواعد التكامل التالية:

قواعد التكامل

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ and $\int (a+bx)^n dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$ $\int e^x dx=e^x$ and $\int e^{(a+bx)}dx=\frac{1}{b}e^{(a+bx)}$ $\int \frac{1}{x}dx=\log_e(x)$ and $\int \frac{1}{(a+bx)}dx=\frac{1}{b}\log_e(a+bx)$	integration
$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!=n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1$	gamma
$I\Gamma(n+1)=\int_0^a x^n e^{-x}dx=n!\left(1-e^{-a}\sum_{i=0}^{n}\frac{a^i}{i!}\right)$	Incomplete gamma
$B(m+1,n+1)=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$	Beta

مثال :

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف دينار على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{خارج المجال} \end{cases}$$

المطلوب:

1- حساب قيمة الثابت C

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (5- 8) ألف دينار خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 03 آلاف خلال الشهر؟

الحل:

1- حساب قيمة C

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1$$

إذا:

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\ dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x - x^2)\ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100) - \frac{(1000)}{3})\right] - 0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2- حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين (5-8) ألف دينار خلال الشهر هو:

$$p(5 < x < 8) = \int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x)\ dx = 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2 - \frac{8^3}{3}\right) - \left(5(5)^2 - \frac{5^3}{3}\right)\right] = 0.006[(149.3333) - (83.3333)]$$

$$= 0.006(66) = 0.396$$

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 03 آلاف خلال الشهر هو:

$$600\ p(x<3)$$

$$=600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$=3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=3.6[45-9]-0=129.6\approx 130$$

إذن حوالي 130 أسرة.

2- المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر:

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X، $a<x<b$ فإن التوقع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{E(h(x))=\int_a^b h(x)dx}$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\mu=E(x)=\int_a^b xf(x)dx$$

$$\sigma^2=E(x^2)-\mu^2. E(x^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx$$

تابع للمثال السابق:

- أوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري.

<u>الحـل:</u>

1- المتوسط الحسابي

$$\mu=E(x)=xf(x)dx=\int_0^{10}x\big(0.006x(10-x)\big)=0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

إذن متوسط إنفاق الأسرة الشهري **5** آلاف دينار.

2- الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10} (10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$ ، ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\text{var}\,iance} = \sqrt{5} = 2.236$$

3- معامل الاختلاف النسبي

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

تمارين المحور الثالث

التمرين 01:

عدد المكافئات المهنية التي تصرف للعمال في مؤسسة متغير عشوائي توزيعه الإحتمالي هو:

X=xi	0	1	2	3	4	5
P(X=xi)	6k	5k	4k	3k	2k	k

1- عين قيمة الثابث K

2- أحسب إحتمال أن عدد المكافئات لا يزيد عن 04

3- أحسب إحتمال أن عدد المكافئات لا يقل عن 02

4- أحسب إحتمال أن عدد المكافئات يفوق 02 و لا يتجاوز 04

5- أحسب متوسط عدد المكافئات

حل التمرين 01:

1- تعيين قيمة الثابت K:

$$\sum_{i=0}^{n} P(x = x_i) = 1$$
$$\Rightarrow 6k + 5k + 4k + 3k + 2k + k = 1$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{21}$$

ومنه نعرض قيم K في جدول التوزيع الاحتمالي:

$x = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(x = x_i)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

3- حساب احتمال أن عدد المكافئات لا يزيد عن 04:

* الطريقة الأولى:

$$P(x \leq 4) = F(04) = P(x = 0) + P(x = 1) + p(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)$$
$$= \frac{6}{21} + \frac{5}{21} + \frac{4}{21} + \frac{3}{21} + \frac{2}{21}$$
$$P(x \leq 4) = F(04) = \frac{20}{21}$$

* الطريقة الثانية: باستعمال الحدث العكسي:

$$P(x \le 4) = 1 - p(x = 5)$$
$$= 1 - \frac{1}{21}$$
$$P(x \le 4) = \frac{20}{21}$$

3- حساب احتمال أن عدد المكافئات لا يقلّ عن 02:

$$P(x \ge 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - [P(x = 1) + P(x = 0)]$$
$$= 1 - \left[\frac{5}{21} + \frac{6}{21}\right]$$
$$P(x \ge 2) = \frac{10}{21}$$

4- حساب احتمال أن عدد المكافئات يفوق 02 ولا يتجاوز 04:

$$P(2 < x \le 4) = \mathrm{P(x = 3) + P(x = 4)}$$
$$= \frac{3}{21} + \frac{3}{21}$$
$$P(2 < x \le 4) = \frac{5}{21}$$

5- حساب متوسط عدد المكافئات:

$$E(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i\, P(x = x_i)$$
$$= 0\left(\frac{6}{21}\right) + 1\left(\frac{5}{21}\right) + 2\left(\frac{4}{21}\right) + 3\left(\frac{3}{21}\right) + 4\left(\frac{2}{21}\right) + 5\left(\frac{1}{21}\right)$$
$$E(x) = 1{,}76$$

التمرين 02: يشارك طالب جامعي متخرج في ثلاثة مسابقات (A- B- C) للإلتحاق بمنصب عمل

- إذا كان إحتمال النجاح في كل مسابقة على حدى هو على التوالي : 0.2 - 0.3 - 0.1 ، و بفرض أن X هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المسابقات التي ينجح فيها الطالب .

1- أوجد التوزيع الإحتمالي لـ X ؟

2- ما هو إحتمال النجاح في مسابقة واحدة على الأقل ؟

حل التمرين 02:

1- التوزيع الاحتمالي لـ X:

X: عدد المسابقات التي ينجح فيها الطالب إذن x يأخذ القيم: $x \in \{0,1,2,3\}$

- P(A) = 0,2

- P(B) = 0,3

- P(C) = 0,1

$x = x_i$	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	0,504	0,398	0,092	0,006

$$P(x=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = (1-0{,}2).(1-0{,}3).(1-0{,}1)$$
$$= 0{,}504$$
$$P(x=1) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$
$$= (0{,}1.0{,}7.0{,}8) + (0{,}9.0{,}3.0{,}8) + (0{,}9.0{,}7.0{,}2)$$
$$= 0{,}398$$
$$P(x=2) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C)$$
$$= (0{,}1.0{,}3.0{,}8) + (0{,}1.0{,}7.0{,}2) + (0{,}9.0{,}3.0{,}2)$$
$$= 0{,}092$$
$$P(x=3) = P(A \cap B \cap C) = 0{,}2.0{,}3.0{,}1$$
$$= 0{,}006$$

2- حساب احتمال النجاح في مسابقة واحدة على الأقل:

$$P(x \geq 1) = 1 - p(x=0)$$
$$= 1 - 0{,}504$$
$$P(x \geq 1) = 0{,}496$$

التمرين 03: الطلب السنوي على مادة معينة (مليون قنطار) متغير عشوائي كثافة إحتماله هي :

$$f(X) = \begin{cases} K\,X & si \quad 0 \leq x < 2 \\ K\, e^{-\frac{1}{2}x} & si \quad x \geq 2 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1- عين قيمة الثابث K ؟

2- أحسب إحتمال أن يفوق الطلب في سنة ما على المادة 01 مليون قنطار .؟

3- أحسب إحتمال أن يفوق الطلب في سنة واحدة عبى الأقل من بين خمس سنوات على المادة 01 مليون قنطار؟

حل التمرين 03:

1- تعيين قيمة الثابت K:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} Kydx + \int_{2}^{+\infty} Ke^{-\frac{1}{2}}dx = 1$$

$$\Rightarrow 0+\left[\frac{1}{2}Kx^2\right]_0^2+\left[-2ke^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^{+\infty}=1$$

$$\Rightarrow 2k+2ke^{-1}=1 \Rightarrow k[2+2e^{-1}]=1$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{2+2e^{-1}}$$

$$\Rightarrow k=0{,}36$$

2- حساب احتمال أن يفوق الطلب في سنة 01 مليون قنطار:

$$P(x\geq 1)=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^2 kxdx+\int_2^{+\infty}ke^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{+\infty}+k\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^{+\infty}$$

$$P(x\geq 1)=\mathrm{k}\left[2-\frac{1}{2}\right]-k[0-e^{-1}]=0{,}54+0{,}26=0{,}80$$

3- احتمال أن يفوق الطلب في سنة واحدة على الأقل من بين الخمس 01 مليون قنطار:

- عملية حساب احتمال الحدث A مقعدة لذا نستخدم الحدث العكسي ?=P(A).

$\bar{A}$: لا يفوق الطلب في سنة من بين الخمس سنوات 01 مليون قنطار:

$$P(\bar{A})=P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\cap\bar{A}_5)=P(\bar{A}_1).P(\bar{A}_2).P(\bar{A}_3).P(\bar{A}_4).P(\bar{A}_5)$$

إذن من السؤال السابق لدينا: $P(x<1)=1-P(x\geq 1)=1-0{,}80=$ 0,20

$P(\bar{A})=(0{,}2)^5$

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(0{,}2)^5$

$$P(A)=0{,}99$$

التمرين 04: تريد المصلحة التجارية لمؤسسة إعلامية تصدر جريدة أسبوعية معينة القيام بحملة دعائية لإستقطاب منخرطين جدد يطالعون الجريدة و ذلك بتوزيع عدد من الجريدة مجانا على 10000 شخص ، تشير التقديرات أن نسبة المنخرطين الجدد متغير عشوائي توزيعه الإحتمالي هو:

X=xi	20%	25%	30%
P(X=xi)	**0.2**	**0.3**	**0.5**

- إذا كانت تكلفة العملية الدعائية هي 01 دج للنسخة الواحدة من الجريدة و الربح الصافي هو 05 دج عن كل نسخة مباعة ، فما هي الفائدة المتوقعة أسبوعيا جراء هذه الحملة.؟

حل التمرين 04:

$x = x_i$	20%	25%	30%
$P(x = x_i)$	0,2	0,3	0,5

- حساب الفائدة المتوقعة أسبوعيا جراء الحملة الدعائية: E(y)=?

Y: الفائدة المحققة من بيع الجريدة

$Y_1=05.1000x_1-01.1000=0$

$Y_2=05.1000x_2-01.1000=2500$

$Y_3=05 .1000x_3-01.1000=5000$

وبالتالي نحصل على التوزيع الاحتمالي الخاص بالفائدة المحققة:

ومنه:

$y = y_i$	0	2500	5000
$P(y = y_i)$	0,2	0,3	0,5

$$E(y) = \sum_{i=0}^{n} y_i P(y = y_1)$$

$$= 0(0{,}2) + 0{,}3(2500) + 0{,}5(5000)$$

$$E(y) = 3250$$

المحور الرابع:

التوزيعات الإحتمالية

أولا– التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة:

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة.

ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا المقرر، توزيع ثنائي الحدين، والتوزيع البواسون.

1–التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)
- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)
- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم).

شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين

إذا كررت محاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q=1-p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X:\{x=0,1,2,...,n\}$ ، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ بتطبيق المعادلة التالية:

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=C_n^x\, p^x q^{n-x},\qquad x=0,1,2,\dots,n$$

حيث أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n مع إهمال الترتيب، وتحسب كما يلي:

$$\binom{n}{x}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)\dots.3\times2\times1}$$

$$\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35 \;=\; \binom{7}{4}$$
$$\binom{7}{0}=\binom{7}{7}=1$$

مثـال :

إذا كانت نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من الدواء هو 0.60، إذا تناول هذا الدواء 05 مصابين بهذا المرض. إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين المستجيبين (حالات الشفاء) لهذا الدواء.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ت- احسب الاحتمالات التالية:

- ما احتمال استجابة 03 مرضى لهذا الدواء ؟
- ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
- ما هو احتمال استجابة 02 مرضى على الأكثر؟

ث- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

ج-حدد شكل التوزيع.

الحل:

أ- عدد حالات الاستجابة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,4,5\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال:

$q=1-p=0.40 \qquad p=0.60 \qquad n=5$

$$f(x)=\binom{n}{x}(p)^{x}(q)^{n-x}$$
$$=\binom{5}{x}(0.6)^{x}(0.4)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

ت-حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال استجابة **3** مرضى لهذا الدواء:

$P(x=3)=f(3)$

$$f(3)=\binom{5}{3}(0.6)^3(0.4)^{5-3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times0.216\times0.16=10\times0.03456$$
$$=0.3456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:

$$P(x\geq1)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=1-f(0)$$
$$=1-\left[\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5\right]=1-1\times1\times0.01024=0.98976$$

- حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر:

$$P(x\leq2)=f(2)+f(1)+f(0)$$
$$=\binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3+\binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4+\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5$$
$$=\frac{5\times4}{2\times1}(0.36)(0.064)+\frac{5}{1}(0.6)(0.0256)+1(1)(0.01024$$
$$=0.2304+0.0768+0.01024=0.31744$$

ث- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع ثنائي الحدين يحسب بتطبيق المعادلة (8-3)، وباستخدام العمليات الرياضية يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

$$\boxed{\mu=\sum x(fx)=np}$$

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu=np=5(0.60)=3$$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ولحساب التباين في التوزيع ثنائي الحدين يتم تطبيق المعادلة (8-4)، ومنها يمكن التوصل إلى الصورة التالية:

$$\boxed{\sigma^2=npq}$$

- إذا تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$\sigma^2=npq$$
$$=5(0.60)(0.40)=1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة التالية:

$$\sigma=\sqrt{npq}$$
$$=\sqrt{1.2}=1.095$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التالية:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.095}{3} \times 100 = 36.5\%$$

ج- تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح p كما يلي:

إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.

إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.

إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

وحيث أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.

2- التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات سقي نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- عدد مرات تناول الأسرة لسلعة ما خلال الأسبوع. $X : \{x = 0,1,2,...\}$

- **شكل التوزيع الاحتمالي البواسوني:**

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو μ، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير العشوائي X هو: $X : \{x = 0,1,2,...\}$، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \, , x = 1,2,...}$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e = 2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة باتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين:

مثلا إيجاد $e^{-1.5}$

مثال :

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 03 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير العشوائي؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ح- احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك 03 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

خ- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة؟

د- حدد شكل التوزيع.

الحل:

أ- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,\ldots\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu=3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$=\frac{e^{-3}3^{x}}{x!}\quad,\quad x=0,1,2,\ldots$$

ح- حساب الاحتمالات:

-حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، f(2)

$$f(2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=\frac{0.0498(9)}{2\times1}=0.22404$$

-احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:

$$P(X\geq1)=f(1)+f(2)+\ldots.$$

$$=1-f(0)=1-\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=\frac{0.0498}{1}=1-0.0498=0.9502$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 03 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$

$$= 0.0498\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

خ- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع بواسوني هو معلمة معطاة هي:

$$\mu = 3$$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي:

أي أن: $\sigma^2 = \mu = 3$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها في الفصل السابق، وهو:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

د- تحديد شكل التوزيع:

دائما التوزيع البواسون موجب الالتواء.

ثانيا- التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

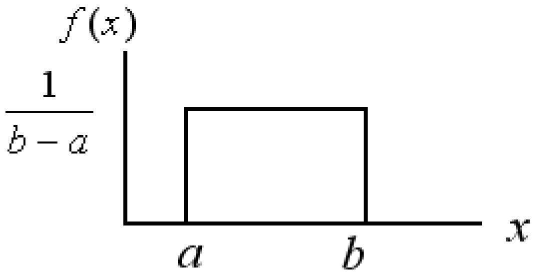
1-التوزيع المنتظم Uniform distribution

*** شكل دالة كثافة الاحتمال:**

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم Uniform، مداه هو $a<x<b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a < x < b}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



* **معالم هذا التوزيع:**

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a) ، ولذا يكتب رمز لهذا التوزيع الصورة $X \sim U(a,b)$

* **الوسط الحسابي** μ ، **والتباين** σ^2 لهذا التوزيع هما :

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \;,\quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

على الطالب إثبات ذلك:

* **دالة التوزيع التجميعي:**

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) = p(X \le x) &= \int_a^x f(x)d(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x d(x) \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}}$$

مثال :

إستورد أحد التجار 1500 طن من مادة أولية ، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد مايلي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحـل:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < x < 12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{12-0}=\frac{1}{12}\ ,\ 0<x<12$$

- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع:

بفرض أن Q هي كمية المادة الأولية المستوردة، تكون الكية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q\times p(x>7)=Q\times(1-F(7))=1500(1-\frac{7-0}{12-0})=625$$

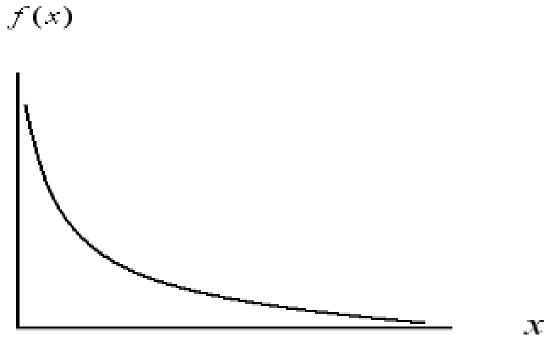
2- التوزيع الأسي السالب Negative Exponential distribution

*** شكل دالة كثافة الاحتمال:**

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0<x<\infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x)=\theta e^{-\theta x}\ , \qquad 0<x<\infty\ , \qquad \theta>0}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



*** معالم هذا التوزيع:**

توجد معلمة واحدة هي (θ)

*** خصائص التوزيع الأسى السالب :**

- الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما:

$$\mu=E(x)=\frac{1}{\theta}\ ,\quad \sigma^2=\frac{1}{\theta^2}$$

-دالة التوزيع التجميعي $\mathbf{F(x)}$:

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي:

$$F(x)=p(X\le x)=\int_0^x f(x)dx\left(1-e^{-\theta x}\right)$$

مثـال :

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 02 دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.
- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحـل:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، فإن المتوسط $1/\theta = 2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta = 0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

3- التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

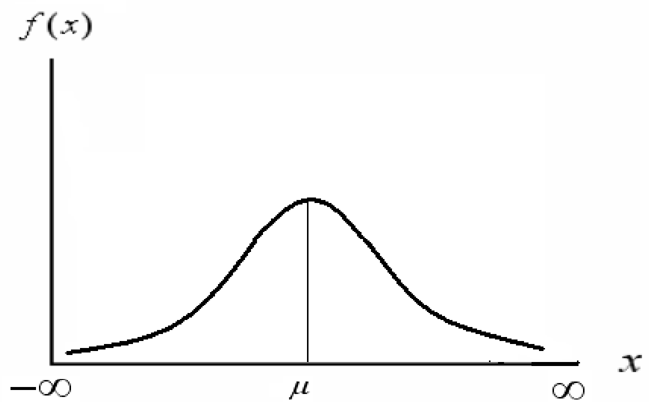
يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

* **شكل دالة كثافة الاحتمال** :

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, \qquad \pi = 22/7$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل:



*** معالم هذا التوزيع:**

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما:

الوسط الحسابي : $E(x) = \mu$ والتباين : $\text{var}(x) = \sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

*** خصائص التوزيع الطبيعي:**

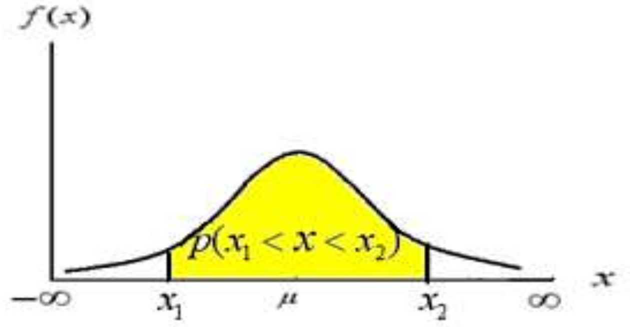
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- الوسط الحسابي μ 2- والتباين σ^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

*** كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$**

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1 < X < x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية Transform، يمكن إستخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$Z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي Standard Normal Variable ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

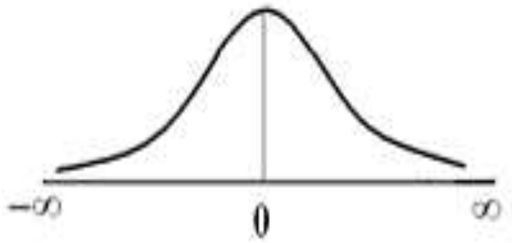
$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\ ,-\infty<x<\infty,\qquad \pi=22/7$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

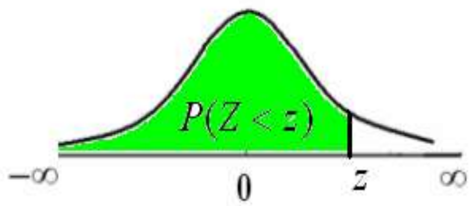
○ متوسطه الحسابي هو: $E(z)=0$ 2- تباينه هو: $\operatorname{var}(z)=1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير **Z** بالرموز : $Z\sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي **X** يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

○ يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z)=P(Z<z)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:

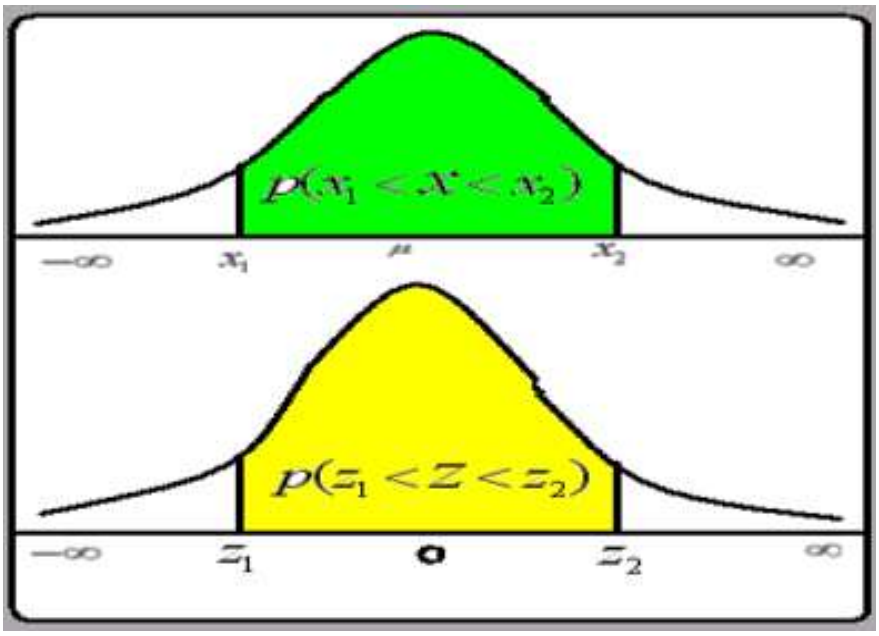


ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $p(x_1<X<x_2)$ باستخدام التحويلة $Z=\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$:

1- يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1,x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$z_1=(x_1-\mu)/\sigma\ ,\ z_2=(x_2-\mu)/\sigma$.

2- ومن ثم يكون الاحتمال: $p(x_1<X<x_2)=p(z_1<Z<z_2)$:



3- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال $F(z) = P(Z < z)$

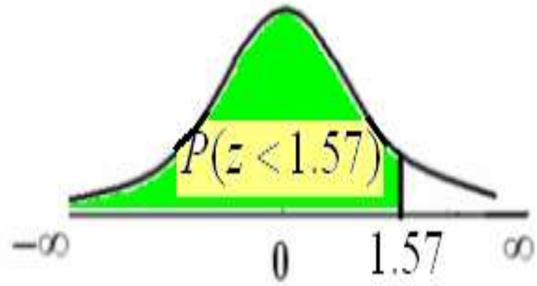
4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات

- أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z < 1.57)$ ب- $P(z < -2.33)$ ج- $P(z > 1.96)$ د- $P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z < 1.57) = F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يلي



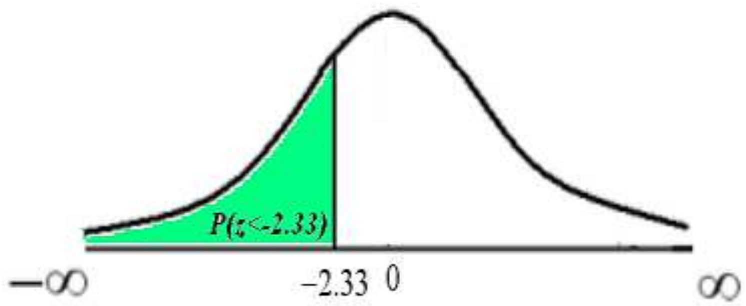
ويتم استخدام الجدول كما يلي :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(z < -2.33) = F(-2.33)$ موضحة كالتالي:

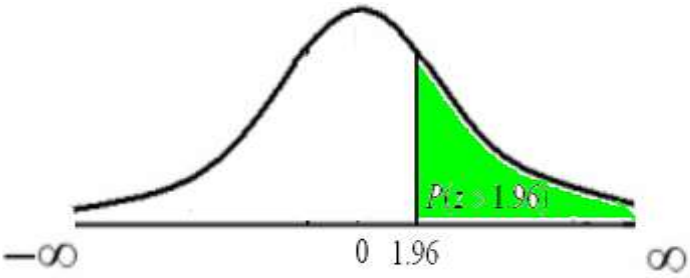
P(Z<-2.33)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5										
.										
.										
2.70										
.										
.										
2.30				0.0099						

ومن ثم يكون : $P(z < -2.33) = 0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ كالتالي:



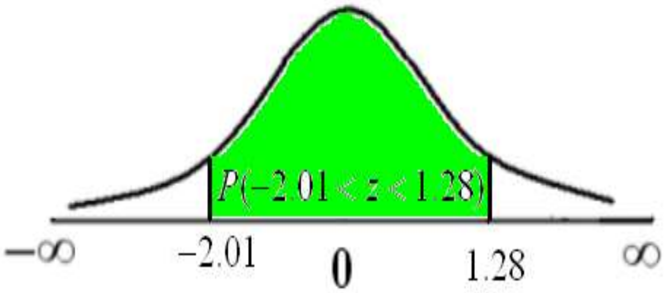
وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

$$P(z>1.96)=1-p(z<1.96)=1-F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 نجد أن : $p(z<1.96)=0.9750$

، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z>1.96)=1-0.9750=0.0250$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(-2.01<z<1.28)$ هي:



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01<z<1.28)=F(1.28)-F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01<z<1.28)=0.8997-0.0222=0.8775$$

مثـال:

إذا كان الدخل السنوي للعمال في أحد المصانع يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألف دينار، وتباينه 900

المطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3- ما هي نسبة العمال التي يقل دخلهم عن 60 ألف دينار ؟

4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحـل:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعالمه هي:

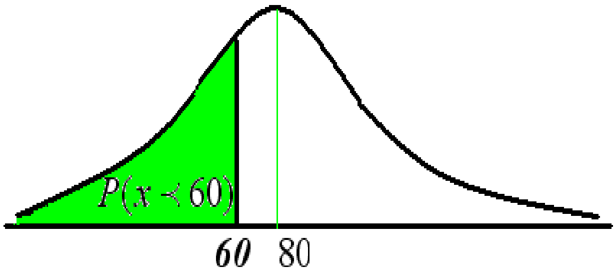
أ- المتوسط $E(x)=\mu=80$ ب- التباين هو: $Var(x)=\sigma^2=900$

أي أن : $X \sim N(80,900)$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} , \; -\infty < x < \infty \;, \;\; \pi = 22/7$$

3- نسبة العمال التي يقل دخلها عن 60 ألف دينار هي: $P(x \prec 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x<x_1)=p\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود 06. أي أن قيمة $Zi=1.96$ ، ويكون :

$$1.96=\frac{x_1-80}{30} \;, \;\rightarrow \quad x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف دينار في السنة.

تمارين المحور الرابع:

التمرين 01:

يتوافد الأشخاص على مصلحة إدارية بقيمة متوسطة قدرها 180 شخص في الساعة، نعرف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة.

1- ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال F(x) لهذا المتغير.

2- احسب احتمال أن لا يقل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين.

3- احسب المتوسط، التباين، الانحراف المعياري.

حل التمرين 01:

1) نوع المتغير: كمي منفصل

2) دالة الاحتمال:

x = عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة.

x يخضع للتوزيع البواسوني.

$$X \circlearrowleft P(m) \Rightarrow X \ \circlearrowleft P(100)$$
$$X \epsilon \{0,1,2, \ldots .\}$$

القيمة المتوسط لعدد المتوافدين في دقيقة معينة هو:

$$m = \frac{180}{60} = 3$$
$$P(x = x) = f(x) = \frac{e^{-3}3^{x}}{x!}$$

3- حساب احتمال أن لا يقل عدد الوافدين على المصلحة في دقيقة معينة على شخصين:

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - P(x \leq 1)$$
$$= 1 - \left[e^{-3}\frac{3^{0}}{0!} + e^{-3}\frac{3^{1}}{1!}\right] = 1 - (e^{-3} + 3e^{-3})$$
$$= 1 - 4e^{-3}$$

4/ حساب المتوسط (التوقع) والتباين والانحراف المعياري:

$$u(y) = E(x) = m = 3 \qquad V(x) = m = 3$$
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3}$$

التمرين 02:

في معهد معين احتمال تخرج طالب ما بعد 05 سنوات من الدراسة هو 0,4، ليكن x المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المتخرجين بعد 05 سنوات في فوج من 40 طالبا.

1- ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال F(x) لهذا المتغير.

2- احسب احتمال أن: أ- عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات هو 10.

ب- عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات لا يقل عن 03.

3- احسب المتوسط، التباين، الانحراف المعياري.

حل التمرين 02:

x: عدد المتخرجين بعد 5 سنوات:

$X \epsilon \{0,1,2, \dots ,40\}$

1- متغير كمي منفصل.

2- دالة الاحتمال $n = 40 \quad p = 0,4 \quad 1 - p = q = 0,6$

x يخضع لتوزيع ذي الحدين

$$x \circlearrowleft B(n, p)$$
$$x \circlearrowleft B(40, \quad 0,4)$$
$$P(x = 10) = f(10) = C_{40}^{x}(0,4)^{x}.(0,6)^{n-x}$$

3- حساب احتمال ما يلي:

أ- عدد الطلبة المتخرجين بعد 5 سنوات هو 10:

$$P(x = 10) = f(10) = C_{40}^{10}(0,4)^{10}.(0,6)^{30}$$

ب- عدد الطلبة المتخرجين بعد 5 سنوات لا يقل عن 3:

$$P(x \geq 3) = f(x \geq 3) = 1 - P(x < 3)$$
$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)]$$
$$= 1 - [C_{40}^{0}(0,4)^{0}.(0,6)^{40} + C_{40}^{1}(0,4)^{1}.(0,6)^{39} + C_{40}^{2}(0,4)^{2}.(0,6)^{38}]$$

4- المتوسط والتباين والانحراف المعياري:

$$u(x) = E(x) = np = 40(0,4) = 16$$
$$V(x) = npq = 40(0,4)(0,6) = 9,6$$
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

التمرين 03:

إستورد أحد التجار 100 قنطار من مادة القمح ، من أجل بيعها بكميات متساوية على مدار سنتين ، إذا كان المتغير العشوائي Xi يمثل الفترة الزمنية للبيع بالأشهر، يتبع توزيع منتظم فأوجد ما يلي :

1 – دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمية للبيع .

2- أحسب $P(x\leq 06)$

3 – ما هي الكمية المباعة بعد 06 أشهر.

حل التمرين 03:

1. دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a<x<b$$

$$f(x)=\frac{1}{24-0} \qquad a<x<b$$

2- حساب $P(x\leq 06)$

نعلم أن حالة التوزيع $P(x\leq x_i)=F(x_i)$

$$P(x\leq 06)$$

$$P(x\leq 06)=\frac{6}{24-0}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4} \quad \text{ومنه} \quad F(x_i)=\frac{x_i-0}{b-a}$$

3- الكمية المباعة بعد 06 أشهر:

$$\varphi t=100.\,p(x\leq 6 == 100.\frac{1}{4}$$

$\varphi t=25$ قنطار

التمرين 04:

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة زبون في البنك تتبع توزيع أسي سالب بمتوسط 05 دقائق أوجد ما يلي :

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية؟

2- ما هو احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 04 دقائق؟

حل التمرين 04:

1) ذالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\theta e^{-\theta x} \qquad 0<x<\infty$$

$$f(x)=0{,}2e^{-0{,}2x}$$

$$\mu=05$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{\mu}=\theta$$

2) احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 04 دقائق:

$P(x \leq 04) = 1 - P(x = 5)$

$= 1 - (0{,}2e^{-0{,}2.5})$

$P(x \leq 04) = 1 - \frac{0{,}2}{e^{-1}} = 1 - \frac{0{,}2}{2{,}72}$

$P(x \leq 04) = 0{,}92$

التمرين 05:

ليكن X متغير عشوائي خاضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي $\mathcal{M} = 50$ وتباينه 36 أحسب ما يلي:

1- حول المتغير العشوائي X إلى متغير عشوائي Z يتبع توزيع طبيعي معياري ؟

2- أحسب القيم المعيارية Zi إذا علمت أن : $X_1 = 48$، $X_2 = 50$ ، $X_3 = 44$

3- أحسب $P(x \leq 50)$ ، $P(x \leq 44)$

حل التمرين 05:

$X \sim N(50{,}36) \rightarrow Z \sim N°(0{,}1)$

1) تحويل X إلى Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{G} = \frac{X - 50}{\sqrt{36}} = \frac{X - 50}{6}$$

2) إيجاد القيم المعيارية Zi:

$X_1 = 48 \Rightarrow Z_1 = \frac{48 - 50}{6} = \frac{1}{3}$

$X_2 = 50 \Rightarrow Z_2 = \frac{50-50}{6} = 0$

$X_3 = 44 \Rightarrow Z_3 = \frac{44-50}{6} = -1$

3) حساب $P(x \leq 50)$ ، $P(x \leq 44)$

من السؤال السابق

$P(x \leq 48) = P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = P(Z \leq 0{,}33)$

$P(x \leq 48) = 0{,}6293$

من الجدول: $P(x \leq 50) = P(Z \leq 0) = 0{,}5$

التمرين 06:

كانت علامات 300 طالب في امتحان معين تخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي $\mathscr{M} = 10$ وتباينه 04

أحسب ما يلي:

1- ما هي نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13.

2 - ما هو عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13

حل التمرين 06:

$X \rightsquigarrow N(10,04) \Longrightarrow Z \rightsquigarrow N°(0,1)$

1) نسبة الطلبة الذين تقع علاماتهم بين 10 و 10:

$$P(10 \leq x \leq 13) = P(\frac{10-10}{2} \leq Z \leq \frac{13-10}{2})$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1{,}5)$$

$$= P(Z \leq 1{,}5) -$$

من الجدول:

$P(Z \leq 0)$

$$= 0{,}9332 - 0{,}5$$

$$P(10 \leq x \leq 13) = 0{,}4332$$

2) عدد الطلبة هو: $300.0{,}4332 = 129{,}96 \approx 130$ طالب

المحور الخامس:

العزوم و الدالة المتجددة للعزوم

أولا- العزوم (The moments):

كما التباين يعتبر العزم من تطبيقات توقع دالة. نميز بين نوعين من العزوم: العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل.

تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل $\alpha 3$ (coefficient d'asymétrie) ومعامل التفلطح $\alpha 4$ (Kurtosis ou coefficient d'aplatissement).

1- العزم المرتبط بالأصل μ'_r (Moment around the mean)

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي:

$$\boxed{\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0,1,2,...}$$

$$\mu'_0 = 1 \qquad \mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1$$

$$\mu'_1 = \mu \qquad \mu'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu$$

$$\mu'_2 = \mu^2 - \mu_2 \qquad \mu'_2 = \mu^2 - \sigma^2 = \mu^2 - \mu_2$$

- يحسب العزم المرتبط بالأصل حسب طبيعة المتغيرة متقطعة أو مستمرة أم بيانات مبسطة (سلسلة إحصائية) كما يلي:

* البيانات المبسطة (سلسلة إحصائية):

$$\mu'_r = (1/n)\, \Sigma\, (xi)^r$$

* المتغير العشوائي المتقطع:

$$\mu'_r = E(X^r) = \Sigma\, (xi)^r\ P(xi)$$

* المتغير العشوائي المستمر:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int x^r\ f(x)\, dx$$

<u>مثال:</u>

لدينا البيانات الإحصائية الأولية التالية : 2, 4, 6, 8, 10:

- أحسب العزوم المرتبط بالأصل μ'_1 ، μ'_2 ، μ'_3 ؟

<u>الحل:</u>

$n = 5$

$\mu'_1 = (2+4+6+8+10)/5 = 30/5 = 6$

$\mu'_2 = (4+16+36+64+100)/5 = 220/5 = 44$

$\mu'_3 = (8+64+216+512+1000)/5 = 1800/5 = 360$

2- العزم المركزي μ_r (the central moment) :

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1 \qquad\qquad \mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0 \qquad\qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X) \qquad\qquad \mu_2 = \sigma^2$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغيرة متقطعة أو مستمرة أم بيانات مبسطة (سلسلة إحصائية) كما يلي:

* البيانات المبسطة (سلسلة إحصائية):

$$\mu'_r = (1/n) \times \Sigma\,(xi)^r$$

* المتغير العشوائي المتقطع:

$$\mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r f(x)$$

* المتغير العشوائي المستمر:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r\, f(x)dx$$

مثال:

لدينا التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع :

X=xi	P(X=xi)
1	0.2
2	0.3
3	0.4
4	0.1

- أحسب العزوم المركزية من الدرجة 2 و3 ؟

الحل:

$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = 6.6 - (2.4)^2$

$= 6.6 - 5.76 = 0.84$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\, \mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$

$= 19.8 - 3\times6.6\times2.4 + 2\times(2.4)^3$

$= 19.8 - 47.52 + 27.648$

$= -0.072$

3- العلاقة بين العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل:

الصيغ العامة للتحويل:

$\mu_1 = 0$ (دائماً)

$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$

$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4$

ولإشتقاق هذه العلاقات، نستخدم نظرية ذات الحدين حيث C_r^i هي التوافيق:

$$\mu_r = \mu'_r - C_r^1 \cdot \mu'_{r-1} \cdot \mu^1 + \ldots + (-1)^i C_r^i \cdot \mu'_{r-i} \cdot \mu^i + \ldots + (-1)^r \cdot \mu'_0 \cdot \mu^r$$

يمكن أيضا الحصول على العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة r من خلال اشتقاق الدالة المتجددة للعزوم r مرة.

ثانيا- الدالة المتجددة للعزوم $M_x(t)$ (The moment generating function) :

الدالة المتجددة للعزوم هي دالة مرتبطة بمتغيرة (معلمة) t بالإضافة إلى ارتباطها بـ X، و د م ع كما يلي:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

في حالة م ع متقطعة: $M_x(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$ و في حالة م ع مستمرة:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

مثال:

لدينا دالة الكثافة للمتغير العشوائي المتصل:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- إيجاد الدالة المولدة للعزوم $M_x(t)$

الحل:

إذن لحساب $M_X(t)$ نقوم بالتالي:

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} \cdot x2\, dx$$

سأقوم بحساب هذا التكامل خطوة بخطوة لإيجاد الدالة المولدة للعزوم.

لحساب الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} \cdot x2\, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئة:

du = 2 dx إذ أن مشتقتها u = 2x

dv = e (tx) dx إذ أن مشتقتها v = (1/t)e^(tx)

نطبق التكامل بالتجزئة:

$$M_X(t) = \left.\frac{x2e^{tx}}{t}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{2e^{tx}}{t} dx = \frac{2}{t}e^{t} - \frac{2}{t}\int_0^1 e^{tx} dx$$

$$\int_0^1 e^{tx} dx = \left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 = \frac{e^{t} - 1}{t}$$

إذن:

$$M_X(t) = \frac{2}{t}e^{t} - \frac{2}{t}\cdot\frac{e^{t} - 1}{t} = \frac{2}{t}e^{t} - \frac{2}{t^{2}}(e^{t} - 1)$$

بالتالي الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_X(t) = \frac{2e^{t}}{t} - \frac{2(e^{t} - 1)}{t^{2}} \quad \text{ل} \; t \neq 0$$

وفي حالة $t = 0$، $M_X(0) = 1$ دائمًا.

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزم المركزي من درجة r:

$$\boxed{\mu_r' = \frac{d^r M_x(t)}{dt^r} \quad avec\ t = 0}$$

كما تستخدم الد م ع لإثبات تساوي توزيعين احتماليين، مثلا عند تحقق شروط معينة، ونحتاج ذلك خاصة عند دراسة التقارب بين التوزيعات الاحتمالية. النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

لتكن م ع X و Y لهما الد م ع $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ نقول أن م ع X و Y لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذاا:

$$\mathbf{M_x(t) = M_y(t)}$$

كما تستخدم الد م ع لإثبات إستقلال توزيعين احتماليين. النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

إذا X وY م ع مستقلتان، لهما الد م ع $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ فإن: $\mathbf{M_{x+y}(t) = M_x(t) \,.\, M_y(t)}$

خلاصة

العزم و الدالة المتجدد للعزوم هي عبارة عن توقعات دوال (أنظر المبحث السابق). يدخل العزم في حساب بعض المؤشرات مثل التباين و التوقع الرياضي، معامل التفلطح و معامل التماثل.

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي: $\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي: $\mu'_r = E(X^r), \;\; r = 0, 1, 2, \ldots$

تعرف الدالة المتجددة للعزوم كما يلي: $M_x(t) = E(e^{tx})$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات التقارب بين توزيعات احتمالية و ذلك من خلال نظريتين أساسيتين.

- نقول أن م ع X وY لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذاا: $M_x(t) = M_y(t)$
- إذا X وY متغيرين ع مستقلتان فإن: $M_{x+y}(t) = M_x(t) \,.\, M_y(t)$

تماري المحور الخامس

تمرين 01:

لدينا البيانات الإحصائية الأولية التالية : 2, 4, 6, 8, 10

المطلوب: حساب

1- μ'_1، μ'_2، μ'_3، μ'_4

2- μ_2، μ_3، μ_4

حل التمرين 01:

1- حساب العزوم المرتبطة بالأصل:

$n = 5$

$\mu'_1 = (3 + 5 + 7 + 9 + 11)/5 = 35/5 = 7$

$\mu'_2 = (3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2)/5$

$= (9 + 25 + 49 + 81 + 121)/5$

$= 5/285 =57$

$\mu'_3 = (3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3)/5$

$= (27 + 125 + 343 + 729 + 1331)/5$

$= 2555/5 = 511$

$\mu'_4 = (3^4 + 5^4 + 7^4 + 9^4 + 11^4)/5$

$= (81 + 625 + 2401 + 6561 + 14641)/5$

$= 24309/5 = 4861.8$

2- حساب العزوم المركزية:

باستخدام العلاقات

$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = 57 - (7)^2 = 57 - 49 = 8$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$

$= 511 - 3\times57\times7 + 2\times(7)^3$

$= 686 + 1197 - 511 = \ \ 0$

$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4$

= 4861.8 - 4×511×7 + 6×57×49 - 3×2401

= 4861.8 - 14308 + 16758 - 7203

= 4861.8 - 14308 = -9446.2

= -9446.2 + 16758 = 7311.8

= 7203 - 7311.8 = 108.8

تمرين 02:

لدينا دالة الكثافة للمتغير العشوائي المتصل:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

المطلوب:

1- حساب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة 0، 1، 2، 3 و4

2- حساب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2، 3

3- أكتب الدالة المتجددة للعزوم من أجل $t \neq 0$ للم ع المعرفة في كما يلي:

حل التمرين 02:

1- حساب العزوم المرتبطة بالأصل:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\mu'_0=1, \qquad \mu'_1=\mu=4/3, \qquad \mu'_2=\mu^2-\mu_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{9}=\frac{12}{9},$$

$$\mu'_3=\int_0^2 x^3\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{16}{5}, \qquad \mu'_4=\int_0^2 x^4\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2=\frac{16}{3}$$

2-حساب العزوم المركزية:

$$\mu_0=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^0\ f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}1f(x)dx=1$$

$$\mu_1=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx-\mu\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\mu-\mu(1)=0$$

$$\mu_2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\ f(x)dx=\sigma^2=\frac{4}{9}$$

$$\mu_3=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^3 f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\left(x-\frac{4}{3}\right)^3(0)dx+\int_{0}^{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)^3\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^3(0)dx=\frac{16(67)}{27(5)}$$

3-كتابة الدالة المتجددة للعزوم من أجل $t \neq 0$ للمتغير:

$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{tx}(0)dx+\int_{0}^{2}e^{tx}f(x)dx+\int_{2}^{+\infty}e^{tx}(0)dx=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}xe^{tx}dx+0$$

$$M_x(t)=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}UdV=\ \frac{1}{2}\left[[UV]_0^2-\int_{0}^{2}VdU\right].\quad U=x\Rightarrow dU=dx,\ dV=e^{tx}dx\Rightarrow V=\frac{e^{tx}}{t}$$

$$M_x(t)=\frac{1}{2}\left(\left[x\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2-\int_{0}^{2}\frac{e^{tx}}{t}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\left[2\frac{e^{2t}}{t}\right]-\frac{1}{t}\left[\frac{e^{2t}}{t}\right]\right)=\frac{e^{2t}}{t}-\frac{e^{2t}}{2t^2}$$

قائمة المراجع

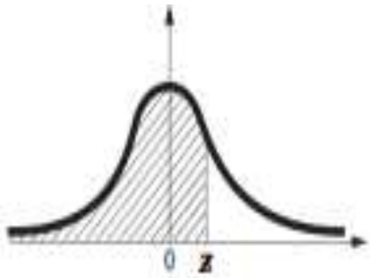
- سعدي شاكر حمودي، " **مبادئ علم الإحصاء و تطبيقاته**" ، دار الثقافة للنشر و التوزيع، عمان، الأردن،2009.
- عبد الرزاق عزوز، " **الكامل في الإحصاء- دروس مفصلة، تمارين و مسائل مع الحلول**"، الجزء الأول ، دوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2010.
- جلاطو جيلالي، " **الإحصاء مع تمارين و مسائل محلولة**"، دوان المطبوعات الجزائرية، الطبعة الثامنة، الجزائر،2010.
- موساوي عبد النور، بركان يوسف، "**الإحصاء 2**"،دار العلوم للنشر و التوزيع، عنابة-الجزائر.2010،
  عزام صربي،"**الإحصاء الرياضي**"، دار صفاء للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2010.
- موراي شبيجل، **الإحصاء – سلسلة ملخصات شوم**-، ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ط7، مصر،2004 .
- مدحية السيد محمد موسى، **أساسيات الإحصاء الرياضي وتطبيقاتها**، دار الكتاب الحديث، مصر،2008.
- أحمد شيبات، **مفاهيم من حساب الاحتمالات** – دروس وتمارين محلولة، ترجمة: يزيد دربال، الجزائر:
- جامعة منتوري قسنطينة، 2004.
- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، ط1 ، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن: 2004.
- عبد الحفيظ مصطفى، **نظرية الاحتمالات-مبادئ و تطبيقات**، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر،2004 .
- بو عبد الله صالح، **محاضرات الإحصاء الرياضي**، بدون دار نشر، الجزائر، 2006-2005.
- عبدالرؤوف عباده، " **محاضرات في الإحصاء 02** "، مطبوعة بيداغوجية موجهة لفائدة طلبة السنة أولى جذع مشترك، جامعة غرداية، الجزائر، سنة 202/2023.
- Michael J. Evans and Jeffrey S. Rosenthal, ***Probability and Statistics: The Science of Uncertainty***, University of Toronto,2010.
- Courtney Taylor, « ***The Difference Between Descriptive and Inferential Statistics*** »,sur : https://www.thoughtco.com/differences-in-descriptive-and-inferential-statistics-3126224, consulté le : 10/09/2024.
- Douchet, J., & Zwahlen, ***Statistique mathématique: cours et exercices corrigés***. Éditions Ellipses ,france,2024.

الملاحق

TABLE LOI NORMALE CENTREE REDUITE $N(0;1)$

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

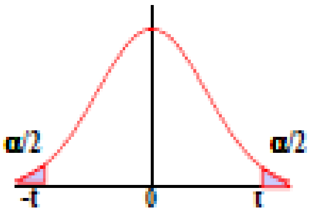
$$F(1{,}96) = P(Z \leq 1{,}96) = P(Z \leq 1{,}9 + 0{,}06) = 0{,}97500$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	$\boxed{0{,}97500}$	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Table de t (lois de Student)*

La table donne la probabilité α pour que t égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).



ddl / α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,553	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,956
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
+ ∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Exemple : avec d. d. l. = 10, pour t = 2,228, la probabilité est α = 0,05

Table du Chi deux

La table donne la probabilité α pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

ddl \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0158	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,211	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,584	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	1,064	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	1,610	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	2,204	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	2,833	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	3,490	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	4,168	8,343	10,656	12,242	16,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	4,865	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	5,578	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	6,304	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	7,042	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	7,790	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	8,547	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	9,312	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	10,085	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	10,865	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	11,651	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	12,443	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	13,240	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	14,041	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	14,848	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	15,659	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	16,473	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	17,292	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	18,114	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	18,939	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	19,768	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	20,599	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Exemple : avec d. d. l. = 3, pour $\chi^2 = 0{,}584$, la probabilité est $\alpha = 0{,}90$