



Université de Ain Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Génie Civil et travaux publics

Polycopié pédagogique

TAHAR BERRABAH Amina

Titre

Dynamiques des Structures 1

Cours destiné aux étudiants de

Master (spécialité et niveau) :...Master 1 option structure

Année : 2021-2022



Université de Ain Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Génie Civil et travaux publics

Polycopié pédagogique

Code:.....

Titre

Dynamiques des Structures 1

Cours destiné aux étudiants de

Master (spécialité et niveau) :...Master 1 option structure

Année : 2022

Chapitre 1 : Introduction et généralités

- 1.1 Définition d'un problème dynamique
- 1.2 Quelques Exemples
- 1.3 Caractérisation des Actions
 - 1.3.1 Chargement déterministe:
 - 1.3.2 Chargement Aléatoire:
- 1.4 degré de liberté d'un système
- 1.5 Coordonnées Généralisées
- 1.6 Procédure générale d'une analyse dynamique

Chapitre 2 : Système à un seul degré de liberté

- 2.1 Formulation de l'équation de mouvement
 - 2.1.1 Méthode dynamique (loi fondamentale de la dynamique)
 - 2.1.2 Méthode de Lagrange
- 2.2 Vibrations libres
 - 2.2.1 Vibrations Libres Non Amorti
 - 2.2.2 Vibrations Libres Amorti
 - 2.2.3 Quelques notion de la DDS
- 2.3 Vibrations forcés
 - 2.3.1 Excitation harmonique
 - 3.3.2 Réponse au chargement Périodique
 - 2.3.3 Excitation Impulsive
 - 2.3.4 Excitation dynamique quelconque
 - 3.3.5 Réponse au mouvement d'un support (Excitation harmonique du support, Excitation sismique du support)

3.3.6 Spectre de réponse

Chapitre 3 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

3.1 Vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

3.1.1 Introduction

3.1.3 Formulation des équations de mouvement

3.1.4 Evaluation des matrices $[M]$, $[K]$, $[C]$ et vecteur de force $\{P\}$

3.1.5 Détermination des amplitudes propres de vibration

3.1.6 Orthogonalité des modes propres

3.1.7 Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 4: Quelques Exercices avec leurs corrigés

Introduction générale

Le présent polycopié sera destiné comme support pédagogique aux étudiants en Master 1 option Structure de la matière "Dynamique des structures 1".

D'après le canevas de la filière "Génie Civil" master "Structure" le mode d'évaluation de la matière est comme suit:

Contrôle continu 40%

Examen 60%

L'objectif du polycopié est de donner les notions de base de la dynamique de la structure pour les étudiants en master 1 tout en essayant des fois de synthétiser et des fois de rentrer en détail dans le but de mettre à la disposition de l'étudiant un document simple est claire en respectant le programme du cavevas.

l'utilisation d'une bonne partie de l'ouvrage de " Dynamics Of Structures, RayW. Clough, Joseph Penzien, Third Edition, Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704, USA" traduite (de la langue anglaise à la langue française) et reformulée (par moi même comme auteur du polycopié) fait aussi l'objet du présent travail, cela est due à la simplicité est à l'ampleur d'information importante que contient cet ouvrage à mon point de vue sachant que j'ai enseigné la dite matière plus que 3 années.

Chapitre 1 : Introduction et généralités

1.1 Définition d'un problème dynamique

Un phénomène ou bien un problème d'origine dynamique se caractérise par une sollicitation qui varie en même temps dans le temps et dans l'espace.

Le terme "chargement dynamique" est attribué à des phénomènes dont la seule caractéristique est sa variabilité temporelle. Lorsque la vitesse de chargement est lentement variable, l'accélération devient faible et les forces d'inertie deviennent non significatives. De tels phénomènes sont dites cycliques, si la charge est alternée ou de quasi-statique monotone [2].

1.2 Quelques Exemples

- a) Phénomène quasi-statique monotone: il s'agit de la mise en charge lente d'une structure par une force $P(t)$ croissante (figure 1.1(a)) dans lequel $P(t)$ varie d'une façon "lente"; les seules forces appliquées à la poutre et qui varient en fonction de temps sont, la force $P(t)$ et les réactions des appuis $R(t)$ [2] .

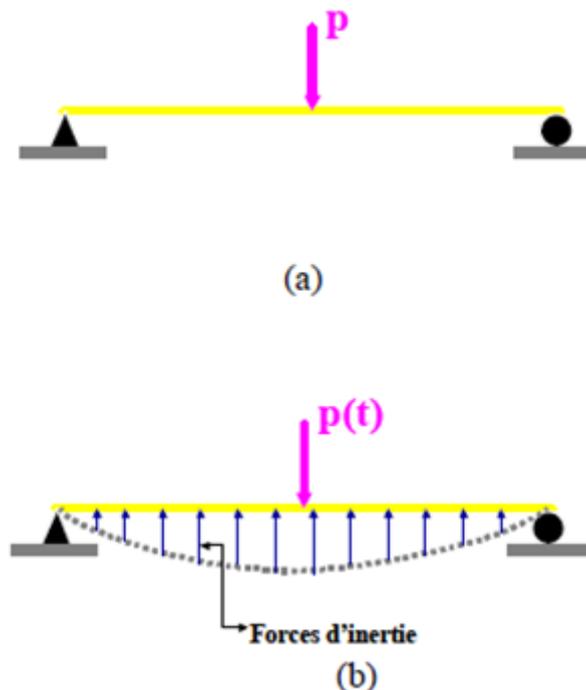


Figure 1.1 : chargement d'une poutre [2]

- b) phénomène dynamique : désigne le comportement de la structure résultant par exemple d'une chute de missile, il est à noter que les forces d'inertie $f_i(t)$ dépendent de la répartition des masses et des accélérations dans la structure (figure 1.1(b));
- c) chargement cyclique: désigne le chargement de la structure de la figure 1.1(a) par une force lentement croissante une fois puis décroissante une autre fois; c'est le cas de l'action de la houle sur une plate-forme offshore;
- d) chargement dynamique alterné : Dans ce cas de chargement, la force $P(t)$ varie rapidement de façon croissante, puis décroissante comme dans le cas d'une machine vibrante posée sur la structure.

1.3 Caractérisation des Actions

Dans la littérature, les classes de sollicitations qui peuvent être appliquées à une structure sont:

- a) Sollicitations déterministes par exemple actions périodiques, impulsives ou forcées suivant leur forme de variation dans le temps.
- b) Sollicitations aléatoires : suivant le degré de connaissance de celles-ci ;

1.3.1 Chargement déterministe:

Si le chargement appliqué est défini d'une manière exacte par sa variation temporelle et spatiale, le chargement est dit déterministe. par exemple :

i) Chargement Périodique : la notion périodique est valable seulement si l'allure de chargement se reproduit à l'identique au bout d'une durée « T », appelée période de la sollicitation. Parmi les chargements périodiques, on cite les chargements harmoniques et les chargements anharmoniques. Un chargement harmonique est typiquement celui engendré par une machine tournante (figure 1.2). La sollicitation est définie par son amplitude « A », et sa pulsation « ω ». Elle est décrite par une fonction de type sinus :

$$y(t) = A \sin(\omega t) \tag{1.1}$$

Ou bien de type exponentielle :

$$y(t) = \rho e^{i\omega t} \tag{1.2}$$

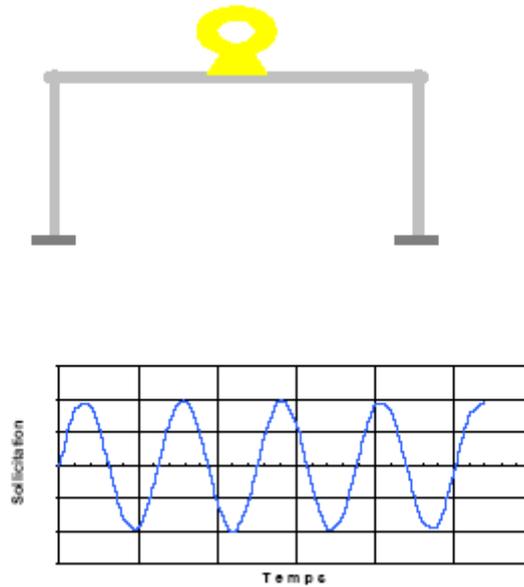


Figure 1.2 : Chargement harmonique [2]

Il est à noter que le chargement peut être également périodique, sans être harmonique; on le qualifie d'anharmonique. Exemple de chargement engendré par un propulseur de navire (figure 1.3).

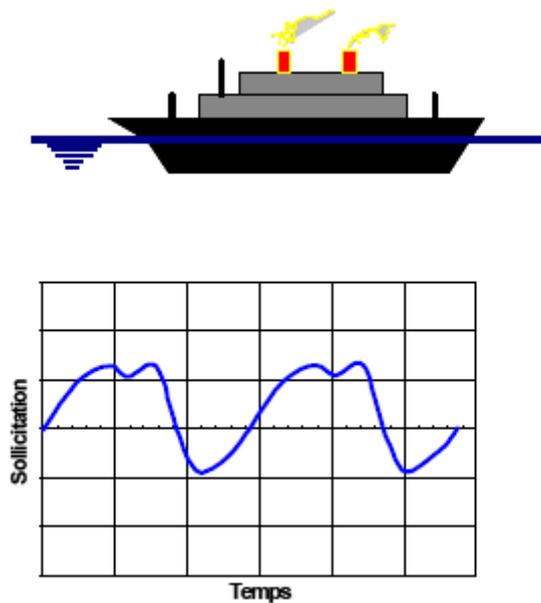


Figure 1.3 : Chargement périodique anharmonique [2]

ii) Chargement non périodique, de type impulsif ou entretenu; dans ce cas le chargement ne se reproduit pas à l'identique après un intervalle de temps « T ». Le chargement impulsif est caractérisé par une sollicitation de faible durée totale, exemple celle induite par le front d'une onde de choc heurtant la structure (figure 1.4). Par faible durée, il faut entendre une sollicitation dont la durée est petite par rapport à la période de vibration de la structure.

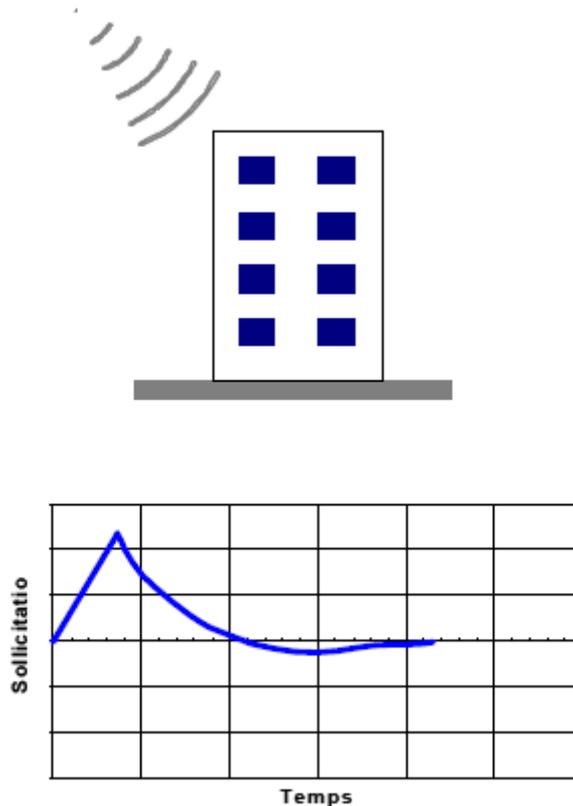


Figure 1.4 : Chargement impulsif [2]

Ce chargement est défini par sa variation temporelle :

$$y(t) = f(t) \tag{1.3}$$

Le chargement entretenu est le chargement résultant d'une succession d'impulsions par exemple le cas d'une sollicitation sismique si l'accélération du sol est connue de façon déterministe (figure 1.5).

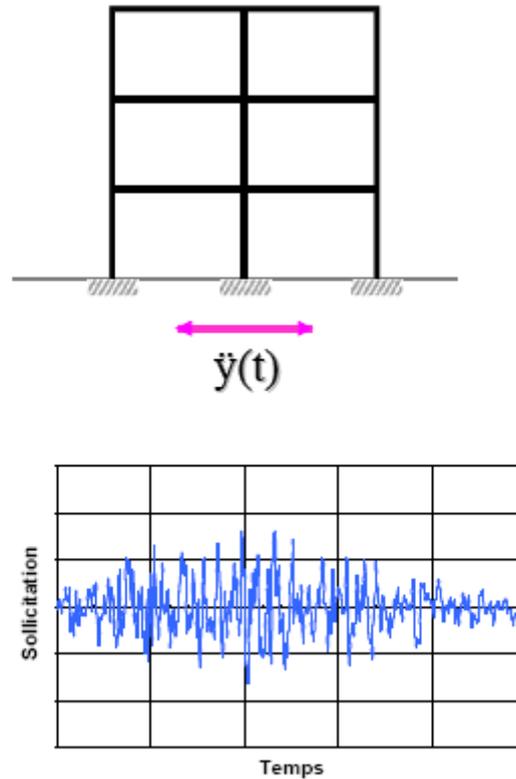


Figure 1.5 : Sollicitation entretenue [2]

contrairement au chargement impulsif, la durée totale de la sollicitation est importante par rapport à la période propre de la structure.

1.3.2 Chargement Aléatoire:

La plus part des chargements sollicitant les structures de Génie Civil ne peuvent être définis d'une manière déterministe par une équation. Ils ne sont généralement connus que par leur valeur moyenne. par exemple les mouvement engendrés le trafic ferroviaire ou routier (figure 1.6), le vent.... La sollicitation est dite aléatoire et est représentée par sa densité spectrale de puissance [2].

Il est à noter que la dynamique stochastique traite le comportement de la structure par rapport à ce type de chargement (chargement aléatoire).

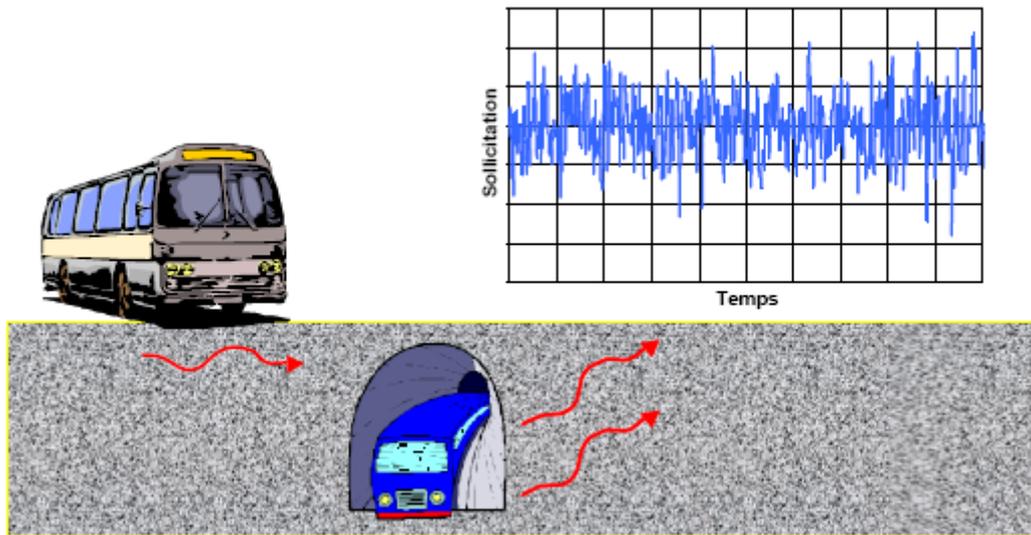


Figure 1.6 : Chargement Aléatoire

1.4 degré de liberté d'un système

Le nombre de degrés de liberté « n » d'un système est le nombre de coordonnées nécessaires pour repérer la position d'un système constitué d'un ou de plusieurs points matériels.

Exemple 1 :

Pour une particule ou un point matériel qui se déplace librement dans l'espace, trois coordonnées (x, y, z) sont nécessaire pour la (ou le) repérer.

Exemple 2 :

Pour un système constitué de « N » points matériels qui se déplacent librement dans l'espace, il est nécessaire d'avoir « 3N » coordonnées pour indiquer sa position.

Exemple 3 (Figure 1.7):

Pour un pendule constitué d'une masse suspendue à l'extrémité d'une tige, on a besoin de deux coordonnées ; x et y tel que:

$$\begin{cases} x = a.\cos\theta \\ y = b.\sin\theta \end{cases} \quad (1.4)$$

Il suffit de connaître θ pour avoir x et y , donc le nombre de degré de liberté peut être réduit à un seul au lieu de deux ; θ est dite: coordonnées généralisées.

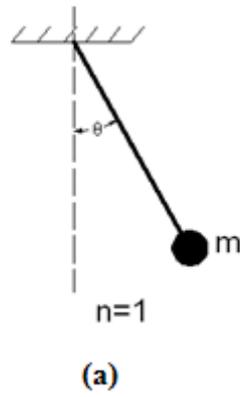


Figure 1.7(a): Nombre de degrés de liberté égale à 1 (pendule simple).

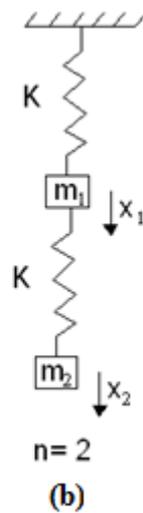


Figure 1.7(b): Nombre de degrés de liberté égale à 2 (deux masses montée verticalement).

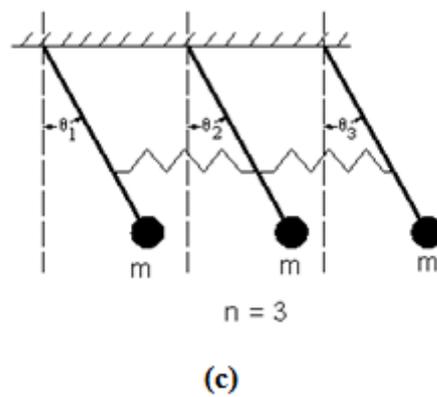


Figure 1.7(c): Nombre de degrés de liberté égale à 3 (trois pendules reliés par un ressort).

1.5 Coordonnées Généralisées

Supposons un système de « N » points matériels en mouvement et soumis à des liaisons. Pour décrire le mouvement, on a besoin d'un certain nombre de coordonnées indépendantes, on les note : q_1, q_2, \dots, q_n , ce sont les coordonnées généralisées, ce sont des distances, des angles ou des quantité rattachées à ces dernières.

Le nombre de coordonnées généralisées = le nombre de degrés de liberté.

Exemple (Figure 1.8) :

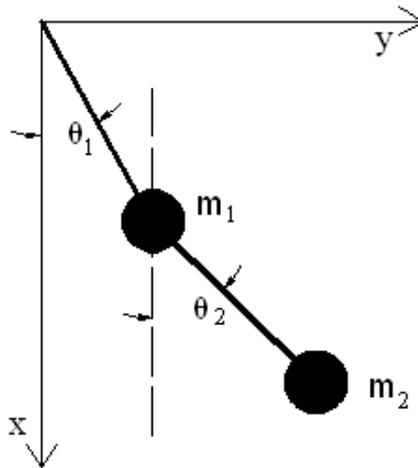


Figure 1.8 : Pendule ayant deux degrés de liberté.

Les degrés de liberté de la première masse sont : $m_1 \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}$ (1.5)

Les degrés de liberté de la deuxième masse sont : $m_2 \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$ (1.6)

Tel que:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cdot \cos\theta_1 \\ y_1 = l_1 \cdot \sin\theta_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} x_2 = l_2 \cdot \cos\theta_2 + l_1 \cdot \cos\theta_1 \\ y_2 = l_2 \cdot \sin\theta_2 + l_1 \cdot \sin\theta_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

θ_1 et θ_2 définissent entièrement les positions des masses m_1 et m_2 , donc θ_1 et θ_2 sont les coordonnées généralisées.

1.6 Procédure générale d'une analyse dynamique

D'une manière générale, la Procédure d'une analyse dynamique d'une structure est structurée comme suit:

- 1) Modélisation dynamique de la structure
- 2) Formulation de l'équation différentielles de mouvement qui dépend du nombre de degré de liberté ainsi que du type de sollicitation
- 3) Résolution des équations différentielles du mouvement utilisant des outils purement mathématiques
- 4) Interprétation et exploitation des résultats.

Chapitre 2 : Système à un seul degré de liberté

2.1 Formulation de l'équation de mouvement

Pour formuler l'équation différentielle d'un mouvement dynamique, deux grande famille de méthodes sont disponible dans la littérature à savoir la loi fondamentale de Newton et loi énergétique de Lagrange

2.1.1 Méthode dynamique (loi fondamentale de la dynamique)

c'est la loi de Newton qui se base sur l'équilibre des forces ou bien des moments.

dans le cas d'un mouvement transrationnel:

$$\sum \vec{F} = m \vec{\delta} \quad (2.1)$$

avec:

m : masse du système

$\vec{\delta}$: vecteur accélération

dans le cas d'un mouvement rotationnel

$$\sum \vec{M} = J \cdot \ddot{\theta} \quad (2.2)$$

avec:

J : moment d'inertie

$\ddot{\theta}$: Accélération angulaire

2.1.2 Méthode de Lagrange

Elle est surtout avantageuse à être utiliser pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Le lagrangien « L » est définit par :

$$L = E_c - E_p \quad (2.3)$$

Avec :

E_c : Energie cinétique totale du système;

E_p : Energie potentielle totale du système.

Pour un système conservatif, l'équation du mouvement dynamique est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial q} \quad (2.4)$$

q : Représente le degré de liberté.

i varie de 1 à n ; n = nombre de degré de liberté.

2.2 Vibrations libres

Les vibrations libre sont des vibrations qui se fasse en absence de force externe.

2.2.1 Vibrations Libres Non Amorti

C'est une oscillation possédant une amplitude d'oscillation constante, cela veut dire qu'une fois lancé l'oscillateur, ce dernier pouvait continuer indéfiniment son mouvement.

2.2.2 Vibrations Libres Amorti

En réalité, l'amplitude de n'importe quel mouvement oscillatoire décroît avec le temps et le système finira par s'arrêter, ceci est connu sous le nom d'un mouvement amorti.

2.2.3 Quelques notion de la DDS

L'équation du mouvement amorti libre est donnée par:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (2.5)$$

Divisant toute l'équation par le terme multiplié par \ddot{x} , on aura:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad (2.6)$$

Posons:

$$\beta = \frac{c}{2m} \quad (2.7)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.8)$$

ω_0 : Pulsation (fréquence) propre du système (c.à.d. du système libre non amorti).

D'où :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \beta \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (2.9)$$

L'équation (1) est l'équation différentielle d'un *mouvement libre amorti*.

On pose :

$$x = e^{rt} \text{ donc } \begin{cases} \dot{x} = r \cdot e^{rt} \\ \ddot{x} = r^2 \cdot e^{rt} \end{cases} \quad (2.10)$$

L'équation (1) peut être écrite sous la forme suivante :

$$r^2 + 2 \cdot \beta r + \omega_0^2 = 0 \quad (2.11)$$

L'équation (6) est dite l'équation caractéristique du mouvement.

a. Résolution de l'équation caractéristique

Les solutions $x(t)$ et la nature du mouvement dépendent du signe du déterminant

Δ' sachant que :

$$\Delta' = \beta^2 - \omega_0^2 \quad (2.12)$$

Trois cas de Δ' vont donc se présenter:

i) Premier cas : $\Delta' > 0$

$$\beta^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \Leftrightarrow \beta^2 > 4 \cdot k \cdot m \quad (2.13)$$

Dans ce cas l'amortissement est dit: *amortissement Fort*. Donc :

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.14)$$

Posons:

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.15)$$

On a deux solutions:

$$x_1 = e^{r_1 t} \text{ et } x_2 = e^{r_2 t} \quad (2.16)$$

La solution générale est une combinaison linéaire de x_1 et x_2 c.à.d.

$$x(t) = A \cdot x_1(t) + B \cdot x_2(t) \quad (2.17)$$

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cdot e^{\alpha t} + B \cdot e^{-\alpha t}) \quad (2.18)$$

A, B sont des constants arbitraires à déterminer d'après les conditions initiales.

L'amortissement est si important qu'il n'y a pas d'oscillations et la masse (m) revient lentement à sa position d'équilibre, donc le système n'est plus un oscillateur et par conséquent le mouvement est *apériodique*. La figure (1) schématise les mouvements apériodiques.

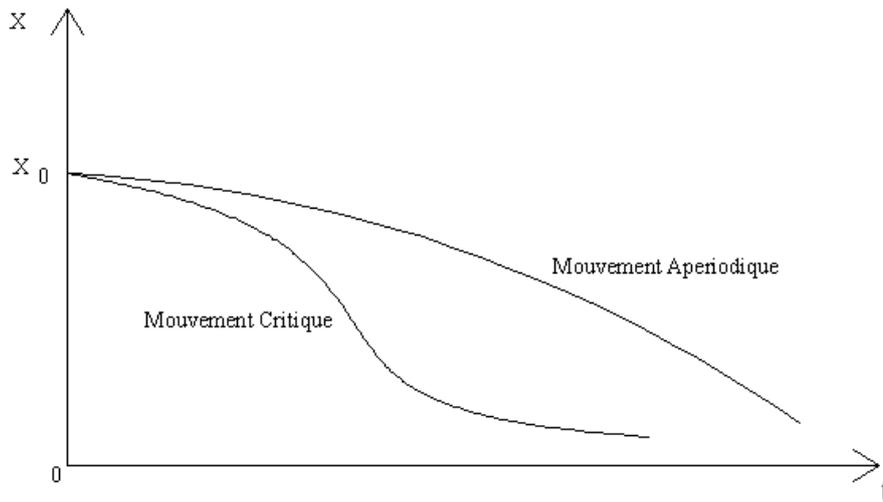


Figure 2.1 : Schéma illustratif des mouvements apériodiques

ii) deuxième cas : $\Delta' = 0$

Dans ce cas :

$$\beta^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow c^2 = 4 \cdot k \cdot m \quad (2.19)$$

L'équation admet une racine double :

$$r_1 = r_2 = -\beta \quad (2.20)$$

La solution a la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\beta t} (A + B \cdot t) \quad (2.21)$$

Le système revient à sa position d'équilibre au bout d'un temps infini sans aucune oscillation, c'est le *mouvement critique* (voir la figure 1).

Remarque

Le mouvement critique est un mouvement apériodique, mais la masse (m) revient plus vite à sa position d'équilibre dans le mouvement critique que dans le mouvement apériodique.

iii) troisième cas : $\Delta' < 0$

Dans ce cas :

$$c^2 < 4 \cdot k \cdot m \quad (2.22)$$

Donc contrairement au premier cas *l'amortissement est faible*.

$$\Delta' = \beta^2 - \omega_0^2 < 0 \Leftrightarrow \beta^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta' = -(\omega_0^2 - \beta^2) = i^2(\omega_0^2 - \beta^2) \quad (2.23)$$

Posons :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Rightarrow \Delta' = i^2 \cdot \omega_a^2 \quad (2.24)$$

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega_a \Rightarrow x(t) = A \cdot e^{(-\beta - i\omega_a)t} + B \cdot e^{(-\beta + i\omega_a)t} \quad (2.25)$$

Donc par analogie avec l'équation (2.21):

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{(-\beta - i\omega_a)t} \\ x_2(t) = e^{(-\beta + i\omega_a)t} \end{cases} \quad (2.26)$$

La solution peut être aussi écrite sous la forme :

$$x(t) = e^{-\beta t} [A \cdot e^{-i\omega_a t} + B \cdot e^{i\omega_a t}] \quad (2.27)$$

Cela revient au même de prendre une combinaison linéaire de:

$$X_1(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\beta t} [e^{i\omega_a t} + e^{-i\omega_a t}] = e^{-\beta t} \cos \omega_a t \quad (2.28)$$

$$X_2(t) = -\frac{i}{2} (x_1(t) - x_2(t)) = -\frac{i}{2} \cdot e^{-\beta t} [e^{i\omega_a t} - e^{-i\omega_a t}] = e^{-\beta t} \sin \omega_a t \quad (2.29)$$

$$x(t) = e^{-\beta t} [A' \cdot \cos \omega_a t + B' \cdot \sin \omega_a t] \quad (2.30)$$

$$A' \cos \omega_a t + B' \sin \omega_a t = \sqrt{A'^2 + B'^2} \left\{ \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \cos \omega_a t + \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \sin \omega_a t \right\} \quad (2.31)$$

Posons:

$$\begin{cases} \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} = \cos \varphi \\ \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} = \sin \varphi \end{cases} \quad (2.32)$$

Et: $\sqrt{A'^2+B'^2} = C$ (2.33)

La solution s'écrit sous la forme:

$$x(t) = C.e^{-\beta t} . \cos (\omega_a t - \varphi) \quad (2.34)$$

Où C et φ sont à déterminer par les conditions initiales.

C'est le mouvement *périodique amorti*. L'amortissement est assez faible pour que les oscillations autour de la position d'équilibre aient lieu. L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps pour tendre vers « zéro » quand « t » est grand. Le système finira par revenir à sa position d'équilibre.

Pour L'équation (2.34) On a :

$$-1 \leq \cos (\omega_a t - \varphi) \leq 1 \quad (2.35)$$

Donc la courbe de $x(t)$ est comprise entre les de exponentielles $C.e^{-\beta t}$ et $-C.e^{-\beta t}$ (voir la figure 2)

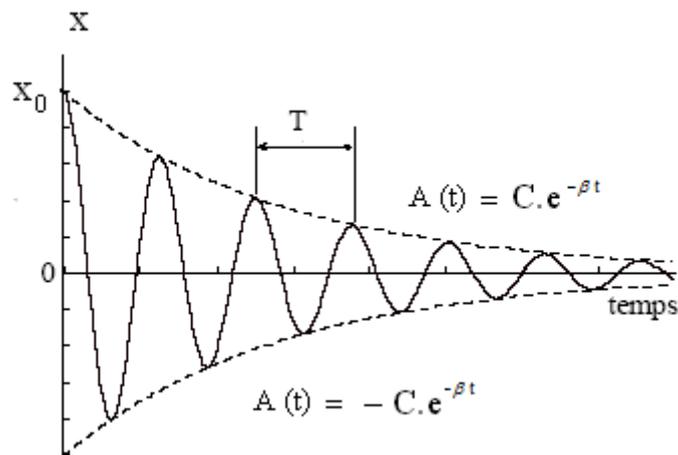


Figure 2.2 : Schéma illustratif du mouvement périodique amorti

b. La pseudo période

La pseudo-période (T) est donnée par (voir la figure 2) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad (2.36)$$

Cette période est différente de la période propre du système donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.37)$$

A partir de l'équation (2.36) :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \succ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.38)$$

c. Le décrétement logarithmique

Comparons les élongations $x(t)$ et $x(t + T)$, on obtient :

$$\frac{x(t + T)}{x(t)} = \frac{C.e^{-\beta(t+T)} \cos[\omega_a(t + T) - \varphi]}{C.e^{-\beta t} \cos(\omega_a t - \varphi)} = e^{-\beta T} \quad (2.39)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(t + T)} = \beta.T = \delta \quad (2.40)$$

On appelle décrétement logarithmique la quantité :

$$\delta = \beta.T \quad (2.41)$$

Ce décrétement caractérise la décroissance des élongations maximales à chaque période due à l'amortissement du mouvement.

d. Taux d'amortissement

le taux d'amortissement note dans la littérature par ξ est :

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (2.42)$$

avec

c : le coefficient d'amortissement du système

c_c : l'amortissement critique du système donné par:

$$c_c = 2\sqrt{k.m} \quad (2.43)$$

2.3 Vibrations forcés

contrairement à la vibration libre, la vibration forcée est une vibration entretenue par une force dynamique externe

2.3.1 Excitation harmonique

Supposant le système de la figure 2.3 soumis à un chargement harmonique $p(t)$ d'amplitude p_0 et de fréquence circulaire $\bar{\omega}$, l'équation différentielle de mouvement est de forme (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.44)$$

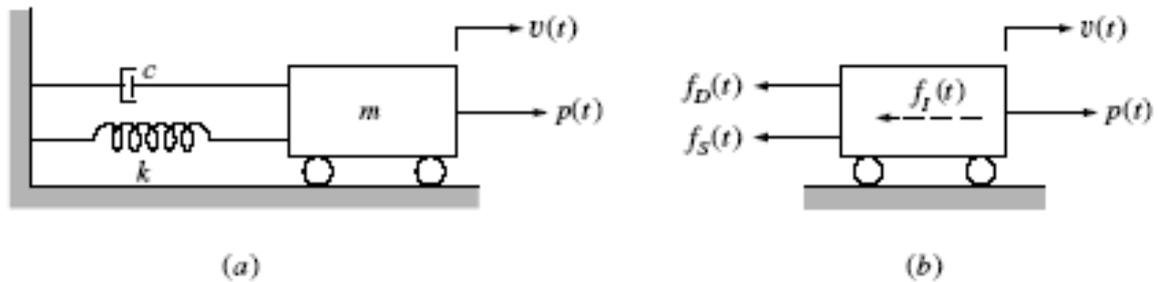


Figure 2.3 : Système à ASDDL idéalisé : (a) composante de base, (b) forces en équilibre [1]

Avant de considérer le cas amorti, de préférence étudier le cas sans amortissement visqueux ce qui implique l'équation différentielle de mouvement suivante :

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.45)$$

La solution complémentaire dite aussi solution sans second membre ou bien solution homogène est la suivante :

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.46)$$

La solution particulière dite aussi solution permanente dépend de la forme du chargement appliqué, dans ce cas il s'agit d'un chargement harmonique et il est raisonnable de supposer que la réponse est harmonique et en phase avec la charge appliquée (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

$$u_p(t) = C \sin \bar{\omega} t \quad (2.47)$$

Où « C » est l'amplitude maximale de la réponse (c'est à calculer).

Remplaçant l'équation (2.47) dans l'équation (2.45) donne

$$-m \bar{\omega}^2 C \sin \bar{\omega} t + k C \sin \bar{\omega} t = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.48)$$

Divisant l'équation (2.48) par $\sin \bar{\omega} t$ et par « k » sachant que $k / m = \omega^2$, on obtient après quelques réarrangement :

$$C = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] \quad (2.49)$$

Où « β » représente le rapport entre la fréquence appliquée et la fréquence propre du système.

$$\beta = \bar{\omega} / \omega \quad (2.50)$$

La solution générale de l'équation (2.45) est la combinaison entre l'équation (2.46) et l'équation (2.47) utilisant l'équation (2.49) :

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] \sin \bar{\omega} t \quad (2.51)$$

Les valeurs de « A » et « B » sont à déterminer utilisant les conditions initiales. Si $u_0(t) = \dot{u}_0(t) = 0$, il est facile de montrer que :

$$A = 0, B = -\frac{p_0 \beta}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] \quad (2.52)$$

L'équation (2.51) devient :

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad (2.53)$$

Où : $p_0 / k = u_{st}$ est le déplacement produit par la force p_0 appliquée statiquement, $1 / (1-\beta^2)$ est le « Magnification factor » (MF) représentant l'effet d'amplification du chargement harmonique appliqué.

Dans l'équation (2.53), $\sin \bar{\omega} t$ représente la composante de la réponse par rapport à la fréquence du chargement appliqué, elle est dite la réponse permanente et directement reliée au chargement. Aussi, $\beta \sin \omega t$ est la composante de la réponse par rapport à la fréquence propre du système, c'est l'effet de la vibration libre contrôlé par les conditions initiales. Puisque dans le cas pratique, l'amortissement tend à annuler le dernier terme, la réponse est dite transitoire, dans le cas contraire (non amorti) la réponse persiste à l'infini (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

a. Rapport des réponses

Une mesure convenable de l'influence du chargement dynamique est prévue par le rapport entre la réponse dynamique en déplacement et le déplacement produit par une application statique de la charge p_0 , c à d (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} = \frac{u(t)}{p_0/k} \tag{2.54}$$

A partir de l'équation (2.54), il est évident que le rapport de réponse résultant d'un chargement sinusoïdal pour un système non amorti ayant comme conditions initiales $u_0(t) = \dot{u}_0(t) = 0$ est :

$$R(t) = \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \tag{2.55}$$

La figure 2.3 explique la notion de réponse d'une façon détaillée, la figure 2.4 (a) représente le régime permanent alors que la figure 2.4 (b) représente la dite réponse transitoire. Dans cet exemple il a été supposé que $\beta = 2/3$ (la fréquence appliquée est égale au deux tiers de la fréquence propre du système). La réponse totale $R(t)$ est la somme des deux types de réponses, représentée dans la figure 2.4 (c) (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

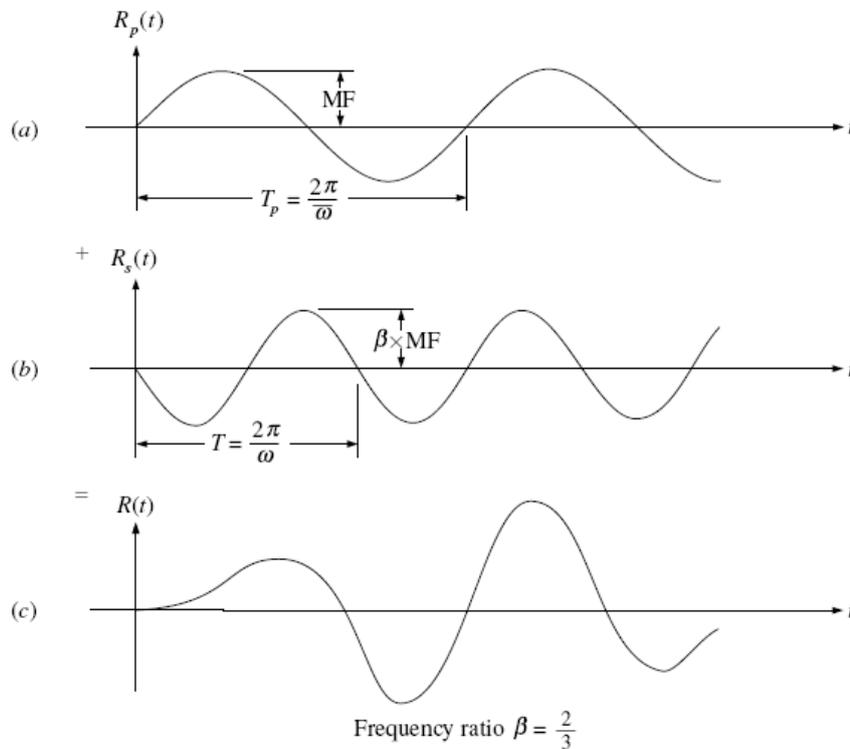


Figure 2.4 : Rapport de réponse induit par une excitation sinusoïdale avec des conditions aux limites nulles (a) régime permanent, (b) transitoire, (c) total $R(t)$ [1]

b. Système amorti

L'équation différentielle d'un mouvement amorti soumis à une excitation harmonique est donné par :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = \frac{P_0}{m}\sin\bar{\omega}t \quad (2.56)$$

La solution homogène de cette équation donne la réponse en oscillations libres du système amorti, elle est donnée par (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2.57)$$

La solution particulière est de la forme :

$$u_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t \quad (2.58)$$

Où le second terme est nécessaire car un système amorti n'est généralement pas en phase avec le chargement appliqué.

Reportant l'équation (2.58) dans l'équation (2.56) et en séparant les termes en sinus et en cosinus, on aura :

$$\left[-G_1\bar{\omega}^2 - G_2\bar{\omega}(2\xi\bar{\omega}) + G_1\omega^2 \right] \sin \bar{\omega} t = \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (2.59)$$

$$\left[-G_2\bar{\omega}^2 - G_1\bar{\omega}(2\xi\bar{\omega}) + G_2\omega^2 \right] \cos \bar{\omega} t = 0 \quad (2.60)$$

Ces deux relations doivent être satisfaisantes individuellement car les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas simultanément. En divisant par $\bar{\omega}^2$ on obtient :

$$G_1(1 - \beta^2) - G_2(2\xi\beta) = \frac{P_0}{k} \quad (2.61)$$

$$G_2(1 - \beta^2) - G_1(2\xi\beta) = 0$$

D'où les facteurs de réponse :

$$G_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (2.62)$$

$$G_2 = \frac{P_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

En reportant ces expressions dans la solution particulière et en combinant cette dernière avec la solution homogène on obtient la solution générale :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left[(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t \right] \quad (2.63)$$

Le premier terme représente la réponse transitoire. Les constantes A et B pourraient être calculé à partir des conditions initiales, mais ce terme disparaît rapidement lorsque « t » croît, et ne présente donc que peu d'intérêt. Le second terme représente la composante permanente de la réponse ; sa fréquence est celle de la charge appliquée, mais avec un déphasage. Ce comportement en oscillations permanentes apparait clairement dans le plan complexe (figure 2.5). Le module ρ de la résultante représente l'amplitude de la réponse permanente (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$\rho = \frac{P_0}{k} \left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.64)$$

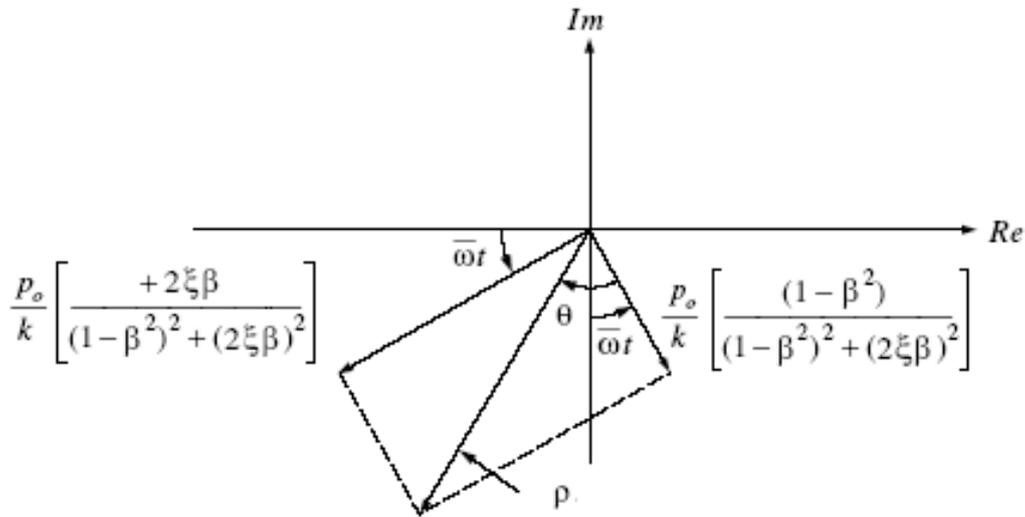


Figure 2.5 : Représentation de l'oscillation en réponse permanente [1]

Et le déphasage θ est donné par :

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \quad (2.65)$$

Où $0 < \theta < 180^\circ$. La composante permanente de la réponse peut donc s'exprimer par :

$$u(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2.66)$$

Le rapport D de l'amplitude de la réponse en mouvement permanent et du déplacement statique qui serait produit par la force p_0 s'appelle Facteur d'amplification dynamique ; il s'écrit :

$$D \equiv \frac{\rho}{p_0/k} = \left[(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.67)$$

L'expression (2.67) montre que le facteur d'amplification dynamique D varie avec le rapport des fréquences β et avec le facteur d'amortissement ξ (voir la figure 3.4) (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

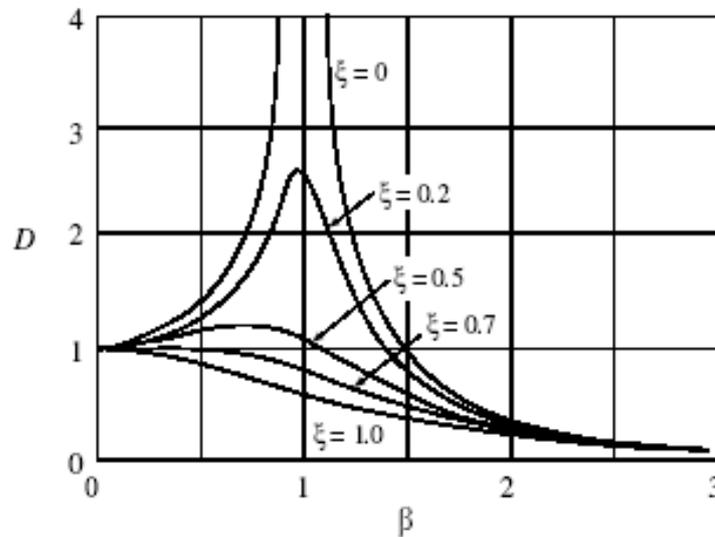


Figure 2.6 : Variations du facteur d'amplification dynamique

L'angle de déphasage θ est également fonction de β et; ses variations sont représentées en figure 2.7.

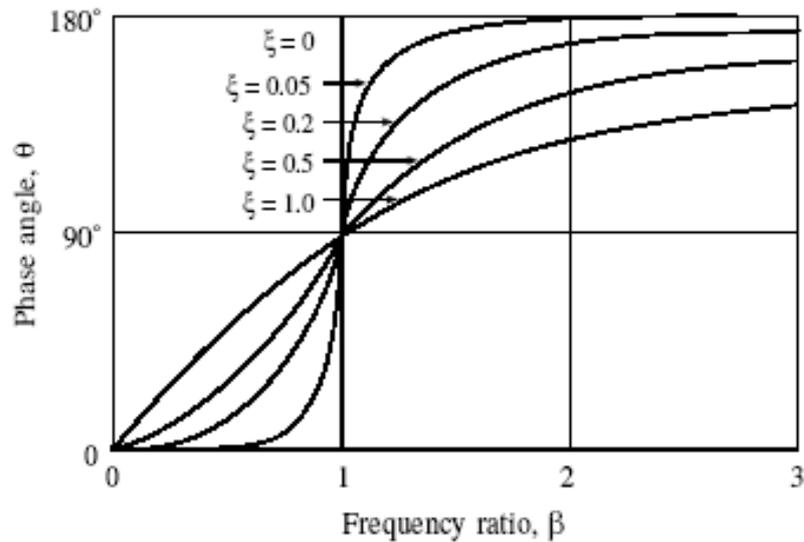


Figure 2.7 : Variation du déphasage avec l’amortissement et la fréquence

c. La résonance

La figure 2.6 montre qu’un pic de la réponse en oscillation permanente se produit, pour les systèmes peu amortis, à un rapport des fréquences proches de l’unité (c à d la fréquence du chargement appliqué est égale à la fréquence naturelle de vibration), il se produit le phénomène de résonance, dans ce cas ($\beta = 1$) (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$D = \frac{1}{2\xi} \quad (2.68)$$

Bien que l’on en soit proche, ceci ne représente pas la réponse maximale exacte des systèmes amortis. Pour les structures courantes, dont le coefficient d’amortissement ξ est inférieur à $1/\sqrt{2}$, on trouve que la fréquence du pic de la réponse est (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$\beta_{pic} = \sqrt{1-2\xi^2} \quad (2.69)$$

Et

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.70)$$

Pour des faibles amortissements il ya très peu de différence entre les valeurs obtenues par les équations (2.69) et (2.70)

A la résonance la réponse totale du système sollicité par un chargement harmonique au la forme suivante:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) - \frac{p_0}{k} \frac{\cos \omega t}{2\xi} \quad (2.71)$$

Supposons que le système soit au repos à l'instant initiale ($u(0) = 0 = \dot{u}(0)$).

Les constantes sont :

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_D} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \quad B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \quad (2.72)$$

L'équation (2.71) devient :

$$u(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{p_0}{k} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t + \cos \omega_D t \right) - \cos \omega t \right] \quad (2.73)$$

En ce qui concerne l'amortissement, le terme en sinus de cette équation contribuera très peu à l'amplitude de la réponse ; de plus la fréquence amortie est presque égale à la fréquence non amortie. Ainsi le facteur de réponse dans ce cas peut être approché par (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$R(t) = \frac{u(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (2.74)$$

Pour un amortissement nul, l'équation (2.74) devient indéterminée. La figure 2.8 montre comment la réponse s'amplifie en cas de résonance, avec et sans amortissement ; dans les deux cas on voit clairement que la réponse s'amplifie d'une manière progressive. Dans le système non amorti la réponse s'accroît de la quantité de π à chaque cycle. Il est clair sur l'autre schéma que la présence d'amortissement limite l'amplitude de la réponse résonante. Le nombre de cycle nécessaires pour que la réponse résonante atteigne son amplitude maximum dépend du facteur d'amortissement (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

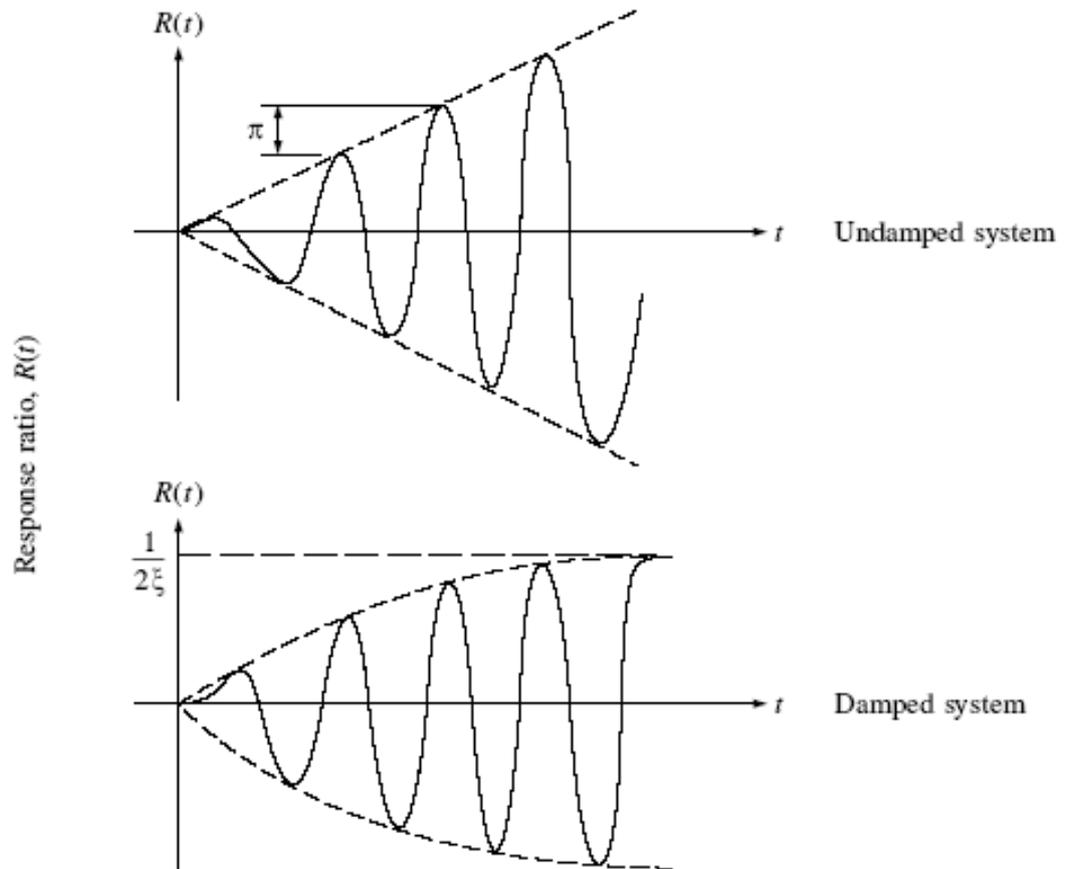


Figure 2.8: Réponse à un chargement en résonance ($\beta = 1$) pour des conditions initiales au repos [1].

Les courbes qui mettent en évidence la croissance de l'enveloppe de la réponse correspondent à plusieurs valeurs de l'amortissement en fonction du nombre de cycle de réponse (figure 2.9). On remarque qu'un nombre de cycles très limité suffit pour parvenir à la réponse maximum (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

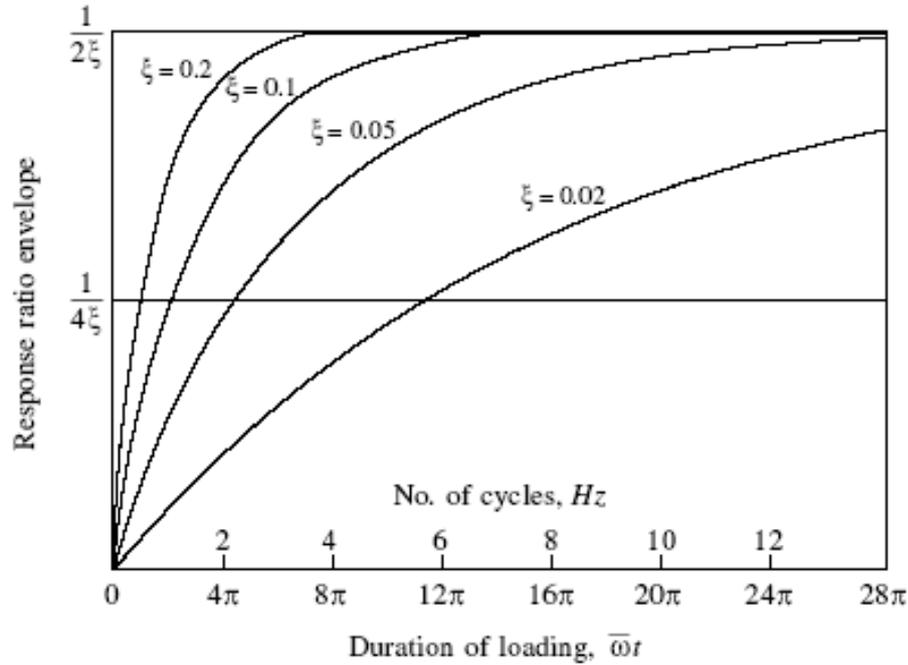


Figure 2.9 : Taux de croissance de la réponse résonante à partir de l'état au repos[1].

3.3.2 Réponse au chargement Périodique

la section précédente nous a permis d'écrire la réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation harmonique. Il est possible d'utiliser les mêmes expressions pour écrire la réponse à un chargement périodique quelconque : il suffit en effet d'exprimer le chargement en série de fourier. La réponse correspondant à chaque terme de la série est alors simplement la réponse à un chargement harmonique, en utilisant le principe de superposition, on en déduit la réponse totale comme la somme des réponses dues à chaque terme de la série (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

Considérons un chargement périodique quelconque exprimé en série de Fourier :

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t \quad (2.75)$$

Où T_p est la période d'excitation. Cette expression est représentée à la figure 2.10. Les coefficients de la série s'obtiennent par les expressions :

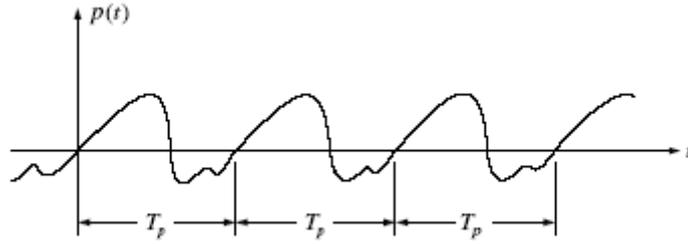


Figure 2.10 : Chargement périodique quelconque [1].

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt \\
 b_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

a. Réponse à un chargement exprimé en série de Fourier

Un chargement périodique arbitraire exprimé en série de Fourier comprend une force constante (la force moyenne représentée par le coefficient a_0) et une série de chargements harmoniques de fréquences $\bar{\omega}_n$ et d'amplitudes a_n et b_n .

Pour un système à un degré de liberté, la composante permanente de la réponse produite par chaque terme en sinus de la série est donnée par une expression de la forme de l'équation (2.51) sans terme transitoire (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$\text{(Termes en Sinus)} \quad u_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \sin n \bar{\omega}_1 t \tag{2.77}$$

$$\text{Où : } \beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$$

De même la réponse en régime permanent pour les termes en cosinus est donnée par :

$$\text{(Termes en Cosinus)} \quad u_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cos n \bar{\omega}_1 t \tag{2.78}$$

$$\text{(Terme constant)} \quad u_0 = \frac{a_0}{k} \tag{2.79}$$

La réponse totale devient alors :

$$u(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta_n^2} (a_n \cos n \bar{\omega}_1 t + b_n \sin n \bar{\omega}_1 t) \right] \quad (2.80)$$

Les coefficients a_n et b_n sont donnés par les formules (2.76).

Pour prendre en compte l'amortissement d'un système à un degré de liberté soumis à un chargement périodique, il suffit de substituer aux équations que nous venons d'utiliser les expressions obtenues plus haut pour un système amorti soumis à une excitation harmonique: équation (2.20). Dans ce cas, la réponse totale en régime permanent devient :

$$u(t) = \frac{1}{k} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \cdot \left\{ [2\xi a_n \beta_n + b_n (1-\beta_n)^2] \sin \bar{\omega}_n t + [a_n (1-\beta_n)^2 - 2\xi b_n \beta_n] \cos \bar{\omega}_n t \right\} \right] \right) \quad (2.81)$$

2.3.3 Excitation Impulsive

a. Nature des charges Impulsives

Une charge impulsive consiste en une impulsion unique semblable à celle que l'on a représentée en figure 2.11 ; elle est généralement de courte durée. Ces charges impulsives, par exemple les chocs, sont d'une grande importance dans le calcul de certaines structures, comme par exemple de véhicules tels que des camions. L'amortissement présente alors beaucoup moins d'importance pour la réponse maximum que dans le cas de charges périodiques. La réponse maximum à une charge impulsive sera atteinte dans un laps de temps très court, avant que les forces d'amortissement n'aient le temps d'absorber une énergie conséquente. Pour cette raison, nous considérons dans ce paragraphe la réponse non amortie (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

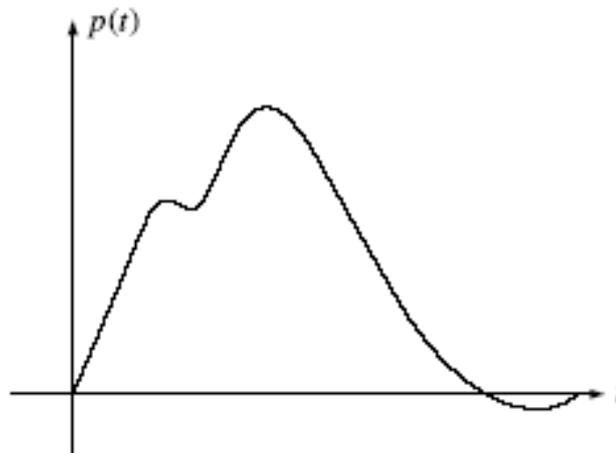


Figure 2.11 : Chargement impulsif quelconque [1].

b. Impulsion en forme sinusoïdale

Certaines charges impulsives peuvent être représentées par des fonctions analytiques simples, et dans ce cas on peut obtenir des solutions littérales pour les équations de mouvements. Considérons par exemple l'impulsion en forme de sinusoïde représentée en figure 2.12, la réponse sera divisée en deux phases, correspondant l'une à l'intervalle pendant lequel la charge agit, et l'autre à la phase d'oscillation libre (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

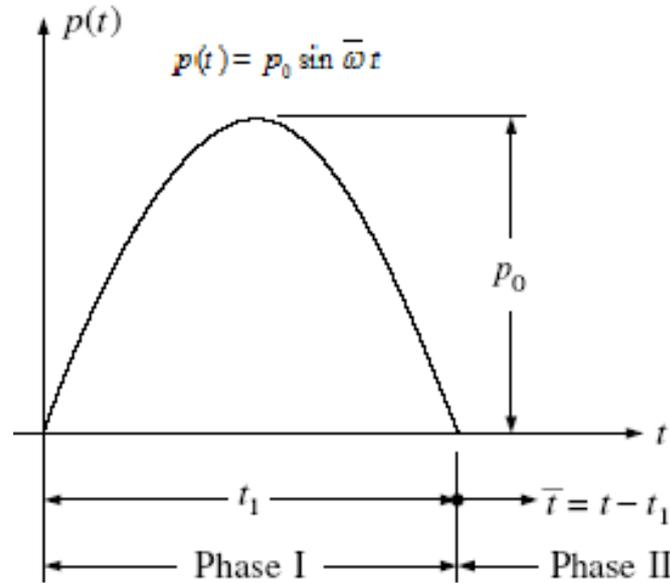


Figure 2.12 : Impulsion sinusoïdale [1].

Phase I : La structure est soumise à un chargement harmonique initié au repos. La réponse non amortie, comprenant le transitoire et le terme du régime permanent, est donnée par :

$$\text{(pour } 0 \leq t \leq t_1) \quad u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad (2.81)$$

Phase II : Le mouvement de vibration libre qui se produit ensuite dépend du déplacement $u(t_1)$ et de la vitesse $\dot{u}(t_1)$ existant à la fin de la phase I, et peut être exprimé comme suit :

$$\text{(pour } \bar{t} = t - t_1 \geq 0) \quad u(t) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t} \quad (2.82)$$

Où la nouvelle variable temps $\bar{t} = t - t_1$ a été utilisée.

L'amplitude de la réponse dynamique qui résulte de la charge impulsive dépend du rapport entre la durée de la charge et la période de vibration propre de la structure. Le facteur de réponse $R(t) = u(t)/(p_0/k)$ est représenté en figure 2.13 pour $t_1/T = 3/4$. A fins de

comparaison on a également tracé $p(t)/k$ qui présente une valeur maximale unité sur l'échelle du facteur de réponse.

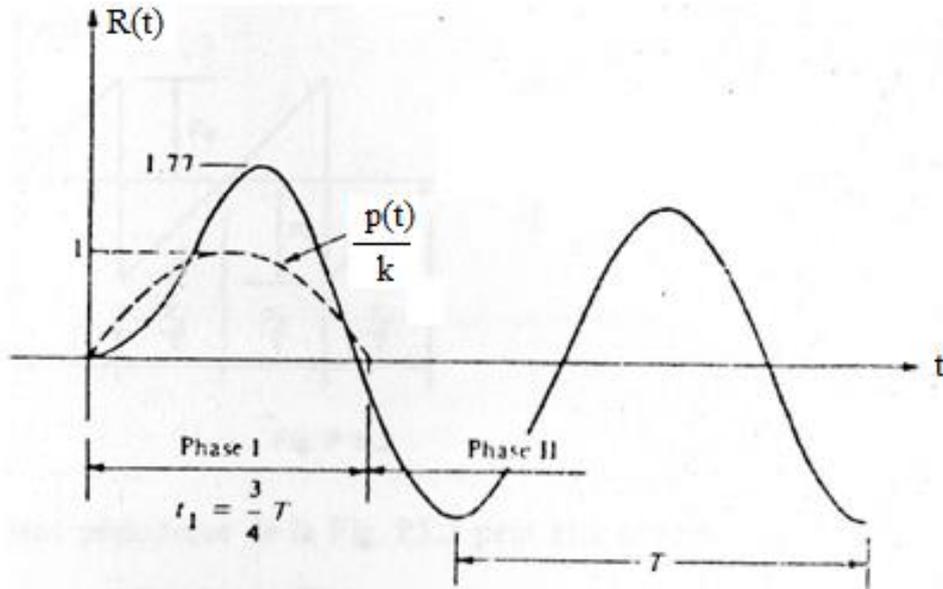


Figure 2.13 : Facteur de réponse dû à une impulsion sinusoïdale [1].

En mécanique des structures, la réponse maximum produite par la charge impulsive présente souvent plus d'intérêt que l'histoire complète. L'instant où elle se produit peut être déterminé par :

$$\frac{d u(t)}{d t} = 0 = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \omega t) \quad (2.83)$$

D'où :

$$\cos \bar{\omega} t = \cos \omega t$$

$$\text{Et} \quad \bar{\omega} t = 2 \pi n \pm \omega t \quad n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots \quad (2.84)$$

Cette expression n'est bien sur applicable que tant que $\bar{\omega} t \leq \pi$, c'est-à-dire si la réponse maximum se produit alors que la charge impulsive n'a pas fini d'agir (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

Dans le cas particulier où la fréquence de la charge approche la fréquence de la vibration libre, c'est-à-dire où $\bar{\omega} \rightarrow \omega$, le moment où se produit la réponse maximum s'obtiendra en faisant $n = 1$ et en utilisant le signe négatif de l'équation (2.78), ce qui mène à (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$\bar{\omega} t = \frac{2 \pi}{1 + (\omega / \bar{\omega})} \quad (2.85)$$

L'amplitude de la réponse maximum peut alors s'obtenir en reportant l'équation (2.85) dans l'équation (2.81), le résultat n'est applicable que si $\bar{\omega} t \leq \pi$, ce qui sera le cas si $\beta < 1$, c'est-à-dire si $\bar{\omega} < \omega$.

Pour $\beta > 1$ ($\bar{\omega} > \omega$) la réponse maximum se produit durant la phase de vibration libre (phase II). Les déplacements et vitesse initiaux de cette phase sont données par introduction de $\bar{\omega} t_1 = \pi$ dans l'équation (2.81) (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$\begin{aligned} u(t_1) &= \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (0 - \beta \sin \frac{\pi}{\beta}) \\ \dot{u}(t_1) &= \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1 - \beta^2} (-1 - \cos \frac{\pi}{\beta}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

L'amplitude de ce mouvement de vibration libre est alors :

$$\rho = \left\{ \left[\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [u(t_1)]^2 \right\}^{1/2} = \frac{p_0/k}{1 - \beta^2} \cdot \beta \cdot (2 + 2 \cos \frac{\pi}{\beta})^{1/2} \quad (2.81)$$

D'où le facteur d'amplification dynamique dans ce cas :

(pour $\beta > 1$, $t > t_1$)

$$D = \frac{u_{\max}}{p_0/k} = \frac{2 \beta}{1 - \beta^2} \cos \frac{\pi}{2 \beta} \quad (2.82)$$

c. Impulsion Rectangulaire

Le second type d'impulsion que nous considérons sera rectangulaire, voir la figure (2.14). La réponse sera une fois encore divisée en deux phases : chargement et vibrations libres (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

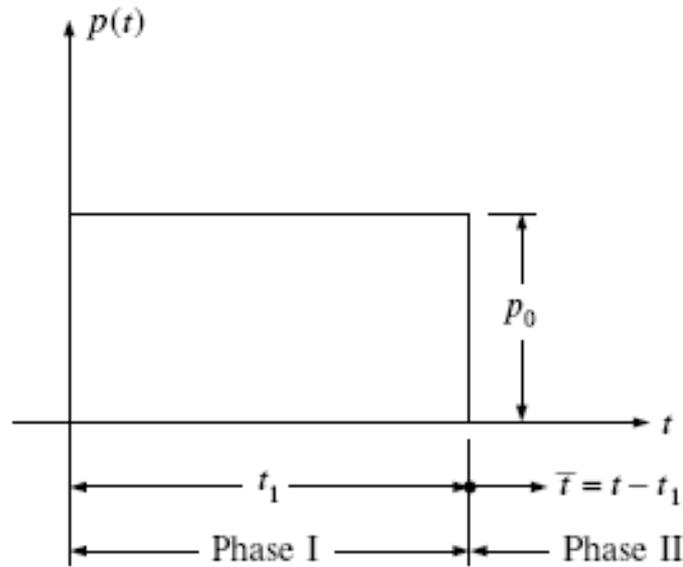


Figure 2.14: Impulsion Rectangulaire [1].

Phase I : Une charge appliquée de manière instantanée et constante durant la phase I est appelée échelon. La solution particulière pour un chargement en échelon est simplement la flèche correspondante.

$$u_p = \frac{P_0}{k} \quad (2.83)$$

On tire de ce résultat la solution générale, avec des constantes de vibration libre calculées pour satisfaire aux conditions initiales (repos) :

$$\text{(Pour } 0 \leq t \leq t_1) \quad u(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad (2.84)$$

Phase II : La vibration libre de la phase II est une fois donnée par:

$$\text{(Pour } \bar{t} = t - t_1 \geq 0) \quad u(t) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t} \quad (2.85)$$

Pour cette impulsion rectangulaire, il est évident que la réponse maximum se produira toujours dans la phase I si $t_1 \succ T/2$, et que le facteur d'amplification dynamique D est 2 dans ce cas. Pour des chargements de plus courte durée, la réponse maximum se produira pendant la vibration libre de la phase II, et l'amplitude de la réponse sera donnée par :

$$\rho = u_{\max} = \sqrt{\left[\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [u(t_1)]^2} \quad (2.86)$$

Avec $\dot{u}(t_1) = p_0 \omega / k \sin \omega t_1$ et $\omega = 2\pi/T$ ceci devient :

$$u_{\max} = \frac{p_0}{k} \left[\left(1 - 2 \cos \frac{2\pi}{T} t_1 + \cos^2 \frac{2\pi}{T} t_1 \right) + \sin^2 \frac{2\pi}{T} t_1 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{p_0}{k} \left[2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t_1 \right) \right]^{1/2} \quad (2.87)$$

D'où

$$D = \frac{u_{\max}}{p_0/k} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T} \quad \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2} \quad (2.88)$$

Ainsi le facteur d'amplification dynamique varie comme le sinus du rapport t_1/T pour les rapports inférieurs à $1/2$.

d. Impulsion Triangulaire

Le dernier chargement en impulsion que nous considérons sera l'impulsion triangulaire décroissante, figure 2.15 (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

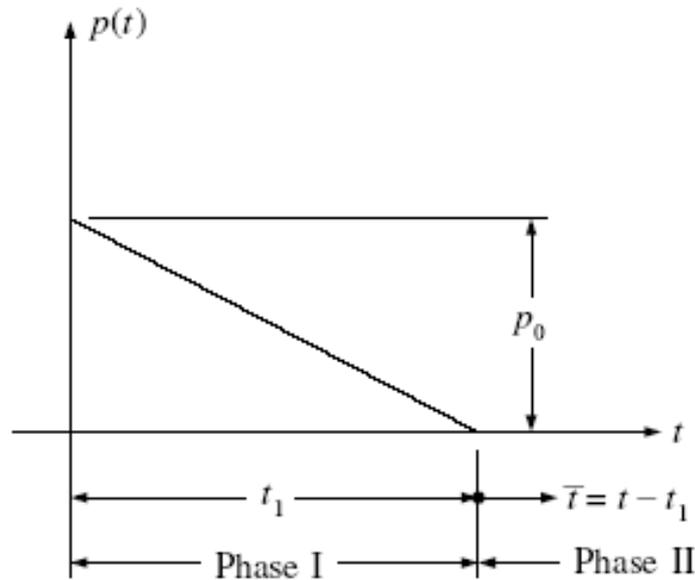


Figure 2.15 : Impulsion triangulaire [1].

Phase I : Dans cette phase, le chargement s'écrit $p_0(1-t/t_1)$, et on montre aisément que la solution particulière correspondant à ce chargement s'écrit:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1} \right) \quad (2.89)$$

On suppose des conditions initiales nulles ; on calcule les constantes de la vibration libre et on obtient :

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega t_1} - \cos \omega t - \frac{t}{t_1} + 1 \right) \quad (2.90)$$

Phase II : Les valeurs de l'équation (2.90) et de sa dérivée première à la fin de la phase I ($t = t_1$) donnent :

$$u(t_1) = \frac{p_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} - \cos \omega t_1 \right) \quad (2.91)$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{p_0 \omega}{k} \left(\frac{\cos \omega t_1}{\omega t_1} + \sin \omega t_1 - \frac{1}{\omega t_1} \right)$$

Elles peuvent être reportées pour obtenir la réponse en vibration libre de la phase II.

De même que dans les autres exemples, on détermine les valeurs maximales de ces fonctions en calculant leurs valeurs aux instants de vitesse nulle. Pour un chargement de très courte durée ($t_1/T < 0.4$) la réponse maximum se produit durant l'intervalle de chargement (phase I). Des valeurs du facteur d'amplification dynamique $D = u_{\max} / (p_0/k)$ calculées pour diverses durées de chargement sont présentées en Table 2.1 (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

Table 2.1 : Facteur d'amplification dynamique dans le cas d'une impulsion triangulaire

t_1/T	0.20	0.40	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
D	0.60	1.05	1.19	1.38	1.53	1.68	1.76

e. Spectres de réponse ou spectres de choc

D'après les résultats précédents on voit que la réponse maximale produite dans une structure sous-amortie à un seul degré de liberté par une forme donnée de chargement en impulsion, ne dépend que du rapport t_1/T entre la durée de l'impulsion et la période naturelle de la structure. Il est donc intéressant de tracer le facteur d'amplification dynamique D en fonction de t_1/T pour diverses formes de chargements en impulsion. Par exemple, le contenu de la table 2.1 a été tracé sous forme de courbe en figure 2.16. Des tracés analogues correspondant à d'autres formes de charges impulsives apparaissent sur cette figure ; ces courbes sont connues sous le nom de spectres de réponse en déplacement, ou simplement spectres de réponse des charges impulsives. On peut généralement utiliser ce genre de tracés pour obtenir

une approximation acceptable de l'effet maximum à attendre d'un type de chargement impulsif donné agissant sur une structure simple (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

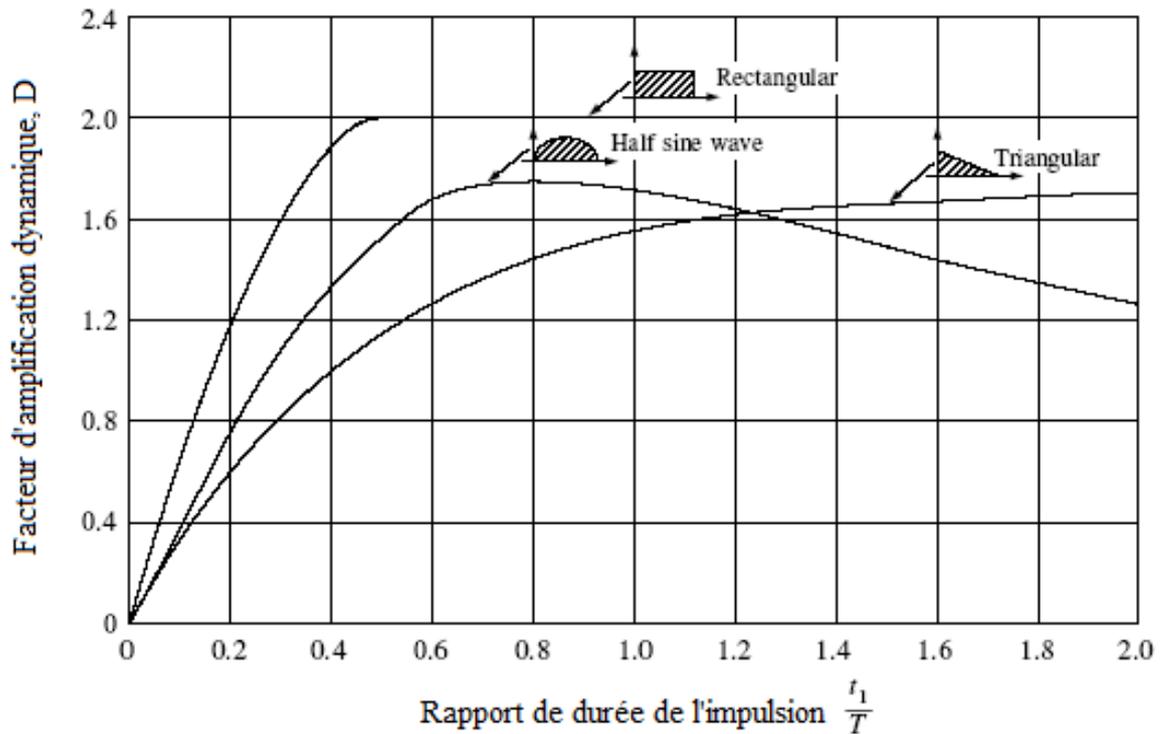


Figure 2.16 : Spectres de la réponse en déplacement pour trois types d'impulsions [1].

Ces spectres de réponses permettent également de prédire la réponse de la structure à une accélération impulsive appliquée à sa base. Si cette accélération est $\ddot{u}_g(t)$, elle produira un chargement impulsif effectif $p_{eff}(t) = -m \ddot{u}_g(t)$. Si l'accélération maximum de la base est notée \ddot{u}_{g_0} , la charge impulsive effective maximum sera $p_{0\,eff} = -m \ddot{u}_{g_0}$. Le facteur d'amplification dynamique devient donc (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$D = \left| \frac{u_{\max}^t}{m \ddot{u}_{g_0} / k} \right| \quad (2.92)$$

Où en général seul le module de la réponse présente un certain intérêt. On peut encore écrire cela comme :

$$D = \left| \frac{\ddot{u}_{\max}^t}{\ddot{u}_{g_0}} \right| \quad (2.93)$$

Où \ddot{u}_{\max}^t est l'accélération totale maximum de la masse; cela provient du fait que dans un système non amorti le produit de la masse et de l'accélération totale doit être égal en module à

la force de rappel élastique $k u_{\max}$. Il est donc évident que les spectres de réponse de la figure 2.15 peuvent être utilisés pour déterminer la réponse maximum en accélération en présence de charges impulsives. Utilisés dans ce but, on appelle généralement ces tracés spectres de choc (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

f. Calcul approché de la réponse à un chargement par impulsion

L'étude des spectres de réponse présentés en figure 2.15 pour des impulsions rectangulaire, triangulaire et sinusoïdale et pour d'autres cas de chargement nous permet de tirer les deux conclusions suivantes (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

- 1) Dans le cas de chargements de longue durée, par exemple $t_1/T \gg 1$, le facteur d'amplification dynamique dépend principalement de la vitesse à laquelle la force atteint sa valeur maximum. Un chargement en échelon appliqué pendant un temps suffisamment long produit un facteur d'amplification dynamique $D = 2$. Un accroissement très progressif de la force conduit à un facteur égal à l'unité.

Dans le cas de chargement de courte durée, par exemple $t_1/T \ll 1/4$, l'amplitude du déplacement maximum u_{\max} dépend principalement de la valeur de l'impulsion appliquée

$I = \int_0^{t_1} p(t) dt$ et n'est que peu influencée par sa forme. Le facteur d'amplification D , par

contre, dépend directement de la forme de la fonction chargement car il est proportionnel au rapport entre l'aire délimitée par la fonction chargement et l'amplitude maximum au pic de cette même fonction. Ceci apparait très bien sur la figure 2.15 si on s'intéresse à la réponse dans le domaine des petites périodes. L'amplitude u_{\max} est donc la grandeur la plus significative permettant de mesurer la réponse (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

Une méthode commode pour approcher la réponse maximum à un chargement en impulsion de courte durée consiste donc à exprimer la variation de quantité de mouvement d'une masse m

$$m \Delta \dot{u} = \int_0^{t_1} [p(t) - k u(t)] dt \quad (2.94)$$

Où $\Delta \dot{u}$ est la variation de vitesse produite par l'application de l'impulsion $P(t)$. On notera que pour les impulsions de courte durée t_1 le déplacement $u(t_1)$ produit est de l'ordre de grandeur de $(t_1)^2$, alors que la variation de vitesse $\Delta \dot{u}$ est de l'ordre de grandeur de t_1 . Comme l'ordre

de grandeur de l'impulsion appliquée est également t_1 , le terme de rappel élastique $k u(t)$ tend vers zéro avec t_1 et est négligeable dans cette équation dans le cas des impulsions de courte durée. L'équation précédente peut donc s'écrire de la manière approchée suivante (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$m \Delta \dot{u} \doteq \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (2.95)$$

Ou encore :

$$\Delta \dot{u} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (2.96)$$

Pour $t > t_1$, la force appliquée est égale à zéro et la réponse est une vibration libre :

$$u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t}$$

Où $\bar{t} = t - t_1$. Or $u(t_1)$ est suffisamment petit pour être négligé en pratique, et de plus $\dot{u}(t_1) = \Delta \dot{u}$. On peut donc utiliser l'expression approchée suivante :

$$u(\bar{t}) \doteq \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega \bar{t} \quad (2.97)$$

2.3.4 Excitation dynamique quelconque

a. Intégrale de Duhamel pour un système sans amortissement

La procédure exposée dans la section précédente, qui donne une réponse approchée à une impulsion de courte durée, peut être généralisée au cas d'une excitation dynamique quelconque. Considérons un chargement dynamique quelconque $p(t)$, figure 2.17. Pendant la fraction de temps $d\tau$ il fait subir à la structure une impulsion $p(\tau) d\tau$, et on peut utiliser l'équation (5.19) pour calculer la réponse. La méthode devient exacte lorsque $d\tau$ devient infiniment petit. Ainsi pour $t > \tau$ la réponse produite par le chargement $p(t)$ est (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$d u(t) = \frac{p(\tau) d\tau}{m \omega} \sin \omega (t - \tau) \quad (2.98)$$

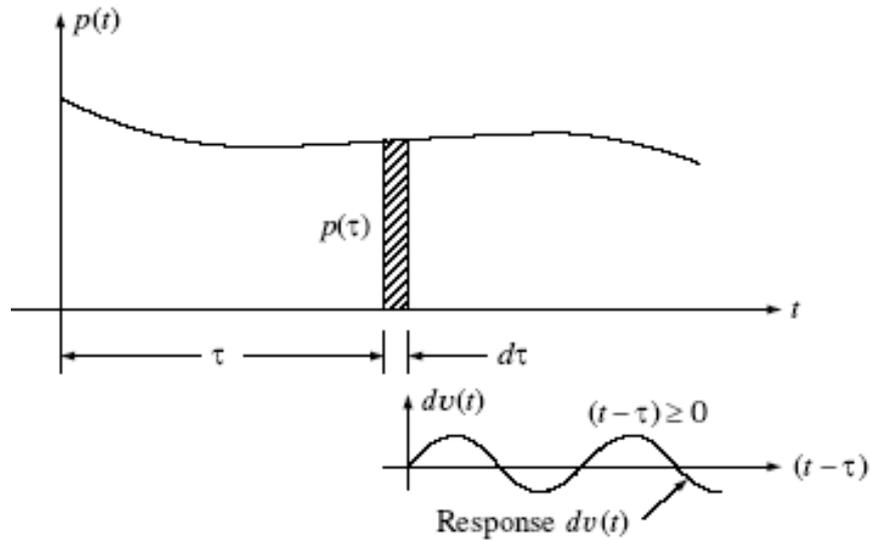


Figure 2.17 : Détermination de l'intégrale de Duhamel (système non amorti) [1]

Dans cette expression exacte au sens mathématique, $du(t)$ est l'expression différentielle de la réponse à l'impulsion $p(\tau) d\tau$, pour $t > \tau$, ce n'est pas la variation de u pendant la durée dt (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

La fonction complète peut alors être considérée comme une succession d'impulsions, chacune produisant une réponse du type exprimé dans l'équation précédente. En intégrant de 0 à t , on obtient donc la réponse de ce système linéaire à l'instant t (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.99)$$

Expression généralement connue sous le nom d'intégrale de Duhamel pour les systèmes sans amortissement. On peut l'utiliser pour calculer la réponse d'un système à un degré de liberté, non amorti, soumis à une excitation quelconque. Dans le cas d'une fonction de chargement entièrement quelconque, on aura bien sûr recours à une intégration numérique (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

L'équation (2.99) peut également s'écrire :

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.100)$$

Où

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) \quad (2.101)$$

L'équation (2.100) est appelé intégrale de convolution. Lorsque l'on calcule la réponse d'une structure à un chargement arbitraire en utilisant l'équation ci-dessus, on peut parler d'obtention de la réponse dans le domaine des temps. La fonction $h(t-\tau)$ est généralement appelée réponse à une impulsion unité (définie ici pour un système non amorti) car elle exprime la réponse du système à une impulsion de valeur unité appliquée à l'instant $t = \tau$ (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

Il a été supposé à l'équation (2.100) qu'à l'instant $t = 0$ le système été au repos. Dans le cas contraire, si $u(0) \neq 0$ ou $\dot{u}(0) \neq 0$, la solution générale comprend des termes complémentaires de vibration libre. Dans le cas général (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t + \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.102)$$

b. Calcul numérique de l'intégrale de Duhamel pour un système sans amortissement

Si la fonction décrivant le chargement appliqué est intégrable, la réponse dynamique de la structure peut être déterminée par une formule d'intégration (équation 2.99 ou équation 2.100). Dans de nombreux cas cependant, le chargement n'est connu que sous la forme de données expérimentales et la réponse doit être calculée par des procédures numériques. Dans ce genre de calculs il est utile de connaître l'identité trigonométrique $\sin(\omega t - \omega \tau) = \sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau$ et d'écrire l'équation (2.99) sous la forme (pour des conditions initiales nulles) (réf [1] traduite par Tahar Berrabah).

$$u(t) = \sin \omega t \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

Où

$$u(t) = \bar{A}(t) \sin \omega t - \bar{B}(t) \cos \omega t \quad (2.103)$$

Avec

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ \bar{B}(t) &= \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau \end{aligned} \quad (2.104)$$

Le calcul numérique de l'intégrale de Duhamel requiert donc le calcul numérique des intégrales $\bar{A}(t)$ et $\bar{B}(t)$. Considérons par exemple la première la fonction à intégrer est décrite graphiquement en figure 2.18.

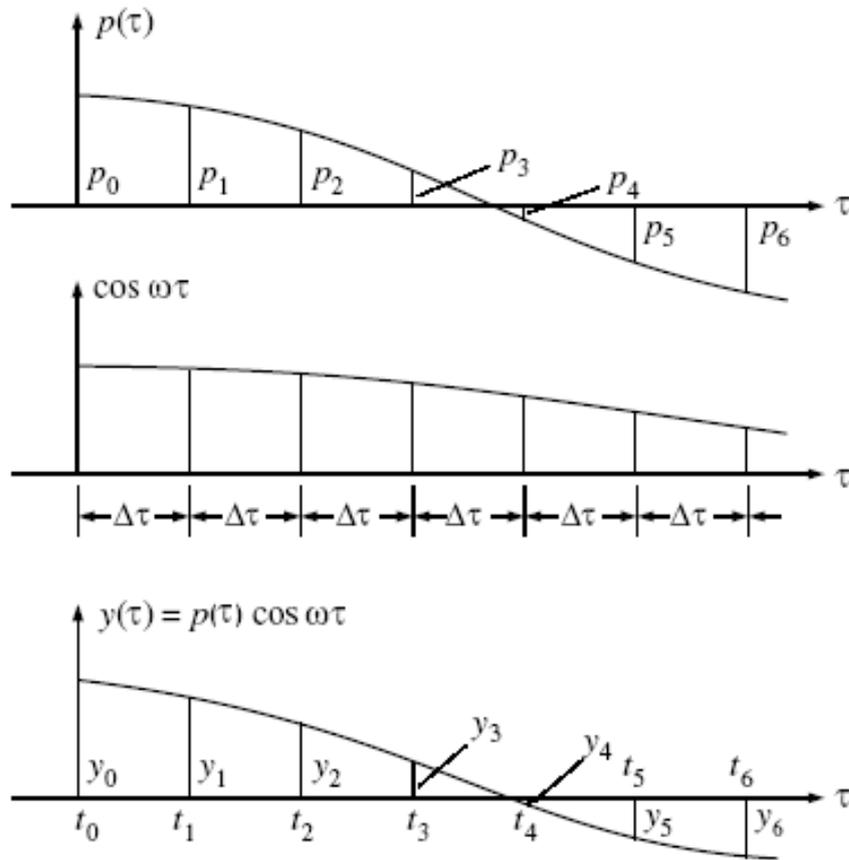


Figure 2.18 : Formulation du procédé numérique de sommation pour l'intégrale de Duhamel [1].

Pour simplifier le travail numérique, la fonction a été calculée pour des incréments de temps égaux $\Delta\tau$, les valeurs successives de la fonction étant repérées des indices adéquats. La valeur de l'intégrale peut alors être obtenue de manière approchée en sommant ces ordonnées après pondération par des facteurs appropriés. Mathématiquement (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau \doteq \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t) \quad (2.105)$$

Où $y(\tau) = p(\tau) \cos \omega\tau$, et $\frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{A}}$ représente le processus de sommation numérique (dont la forme spécifique dépend de l'ordre de l'approximation utilisée). Dans les trois cas les plus élémentaires les sommations s'effectuent comme suit (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

Simple sommation ($\zeta = 1$) :

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} \quad (2.106)$$

Méthode des trapèzes ($\zeta = 2$)

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N \quad (2.107)$$

Méthode de Simpson ($\zeta = 3$)

$$\sum_3^{\bar{A}}(t) = y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N \quad (2.108)$$

Où $N = t / \Delta\tau$ doit être un nombre pair pour la méthode de Simpson.

L'utilisation dans l'équation (1.105) de l'une quelconque des formules de sommation ci-dessus mène à une approximation de l'intégrale pour l'instant considéré t . En général cependant, on recherche l'histoire entière de la réponse et pas seulement le déplacement à un instant bien spécifique ; autrement dit, la réponse doit être calculée pour une succession d'instant t_1, t_2, \dots , séparés les uns des autres d'un intervalle $\Delta\tau$ (ou $2\Delta\tau$ si c'est la méthode de Simpson qui est utilisée). Pour obtenir cette histoire complète de la réponse, il est plus commode d'exprimer les sommations de l'équation (2.105) sous forme incrémentale (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

Simple sommation ($\zeta = 1$) :

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = \sum_1^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) \quad (2.109)$$

Méthode des trapèzes ($\zeta = 2$)

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = \sum_2^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + [p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) + p(t) \cos \omega t] \quad (2.110)$$

Méthode de Simpson ($\zeta = 3$)

$$\sum_3^{\bar{A}}(t) = \sum_3^{\bar{A}}(t - 2\Delta\tau) + \left[p(t - 2\Delta\tau) \cos \omega(t - 2\Delta\tau) + 4 p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) + p(t) \cos \omega t \right] \quad (2.111)$$

Où $\sum_\zeta^{\bar{A}}(t - \Delta\tau)$ représente la valeur de la sommation effectuée pour l'instant précédent

$(t - \Delta\tau)$.

Le calcul du terme $\bar{B}(t)$ peut s'effectuer exactement de la même manière, soit :

$$\bar{B}(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega\zeta} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t) \quad (2.112)$$

Où $\sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t)$ peut être calculé par des expressions identiques aux équations (2.106) mais avec des fonctions sinus au lieu des fonctions cosinus. La substitution des équations (2.111) et (2.112) dans l'équation (2.103) mène à l'équation de réponse finale pour un système sans amortissement :

$$u(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega\zeta} \left[\sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t) \sin \omega t - \sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t) \cos \omega t \right] \quad (2.113)$$

c. Réponse d'un système avec amortissement

La détermination de l'équation avec intégrale de Duhamel pour la réponse d'un système amorti à un chargement dynamique quelconque est pratiquement la même que dans le cas d'un système sans amortissement ; dans ce cas cependant, la vibration libre initiée par l'impulsion élémentaire $p(\tau) d\tau$ décroît exponentiellement. Si on pose $u(0) = 0$ et si on fait $\dot{u}(0) = [p(\tau) d\tau] / m$ dans l'équation du mouvement amorti libre, on obtient (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$d u(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left[\frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin \omega_D(t-\tau) \right] \quad t > \tau \quad (2.114)$$

Où la décroissance exponentielle commence dès que le chargement est appliqué, c'est-à-dire à l'instant $t = \tau$. On intégrant sur la durée totale du chargement on obtient :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2.115)$$

Si on compare l'équation (2.114) et l'intégrale de convolution de l'équation (2.115) on voit que la réponse d'un système amorti à une impulsion unité est donnée par :

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) \quad (2.116)$$

Pour calculer numériquement la réponse du système amorti, l'équation (2.114) peut être écrite sous une forme analogue à l'équation (2.113) : $u(t) = A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t$ (2.117)

Où dans ce cas :

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \cos \omega_D \tau d\tau \\ B(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \sin \omega_D \tau d\tau \end{aligned} \quad (2.118)$$

Ces intégrales peuvent être calculées par un procédé de sommation équivalent à celui qui a été utilisé précédemment mais tenant compte de la décroissance exponentielle. La première intégrale est donnée par (réf [1] traduite par Tahar Berrabah):

$$A(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega_D} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^A(t) \quad (2.119)$$

Où les sommations peuvent être exprimées pour les différents procédés considérés précédemment comme suit :

Simple sommation ($\zeta = 1$) :

$$\sum_1^A(t) = \left[\sum_1^A(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega_D(t - \Delta\tau) \right] \exp(-\xi \omega \Delta\tau) \quad (2.120)$$

Méthode des trapèzes ($\zeta = 2$)

$$\sum_2^A(t) = \left[\sum_2^A(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega_D(t - \Delta\tau) \right] \exp(-\xi \omega \Delta\tau) + p(t) \cos \omega_D t \quad (2.121)$$

Méthode de Simpson ($\zeta = 3$)

$$\begin{aligned} \sum_3^A(t) &= \left[\sum_3^A(t - 2\Delta\tau) + p(t - 2\Delta\tau) \cos \omega_D(t - 2\Delta\tau) \right] \exp(-\xi \omega 2\Delta\tau) \\ &+ 4p(t - \Delta\tau) \cos \omega_D(t - \Delta\tau) \exp(-\xi \omega \Delta\tau) + p(t) \cos \omega_D t \end{aligned} \quad (2.122)$$

Le terme B(t) est donné par des expressions similaires faisant intervenir des fonctions sinus.

La précision de la solution à laquelle il faut s'attendre de la part de ces procédés numériques dépend bien sur de la durée de l'intervalle $\Delta\tau$. En général, il doit être choisi suffisamment court à la fois pour que la fonction chargement et les fonctions trigonométriques soient bien

définies : $\Delta\tau \leq T/10$ est une règle pratique largement utilisée et qui donne généralement de bons résultats. La précision et le volume des calculs nécessaires s'accroissent avec l'ordre du procédé de sommation ; en règle générale, la précision accrue que procure la méthode de Simpson justifie son utilisation en dépit d'une plus grande complexité numérique (réf [1] traduite par Tahar Berrabah)

3.3.5 Réponse au mouvement d'un support (Excitation harmonique du support, Excitation sismique du support)

la réponse à l'excitation du support d'un système à un seul degré de liberté est illustrée à travers l'exemple suivant:

Pour le système de la figure suivante, on va utiliser la loi de Newton ainsi que celle de lagrange pour déterminer l'équation de mouvement de la masse « m » dû à l'excitation du support $u_g(t)$ (séisme).

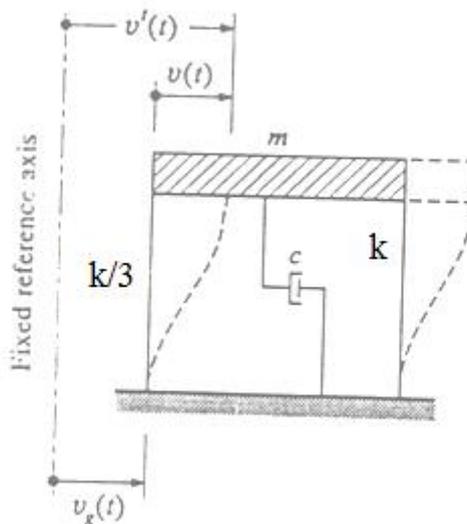


Figure 2.19

a. utilisant la loi de Newton

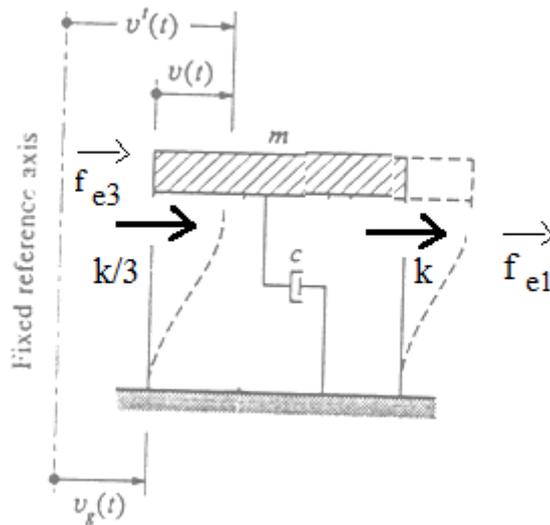


Figure 2.20

suivant la schématisation des forces montrée sur la figure précédente, l'équilibre des forces sera traduit comme suit:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{\delta}$$

$$\vec{f}_{e1} + \vec{f}_{e3} + \vec{f}_a = m.\vec{\delta}$$

$$-f_{e1} - f_{e3} - f_a = m.\delta$$

$$f_{e1} = k.u$$

$$f_a = c.\dot{u}$$

$$\delta = \ddot{u}(t)$$

$$-k.u - \frac{k}{3}.u - c.\dot{u} = m.\ddot{u}(t)$$

$$-\frac{4}{3}.k.u - c.\dot{u} = m.(\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

l'équation différentielle de mouvement est donc:

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + \frac{4}{3}.k.u = -m.\ddot{u}_g$$

2.utilisant la loi Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = - \frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} . m . \dot{u}^2$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} m . (\dot{u} + \dot{u}_g)^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2} . k . u^2 + \frac{1}{2} . \frac{k}{3} . u^2$$

Alors que:

$$E_{PT} = \frac{2.k}{3} u^2$$

$$L = m . (\dot{u} + \dot{u}_g)^2 - \frac{2.k}{3} . u^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2} . m . 2 . (\dot{u} + \dot{u}_g)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m . (\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = - \frac{2k}{3} . 2 . u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = - \frac{4}{3} . k . u$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} . c . \dot{q}^2$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} . c . \dot{u}^2$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2} . c . 2 . \dot{u}$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} = c . \dot{u}$$

$$m . (\ddot{u} + \ddot{u}_g) + \frac{4}{3} . k . u = - c . \dot{u}$$

l'équation différentielle de mouvement est donc:

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + \frac{4}{3}.k.u = -m.\ddot{u}_g$$

d'après les résultats, on remarque que l'excitation de la base est équivalente à l'application d'un chargement au niveau de la ,asse de valeur égale à la masse multipliée par l'accélération, cette charge ou bien force est dire "force fictive". il est à noter que l'excitation du support peut être de forme harmonique ou bien de forme générale.

3.3.6 Spectre de réponse

La réponse spectrale est la mesure du séisme la plus utilisée pour les ingénieurs. La réponse spectrale est un graphe qui schématise la réponse d'un oscillateur à un seul degré de liberté à un séisme spécifique. Par variation la fréquence (ou bien la période) et le taux d'amortissement du système, la quantité maximale de la réponse structurale peut être évaluée en terme de déplacement maximale, vitesse maximale et accélération maximale du système (réf [3] traduite par Tahar Berrabah).

La figure 2.21 montre un exemple de la réponse spectrale du séisme d'El Centro.

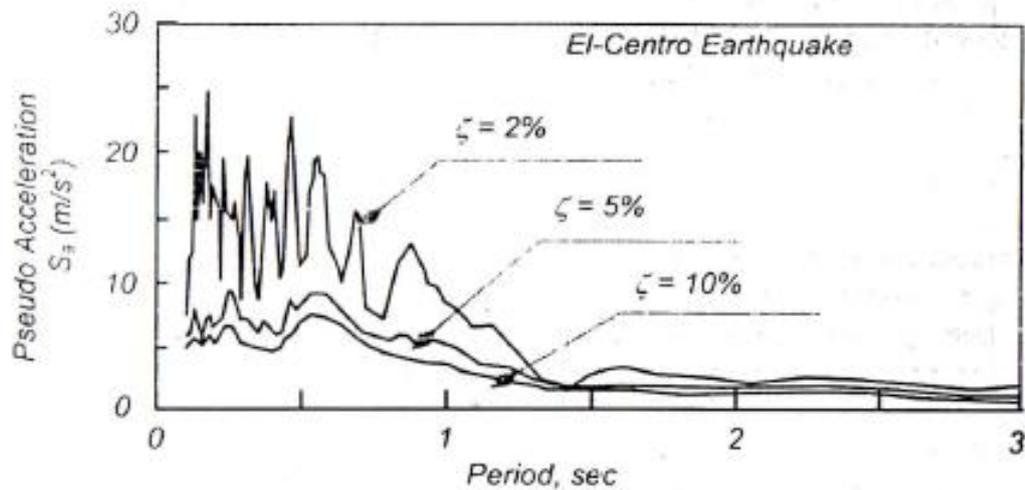


Figure 2.21 : Spectres de réponse [3].

a. Spectre de réponse d'un système élastique

La solution d'équation de mouvement sous excitation sismique est obtenue par une analyse numérique. Durant le temps d'excitation du séismique, la solution donne l'histoire de réponse du système en déplacement comme le montre la figure 2.22 (réf [3] traduite par Tahar Berrabah).

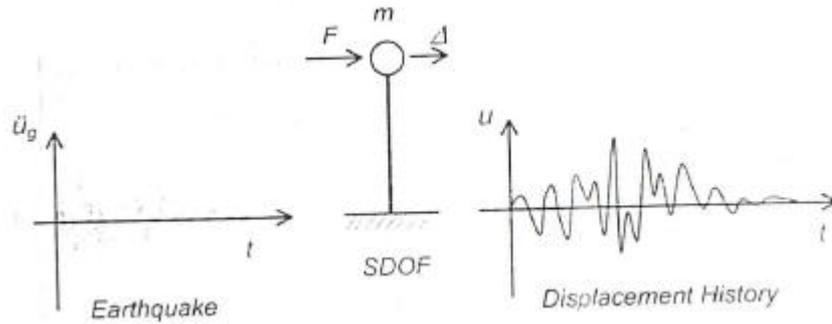


Figure 2.22 : Excitation sismique d'un système à un seul degré de liberté [3]

Pour un mouvement de sol spécifique $u_g(t)$, on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure c à d $|u_{\max}|$ qui va être notée par S_d . S_d est connue comme le déplacement spectrale qui est défini comme le déplacement relatif maximale d'un système à une seul degré de liberté soumis à un mouvement spécifique de la base (séisme). Il est important à noter qu'au moment du déplacement maximum, la force dans le ressort atteint sa valeur maximale, $f_{s,\max}$, puisque la vitesse est nulle, la force d'amortissement f_D va être égale à zéro. Donc (réf [3] traduite par Tahar Berrabah) :

$$f_{s,\max} = k.S_d \quad (2.123)$$

Si les deux termes d'équation précédente sont divisés par « m », donc :

$$f_{s,\max} / m = (k/m).S_d \quad (2.124)$$

Puisque $\omega^2 = k/m$, et si la quantité $f_{s,\max} / m$ est définie comme S_a , donc :

$$S_a = \omega^2.S_d \quad (2.125)$$

S_a est connue sous le nom de « pseudo accélération spectrale » puisque elle n'est pas l'accélération réelle de la masse, mais plutôt une accélération qui rassemble à un paramètre qui produit la force maximale dans le ressort quand elle est multipliée par la masse. Cette force maximale du ressort c'est ce qu'on appelle « cisaillement en base » de la structure (réf [3] traduite par Tahar Berrabah).

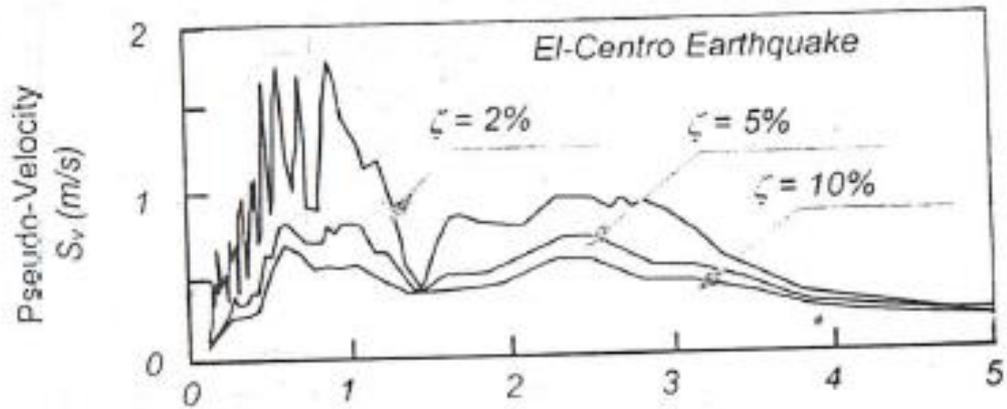


Figure 2.23 : Exemple d'un spectre de réponse [3]

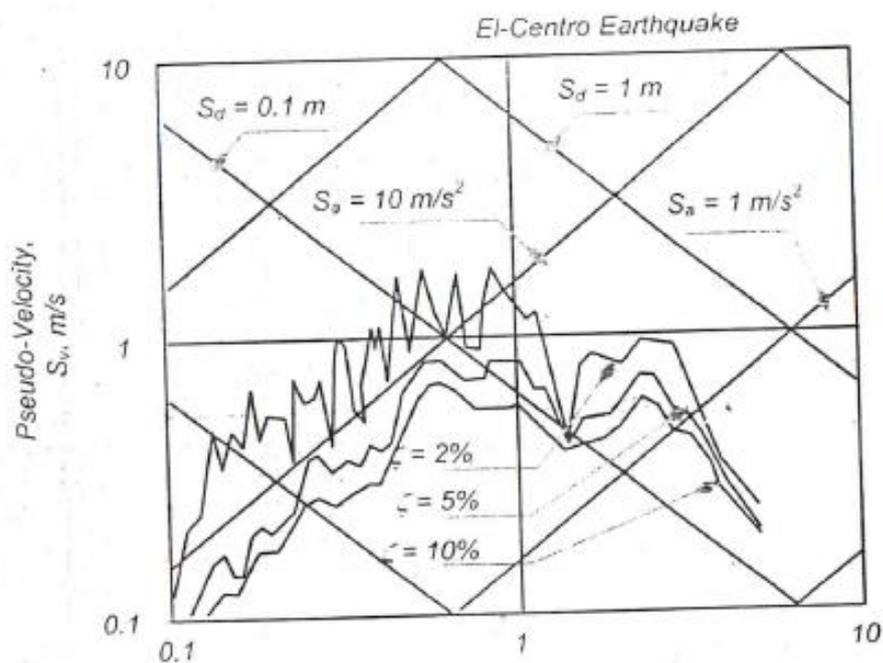


Figure 2.24 : Exemple d'un spectre de réponse, schéma triplé [3]

La troisième quantité intéressante dans l'analyse spectrale est connue sous le nom de « vitesse pseudo-spectrale », S_v , qui est liée à l'énergie cinétique maximale du système, et elle est définie comme la vitesse totale maximale du système. Par égalisation d'énergie de déformation maximale U , du système et l'énergie cinétique maximale T du système, on obtient (réf [1] traduite par Tahar Berrabah) :

$$U_{\max} = T_{\max} \quad (2.126)$$

$$(1/2)k.u_{\max}^2 = (1/2)m.\dot{u}_{\max}^2 \quad (2.127)$$

(Notons qu'à \dot{u}_{\max} , $\ddot{u} = 0$)

$$k.S_d^2 = m.S_v^2 \quad (2.128)$$

De façon similaire au cas d'accélération spectrale, si les deux parts d'équation sont divisé par « m », l'équation précédente devient :

$$S_v = \omega.S_d \quad (2.129)$$

S_v est connue aussi sous le nom de « intégrale de réponse maximale du séisme »

Chapitre 3 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

3.1 Vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

3.1.1 Introduction

Les systèmes qui nécessitent plusieurs coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à plusieurs degrés de liberté.

3.1.2 Quelques systèmes à plusieurs degrés de liberté

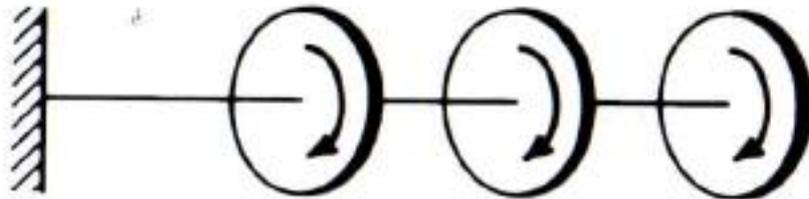


Figure 3.1 : Système non amorti-libre à trois DDL (rotations)

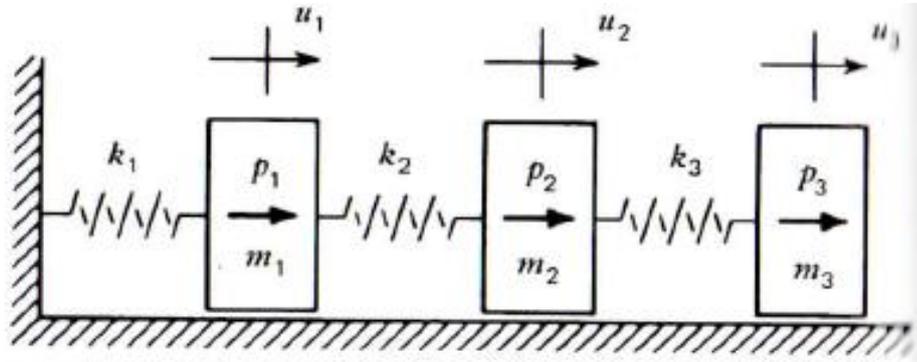


Figure 3.2 : Système non amorti-libre à trois DDL (translations)

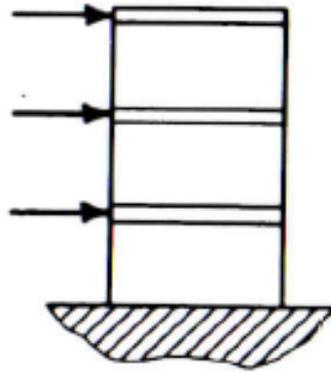


Figure 3.3 : Système non amorti-libre à trois DDL (translations horizontales des étages supposons que ces derniers sont infiniment rigides)

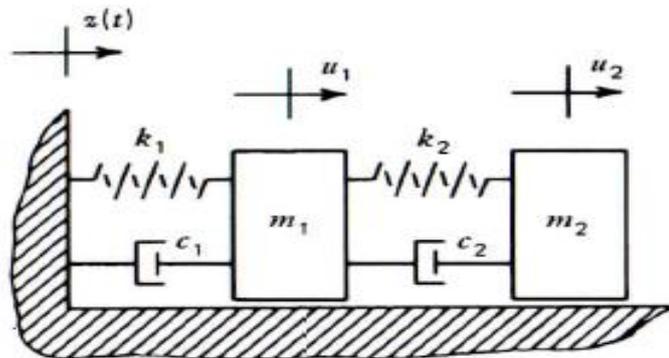


Figure 3.4 : Système amorti-forcé (excitation de la base) à deux DDL (translations)

3.1.3 Formulation des équations de mouvement

les méthodes de détermination de l'équation différentielle de mouvement d'un system à un seul degrés de liberté reste valable pour les systèmes à plusieurs degré de liberté.

à travers l'exemple présenté sur la figure 3.5, on essaye de bien expliquer la formulation des équations de mouvement d'un systeme à plusieurs degré de liberté avec excitation du support.

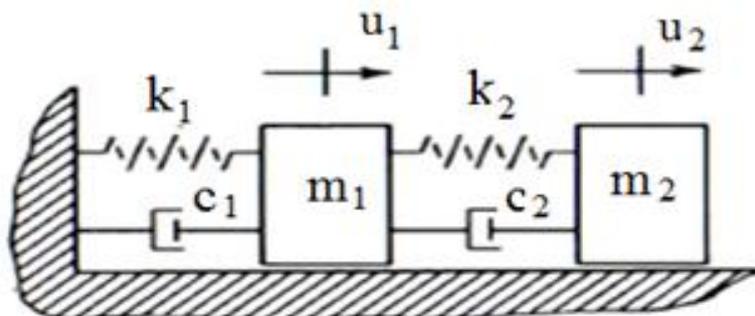


figure 3.5 : système à plusieurs DDL

Les deux méthodes de formulation des équations de mouvement citées auparavant vont être utilisées à savoir la loi de Newton et l'équation de Lagrange.

a) Le système d'équations différentielles de mouvement utilisant la loi de Newton

a.1) par rapport au premier DDL u_1

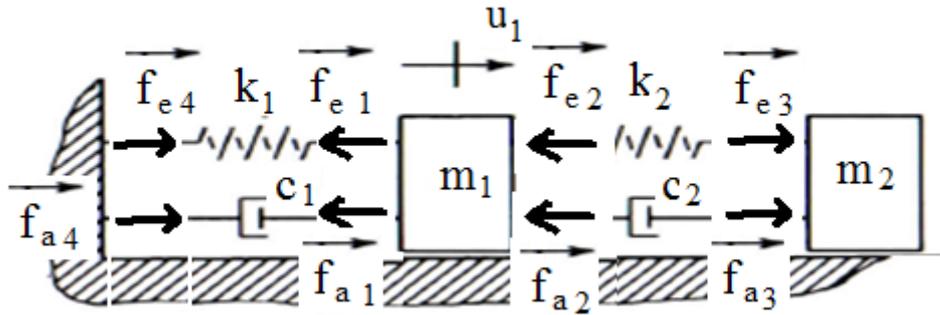


Figure 3.6: schématisation des forces par rapport au premier DDL

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{f}_{e4} + \vec{f}_{a4} + \vec{f}_{e1} + \vec{f}_{a1} + \vec{f}_{e2} + \vec{f}_{a2} + \vec{f}_{e3} + \vec{f}_{a3} = m_1 \cdot \vec{\gamma}$$

Après projection sur l'axe positif, on aura:

$$\Rightarrow +f_{e4} + f_{a4} - f_{e1} - f_{a1} - f_{e2} - f_{a2} + f_{e3} + f_{a3} = m_1 \cdot (\ddot{u}_1)$$

$$f_{e4} = 0$$

$$f_{a4} = 0$$

$$f_{e1} = k_1 \cdot u_1$$

$$f_{a1} = c_1 \cdot \dot{u}_1$$

$$f_{e2} = k_2 \cdot u_1$$

$$f_{a2} = c_2 \cdot \dot{u}_1$$

$$f_{e3} = k_2 \cdot u_2$$

$$f_{a3} = c_2 \cdot \dot{u}_2$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - k_1 \cdot u_1 - c_1 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_1 + k_2 \cdot u_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 = m_1 \cdot (\ddot{u}_1)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au premier DDL est de forme:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = 0$$

a.2) par rapport au premier DDL u_2

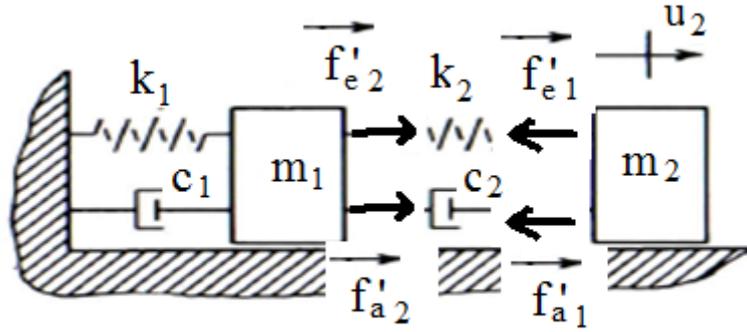


Figure 3.7: schématisation des forces par rapport au deuxième DDL

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{f}'_{e1} + \vec{f}'_{e2} + \vec{f}'_{a2} + \vec{f}'_{a1} = m_2 \cdot \vec{\gamma}$$

$$-f'_{e1} + f'_{e2} - f'_{a1} + f'_{a2} = m_2 \cdot (\ddot{u}_2)$$

$$-k_2 \cdot u_2 + k_2 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_1 = m_2 \cdot (\ddot{u}_2)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au deuxième DDL est de forme:

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 = 0$$

Donc Le système d'equations différentielles de mouvement utilisant la loi de Newton est:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = 0 \\ m_2 \cdot \ddot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 = 0 \end{cases}$$

b) Le système d'equations différentielles de mouvement utilisant la loi de Lagrange

Notant "q" le degré de liberté, La formulation générale de l'équation de Lagrange est:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D_{\alpha}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial q}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{u}_2)^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (u_2 - u_1)^2$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{u}_2)^2 - \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (u_2 - u_1)^2$$

La fonction de dissipation d'énergie est donnée par:

$$D_\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \dot{q}^2$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)^2$$

Le travail des force externe est:

$$F_{ext} = p(t) \cdot q$$

$$F_{ext} = 0$$

b.1) par rapport au premier DDL u_1

par rapport au premier DDL, l'équation de Lagrange s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = - \frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_1} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 2 \cdot (\dot{u}_1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) = m_1 \cdot (\ddot{u}_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = - \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot 2 \cdot u_1 - \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot (u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_1} = c_1 \cdot \dot{u}_1 + c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_1} = c_1 \cdot \dot{u}_1 - c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$m_1 \cdot (\ddot{u}_1 + \ddot{z}) + k_1 \cdot u_1 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = -c_1 \cdot \dot{u}_1 + c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au premier DDL est de forme:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = 0$$

b.2) par rapport au premier DDL u_2

par rapport au deuxième DDL, l'équation de Lagrange s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_2} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = m_2 \cdot (\dot{u}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) = m_2 \cdot (\ddot{u}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot 2 \cdot (u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -k_2 \cdot (u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_2} = \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot 2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_2} = c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{z}) + k_2 \cdot (u_2 - u_1) = -c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au deuxième DDL est de forme:

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 = 0$$

Donc Le système d'equations différentielles de mouvement utilisant la loi de Lagrange est:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = 0 \\ m_2 \cdot \ddot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 = 0 \end{cases}$$

3.1.4 Evaluation des matrices [M], [K], [C] et vecteur de force {P}

En écrivant le système des équations différentielles sous forme matricielle, la matrice masse [M], matrice rigidité [K], matrice amortissement [C] ainsi que le vecteur force externe {P} peuvent être directement tirés.

revenant à l'exemple traité dans ce chapitre, la forme matricielle du système des équations différentielles est la suivante:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec:

La matrice $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

La matrice $[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$

La matrice $[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$

et le vecteur forces externes

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remarque: il est à signaler que la matrice masse est diagonale alors que la matrice rigidité est toujours symétrique.

3.1.5 Détermination des amplitudes propres de vibration

L'équation du mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté se déplaçant librement sans amortissement s'obtient en omettant de l'équation différentielles d'un mouvement amorti-forcé le vecteur de chargement et la matrice d'amortissement.

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \quad (3.1)$$

Par analogie avec le comportement des systèmes à un degré de liberté, nous supposons que le mouvement est harmonique ; il s'exprime simplement sous la forme :

$$\{u(t)\} = \{\phi\} \sin(\omega t + \theta) \quad (3.2)$$

Où $\{\phi\}$ représente les modes de déformation possible du système (seul leur amplitude varie avec le temps) et θ est un angle de déphasage. Les accélérations en vibrations libres sont alors données par la deuxième dérivée par rapport au temps de l'équation (7.2).

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2 \cdot \{\phi\} \cdot \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \cdot \{u(t)\} \quad (3.3)$$

En reportant ces deux dernières expressions (3.2) et (3.3) dans l'équation (3.1), nous obtenons l'expression :

$$-\omega^2 [m] \cdot \{\phi\} \cdot \sin(\omega t + \theta) + [k] \cdot \{\phi\} \cdot \sin(\omega t + \theta) = \{0\} \quad (3.4)$$

Qui doit être vérifié quelque soit « t », donc pour toutes les valeurs de fonction sinus, donc :

$$([k] - \omega^2 [m]) \cdot \{\phi\} = 0 \quad (3.5)$$

On peut montrer par la règle de Cramer que la solution de ce système d'équations simultanées est de la forme :

$$\{\phi\} = \frac{0}{|[k] - \omega^2 [m]|} \quad (3.6)$$

Une solution non triviale n'est donc possible que si :

$$|[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation est appelée l'équation aux amplitudes du système. En développant ce déterminant on obtient une équation polynomiale de degré « N » en ω^2 pour un système à N degrés de liberté. Les N solutions ($\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_N^2$) sont les carrés des amplitudes des « N » modes de vibration possibles. Le mode correspondant à l'amplitude la plus basse est appelé *mode fondamental*, le second mode correspond à l'amplitude suivante, etc. En mettant ces amplitudes sous forme matricielle on forme le vecteur des amplitudes ω :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \cdot \\ \omega_N \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Un système stable conduit à des matrices de masse et de rigidité symétriques définies positive, et dans ce cas les racines de l'équation aux amplitudes seront réelles et positives.

3.1.6 Orthogonalité des modes propres

Le mode propre est obtenu à partir de la résolution des équations aux valeurs propres, il possède la propriété d'orthogonalité, c'est-à-dire :

$$\{\phi_m\}^T [M] \{\phi_n\} = \{0\} \quad \text{pour } n \neq m \quad (3.9)$$

$$\{\phi_m\}^T [K] \{\phi_n\} = \{0\} \quad \text{pour } n \neq m \quad (3.10)$$

L'orthogonalité peut être démontrée comme suit :

$$\text{Puisque } [K] \{\phi_n\} - \omega_n^2 [M] \{\phi_n\} = \{0\} \quad (3.11)$$

Multipliant l'équation (7.11) par $\{\phi_m\}^T$ donne :

$$\{\phi_m\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_n\} - \omega_n^2 \{\phi_m\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\} = \{0\} \quad (3.12)$$

Changeons les indices, on obtient :

$$\{\phi_n\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_m\} - \omega_m^2 \{\phi_n\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_m\} = \{0\} \quad (3.13)$$

Puisque $\left[\{\phi_n\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_m\} \right]^T = \{\phi_m\}^T \cdot [K]^T \cdot \{\phi_n\} = \{\phi_m\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_n\}$ (3.14)

Et $\left[\{\phi_n\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_m\} \right]^T = \{\phi_m\}^T \cdot [M]^T \cdot \{\phi_n\} = \{\phi_m\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\}$ (3.15)

Prenons la transposée de l'équation (3.13) et remplaçons le résultat par l'équation (3.14) et l'équation (3.15), on obtient :

$$\{\phi_m\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_n\} - \omega_m^2 \{\phi_m\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\} = \{0\} \quad (3.16)$$

La soustraction entre l'équation (3.16) et l'équation (3.12) donne :

$$\{\phi_m\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\} \cdot \{\omega_m^2 - \omega_n^2\} = \{0\} \quad (3.17)$$

Comme le montre l'équation (3.17) $\{\phi_m\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\} = \{0\}$ si $n \neq m$

3.1.7 Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté

L'équation différentielle de mouvement d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté est donnée par :

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = p(t) \quad (3.18)$$

En générale, les éléments des matrices m, c, et k peuvent être non nul (ex : $k_{ij} = k_{ji} \neq 0$), donc la résolution de l'équation (2.1), nécessite un système de N équations à N inconnus.

Dans cette section on présente la méthode de «superposition modale» ou bien la méthode des « modes normaux » pour lesquelles un système d'équations couplées peut être transformé à un système des équations non couplés par l'utilisation des modes normaux de ce système.

L'équation (3.18) est l'équation originale d'équations couplées de mouvement d'un système à N degrés de liberté, où u(t) peut être des coordonnées physique ou bien

généralisées. La réponse d'un système à une excitation $p(t)$ sous des conditions initiales $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0$ est à chercher.

La première étape de la méthode superposition modale est la détermination des fréquences et modes naturels du système. (on suppose là que les N modes vont être utilisés). Puis, les modes et les fréquences satisfaire l'équation suivante :

$$(k - \omega_r^2 m) \phi_r = 0 \quad (3.19)$$

Donnant (ω_r^2, ϕ_r) , $r = 1, 2, \dots, N$. Les modes ϕ_r sont supposés être normalisés et la masse modale M_r et la rigidité modale K_r calculées par :

$$M_r = \phi_r^T . m . \phi_r \quad (3.20)$$

$$K_r = \omega_r^2 . M_r \quad (3.21)$$

Les modes vont être collectés pour former la matrice modale ϕ :

$$\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N] \quad (3.22)$$

L'étape clé de la procédure de superposition modale est l'introduction des coordonnées de transformation :

$$u(t) = \phi . \eta(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r . \eta_r(t) \quad (3.23)$$

Les coordonnées $\eta_r(t)$ sont référées comme « coordonnées principales ». L'équation (2.6) est remplacée dans l'équation (2.1) et le résultat est multiplié par ϕ^T pour donner l'équation de mouvement en coordonnées principales :

$$M . \ddot{\eta} + C \dot{\eta} + K \eta = P(t) \quad (2.24)$$

Où :

$$M = \phi^T . m . \phi = \text{Matrice masse modale}$$

$$C = \phi^T . c . \phi = \text{Matrice amortissement modale}$$

$$K = \phi^T . k . \phi = \text{Matrice rigidité modale}$$

$$P(t) = \phi^T . p(t) = \text{Vecteur force modale}$$

Considérons le cas non amorti, la réponse totale $\eta(t)$ peut être obtenue par superposition de la réponse due aux conditions initiales seules et la réponse due à l'excitation seule.

La réponse due aux conditions initiales peut être donnée par :

$$u(0) = \phi \cdot \eta(0) \quad (3.25)$$

$$\dot{u}(0) = \phi \cdot \dot{\eta}(0) \quad (3.26)$$

Multiplions ces deux dernières équations par $\phi^T \cdot m$ on obtient :

$$\phi^T \cdot m \cdot u(0) = M \cdot \eta(0) \quad (3.27)$$

$$\phi^T \cdot m \cdot \dot{u}(0) = M \cdot \dot{\eta}(0) \quad (3.28)$$

Puisque M est diagonal, les équations (3.27) et (3.28) peuvent être résolus pour les conditions initiales modales donnons :

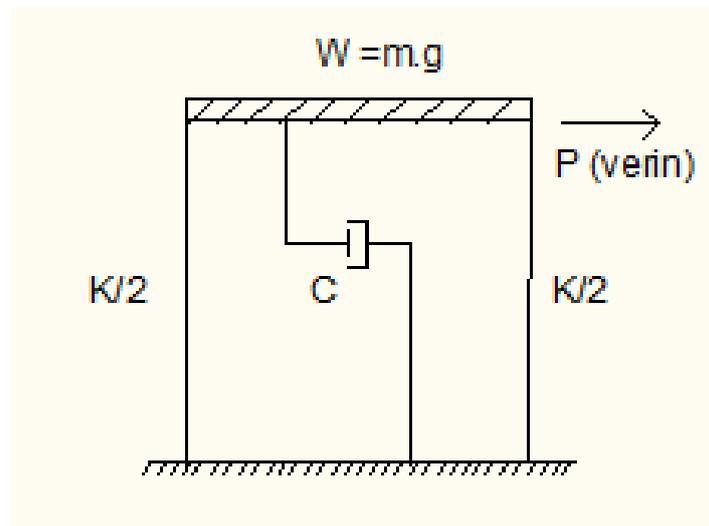
$$\left. \begin{aligned} \eta_r(0) &= \left(\frac{1}{M_r} \right) \phi_r^T \cdot m \cdot u(0) \\ \dot{\eta}_r(0) &= \left(\frac{1}{M_r} \right) \phi_r^T \cdot m \cdot \dot{u}(0) \end{aligned} \right\} r = 1, 2, \dots, N \quad (3.29)$$

Chapitre 4: Quelques Exercices avec leurs corrigés

Exercice N° 01 :

Un bâtiment à un étage idéalisé par une poutre rigide portée par des poteaux sans masse (voir la Figure ci après), afin de déterminer les caractéristiques dynamique de cette structure, en effectue un teste de vibration libre dans lequel le toit est déplacé latéralement par un vérin hydraulique puis relâchée. Pendant l'action de poussé de vérin, on constate qu'une force de 90 KN est nécessaire pour déplacer la poutre de 0.5 cm, après que l'effort appliqué par le vérin été annulé le déplacement maximale au retour (après un cycle) n'est plus que 0.4 cm. Pour une durée de cycle de déplacement $T=1.4$ sec.

- 1) Déterminer la masse effective de la poutre, puis les fréquences de pulsation propre et amortie du système ;
- 2) Déterminer la constante d'amortissement « c » ;
- 3) Déterminer l'expression de l'amplitude « x_n » après « n » cycle en fonction de x_0 et x_1 .
- 4) Calculer x_6 .



Corrigé de l'exercice N° 01 :

Il faut une force de 90KN pour provoquer un déplacement de 0.5cm.

La période de mouvement est de: $T = 1.4$ sec

1) Calcul de la masse effective de la poutre, ainsi que la fréquence de pulsation propre du système :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Donc:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Puisque le mouvement est élastique, la relation entre la force " F " et le déplacement " x " est donnée par:

$$F = k.x$$

ce qui implique que:

$$k = \frac{F}{x}$$

$$k = \frac{90 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 10^{-2}}$$

Ce qui donne:

$$k = 18000000 \text{ N/m}$$

ou bien:

$$k = 18000 \text{ KN/m}$$

La période amortie est donnée par:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \text{ ou } \omega_a \text{ est la pulsation amortie du système}$$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{1.4}$$

On trouve

$$\omega_a = 4.488 \text{ rad/sec .}$$

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \text{ ce qui implique que:}$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_a}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Le décrément logarithmique noté par " δ " est donné par:

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

avec x_n et x_{n+1} sont deux déplacements successives

Il est également donné en fonction du taux d'amortissement:

$$\delta = 2 \cdot \pi \cdot \xi$$

d'où:

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2 \cdot \pi \cdot \xi$$

Le taux d'amortissement est calculé comme suit:

$$\xi = \frac{\ln \frac{x_n}{x_{n+1}}}{2 \cdot \pi}$$

$$\xi = \frac{\ln \frac{0.5}{0.4}}{2 \cdot \pi} = 0.0355, \text{ il est de l'ordre de } 3.55\%$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_a}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{4.488}{\sqrt{1-0.0355^2}} = 4.49 \text{ rad / sec}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{18000}{4.49^2}$$

$$m = 892.85 \text{ tonnes}$$

La fréquence notée " f " est donnée par la formule suivante:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

La fréquence propre notée " f_0 " est donc:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{4.49}{2\pi} = 0.7149 \text{ Hz}$$

La fréquence amortie notée " f_a " est donc:

$$f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{4.488}{2\pi} = 0.7146 \text{ Hz}$$

2) Calcul de la constante d'amortissement " c "

Le taux d'amortissement est donnée par la formule suivante:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \text{ avec}$$

c : constante d'amortissement

c_c : Constante d'amortissement critique

sachant que la constante d'amortissement critique est calculer par la formule suivante:

$$c_c = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$$

La constante d'amortissement peut être calculer comme suit:

$$c = \xi \cdot c_c = \xi \cdot 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$$

$$c = 0.035 \cdot 2 \cdot \sqrt{18000 \cdot 892.85}$$

$$c = 280.62 \text{ KN.sec/m}$$

3) l'expression de l'amplitude « x_n » après « n » cycle en fonction de x_0 et x_1 .

Le décrément logarithmique est donné par:

$$\delta = \ln \frac{x_0}{x_1} \Rightarrow \frac{x_0}{x_1} = e^\delta$$

$$x_1 = \frac{x_0}{e^\delta} \Rightarrow x_1 = x_0 \cdot e^{-\delta} \Rightarrow e^{-\delta} = \frac{x_1}{x_0}$$

Donc

$$x_1 = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0} \right)$$

Aussi:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^\delta$$

$$x_2 = \frac{x_1}{e^\delta} \Rightarrow x_2 = x_1 \cdot e^{-\delta} \Rightarrow x_2 = x_1 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$x_2 = x_0 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2$$

Ainsi que:

$$\delta = \ln \frac{x_2}{x_3} \Rightarrow \frac{x_2}{x_3} = e^\delta$$

$$x_3 = \frac{x_2}{e^\delta} \Rightarrow x_3 = x_2 \cdot e^{-\delta} \Rightarrow x_3 = x_0 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} \right)$$

D'où:

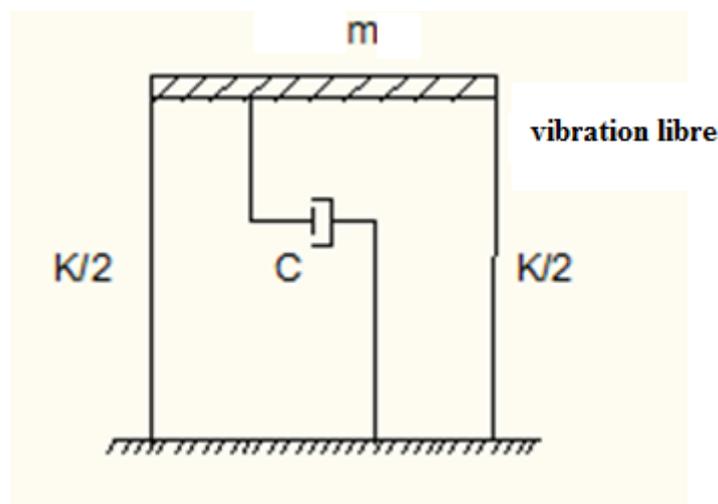
$$x_n = x_0 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^n$$

4) Calcul de x_6

$$x_6 = 0.131 \text{ cm}$$

Exercice N° 02 :

La masse « m » du système de la figure 02 est égale à 100 t ; ce système est mis en oscillation libre en le relâchant à l'instant $t=0$ avec un déplacement initial de 3 cm.



Si le déplacement maximum lors du mouvement de retour est de 2.15 cm à l'instant $t=0.64$ sec, déterminer

- ✓ Le facteur d'amortissement ξ ;
- ✓ La rigidité élastique latérale « k » ;
- ✓ La constante d'amortissement « c »

Corrigé de l'exercice No 02 :

On a comme données:

La masse $m=100t$ et à l'instant $t=0$, le déplacement est de 3 cm, c à d:

$$x(0) = 3cm$$

Le déplacement maximum lors du retour à l'instant $t=0.64$ sec est de l'ordre de 2.15 cm, c à d:

$$x(0.64) = 2.15 cm$$

La période amortie et par conséquent la pulsation amortie sont donc:

$$T_a = 0.64 \text{ sec} \Rightarrow \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{0.64} \Rightarrow \omega_a = 9.817 \text{ rad / sec}$$

1) Calcul de taux d'amortissement

Le décrément logarithmique noté est donné par la formule:

$$\delta = 2\pi\xi = \ln \frac{3}{2.15} = 0.33$$

on peut avoir la valeur du taux d'amortissement:

$$\xi = \frac{0.33}{2\pi} = 0.052 = 5.2 \%$$

2) Calcul de la rigidité

sachant que :

$$\omega_a = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_a}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{9.817}{\sqrt{1 - 0.052^2}} = 9.83 \text{ rad / sec}$$

Or:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 \cdot m = 9.83^2 \cdot 100$$

$$k = 9662.89 \text{ KN/m}$$

3) Calcul de coefficient d'amortissement

$$\xi = \frac{c}{c_c} \Rightarrow c = \xi \cdot c_c$$

sachant que:

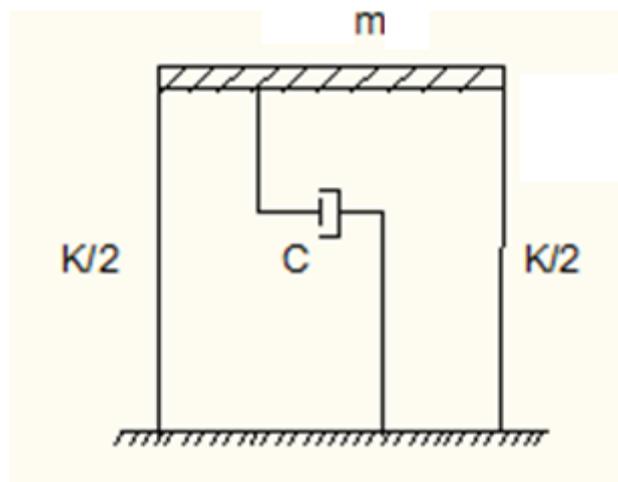
$$c_c = 2\sqrt{k \cdot m} \text{ qui représente l'amortissement critique.}$$

$$c = \xi \cdot 2\sqrt{k \cdot m} \Rightarrow c = 0.052 \cdot 2 \cdot \sqrt{9662.89 \cdot 100}$$

$$c = 102.232 \text{ KN.sec/m}$$

Exercice N° 03 :

Supposons pour le système de la figure suivante, la masse et la rigidité suivantes :
 $m=350 \text{ t}$, $k=7000\text{kN/m}$. Si le système est mis en vibration libre avec les conditions initiales $x(0) = 1.75 \text{ cm}$ et $\dot{x}(0) = 14 \text{ cm/sec}$;



Déterminer le déplacement et la vitesse à l'instant $t=1 \text{ sec}$ en supposant que :

- ✓ $c=0$ (système non amorti) ;
- ✓ $c=4.9 \times 10^5 \text{ N.s/m}$;

Corrigé de l'exercice N° 03 :

1) cas de $c=0$ (système non amorti)

La solution de l'équation différentielle de mouvement libre non amorti est donnée par:

$$x(t) = A \cdot \sin \omega_0 t + B \cdot \cos \omega_0 t$$

Les deux constantes A et B sont à déterminer utilisant les conditions initiales.

$$x(0) = 1.75 \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot 1 = 1.75 \text{ cm}$$

$$B = 1.75 \text{ cm}$$

L'équation de la vitesse est donnée par:

$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t - B \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{x}(0) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot 0 - B \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot 0 = 14$$

$$\dot{x}(0) = A \cdot \omega_0 \cdot 1 - B \cdot \omega_0 \cdot 0 = 14$$

$$A \cdot \omega_0 = 14 \Rightarrow A = \frac{14}{\omega_0}$$

Pulsation propre:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{7000}{350}} \Rightarrow \omega_0 = 4.47 \text{ rad / sec}$$

Déterminer le déplacement et la vitesse à l'instant $t=1$

$$x(t) = \frac{14}{4.47} \sin 4.47t + 1.75 \cos 4.47t$$

$$x(1) = \frac{14}{4.47} \sin (4.47 \cdot 1) + 1.75 \cos (4.47 \cdot 1)$$

$$x(1) = -3.46 \text{ cm}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot t - x(0) \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 \cdot t$$

$$\dot{x}(1) = 14 \cdot \cos(4.47 \cdot 1) - 1.75 \cdot 4.47 \cdot \sin(4.47 \cdot 1)$$

$$\dot{x}(1) = 4.23 \text{ cm / sec}$$

2) cas de $c=4.9 \times 10^5 \text{ N.s / m}$ (système amorti)

La solution de l'équation différentielle de mouvement libre amorti est donnée par:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t)$$

La vitesse est:

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [(-B\omega_a - A\xi\omega_0) \sin \omega_a t + (A\omega_a - \xi\omega_0 B) \cos \omega_a t]$$

Les deux constantes A et B sont à déterminer utilisant les conditions initiales.

calcul de taux d'amortissement

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{k.m}} = \frac{4.9 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{2\sqrt{7000 \cdot 350}}$$

$$\xi = 0.1565$$

calcul de la pulsation amortie

$$\omega_a = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 4.47 \cdot \sqrt{1 - 0.1565^2}$$

$$\omega_a = 4.41 \text{ rad / sec}$$

Calcul des constantes A et B

$$x(0) = 1.75 \text{ cm}$$

$$x(0) = e^{-\xi\omega_0 \cdot 0} (A \sin \omega_a \cdot 0 + B \cos \omega_a \cdot 0) = 1.75$$

$$B = 1.75 \text{ cm}$$

$$\dot{x}(0) = 14 \text{ cm / sec}$$

$$\dot{x}(0) = e^{-\xi\omega_0 \cdot 0} [(-B\omega_a - A\xi\omega_0) \sin \omega_a \cdot 0 + (A\omega_a - \xi\omega_0 B) \cos \omega_a \cdot 0]$$

$$A\omega_a - \xi\omega_0 B = 14 \Rightarrow A = \frac{14 + \xi\omega_0 B}{\omega_a}$$

$$A = \frac{14 + 0.1565 \cdot 4.47 \cdot 1.75}{4.41}$$

$$A = 3.452 \text{ cm}$$

Le déplacement à l'instant $t = 1$ sec est:

$$x(t) = e^{-0.1565 \cdot 4.47 t} [3.452 \sin 4.41 t + 1.75 \cos 4.41 t]$$

$$x(1) = e^{-0.1565 \cdot 4.47 \cdot 1} [3.452 \sin (4.41 \cdot 1) + 1.75 \cos (4.41 \cdot 1)]$$

$$x(1) = -1.89 \text{ cm}$$

La vitesse à l'instant $t = 1$ sec est:

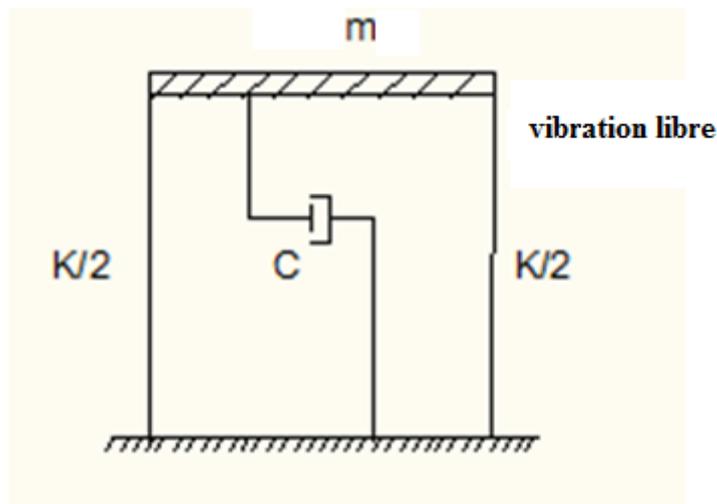
$$\dot{x}(t) = e^{-0.1565 \cdot 4.47 \cdot t} \left[\begin{aligned} &(-1.75 \cdot 4.41 - 3.452 \cdot 0.1565 \cdot 4.47) \sin 4.41 \cdot t \\ &+ (3.452 \cdot 4.41 - 0.1565 \cdot 4.47 \cdot 1.75) \cos 4.41 \cdot t \end{aligned} \right]$$

$$\dot{x}(1) = e^{-0.1565 \cdot 4.47 \cdot 1} \left[\begin{aligned} &(-1.75 \cdot 4.41 - 3.452 \cdot 0.1565 \cdot 4.47) \sin 4.41 \cdot 1 \\ &+ (3.452 \cdot 4.41 - 0.1565 \cdot 4.47 \cdot 1.75) \cos 4.41 \cdot 1 \end{aligned} \right]$$

$$\dot{x}(1) = 2.73 \text{ cm / sec}$$

Exercice N° 04:

Supposons pour le système de la figure suivante, une masse est une rigidité de : $m=875 \text{ t}$ et $k=3500 \text{ kN/m}$ et aucun amortissement.



Si le déplacement initial est égal à $x(0) = 4.5 \text{ cm}$ avec un déplacement à l'instant $t=1.2 \text{ sec}$ de 4.5 cm également, déterminer :

- ✓ Le déplacement à l'instant $t=2.4 \text{ sec}$;
- ✓ L'amplitude ρ de l'oscillation libre.

Corrigé de l'exercice N° 04:

La solution de l'équation différentielle de mouvement libre non amorti est donnée par:

$$x(t) = A \cdot \sin \omega_0 t + B \cdot \cos \omega_0 t$$

Les deux constantes A et B sont à déterminer utilisant les conditions initiales.

Calcul de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3500}{875}}$$

$$\omega_0 = 2 \text{ rad / sec}$$

Calcul des constantes A et B

$$x(t) = A \cdot \sin 2t + B \cdot \cos 2t$$

comme condition initiale, on a:

$$x(0) = 4.5 \text{ cm}$$

$$x(0) = A \cdot \sin (2 \cdot 0) + B \cdot \cos (2 \cdot 0) = 4.5 \text{ cm}$$

$$B = 4.5 \text{ cm}$$

Une autre condition est donnée mais elle n'est pas initiale:

$$x(1.2) = 4.5 \text{ cm}$$

$$A \cdot \sin (2 \cdot 1.2) + 4.5 \cdot \cos (2 \cdot 1.2) = 4.5 \text{ cm}$$

$$A = \frac{4.5 - 4.5 \cdot \cos (2 \cdot 1.2)}{\sin (2 \cdot 1.2)}$$

$$A = 11.58 \text{ cm}$$

Le déplacement à l'instant t=2.4 sec

La solution de l'équation différentielle de mouvement devient:

$$x(t) = 11.58 \sin 2t + 4.5 \cos 2t$$

Donc on peut calculer le déplacement à n'importe quel temps

$$x(2.4) = -11.14 \text{ cm}$$

L'amplitude ρ de l'oscillation libre

L'amplitude d'oscillation libre notée ρ est donnée par la formule suivante:

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Exercice N°5 :

- 1) Donner le rapport de réponse d'un système amorti forcé régi par l'équation suivante (les conditions initiales sont $u_0(0) = \dot{u}_0(0) = 0$):

$$m.\ddot{u}(t) + c.\dot{u}(t) + k.u(t) = p_0 \cos \bar{\omega} t$$

2) En déduire la solution pour le cas du mouvement non amorti.

Corrigé de l'exercice N° 05:

$$m.\ddot{u}(t) + c.\dot{u}(t) + k.u(t) = p_0 \cos \bar{\omega} t$$

En divisant l'équation par la masse " m ":

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{P_0}{m} \cos \bar{\omega} t$$

La solution homogène dite aussi complémentaire de cette équation donne la réponse en oscillation libres du système amorti, elle est donnée par:

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A.\sin \omega_d t + B.\cos \omega_d t)$$

La solution particulière de la réponse est donnée par:

$$u_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t$$

$$\dot{u}_p(t) = G_1.\bar{\omega}.\cos \bar{\omega} t - G_2.\bar{\omega}.\sin \bar{\omega} t$$

$$\ddot{u}_p(t) = -G_1.\bar{\omega}^2.\sin \bar{\omega} t - G_2.\bar{\omega}^2.\cos \bar{\omega} t$$

En remplaçant la solution particulière dans l'équation différentielle de mouvement (après avoir divisé les termes par la masse " m ":

$$-G_1.\bar{\omega}^2.\sin \bar{\omega} t - G_2.\bar{\omega}^2.\cos \bar{\omega} t + 2\xi\omega_0[G_1.\bar{\omega}.\cos \bar{\omega} t - G_2.\bar{\omega}.\sin \bar{\omega} t]$$

$$+ \omega_0^2[G_1.\sin \bar{\omega} t + G_2.\cos \bar{\omega} t] = \frac{P_0}{m} \cos \bar{\omega} t$$

$$\Leftrightarrow \left(-G_1\bar{\omega}^2 - 2\xi\omega_0 G_2\bar{\omega} + \omega_0^2 G_1\right)\sin \bar{\omega} t + \left(-G_2\bar{\omega}^2 + 2\xi\omega_0 G_1\bar{\omega} + \omega_0^2 G_2\right)\cos \bar{\omega} t = \frac{P_0}{m} \cos \bar{\omega} t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -G_1\bar{\omega}^2 - 2\xi\omega_0 G_2\bar{\omega} + \omega_0^2 G_1 = 0 \\ -G_2\bar{\omega}^2 + 2\xi\omega_0 G_1\bar{\omega} + \omega_0^2 G_2 = \frac{P_0}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)G_1 - 2\xi\omega_0.\bar{\omega}.G_2 = 0 / \omega_0^2 \\ 2\xi\omega_0.\bar{\omega}.G_1 + (\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)G_2 = \frac{P_0}{m} / \omega_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G_1(1-\beta^2) - 2\xi\beta G_2 = 0 & (*) \\ 2\xi\beta G_1 + (1-\beta^2)G_2 = \frac{P_0}{k} & (**) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow G_1(1-\beta^2) = 2\xi\beta G_2 \\ &\Rightarrow G_1 = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} G_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow 2\xi\beta \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} G_2 + (1-\beta^2)G_2 = \frac{P_0}{k} \\ &\Leftrightarrow G_2 \left(\frac{4\xi^2\beta^2}{1-\beta^2} + (1-\beta^2) \right) = \frac{P_0}{k} \\ &\Leftrightarrow G_2 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1-\beta^2}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)} \cdot \frac{P_0}{k} \cdot \frac{(1-\beta^2)}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \\ G_2 &= \frac{P_0}{k} \cdot \frac{2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} \end{aligned}$$

La forme de la solution est comme suit:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\xi\omega_0 t} (A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t) + \\ &\quad \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} [2\xi\beta \sin \bar{\omega} t + (1-\beta^2) \cos \bar{\omega} t] \end{aligned}$$

Calcul du rapport de réponse

Le rapport de réponse noté " $R(t)$ " est donné par la formule suivante:

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{u_p(t)}{P_0/k} \\ R(t) &= \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1-\beta^2)^2} [2\xi\beta \sin \bar{\omega} t + (1-\beta^2) \cos \bar{\omega} t] \end{aligned}$$

Déduction du rapport de réponse en cas de mouvement non amorti

$$R(t) = \frac{1}{(1-\beta^2)^2} [(1-\beta^2) \cos \bar{\omega} t]$$

$$R(t) = \frac{1}{1-\beta^2} \cos \bar{\omega} t$$

Exercice N° 06 :

Utilisant les lois de Newton et la loi de Lagrange, donner l'équation différentielle du mouvement du système de la figure 01.

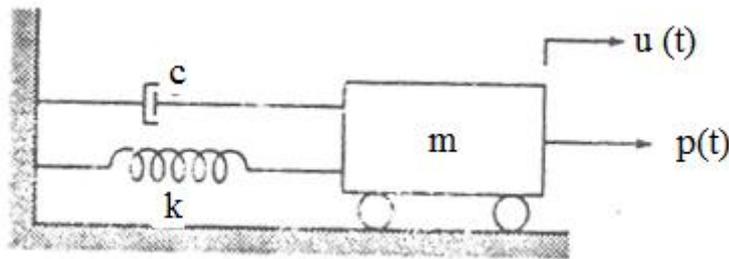


Figure 01

d'après la figure le mouvement est amorti-forcé.

Solution de l'exercice N° 06 :

a. utilisant la loi de Lagrange

l'équation de Lagrange pour ce système est formulée comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = - \frac{\partial D_{\alpha}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{u}^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \cdot \dot{u}^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \dot{u}^2$$

$$F_{ext} = p(t) \cdot u$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m \cdot \dot{u}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m \cdot \ddot{u}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -k \cdot u$$

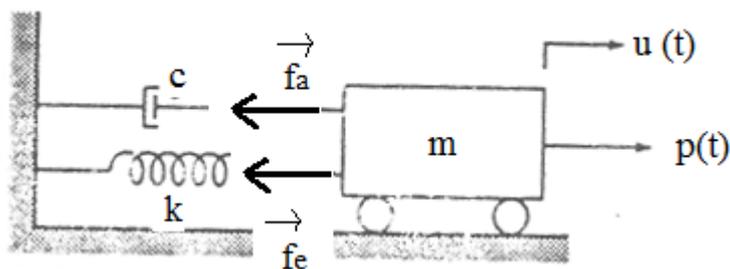
$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} = c \cdot \dot{u}$$

$$\frac{\partial F_{ext}}{\partial u} = p(t)$$

donc la formulation de Lagrange devient:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = p(t)$$

b. utilisant la loi de Newton



l'équilibre des forces schématisées sur la figure de dessus, utilisant la loi de Newton est exprimé par:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\delta}$$

$$\vec{f}_a + \vec{f}_e + \vec{p}(t) = m \cdot \vec{\delta}$$

$$-f_a - f_e + p(t) = m \cdot \delta$$

$$\delta = \ddot{u}$$

$$-f_a - f_e + p(t) = m \cdot \ddot{u}$$

$$f_a = c \cdot \dot{u}$$

$$f_e = k \cdot u$$

$$-c \cdot \dot{u} - k \cdot u + p(t) = m \cdot \ddot{u}$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = p(t)$$

Exercice N° 07 :

Utilisant les lois de Newton et la loi de Lagrange.

1) Donner l'équation différentielle du mouvement du système de la figure 02.

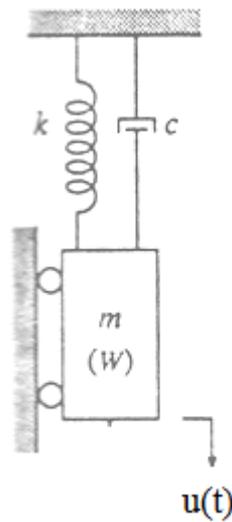


Figure 02

Correction de l'exercice N° 07 :

a. utilisant la loi de Lagrange

l'équation de Lagrange pour ce système est formulée comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = - \frac{\partial D_{\alpha}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} m.(\dot{u} + \dot{u}_0)^2$$

sachant que u_0 est le déplacement statique du au poids propre de la masse. puisqu'il est statique sa dérivée par rapport au temps est nulle.

donc on aura:

$$E_{CT} = \frac{1}{2} m.\dot{u}^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2} .k.(u + u_0)^2 - m.g.u$$

$$L = \frac{1}{2} m.\dot{u}^2 - \frac{1}{2} .k..(u + u_0)^2 - m.g.u$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{u} + \dot{u}_0)^2$$

puisque $u_0 = 0$ donc

$$D_\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{u})^2$$

$$F_{ext} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m \cdot \dot{u}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m \cdot \ddot{u}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -k \cdot (u + u_0) + m \cdot g$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} = c \cdot \dot{u}$$

$$\frac{\partial F_{ext}}{\partial u} = 0$$

donc la formulation de Lagrange devient:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot (u + u_0) - m \cdot g = -c \cdot \dot{u}_0 + 0$$

sachant qu'à partir de l'équilibre statique du système on a:

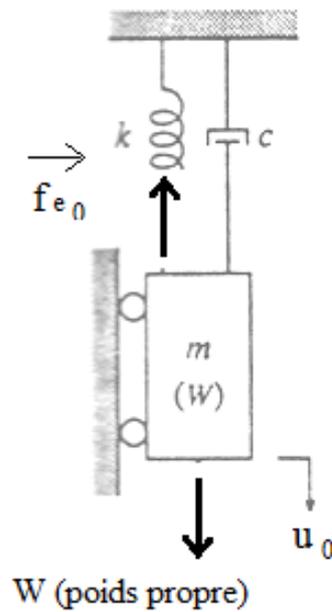
$$k \cdot u_0 - m \cdot g = 0$$

L'équation différentielle de mouvement devient:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u}_0 + k \cdot u = 0$$

b. utilisant la loi de Newton

cas statique



d'après la schématisation des forces de la figure précédente correspondant au cas statique, il est clair que pour ce cas seulement le poids propre et la force élastique dans le ressort.

L'équilibre des forces statique est donnée par:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{f}_{e0} + \vec{W} = \vec{0}$$

après projection:

$$f_{e0} - W = 0$$

sachant que:

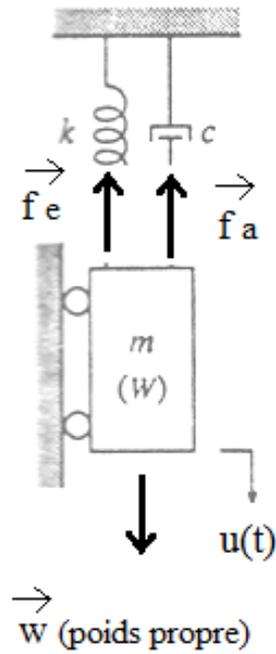
$$f_{e0} = k.u_0$$

$$W = m.g$$

l'équation de l'équilibre statique est donnée par:

$$m.g - k.u_0 = 0$$

cas dynamique



L'équilibre des forces dynamique est donné par:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\delta}$$

$$\vec{f}_e + \vec{f}_a + \vec{W} = m \cdot \vec{\delta}$$

après projection:

$$-f_e - f_a + W = m \cdot \ddot{u}$$

sachant que:

$$f_e = k \cdot (u + u_0)$$

$$f_a = c \cdot \dot{u}$$

$$W = m \cdot g$$

on aura:

$$-k \cdot (u + u_0) - c \cdot \dot{u} + m \cdot g = m \cdot \ddot{u}$$

$$-k \cdot u - k \cdot u_0 - c \cdot \dot{u} + m \cdot g = m \cdot \ddot{u}$$

puisque

$$m \cdot g - k \cdot u_0 = 0$$

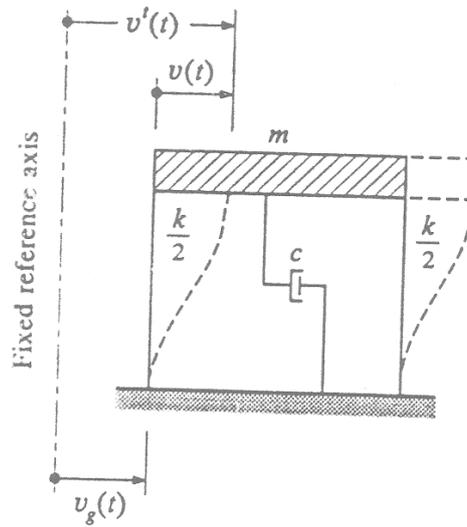
l'équation différentielle de mouvement dynamique du système est donnée par:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0$$

Exercice N° 08 :

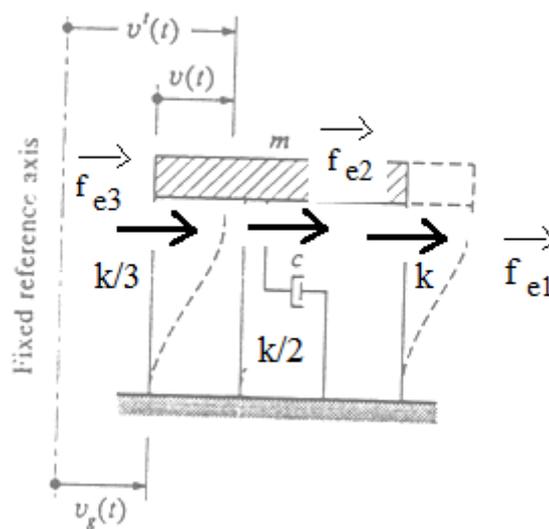
Pour le système de la figure suivante, utiliser les lois de Newton pour déterminer l'équation de mouvement de la masse « m » dû à l'excitation du support $u_g(t)$ (séisme).

Quelle est la différence entre ce système (figure 03) et celui soumis à une charge extérieure dynamique $p(t)$.



Solution de l'exercice N° 08 :

1. utilisant la loi de Newton



suivant la schématisation des forces montrée sur la figure précédente, l'équilibre des forces sera traduit comme suit:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{\delta}$$

$$\vec{f}_{e1} + \vec{f}_{e2} + \vec{f}_{e3} + \vec{f}_a = m.\vec{\delta}$$

$$-f_{e1} - f_{e2} - f_{e3} - f_a = m.\delta$$

$$f_{e1} = k.u$$

$$f_{e2} = \frac{k}{2}.u$$

$$f_a = c.\dot{u}$$

$$\delta = \ddot{u}'(t)$$

$$-k.u - \frac{k}{2}.u - \frac{k}{3}.u - c.\dot{u} = m.\ddot{u}'(t)$$

$$-\frac{11}{6}.k.u - c.\dot{u} = m.(\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

l'équation différentielle de mouvement est donc:

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + \frac{11}{6}.k.u = -m.\ddot{u}_g$$

2.utilisant la loi Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2}.m.\dot{u}^2$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2}.m.(\dot{u} + \dot{u}_g)^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2}.k.u^2 + \frac{1}{2}.\frac{k}{2}.u^2 + \frac{1}{2}.\frac{k}{3}.u^2$$

Alors que:

$$E_{PT} = \frac{11.k}{12} u^2$$

$$L = m.(\dot{u} + \dot{u}_g)^2 - \frac{11.k}{12} .u^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2} .m.2.(\dot{u} + \dot{u}_g)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m.(\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{11k}{12} .2.u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{11}{6} .k.u$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} .c.\dot{q}^2$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2} .c.\dot{u}^2$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2} .c.2.\dot{u}$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} = c.\dot{u}$$

$$m.(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + \frac{11}{6} .k.u = -c.\dot{u}$$

l'équation différentielle de mouvement est donc:

$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + \frac{11}{6} .k.u = -m.\ddot{u}_g$$

d'après les résultats, on remarque que l'excitation de la base est équivalente à l'application d'un chargement au niveau de la ,asse de valeur égale à la masse multipliée par l'accélération, cette charge oubien force est dire "force fictive"

Exercice N°9 :

Considérons un système à un seul degré de liberté chargé par une force périodique, dont les caractéristiques sont montrées sur la figure 2.

- 1) Calculer les coefficients de Fourier correspondant;
- 2) Donner l'équation du chargement $p(t)$

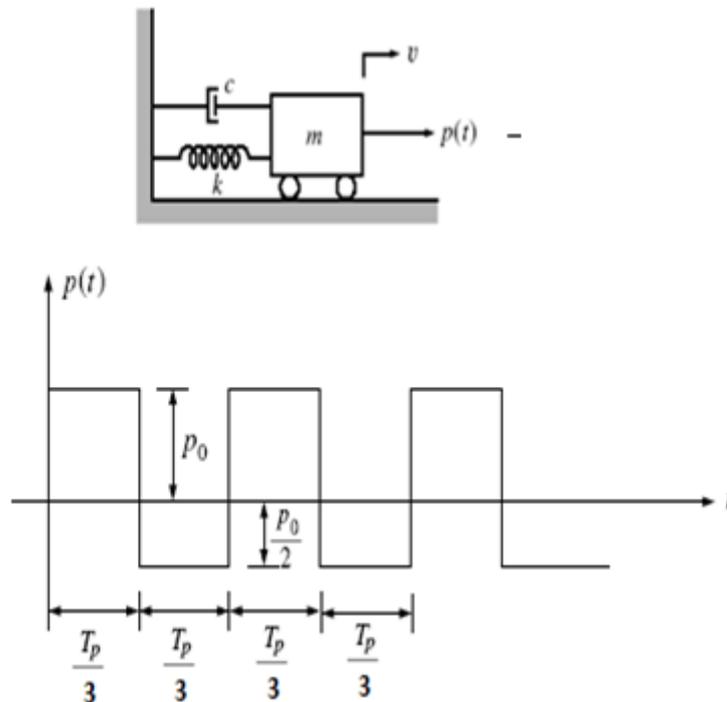


Figure 02

Corrigé de l'exercice N° 09:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t$$

Calcul des coefficients de Fourier

Calcul du coefficient " a_0 "

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \left(\int_0^{T_p/3} p_0 dt + \int_{T_p/3}^{2T_p/3} -\frac{p_0}{3} dt + \int_{2T_p/3}^{T_p} p_0 dt \right)$$

$$a_0 = \frac{p_0}{T_p} \left([t]_0^{T_p/3} - \frac{1}{3} [t]_{T_p/3}^{2T_p/3} + [t]_{2T_p/3}^{T_p} \right)$$

$$a_0 = \frac{p_0}{T_p} \left[\left(\frac{T_p}{3} - 0 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{2T_p}{3} - \frac{T_p}{3} \right) + \left(T_p - \frac{2T_p}{3} \right) \right]$$

$$a_0 = \frac{p_0}{T_p} \left[\frac{T_p}{3} - \frac{T_p}{9} + \frac{T_p}{3} \right]$$

$$a_0 = \frac{5p_0}{9}$$

Calcul du coefficient " a_n "

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \left[\int_0^{T_p/3} p_0 \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt - \frac{1}{3} \int_{T_p/3}^{2T_p/3} p_0 \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt + \int_{2T_p/3}^{T_p} p_0 \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt \right]$$

$$a_n = \frac{2p_0}{T_p} \left[\int_0^{T_p/3} \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt - \frac{1}{3} \int_{T_p/3}^{2T_p/3} \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt + \int_{2T_p/3}^{T_p} \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt \right]$$

$$a_n = \frac{2p_0}{T_p} \cdot \frac{T_p}{2\pi n} \left[\left(\sin \frac{2\pi n}{T_p} t \right)_0^{T_p/3} - \frac{1}{3} \left(\sin \frac{2\pi n}{T_p} t \right)_{T_p/3}^{2T_p/3} + \left(\sin \frac{2\pi n}{T_p} t \right)_{2T_p/3}^{T_p} \right]$$

$$a_n = \frac{p_0}{\pi n} \left[\left(\sin \frac{2\pi n}{T_p} \cdot \frac{T_p}{3} - \sin 0 \right) - \frac{1}{3} \left(\sin \frac{2\pi n}{T_p} \cdot \frac{2T_p}{3} - \sin \frac{2\pi n}{T_p} \cdot \frac{T_p}{3} \right) + \left(\sin \frac{2\pi n}{T_p} \cdot T_p - \sin \frac{2\pi n}{T_p} \cdot \frac{2T_p}{3} \right) \right]$$

$$a_n = \frac{p_0}{\pi n} \left[\left(\sin \frac{2 \cdot \pi n}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(\sin \frac{4 \cdot \pi n}{3} - \sin \frac{2 \cdot \pi n}{3} \right) + \left(\sin 2\pi n - \sin \frac{4 \cdot \pi n}{3} \right) \right]$$

$$a_n = \frac{p_0}{\pi n} \left[\sin \frac{2 \cdot \pi n}{3} - \frac{1}{3} \sin \frac{4 \cdot \pi n}{3} + \frac{1}{3} \sin \frac{2 \cdot \pi n}{3} + \sin 2\pi n - \sin \frac{4 \cdot \pi n}{3} \right]$$

$$a_n = \frac{p_0}{\pi n} \left[\frac{4}{3} \sin \frac{2 \cdot \pi n}{3} - \frac{4}{3} \sin \frac{4 \cdot \pi n}{3} + \sin 2\pi n \right]$$

$n = 1$

$$a_1 = \frac{p_0}{\pi} \left[\frac{4}{3} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3} \sin \frac{4\pi}{3} + \sin 2\pi \right]$$

$$a_1 = \frac{p_0}{\pi} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right]$$

$$a_1 = 0$$

$n = 2$

$$a_2 = \frac{p_0}{2.\pi} \left[\frac{4}{3} \sin \frac{4.\pi}{3} - \frac{4}{3} \sin \frac{8.\pi}{3} + \sin 4.\pi \right]$$

$$a_2 = \frac{p_0}{2.\pi} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0 \right]$$

$$a_2 = \frac{-2\sqrt{3}p_0}{3\pi}$$

Calcul du coefficient " b_n "

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \left[\int_0^{T_p/3} p_0 \sin \frac{2.\pi_n}{T_p} t dt + \int_{T_p/3}^{2.T_p/3} \left(-\frac{p_0}{3} \right) \sin \frac{2.\pi_n}{T_p} t dt + \int_{2.T_p/3}^{T_p} p_0 \sin \frac{2.\pi_n}{T_p} t dt \right]$$

$$b_n = \frac{2.p_0}{T_p} \left[\left[\frac{-T_p}{2.\pi_n} \cos \frac{2.\pi_n}{T_p} t \right]_0^{T_p/3} - \frac{1}{3} \left[\frac{-T_p}{2.\pi_n} \cos \frac{2.\pi_n}{T_p} t \right]_{T_p/3}^{2.T_p/3} + \left[\frac{-T_p}{2.\pi_n} \cos \frac{2.\pi_n}{T_p} t \right]_{2.T_p/3}^{T_p} \right]$$

$$b_n = \frac{2.p_0}{T_p} \left(\frac{-T_p}{2.\pi_n} \right) \left[\left[\cos \frac{2.\pi_n}{T_p} \cdot \frac{T_p}{3} - \cos 0 \right] - \frac{1}{3} \left[\cos \frac{2.\pi_n}{T_p} \cdot \frac{2.T_p}{3} - \cos \frac{2.\pi_n}{T_p} \cdot \frac{T_p}{3} \right] + \left[\cos \frac{2.\pi_n}{T_p} T_p - \cos \frac{2.\pi_n}{T_p} \cdot \frac{2.T_p}{3} \right] \right]$$

$$b_n = \frac{-p_0}{\pi_n} \left[\left(\cos \frac{2\pi_n}{3} - 1 \right) - \frac{1}{3} \left(\cos \frac{4\pi_n}{3} - \cos \frac{2\pi_n}{3} \right) + \left(\cos 2.\pi_n - \cos \frac{4.\pi_n}{3} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{-p_0}{\pi_n} \left[\frac{4}{3} \cos \frac{2\pi_n}{3} - 1 - \frac{4}{3} \cos \frac{4\pi_n}{3} + \cos 2\pi_n \right]$$

$n = 1$

$$b_1 = \frac{-p_0}{\pi} \left[\frac{4}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - 1 - \frac{4}{3} \cos \frac{4\pi}{3} + \cos 2\pi \right]$$

$$b_1 = 0$$

$n = 2$

$$b_2 = \frac{-p_0}{2\pi} \left[\frac{4}{3} \cos \frac{4\pi}{3} - 1 - \frac{4}{3} \cos \frac{8\pi}{3} + \cos 4\pi \right]$$

$$b_2 = 0$$

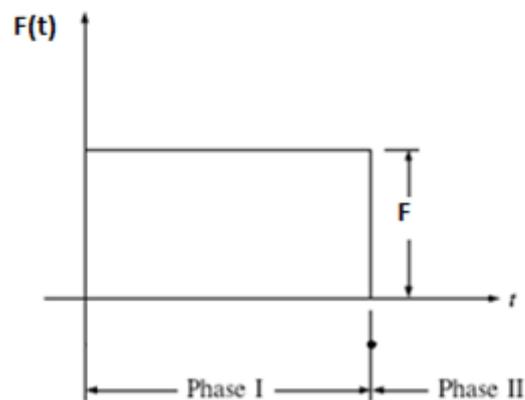
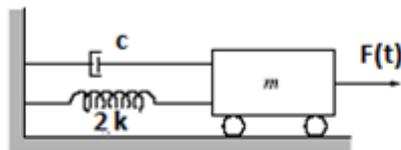
Donc:

$$p(t) = \frac{5p_0}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} p_0 \cos \frac{4\pi}{T_p} t$$

Exercice N°10:

Considérons un système à un seul degré de liberté chargé par une force impulsive, dont les caractéristiques sont montrées sur la figure suivante.

On suppose des conditions initiales nulles :



- 1) Calculer en détaille la réponse durant la phase I;
- 2) Calculer en détaille la réponse durant la phase II;

Corrigé de l'exercice N° 010:

Phase 1: $0 < t < t_1$ sachant que t_1 est la durée de la phase 1.

Le mouvement est non amorti-forcé, l'équation différentielle de mouvement et de forme:

$$m\ddot{u} + 2k.u = F$$

La solution totale notée $u_1(t)$ de cette équation contient deux partie, la solution complémentaire notée $u_c(t)$ et la solution particulière notée $u_p(t)$.

$$u_1(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u_1(t) = A.\cos \omega_0 t + B.\sin \omega_0 t + \frac{F}{2k}$$

à $t = 0$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1(0) = 0 &\Rightarrow A + \frac{F}{2k} = 0 \\ &\Rightarrow A = \frac{-F}{2k} \end{aligned}$$

$$\dot{u}_1(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(0) = 0 &\Leftrightarrow B\omega_0 = 0 \\ &\Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{-F}{2k} \cos \omega_0 t + \frac{F}{2k} \\ u_1(t) &= \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_0 t) \end{aligned}$$

Phase 2: $t > t_1$ sachant que t_1 est la durée de la phase 1

Si on définit le paramètre \bar{t} tel que $\bar{t} = t - t_1$, cette phase peut être aussi défini par l'intervalle $\bar{t} > 0$

Le mouvement devient non-amorti libre dont l'équation est:

$$m\ddot{u} + 2ku = 0$$

La réponse notée $u_2(t)$ est donnée par:

$$u_2(t) = A' \cdot \cos \omega_0 t + B' \cdot \sin \omega_0 t$$

$$u_2(t) = A' \cdot \cos \omega_0 (t - t_1) + B' \cdot \sin \omega_0 (t - t_1)$$

Or:

$$u_1(t_1) = u_2(t_1)$$

$$\dot{u}_1(t_1) = \dot{u}_2(t_1)$$

Avec:

$$u_2(t_1) = A' = u_1(t_1)$$

$$u_1(t_1) = \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_0 t_1) = A'$$

$$\dot{u}_2(t_1) = -A' \omega_0 \sin(t_1 - t_1) + B' \omega_0 \cos(t_1 - t_1)$$

$$\dot{u}_2(t_1) = B' \omega_0$$

$$B' = \frac{\dot{u}_2(t)}{\omega_0} = \frac{\dot{u}_1(t)}{\omega_0}$$

$$\dot{u}_1(t_1) = \frac{F}{2k} \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t_1$$

$$B' = \frac{F}{2k} \cdot \sin \omega_0 t_1$$

Par conséquent:

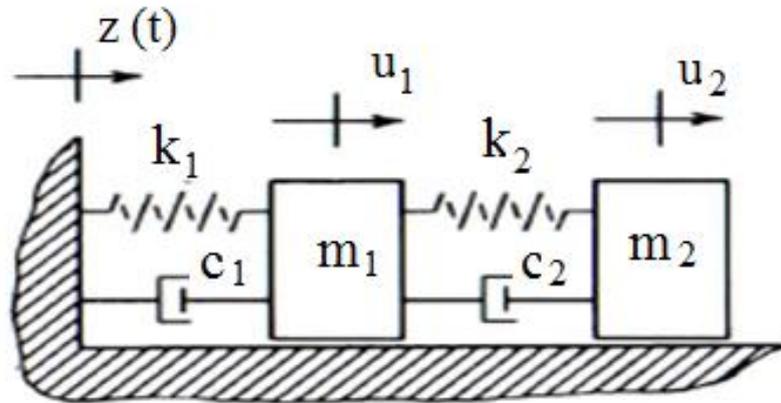
$$u_2(t) = \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_0 t_1) \cdot \cos \omega_0 (t - t_1) + \frac{F}{2k} \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 (t - t_1)$$

$$u_2(t) = \frac{F}{2k} [(1 - \cos \omega_0 t_1) \cdot \cos \omega_0 (t - t_1) + \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 (t - t_1)]$$

Exercice N° 11:

Donner le système d'équations différentielles de la figure suivante

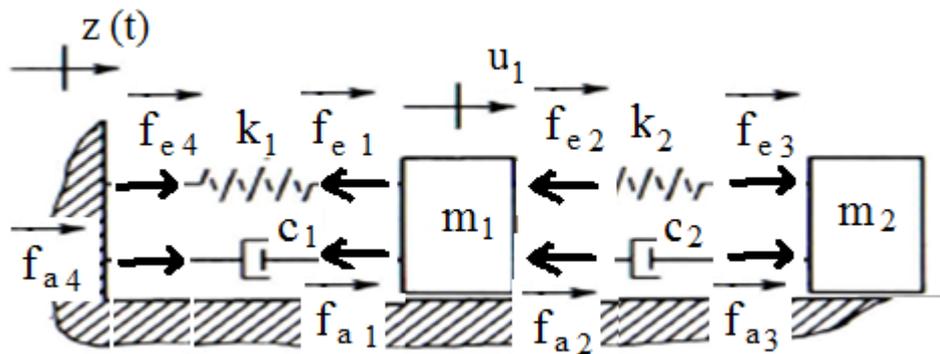
- 1) Utilisant la loi de Newton
- 2) Utilisant la loi de Lagrange



Corrigé de l'exercice N° 11:

1) Le système d'equations différentielles de mouvement utilisant la loi de Newton

1.1) par rapport au premier DDL u_1



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{f}_{e4} + \vec{f}_{a4} + \vec{f}_{e1} + \vec{f}_{a1} + \vec{f}_{e2} + \vec{f}_{a2} + \vec{f}_{e3} + \vec{f}_{a3} = m_1 \cdot \vec{\gamma}$$

Après projection sur l'axe positif, on aura:

$$\Rightarrow +f_{e4} + f_{a4} - f_{e1} - f_{a1} - f_{e2} - f_{a2} + f_{e3} + f_{a3} = m_1 \cdot (\ddot{z} + \ddot{u}_1)$$

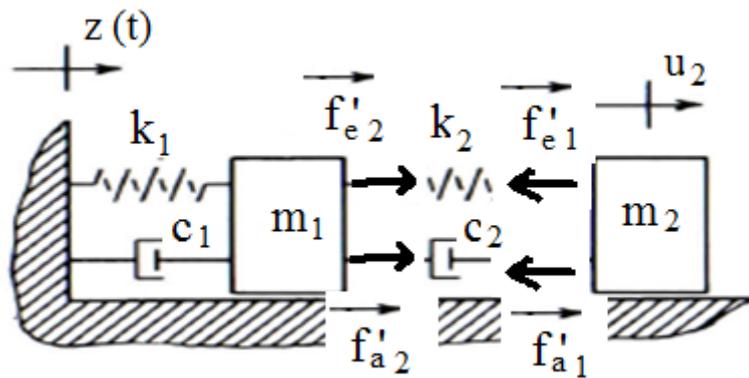
$$\begin{aligned}
 f_{e4} &= 0 \\
 f_{a4} &= 0 \\
 f_{e1} &= k_1 \cdot u_1 \\
 f_{a1} &= c_1 \cdot \dot{u}_1 \\
 f_{e2} &= k_2 \cdot u_1 \\
 f_{a2} &= c_2 \cdot \dot{u}_1 \\
 f_{e3} &= k_2 \cdot u_2 \\
 f_{a3} &= c_2 \cdot \dot{u}_2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - k_1 \cdot u_1 - c_1 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_1 + k_2 \cdot u_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 = m_1 \cdot (\ddot{z} + \ddot{u}_1)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au premier DDL est de forme:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = -m_1 \cdot \ddot{z}$$

1.2) par rapport au premier DDL u_2



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{f}'_{e1} + \vec{f}'_{e2} + \vec{f}'_{a2} + \vec{f}'_{a1} = m_2 \cdot \vec{\gamma}$$

$$-f'_{e1} + f'_{e2} - f'_{a1} + f'_{a2} = m_2 \cdot (\ddot{z} + \ddot{u}_2)$$

$$-k_2 \cdot u_2 + k_2 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_1 = m_2 \cdot (\ddot{z} + \ddot{u}_2)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au deuxième DDL est de forme:

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 = -m_2 \cdot \ddot{z}$$

Donc Le système d'equations différentielles de mouvement utilisant la loi de Newton est:

$$\begin{cases}
 m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_2 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = -m_1 \cdot \ddot{z} \\
 m_2 \cdot \ddot{u}_2 + c_2 \cdot \dot{u}_2 + k_2 \cdot u_2 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_2 \cdot u_1 = -m_2 \cdot \ddot{z}
 \end{cases}$$

2) Le système d'équations différentielles de mouvement utilisant la loi de Lagrange

Notant "q" le degré de liberté, La formulation générale de l'équation de Lagrange est:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D_{\alpha}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial q}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{u}_1 + \dot{z})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{u}_2 + \dot{z})^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (u_2 - u_1)^2$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{u}_1 + \dot{z})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{u}_2 + \dot{z})^2 - \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (u_2 - u_1)^2$$

La fonction de dissipation d'énergie est donnée par:

$$D_{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \dot{q}^2$$

$$D_{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)^2$$

Le travail des force externe est:

$$F_{ext} = p(t) \cdot q$$

$$F_{ext} = 0$$

2.1) par rapport au premier DDL u_1

par rapport au premier DDL, l'équation de Lagrange s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = - \frac{\partial D_{\alpha}}{\partial \dot{u}_1} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 2 \cdot (\dot{u}_1 + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) = m_1 \cdot (\ddot{u}_1 + \ddot{z})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -\frac{1}{2}.k_1.2.u_1 - \frac{1}{2}.k_2.2.(-1).(u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -k_1.u_1 + k_2.(u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_1} = c_1.\dot{u}_1 + c_2.(\dot{u}_2 - \dot{u}_1).(-1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_1} = c_1.\dot{u}_1 - c_2.(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$m_1.(\ddot{u}_1 + \ddot{z}) + k_1.u_1 - k_2.(u_2 - u_1) = -c_1.\dot{u}_1 + c_2.(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au premier DDL est de forme:

$$m_1.\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 + k_1.u_1 - c_2.\dot{u}_2 - k_2.(u_2 - u_1) = -m_1.\ddot{z}$$

2.2) par rapport au premier DDL u₂

par rapport au deuxième DDL, l'équation de Lagrange s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_2} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = m_2.(\dot{u}_2 + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) = m_2.(\ddot{u}_2 + \ddot{z})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -\frac{1}{2}.k_2.2.(u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -k_2.(u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_2} = \frac{1}{2}.c_2.2.(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}_2} = c_2.(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{z}) + k_2.(u_2 - u_1) = -c_2.(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

L'équation différentielle de mouvement par rapport au deuxième DDL est de forme:

$$m_2.\ddot{u}_2 + c_2.\dot{u}_2 + k_2.u_2 - c_2.\dot{u}_1 - k_2.u_1 = -m_2.\ddot{z}$$

Donc Le système d'equations différentielles de mouvement utilisant la loi de Lagrange est:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 + k_1 u_1 - c_2 \dot{u}_2 - k_2 (u_2 - u_1) = -m_1 \ddot{z} \\ m_2 \ddot{u}_2 + c_2 \dot{u}_2 + k_2 u_2 - c_2 \dot{u}_1 - k_2 u_1 = -m_2 \ddot{z} \end{cases}$$

Exercice N° 12:

Soit le portique à deux degrés de liberté de la figure 5.

Calculer:

- 1) La Matrice masse
- 2) La matrice rigidité
- 3) Les fréquences propres
- 4) Les modes propres
- 5) La matrice modale
- 6) Matrice masse modale
- 7) Matrice de rigidité modale
- 8) Vecteur modale

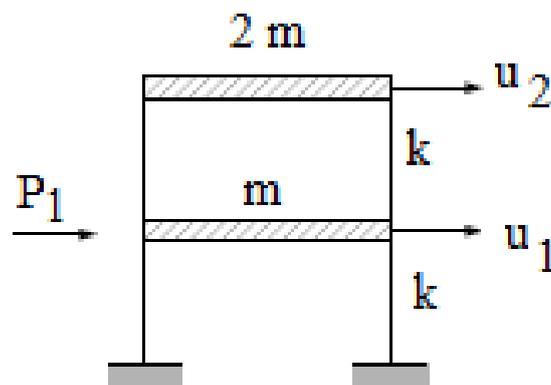


Figure 5

Corrigé de l'exercice N° 12:

- 1) Matrice masse

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

2) Matrice Rigidité

$$[k] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

3) Calcul des fréquences propres

$$\det \begin{bmatrix} 2k - m\omega_0^2 & -k \\ -k & k - 2m\omega_0^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (2k - m\omega_0^2)(k - 2m\omega_0^2) - k^2 &= 0 \\ 2k^2 - 4mk\omega_0^2 - m\omega_0^2 k + 2m^2\omega_0^4 - k^2 &= 0 \\ 2m^2\omega_0^4 - 5mk\omega_0^2 + k^2 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Posons:

$$B = \omega_0^2$$

$$(*) \Leftrightarrow 2m^2 B^2 - 5mk B + k^2 = 0$$

$$\Delta = (-5.m.k)^2 - 4.(2.m^2.k^2)$$

$$\Delta = 25.m^2.k^2 - 8.m^2.k^2$$

$$\Delta = 17.m^2.k^2$$

$$\sqrt{\Delta} = m.k.\sqrt{17}$$

$$B = \frac{5.m.k \pm m.k.\sqrt{17}}{4m^2}$$

$$B_1 = 2.28 \frac{k}{m}$$

$$B_2 = 0.219 \frac{k}{m}$$

Donc:

$$\begin{cases} \omega_{01} = 1.509 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_{02} = 0.467 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

4) Modes propres

pour $\omega_{01} = 1.509 \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} 2k - m.(2.28 \frac{k}{m}) & -k \\ -k & k - 2m.(2.28 \frac{k}{m}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.28k & -k \\ -k & -3.56k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0.28 u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 - 3.56 u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = -0.28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28 \end{pmatrix}$$

pour $\omega_{02} = 0.467 \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} 2k - m.(0.219 \frac{k}{m}) & -k \\ -k & k - 2m.(0.219 \frac{k}{m}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.781k & -k \\ -k & 0.562k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.781 u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 1.781 u_1 \\ -u_1 + 0.562 u_2 = 0 \end{cases}$$

Si $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 1.781$

On aura donc:

$$V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.781 \end{pmatrix}$$

5) Matrice modale

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.28 & 1.781 \end{bmatrix}$$

6) Matrice masse modale

$$[M_r] = \{\Phi\}^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}$$

$$[M_r] = \begin{bmatrix} 1 & -0.28 \\ 1 & 1.781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.28 & 1.781 \end{bmatrix}$$

$$[M_r] = \begin{bmatrix} m & -0.56m \\ m & 3.562m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.28 & 1.781 \end{bmatrix}$$

$$[M_r] = m \cdot \begin{bmatrix} 1.1568 & 2.64 \cdot 10^{-3} \\ 2.64 \cdot 10^{-3} & 7.343 \end{bmatrix}$$

7) Matrice de rigidité modale

$$[k_r] = \{\Phi\}^T \cdot [k] \cdot \{\Phi\}$$

$$[k_r] = \begin{bmatrix} 1 & -0.28 \\ 1 & 1.781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.28 & 1.781 \end{bmatrix}$$

$$[k_r] = \begin{bmatrix} 2.28k & -1.28k \\ 0.219k & 0.781k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.28 & 1.781 \end{bmatrix}$$

$$[k_r] = k \cdot \begin{bmatrix} 2.6384 & 3.2 \cdot 10^{-4} \\ 3.2 \cdot 10^{-4} & -1.171 \end{bmatrix}$$

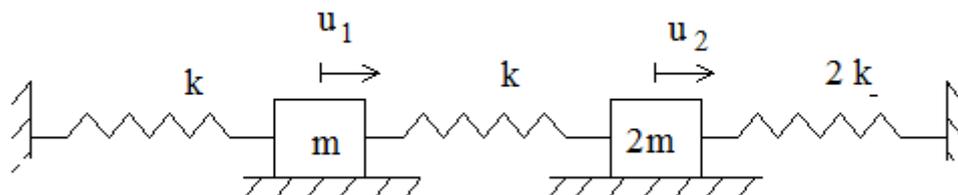
8) Vecteur modale

$$\{f\} = \{\Phi\}^T \cdot \{p\} \cdot \{\Phi\}$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 1 & -0.28 \\ 1 & 1.781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.28 & 1.781 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

Exercice N° 13:

Donner utilisant la loi de Lagrange le système d'équation différentielle du système de la figure suivante.



Corrigé de l'exercice N° 13:

l'équation de Lagrange est donnée par:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = - \frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial F_{ext}}{\partial u}$$

$$L = E_{CT} + E_{PT}$$

$$E_{CT} = \frac{1}{2} m \dot{u}_1^2 + m \dot{u}_2^2$$

$$E_{PT} = \frac{1}{2} k u_1^2 + \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)^2 + k u_2^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{u}_1^2 + m \dot{u}_2^2 - \frac{1}{2} k u_1^2 - \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)^2 - k u_2^2$$

$$D_\alpha = 0$$

$$F_{ext} = p(t) \cdot u_1$$

par rapport à U₁

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = m \dot{u}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) = m \ddot{u}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -k u_1 - k \cdot (-1) \cdot (u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -k u_1 + k (u_2 - u_1)$$

$$\frac{\partial F_{ext}}{\partial u_1} = p$$

l'équation différentielle de mouvement par rapport au premier degré de liberté est:

$$m \ddot{u}_1 + 2k u_1 - k u_2 = p$$

par rapport à U₂

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = 2m \dot{u}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) = 2.m.\ddot{u}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -k.(1).(u_2 - u_1) - 2.k.u_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -k.(u_2 - u_1) - 2.k.u_2$$

$$2.m.\ddot{u}_2 + k.(u_2 - u_1) + 2.k.u_2$$

l'équation différentielle de mouvement par rapport au deuxième degré de liberté est:

$$2.m.\ddot{u}_2 + 3.k.u_2 - k.u_1 = 0$$

le système d'équations différentielles est:

$$\begin{cases} m.\ddot{u}_1 + 2.k.u_1 - k.u_2 = p \\ 2.m.\ddot{u}_2 + 3.k.u_2 - k.u_1 = 0 \end{cases}$$

Conclusion générale

Le polycopié intitulé "Dynamique des structures 1" fait l'objet d'un support pédagogique de base qui aide l'étudiant en Master 1 de comprendre les notions de base de la dynamique appliquée en Génie civil.

J'espère que l'étudiant trouve exactement ce qu'il cherche à travers les informations disponibles dans ce support écrit.

Références Bibliographiques

[1] Dynamics Of Structures, RayW. Clough, Joseph Penzien, Third Edition, Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704, USA.

[2] Dynamique Des Structures, Alain Pecker, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Chaussée, 2006

[3] Earthquake engineering, theory and implementation, Nazzal S. Armouti, ph.D., P.E,
department of civil engineering, University of Jordan, 2004.

Semestre:1**Unité d'enseignement: UEF 1.1.1****Matière2:Dynamiques des Structures 1****VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)****Crédits: 4****Coefficient: 2****Objectifs de l'enseignement:**

L'objectif de ce cours est de présenter les méthodes permettant le calcul et le comportement des structures soumises à des sollicitations dynamiques. L'étude des vibrations de systèmes linéaires, et la réponse d'une structure à un degré de liberté soumise à divers types de chargement (constante, périodique, impulsionnelle), en vue de maîtriser la conception des ouvrages soumis à des chargements dynamiques.

Connaissances préalables recommandées:

Résistance des Matériaux; Méthodes Numériques.

Contenu de la matière:**Chapitre : 1** Introduction et généralistes**(3 semaines)**

- Définition d'un problème dynamique

(Chargement dynamique, Structure ou système dynamique, Degré de liberté d'un système, Coordonnées généralisées

- Procédure générale d'une analyse dynamique

(Modélisation en dynamique, Formulation de l'équation de mouvement, Résolution des équations différentielles du mouvement, Interprétation et exploitation des résultats)

Chapitre 2 : Systèmes à un seul degré de liberté**(6 semaines)**

- Formulation de l'équation de mouvement

- Vibrations libres

(Vibrations libres non-amorties, Vibrations libres amorties, Le décrétement logarithmique)

- Vibrations Forcées

(Excitation harmonique, Excitation impulsive, Excitation dynamique quelconque)

- Réponse au mouvement d'un support

(Excitation harmonique du support, Excitation sismique du support)

- Spectre de réponse

Chapitre 3 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté**(6 semaines)**

- Formulation des équations de mouvement

- Evaluation des matrices [M], [K], [C] et vecteur de force {P}

(Matrice de rigidité [K], Matrice de masse [M], Matrice d'amortissement [C], Vecteur des forces extérieures {P})

Mode d'évaluation :

Contrôle continu : 40% ; Examen : 60%.

Références bibliographiques :

1 **J. BETBEDER-MATIBET et J.L. DOURY** *Constructions parasismiques, Techniques de l'Ingénieur, traité Construction.*

2 **Clough P. W. et Penzien J.**, *Structural Dynamics, Computers and Structures Inc, Berkeley, 2001*

3 **Chopra, A.K.**, *Dynamics of Structures - Theory and Application to earthquake engineering, Prentice Hall, New Jersey*

4 **RPA-99 (2004)**. *Règles Parasismiques Algériennes 1999. Centre National de Recherche Appliquée en Génie Parasismique, Alger.*

5 **Filialtraut**, *Éléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures, Presses internationales Polytechnique 1996.*

6 **Eurocode 8** : *Design of structures for earthquake resistance, European Committee for Standardization, NF EN 1998-1 Sept 2005*

7 **EL. Wilson**, *3-D Static and dynamic analysis, Computers & Structures, 1996.*