بحوث العمليات

دروس ملخصة وتمارين محلولة

من تأليف:

د. بن مسعود نصر الدين المؤلف الأول

د. عمارة البشير المؤلف الثاني

NPU
النشر الجديد الجامعي

بسم الله الرحمن الرحيم

{ وَيَسْأَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ ۖ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي
وَمَا أُوتِيتُم مِّنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا (85) }

صدق الله العظيم.

سورة الإسراء

فهرس المحتويات

د. بن مسعود نصرالدين   د.عمارة البشير

بحــوث العمليــات

دروس ملخصة وتماريـن محلولة

النشر الجامعي الجديد

د. بن مسعود نصرالدين
د.عمارة البشير
بحــوث العمليــات
دروس ملخصة وتماريـن محلولة
النشر الجامعي الجديد

د. بن مسعود نصرالدين

من مواليد 1983 بفلاوسن ولاية تلمسان متحصل على شهادة ليسانس علوم تجارية تخصص مالية سنة 2007 من جامعة تلمسان وشهادة الماجيستر في الاقتصاد تخصص بحوث العمليات وتسيير المؤسسات سنة 2010 من جامعة تلمسان وشهادة الدكتوراه في علوم التسيير تخصص بحوث العمليات وتسيير المؤسسات سنة 2015 من جامعة تلمسان، ومُدرس لعدة مقاييس من بينها:الاقتصاد الجزئي، بحوث العمليات، نماذج التنبؤ،سبر الآراء، تقييم المشاريع الاستثمارية، الإحصاء الوصفي،الإحصاء التطبيقي.

د.عمارة البشير

من مواليد 1983 بآفلو ولاية الأغواط متحصل على شهادة ليسانس علوم التسيير تخصص محاسبة سنة 2007 من جامعة الاغواط وشهادة الماجيستر في الاقتصاد تخصص بحوث العمليات وتسيير المؤسسات سنة 2010 من جامعة تلمسان وشهادة الدكتوراه علوم التسيير تخصص بحوث العمليات وتسيير المؤسسات سنة 2017 من جامعة تلمسان، ومُدرس لعدة مقاييس من بينها: الاقتصاد الجزئي، بحوث العمليات، رياضيات المؤسسة، الإحصاء، إدارة المشاريع.

هذا الكتاب:

موجه لطلبة العلوم الاقتصادية والتسيير بما فيهم طلبة الاقتصاد الكمي والتحليل الاقتصادي واقتصاد وتسيير المؤسسات، وكل الطلبة بجميع المستويات وحتى طلبة الدراسات العليا، وكذلك موجه إلى المسؤولين والمسيرين سواء في المؤسسات العامة أو الخاصة بشتى أنواعها، وهذا كله بُغية تسهيل مهمة اتخاد القرار بشكل مثولي ومرضي.

شمل هذا الكتاب مجموعة من التمارين التطبيقية مع الحلول حول أشهر أساليب بحوث العمليات التي جاءت عبر مرور الزمن، والتي من أهمها البرمجة الخطية الأحادية الهدف والبرمجة الخطية المتعددة الأهداف ومشاكل النقل وصفوف الانتظار وإدارة المشاريع، بالإضافةإلى ذلك تم إرفاق كل أسلوب بملخص نظري يتضمن تذكير بأهم المصطلحات والمفاهيم والعلاقات الرياضية والقوانين الضرورية التي ينبغي على الطالب استيعابها وفهمها لغرض استعمالها في حل التمارين بشكل سهل وبسيط.

ISBN: 978 9947 78 227 9

النشر الجامعي الجديد طباعة - نشر - توزيع
رقم 02 تجزئة تعاونية الدواجن، حي الدالية، الكيفان - تلمسان.
الهاتف / الفاكس : 043 277 687
البريد الالكتروني : npu_editions@yahoo.fr

بحوث العمليات

دروس ملخصة وتمارين محلولة

من تأليف:

د. بن مسعود نصر الدين المؤلف الأول

د. عمارة البشير المؤلف الثاني

بسم الله الرحمن الرحيم

وَيَسْأَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ ۖ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي وَمَا أُوتِيتُم مِّنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا (85)

صدق الله العظيم.

سورةالإسراء

فهرس المحتويات:

مقدمـــــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة على أفضل المرسلين محمد صلى الله عليه وسلم أما بعد:

يســعدنا أن نتقدم بهذا الكتاب المتواضــع إلى كل من هو مختص ومهتم بمجال الإدارة والتســيير من أســاتذة وطلبة وموظفين وباحثين في مختلف المجالات، والذي يتحدث عن مجموعة من الأساليب والطرق الرياضية التي تندرج ضمن موضوع بحوث العمليات التي ينبغي فهمها واستيعابها من أجل اتخاد قرار سليـــم وخـــالي إلى حد ما من العيوب والمخاطر، والتي تساهم في خلق إدارة نزيهة وعادلة في التسيير، والتي تساعد في تسريع القرارات وتقديم خدمات بما هو مطلوب في الوقت المناسب والمكان ملائم والجودة المرضية.

وما جاء به هذا الكتاب هو استعراض لأهم أساليب بحوث العمليات والأكثر شيوعا بشكل مختصر وملخص من الجانب النظري مع إرفاق ذلك بمجوعة كبيرة من التمارين مع الحول من الجانب التطبيقي، حيث كل أسلوب إلا وجعلنا له ملخص نظري يعتمد على الأساسيات المتعلقة به مرفوق بتمارين مع الحل، وكان ذلك في ستة فصول.

حيث خصص **الفصل الأول** في استعراض **نموذج البرمجة الخطية الأحادية الهدف**(**Linear Programming For A Single Objective**) الأكثر شيوعا في حل مشاكل المؤسسات، خصوصا على المدى القصير كتخطيط الإنتاج مثلا والتي تطبق في حالة وجود هدف واحد مثل التعظيم أو التقليل، و كان ذلك بعرض مختصر لمفهومها و المراحل التي تتبعها في اســـتعمالها و كيفية صـــياغتها رياضـــيا، وتوضـــيح أهم طرق حلها يا إما الطريقة البيانية أو طريقة السمبلكس، وكذلك تم تناول الحساسية والتي هي بمثابة التغير الذي يطرأ على النموذج من حيث تغير المعلومات والبيانات وكذلك تم تقديم النموذج المقابل الذي يرفق النموذج الأصلي لنموذج البرمجة الخطية الأحادية الهدف.

الفصل الثاني تم استعراض فيه **نموذج البرمجة الخطية بالأهداف (Goal Programming)** والذي غالبا ما نجده إلا في المراجع باللغة الأجنبية خصــوصــا الإنجليزية، والذي جاء كامتداد لنموذج البرمجة الخطية الأحادية الهدف تزامنا مع التغيرات التي عرفتها المؤسســات عبر الزمن والتي فرضــت عليها التوجه إلى تحقيق مجموعة من الأهداف دفعة واحدة بدل هدف واحد كتعظيم الربح وتدنية التكاليف وتحسين الأداء ... الخ،

و**الفصل الثالث** خصص لـــ**نماذج تسير النقل**(**Transportation Model**) التي تساعد على بناء خطة نقل مثلى تسعى منها المؤسسة المعنية تجنب التكاليف الإضافية وتدنيتها إلى أقل مستوى ممكن، وكذلك احترام مواعيد الزبون من خلال نقل السلعة في الوقت المحدد والكمية المطلوبة والجودة الملاءمة.

و**الفصــل الرابع** تناول **نظرية الألعاب (Game Theory)** التي تعمل على اختيار الاســتراتيجية المثلى بين لاعب علــى حساب لاعب آخر وهو متعلق بالمنافسة بين المؤسسات.

بينما **الفصل الخامس** تناول **شبكات الأعمال**(**Network Models**) من حيث المفهوم والأساليب والاستخدامات، مع التركيز على طريقة المســار الحرج (**CPM**) وأســلوب غانت (**GANT**) وأســلوب تقييم ومراجعة تنفيذ البرامج (**PERT**).

وتناول **الفصل السادس** والأخير نظرية **صفوف الانتظار**(**Queuing Systems**) وذلك من حيث مفاهيمها وأهم المصطلحات المتعلقة بها ونماذجها المشهورة الأكثر استعمالا وتوضيح كيفية تطبيقها واستخدامها.

وفي الأخير نأمل من انجاز هذا الكتاب الذي يهدف إلى مساعدة الطلبة على تطبيقات بحوث العمليات لمختلف النماذج والأساليب الرياضية المندرجة تحت إسم بحوث العمليات لما لها أهمية بالغة في العلوم الإدارية والتسيير قد حقق بهذه الصورة الغرض منه، ونأمل أن يفيد القارئ فيما يصبوا إليه، ونسأل الله التوفيق والسداد.

وللإشارة الكتاب هذا كان مركز بدرجة كبيرة على الجانب التطبيقي نظرا لقلة الكتب المحتوية على التمارين خاصة باللغة العربية.

وبعد انجاز هذا العمل واستعراضه نود أن نضعه بين أيدي الباحثين والطلبة والأستاذة مستعدين لتقبل أية اقتراحات أو ملاحظات، وذلك من أجل التحسين والرفع من جودة هذا العمل، كما لا ننسى تقديم الشكر إلى الأستاذة المراجعين سواء من ناحية اللغة أو من الناحية التقنية والرياضية لما لها من علاقة وطيدة ومهمة في موضوع بحوث العمليات.

كذلك نقدم الشكر والاحترام إلى كل من ساهم في إنجاز هذا الكتاب بطريقة مباشرة أو غير مباشرة والذين وضعوا اللمسات الأخيرة على هذا الكتاب سواء بطباعته أو تجليده أو تصميمه أو إخراجه على هذه الصيغة.

نعتذر من القارئ الكريم عما قد يجده من هفوات غير مقصودة والعصمة لله، وفوق كل ذي علم عليم.

والله ولي التوفيق

من تأليف

د. بن مسعود نصرالدين المؤلف الأول

د. عمارة البشير المؤلف الثاني

البرمجة الخطية الأحادية الهدف

LINEAR PROGRAMMING FOR A SINGLE OBJECTIVE (GOAL)

تقديم عام حول البرمجة الخطية الأحادية الهدف:

تعتبر البرمجة الخطية من أهم الأساليب المساعدة على اتخاذ القرار وايجاد الحل الأمثل وبعد النجاح الذي عرفته أثناء الحرب العالمية الثانية عن طريق الاستخدام الأمثل للموارد الحربية المحدودة ليتم فيما بعد تعميمها وتطبيقها في مجالات أخرى من أهمها الاقتصاد،وقد قام العالم G.Dantizing بتطويرها وايجاد أسلوب Simplexوتبحث البرمجة الخطية عن الاستخدام الأمثل للموارد لتحقيق هدف محدد ويمكن التعبير عنه رياضيا، وتعالج عديد المشاكل كمشكلة التخصيص ومشكلة التثبيت ومشاكل التوزيع ومشكلة الجدولة ومشاكل الخلط وغيرها من المشاكل التي يمكن التعبير عنها على شكل برنامج خطي.

1- مفهوم البرمجة الخطية (Linear Programming):

البرمجة الخطية هي احدى الاساليب الكمية التي تستخدم للمساعدة في حل المشاكل واتخاذ القرارات الادارية، وسميت البرمجة الخطية بهذا الاسم لأنها تستخدم معادلة الخط المستقيم في بناء النموذج الرياضي الذي يتكون من معادلتين أو أكثر ويساعد على تحديد بدائل الحلول الممكنة واختيار البديل الأفضل من بينها.

2- المراحل الأساسية في البرمجة الخطية:

تتمثل هاته المراحل فيما يلي:

أ. **تعريف المشكلة**: وذلك من خلال تحديد هدف رئيسي يراد تحقيقه وقد يكون تحقيق أكبر عائد أو أكبر ربح ممكن أو تحقيق أدنى تكلفة ممكنة، وللوصول الى هذا الهدف هناك عدة بدائل ممكنة نقوم بالمفاضلة بينها على أساس الكفاءة والعائد، واختيار البديل يساعد على اتخاذ القرار الصحيح، ويجب أن تكون كافة بيانات المشكلة قابلة للتعبير رياضيا.

ب. **تكوين النموذج**: وهذا بالتعبير الجيد عن مكونات المشكلة والعناصر المؤثرة فيها وتعتبر من أهم الخطوات لأن بناء نموذج دقيق سيؤدي الى اتخاذ قرار صائب بالضرورة ويتم الاعتماد على النماذج الرياضية في تكوين النموذج.

ج. **ايجاد الحل**: بعد ايجاد النموذج تأتي عملية تحديد الكميات المثلى وفقا للأهداف والقيود الموجودة وقد يستحيل الحل في بعض الاحيان حيث يتم اللجوء الى أساليب أخرى كالمحاكاة والاحتمالات.

د. **اختبار النموذج**: يتم اختبار النموذج باستعمال البيانات التاريخية وقد يتطلب الأمر تحديد النموذج واعادة اختياره الى أن تختفي العيوب التي تظهر.

ه. **تطبيق الحل**: ويتم تطبيق الحل بعد التأكد من صحة النموذج وتسهم التغذية العكسية في اعادة صياغة النموذج في حال تغير الظروف المحيطة والقيود المفروضة أو الاهداف المسطرة.

3- الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

بعد جمع المعلومات اللازمة عن المشكلة يقوم المسير أو المبرمج بتحديد دالة الهدف ووضع القيود المفروضة على الحل والشروط الواجبة للحل ويتكون البرنامج الخطي مما يلي:

أ. **دالة الهدف (Objective Fonction):** هناك نوعان من المسائل الأولى مسائل تعظيم (Maximize) تتعلق بالوصول الى أقصى ربح ممكن أو اقصى انتاج ممكن وتكون في الجوانب الايجابية للمؤسسة أو للهيئة متخذة القرار، والثانية مسائل تدنئة (Minimize) وتتعلق بالوصول إلى أقل تكلفة ممكنة أو أقل خسارة ممكنة وتكون في الجوانب السلبية للجهة متخذة القرار.

ب. **القيود (Constraints):**وتكون عبارة عن معادلات أو متراجحات رياضية تعبر عن وجود حد لدالة الهدف سواء كانت تعظيم أو تدنئة نظرا لكون موارد المؤسسة أو الهيئة متخذة القرار محدودة وقد تكون هاته القيود حد أدنى مفروض يجب أن نعادله أو نتجاوزه في النتائج.

ج. **شرط عدم السلبية (Non-Negativity Condition):** وهذا يعني أن الكميات التي نجدها تكون كميات موجبة أو معدومة أي أنها واقعية وليست نتائج رياضية لا يمكن تطبيقها.

4- **طرق حل نماذج البرمجة الخطية:**

هناك طريقتين للحل هما:

أ. **الطريقة البيانية (Graphical Method):** يمكن حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية فقط عندما لا يتجاوز عدد المتغيرات 2 متغيرين ويتم الحل وفق الخطوات التالية:

- تحديد المتغيرات ونستعمل المتغير الاول للمحور الأفقي والمتغير الثاني للمحور العمودي ؛
- تحويل متراجحات القيود الى معادلات؛
- تمثيل المعادلات بإعطاء قيمة للمتغير الأول حتى نوجد المتغير الثاني ثم نعطي قيمة للمتغير الثاني فنوجد المتغير الأول ؛
- نقوم بإلغاء المساحة التي لا تحقق كل مستقيم وفقا للمتراجحة الأصلية فنلغي يمين المستقيم في حالة قيد من الشكل أصغر أو يساوي ونشطب المساحة على اليسار ونقوم بإلغاء المساحة على يسار المستقيم في حالة القيد من الشكل أكبر أو يساوي وتشطيب المساحة على اليمين وتكون الحلول على الخط المستقيم في حالة القيد الأصلي عبارة عن معادلة؛
- نتحصل على مضلع متعدد الرؤوس عبارة عن تقاطع بين المساحات المضللة أو المشطبة؛
- رؤوس المضلع المتحصل عليه هي الحلول الممكنة للبرنامج الخطي؛

- نقوم بتعويض احداثيات كل رأس مضلع في دالة الهدف ونختار التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم والتي تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف في حالة التدنئة ويمكن الحصول على أكثر من حل نختار احداها.
- هناك بعض الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية فقد نجد عدة حلول مثلى أو لا نجد حل أمثل أو نجد انحلالية في الحل لأن عدد المتغيرات في الحل الأمثل والتي قيمتها أكبر من الصفر هي أقل من عدد قيود النموذج.

ب. **الحل بطريقة السمبلكس** (**The Simplex Method**): عندما يزيد عدد المتغيرات عن 2 متغيرين لابد من طريقة قوية وتتمثل في طريقة السمبلكس أو الجداول المتتالية وهي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية لاستخراج الحلول المثلى للبرامج الخطية وتتمثل خطواتها فيما يلي:

- تحضير البرنامج الخطي للحل وذلك بإضافة متغيرات إلى يسار المتراجحة أو المعادلة لموازنة النموذج؛
- نقوم بإضافة متغيرات فجوةS_i(Slack Variable) عندما تكون المتراجحات من الشكل أصغر أو يساوي ونضيف متغيرات اصطناعيةm_i(Artificial Variable) عندما تكون لدينا معادلات ونقوم بطرح متغير الفجوة واضافة متغير اصطناعي $-S_i + m_i$ في حالة متراجحات من الشكل أكبر أو يساوي؛
- يكون معامل متغيرات الفجوة معدوما في دالة الهدف وتنتج عن كل المتغيرات المضافة التي تعتبر أساسية أو داخل القاعدة مصفوفة معاملات أحادية وتكون جميع هذه المتغيرات الأساسية موجبة؛
- تمثيل البرنامج المحضر على شكل جدول يسمى بجدول الحل المبدئي؛
- ايجاد المتغير المرشح لدخول القاعدة أو الاساس من بين المتغيرات الحقيقية والموافق لأكبر عائد ويسمى العمود الموافق للمتغير بعمود الارتكاز؛
- تحديد المتغير المرشح للخروج من القاعدة أو الأساس وهو الموافق لأقل نسبة موجبة عند قسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر عمود الارتكاز ويسمى السطر الموافق بسطر الارتكاز؛
- القاطع بين سطر وعمود الارتكاز يسمى بعنصر الارتكاز؛
- عمود الارتكاز في المرحلة الجديدة يصبح عمود أحادي؛
- نقسم سطر الارتكاز على قيمة عنصر الارتكاز؛
- نحسب كل قيمة من القيم الباقية بالمعادلة التالية العنصر القديم مطروحا منه جداء العنصر المقابل له في سطر الارتكاز والعنصر المقابل له في عمود الارتكاز مقسوما على عنصر الارتكاز؛

- نختبر الحل المحصل عليه فيجب أن تكون جميع قيم سطر الحل موجبة في حالة التعظيم وجميع قيم سطر الحل سالبة في حالة التدنئة في حالة عدم التحقق يتواصل الحل حتى يتحقق الشرط؛
- الحل الامثل نجده في جدول الحل النهائي وكذلك قيمة الكميات المثلى.

5- المشكلة الثنائية (Dual):

تميز الطريقة المقابلة (Dual Simplex) عن الطريقة الأولية (Primal Simplex)في أنها تتطلب حسابات أقل مما يجعل الوصول الى الحل الامثل أكثر سهولة كما أن الحل بالطريقة الثنائية يتضمن معلومات اقتصادية أكثر فائدة للمدير ويساعده على اتخاذ القرار بشكل أسرع ويوفر عليه المزيد من الوقت ويمكن توضيح أهم الصفات المشتركة في الجدول التالي:

البرنامج الاولي	البرنامج الثنائي
دالة الهدف من النوع Maximum القيود كلها من الشكل أقل أو يساوي دالة الهدف من النوع Minimum القيود كلها من الشكل أكبر أو يساوي	دالة الهدف من النوع Minimum كل القيود تصبح من الشكل أكبر أو يساوي دالة الهدف من النوع Maximum كل القيود تصبح من الشكل أقل أو يساوي
قيود البرنامج الاولي	هي متغيرات البرنامج الثنائي
متغيرات البرنامج الاولي	هي قيود البرنامج الثنائي
معاملات المتغيرات في قيود البرنامج الأولي(عمود)	هي معاملات المتغيرات في قيود البرنامج الثنائي (سطر)
معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي	هي عناصر الطرف الأيمن في قيود البرنامج الثنائي

كما يمكن توضيح العلاقة بين البرنامج الأولي والبرنامج المقابل من خلال جدول تاكر A.Tucker :

$a_{11}a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}$ $a_{21}a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}$ $. \quad . \quad \dots \quad .$ $. \quad . \quad \dots \quad .$ $a_{m1}a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}$	$\leq b_1 \to y_1$ $\leq b_2 \to y_2$ $.$ $.$ $\leq b_m \to y_n$	≥ 0 ≥ 0 $.$ $.$ ≥ 0
$\geq \quad \geq \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \geq$ $C_1C_2 \dots \dots \dots \dots \dots C_m$	Min yi Max Z0	
$\geq 0 \quad \geq 0 \dots \dots \dots \dots \dots \geq 0$		

6- تحليل الحساسية(Sensativity Analysis):

متخذ القرار يحتاج الى معلومات موثوقة تساعده على اتخاذ القرار والواقع يثبت أن لا شيء يبقى على حاله فقد تتغير الظروف والقيود والشروط وإذا أعدنا بناء نموذج برمجة خطية جديد ثم نقوم بحله فالتكاليف سوف ترتفع لذلك وجدت طريقة تحليل الحساسية لمعرفة ما اذا كانت بعض التغيرات تؤثر على الحلول والقرارات أم لا تؤثر، وفي حالة التأثير كيف

نتوصل الى الحلول الجديدة دون حل البرنامج الجديد من البداية وهذا ما يعرف بتحليل الحساسية ويمكن أن يحدث في المواقع التالية:

أ. عناصر الطرف الأيمن RHS	د. متغير جديد	ب. دالة الهدف C_j
		ج. القيود C_{ij}
	هـ. قيد جديد	

أ. **الطرف الأيمن:** وهو التغير الحادث على الموارد المتاحة وقد يكون التغير مؤثرا أو غير مؤثر على الحل النهائي.

ب. **دالة الهدف:** هذه التغيرات هي التغيرات التي تحدث على مستوى معاملات دالة الهدف بالارتفاع أو بالانخفاض وقد تؤثر في الحل النهائي وقد لا تؤثر.

ج. **العوامل التقنية:** تغيرات تحدث على المعاملات التقنية a_{ij} تكنولوجية مثلا وقد لا تؤثر على الحل النهائي بقدر ما قد تؤدي إلى تغير الحل.

د. **إضافة متغير جديد:** قد تنتج المؤسسة منتجا جديدا أو قد يطرأ متغير جديد فنقوم بدراسة حساسية الحل لهذا المتغير الجديد.

هـ. **إضافة قيد جديد:** قد تحدث تغيرات في المحيط تفرز قيودا لم تكن موجودة سابقا ومثل هذه التغيرات قد تؤثر على الحل النهائي أو لا تؤثر.

ملخص البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية	
مجالات استخدامها	▪ مشكلة التخصيص:هنا يتم تثبيت مقدار الكمية التي يجب انتاجها من كل نوع من المخرجات من اجل مضاعفة الربح والهدف هو الوصول الى اختيار كمية من المدخلات التي اذا ما اختيرت ستحقق اعلى ربحية من خلال بيع المنتج. ▪ مشكلة التثبيت:هو تثبيت عنصر انتاج الى عنصر انتاج اخر لإنجاز اعلى كفاية ممكنة لنظام الانتاج الذي يحقق اعلى ربحية. ▪ مشكلة التوزيع: اختيار أفضل الطرائق من اجل الوصول الى خفض كلف النقل من خلال تحديد الكميات الواجب نقلها من مركز الانتاج الى الاسواق. ▪ مشكلة الجدولة: هي تعديل المنتجات وجدولتها على مدار السنة لكي يخفض كلفة المواد الاولية والعمل الاضافي والنقل. ▪ مشكلة الخلط: تخفيض كلفة انتاج مادة معينة فيها صفات الخلط بتحديد الكميات الداخلة في الخلط بحيث تكون العملية بأقل كلفة وأكثر نفع.
المراحل الأساسية	1. تعريف المشكلة من خلال تحديد الهدف والبدائل المتاحة وامكانية التعبير عن المتغيرات. 2. صياغة النموذج بتمثيل جيد لمكونات المشكلة والعوامل المؤثرة فيها باستخدام النماذج الرياضية. 3. إيجاد الحل بتحديد الكميات المثلى لمكونات المشكلة وفقا للظروف. 4. اختبار النموذج باستخدام بيانات تاريخية وتعديله حتى تزول سلبياته. 5. تطبيق الحل والتغذية العكسية في حالة القصور أو تغير الظروف.
	1. دالة الهدف

مكونات النموذج	$Max(Min)Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$ 2. القيود $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$ $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \geq b_2$ $..a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m$ 3. شرط عدم السلبية $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$	
أشكال البرنامج الخطي	**القانوني**	**المعياري**
	$MaxZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$ $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$ $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2$. $.a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$	$Max(Min)Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$ $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$ $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2$. $.a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m$ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$
تحضير البرنامج للحل	**قبل التحضير**	**بعد التحضير**
متراجحات من الشكل $\geq$ نضيف S_i	$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$	$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + S_1 = b_1$
معادلات من الشكل = نضيف m_i	$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$	$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + m_1$
متراجحات من الشكل $\leq$ نضيف $-S_i+m_i$	$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \geq b_1$	$= b_1$ $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n - S_1 + m_1 = b_1$
طرق الحل	**الحل البياني (عدد المتغيرات لا يتجاوز 2)**	**بطريقة السمبلكس**
	1. تحويل المتراجحات الى معادلات 2. تمثيل المعادلات في معلم بياني 3. تحديد مساحة الحل الممكن بتظليلها وذلك بالعودة لاتجاه المتراجحة فإذا كانت من الشكل أقل أو يساوي نظلل أسفل المستقيم وان كانت من الشكل أكبر أو يساوي نظلل أعلى المستقيم وإن كانت مساواة فالحل على خط المستقيم. 4. الحل هو أحد رؤوس المضلع المظلل فنستخرج احداثيات الرؤوس ثم نعوضها في دالة الهدف وعلى حسبها فإذا كانت تعظيم نأخذ الحل الاكبر وإن كانت تدنئة أو تقليل نأخذ الحل الأصغر. 5. هناك عدة حالات فيمكن أن نجد حلا واحدا أو عدة حلول أو ما لا نهاية من الحلول أو لا يوجد حل.	1. تحضير البرنامج بإضافة متغيرات الفجوة أو المتغيرات الاصطناعية على حسب الحالة إلى الطرف الأيسر. 2. اعتبار المتغيرات المتممة متغيرات أساسية في الحل الأساسي وإيجاد المتغيرات الحقيقية وقيمة دالة الهدف. 3. إيجاد المتغير المرشح للدخول للقاعدة وهو الأكثر عائدا ويسمى عمود المتغير بعمود الارتكاز. 4. إيجاد المتغير المرشح للخروج من القاعدة وذلك بقسمة عمود الثوابت على ما يقابله من قيم عمود الارتكاز ونأخذ ذو أقل نسبة موجبة ويسمى سطر العنصر المرشح للخروج بسطر الارتكاز. 5. التقاطع بين سطر الارتكاز وعمود الارتكاز يسمى بعنصر الارتكاز.

خطوات الحل		6. تحويل عمود الارتكاز الى عمود أحادي قيمة الواحد تقابل العنصر الداخل للقاعدة. 7. تحويل سطر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز. 8. بقية العناصر الاخرى تحسب بـ: العنصر المرشح للتغيير مطروحا منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الارتكاز وعمود عنصر الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز. 9. فحص سطر المتغيرات لمعرفة ما إن كان الحل الامثل أو يتواصل الحل. أ اذا كانت الدالة من نوع Max يجب أن تكون قيم سطر المتغيرات أو سطر الحل موجبة أو معدومة. ب اذا كانت الدالة من نوع Min يجب أن تكون قيم سطر الحل سالبة أو معدومة. يمكن أن نتحصل على حل وحيد أو عدة حلول أو ما لا نهاية من الحلول أو لا توجد حلول.

تحويل الدالة والقيود

$$\text{Minf(x)} = Max - f(x)$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \rightarrow \begin{matrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1 \end{matrix}$$

المسألة المرافقة Dual	المسألة الأصلية Primal	المسألة المرافقة أو الثنائية Dual
الحالة الأولى	$MaxZ_0 = \sum C_{ij}X_j$ $\sum a_{ij}X_j \leq b_i$ $X_j \geq 0$	$Miny_0 = \sum b_i y_i$ $\sum a_{ij}y_i \geq C_j$ $y_i \geq 0$
الحالة الثانية	$MinZ_0 = \sum C_{ij}X_j$ $\sum a_{ij}X_j \geq b_i$ $X_j \geq 0$	$Maxy_0 = \sum b_i y_i$ $\sum a_{ij}y_i \leq C_j$ $y_i \geq 0$
الحالة الثالثة	$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \rightarrow \begin{matrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1 \end{matrix}$	$a_{11}y_1^{\pm} + a_{12}y_2 \geq c_1$
الحالة الرابعة	$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_1 \rightarrow \begin{matrix} a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2 \\ -a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \leq -b_2 \end{matrix}$	$a_{21}y_1 + a_{22}y_2^{\pm} \geq c_2$

جدول الحل النهائي

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	
Z_0	D_1	D_2	D_3	y_1	y_2	Z_0
X_2	a_N	1	0	a_{N1}	a_{N3}	X_2
X_3	$a_{\acute{N}}$	0	1	a_{N2}	a_{N4}	X_3

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} a_{N1} & a_{N3} \\ a_{N2} & a_{N4} \end{pmatrix} \quad A_{HB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

1. **الطرف الأيمن:** تغير الموارد المتاحة b_i ونحسب بالقيم الجديدة عناصر الطرف الايمن الجديد فإذا كانت موجبة فقيم الحل تتغير فقط دون

$$A_B^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \acute{X}_2 \\ \acute{X}_3 \end{pmatrix}$$

<table>
<tr>
<td rowspan="5">تحليل الحساسية</td>
<td>المرور الى مراحل جديدة وإن كانت القيم الجديدة سالبة نواصل عمليات السمبلكس.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2. دالة الهدف: المعاملات c_j بفرض تغير c_1, c_2
بعد حساب قيم سطر الحل إذا وجدنا قيم سالبة فالحل يتواصل باختيار أكبر قيمة بالقيمة المطلقة كمتغير مرشح للدخول للقاعدة ونواصل العملية.</td>
<td>$\begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} A_B^{-1} = (y_{\acute{1}} \quad y_{\acute{2}})$
$S \to y_{\acute{1}} - 0 = y_{\acute{1}}$
$m_2 \to y_{\acute{2}} - (-m) = y_{\acute{2}} + m$
القيود الثنائية:
$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 = c_{\acute{1}}$
$X_1 \to a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - c_{\acute{1}} = D_{\acute{1}}$
$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = c_{\acute{2}}$
$X_2 \to a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - c_{\acute{2}} = D_{\acute{2}}$
$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 = c_{\acute{3}}$
$X_3 \to a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - c_{\acute{3}} = D_{\acute{3}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>3. العوامل التقنية: a_{ij}
إذا افترضنا تغير العوامل a_{23}, a_{13} نذهب للقيد الثنائي الموالي للمتغير X_3 فإذا ظهرت قيمة سالبة في سطر الحل نواصل عمليات الحل أما إذا ظهرت قيمة موجبة أو معدومة فإن قيم الحل فقط تتغير ولسنا بحاجة إلى مراحل جديدة من جدول السمبلكس.</td>
<td>$a'_{13}y_1 + a'_{23}y_2 - c_3 = D_3$</td>
</tr>
<tr>
<td>4. ادخال متغير جديد
بفرض أننا أدخلنا متغير جديد X_4 معاملاته a_{24}, a_{14} و c_4 والقيد الثنائي الموالي نعوض فيه فإذا ظهرت قيمة سالبة نواصل عمليات الحل كما نقوم بحساب معاملات المتغير الجديد في الجدول النهائي.</td>
<td>$a_{14}y_1 + a_{24}y_2 - c_4 \geq 0$
$A_B^{-1}\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{N1} & a_{N3} \\ a_{N2} & a_{N4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>5. اضافة قيد جديد
تتعلق بقبولية البرنامج وليس بأمثلية البرنامج وبفرض أن هناك قيد جديد حيث a_{31}, a_{32}, a_{33} و c_3
فإذا كان القيد محقق نضيفه للجدول بحيث نحافظ على الأعمدة الأحادية للمتغيرات الموجودة داخل القاعدة.</td>
<td>$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 - c_3 \leq 0$</td>
</tr>
</table>

تمارين مع الحل حول نموذج البرمجة الأحادية الهدف

التمرين رقم 01:

شركة مواد غذائية تقوم بإنتاج نوعين من المواد الغذائية B,A ويتطلب إنتاج النوعين ثلاثة أنواع من المواد الأولية III,II,I وهذا بالكميات المبينة في الجدول التالي:

	A	B
I	2	3
II	1	2
III	3	1

إن مقدار ما يتوفر من مواد أولية هو 40 كيلوغرام من النوع الأول I يوميا و 20 كيلوغرام من النوع الثاني II يوميا و 30 كيلوغرام من المادة النوع الثالث III يوميا، هامش الربح للوحدة الواحدة من A هو 20 وحدة نقدية وهامش الربح للوحدة الواحدة من B هو 25 وحدة نقدية.

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الخطي للمسألة؟
2. أوجد الحل البياني للمسألة؟

التمرين رقم 02:

ينتج مصنع صغير صنفين من الحقائب المدرسية: ذات الحجم الكبير وذات الحجم الصغير ويحقق ربحا مقداره 30،35 وحدة نقدية على التوالي فإذا كانت كل حقيبة تخضع الى مرحلتين لإنتاجها وهي التقطيع والخياطة والجدول التالي يبين الوقت الذي تستغرقه كل عملية بالدقائق حسب حجم الحقيبة والوقت الكلي المتاح بالساعات لكل عملية من العمليات:

	الحجم الصغير	الحجم الكبير	الوقت الكلي المتيسر
التقطيع	6	3	3 ساعات
الخياطة	4	6	4 ساعات

المطلوب:

باستعمال الرسم البياني حدد كم حقيبة من كل نوع ينتجها المصنع ليحقق أكبر ربح؟

التمرين رقم 03:

ترغب احدى المدارس في تنظيم رحلة لـ 120 من تلاميذها الى منطقة آثرية ولأجل ذلك تحتاج استئجار عدد من المركبات تحت اشراف 12 مدرسا وقد عثرت المدرسة على نوعين من السيارات:

النوع الأول تحمل 8 ركاب وتكلف 110 وحدة نقدية ;

النوع الثاني تحمل 20 راكبا وتكلف 305 وحدة نقدية.

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الخطي الذي يجعل التكلفة أقل ما يمكن؟
2. بالاستعانة بالرسم البياني أوجد الحل الأمثل للمسالة؟

التمرين رقم 04:

ينتج مصنع سلعتين يدخل في انتاجها مادتين من المواد الخام والكمية المتاحة من المواد الخام ونسب مكونات كل وحدة سلعة من المواد الخام وربح الوحدة موضحة في الجدول التالي:

المواد الخام	السلع		الكميات المتاحة بالآلاف
	الأولى	الثانية	
الأولى	1	2	40
الثانية	1	3	45
ربح الوحدة	5	10	

المطلوب:

1. تحديد الكميات التي تنتج من السلعتين بحيث تحقق أكبر ربح ممكن ولا تتجاوز الكميات المتاحة من المواد الخام وذلك باستخدام الطريقة البيانية؟

التمرين رقم 05:

يعطى لك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z_0=2X_1+X_2\ ,$$
$$4X_1+3X_2\leq 12,$$
$$4X_1+X_2\leq 8,$$
$$4X_1-X_2\leq 8,$$
$$X_1, X_2\geq 0.$$

المطلوب:

1. باستعمال الرسم البياني أوجد الحل الامثل للبرنامج الخطي؟

التمرين رقم 06:

اليك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z_0=20X_1+4X_2\,,$$

$$3X_1+2X_2\leq 10,$$

$$4X_1+6X_2\geq 20,$$

$$X_1,\, X_2\geq 0.$$

المطلوب:

باستعمال الرسم البياني أوجد الحل الامثل للبرنامج الخطي؟

التمرين رقم 07:

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z_0=15X+20Y,$$

$$X+2Y \geq 10,$$

$$2X-3Y \leq 6,$$

$$X+Y \geq 6,$$

$$X,Y\geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني الأمثل للبرنامج الخطي؟

التمرين رقم 08:

تشتري مزرعة مواشي مادتين غذائيتين مختلفتين ثم تقوم بمزجهما لصنع علف للمواشي وتحتوي كل مادة على ثلاث مكونات من العناصر الغذائية الأساسية C,B,A وبالمقادير التالية: 5غ من A ،4غ من 0,5،Bغ من C للمادة الأولى و 10 غ من A و 3غ من B للمادة الثانية فإذا علمت أن المزرعة تدفع 20 وحدة نقدية ثمنا للكيلوغرام من المادة الأولى وتدفع 30

وحدة نقدية ثمنا للكيلوغرام من المادة الثانية وأن كل وجبة تعدها المزرعة يجب أن تحتوي على الاقل على 90 غ من A، 48غ من B، 1,5غ من C.

المطلوب:

1. أوجد تركيبة الوجبة من المادتين بحيث تحقق الشروط أعلاه وبأقل تكلفة بالاستعانة بالبيان؟
2. أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة simplex ؟

التمرين رقم 09:

يقوم محل للحلويات بإنتاج ثلاثة أنواع من الحلوى، الهلال ، الخبز الصغير، حلوى بالطبقات والجدول التالي يلخص مكونات كل حلوى:

المكونات	الهلال	الخبز الصغير	حلوى الطبقات	المتاح من المواد
الطحين	12 غ	10غ	14غ	5كغ
الزبدة	5غ	4غ	3غ	1 كغ
الحليب	4غ	3غ	5غ	0،8 كغ
السكر	2غ	7غ	3غ	1كغ
مسحوق الشكولاطة	0	1غ	3غ	0،4 كغ

المطلوب:

فإذا علمت أن هامش الربح على حلوى الهلال هو 4 وحدات نقدية للوحدة و5 وحدات نقدية لحلوى الخبز الصغير و 6 وحدات نقدية لحلوى الطبقات فما هي التشكيلة المثلى التي ينتجها المحل وتحقق أقصى ربح ممكن؟

التمرين رقم 10:

مؤسسة تقوم بإنتاج نوعين من المنتجات الغذائية وتستعمل 2 وحدة من المادة الأولية لإنتاج المنتج الأول و 1 وحدة لإنتاج المنتج الثاني ويشترط السوق أن تنتج المؤسسة على الاقل 4 وحدات من المنتجين حيث تبلغ تكلفة المنتج الاول وحدة واحدة نقدية بينما تبلغ تكلفة انتاج وحدة ومن المنتج الثاني 2 وحدة نقدية.

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل الذي يسمح للمؤسسة بتقليل تكاليفها بطريقتين؟

التمرين رقم 11:

ليكن مشكل البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z_0 = 3X_1+2X_2+5X_3,$$

$$X_1+2X_2+X_3 \leq 430,$$

$$3X_1+2X_3 \leq 460$$

$$X_1+4X_2 \leq 420,$$

$$X_1، X_2، X_3 \geq 0.$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي؟

التمرين رقم 12:

مؤسسة تنتج نوعين من المنتجات أ،ب من خلال ثلاث ورشات حسب ما هو مبين في الجدول التالي:

	المنتج أ	المنتج ب	ساعات العمل المتاحة
الورشة I	1ساعة	2،5 ساعة	195 ساعة
الورشة II	2 ساعة	1 ساعة	160 ساعة
الورشة III	1 ساعة	1،5 ساعة	120 ساعة

المطلوب:

1. فإذا علمت أن الربح الوحدوي لكل من أ،ب هو 10،16 وحدة نقدية على التوالي لكل وحدة منتجة أوجد حل البرنامج الثنائي للمسألة واستنتج حلول البرنامج الاصلي؟

التمرين رقم 13:

تريد شركة سياحة عمل جسر جوي لنقل 1600 معتمر و 90 طن من الأمتعة والطائرات المتوفرة هي من نوعين:

- النوع الأول يستطيع نقل 200 شخص و6 طن من الأمتعة وتتوفر منها 12 طائرة ;
- النوع الثاني يستطيع نقل 100 شخص و6 طن من الأمتعة وتتوفر منها 9 طائرات.

تأجير طائرة من النوع الأول تكلف 800000 وحدة نقدية وتكلف الطائرة من النوع الثاني 200000 وحدة نقدية.

المطلوب:

1. حل المسألة باستعمال طريقة Simplex واكتب البرنامج المرافق للمسألة واستنتج حله؟

التمرين رقم 14:

مزرعة أحمد تستعمل 800 كيلوغرام من خلطة غذائية يتم فيها مزج بين الحبوب وفول الصويا وفق الجدول التالي:

المادة	البروتين(كغ)	الألياف(كغ)	تكلفة الكيلوغرام الواحد
الحبوب	0,09	0,02	0,30 وحدة نقدية
فول الصويا	0,60	0,06	0,90 وحدة نقدية

نظام التغذية يفرض أن 30%من البروتين تحتوي الخلطةوعلى الأكثر 5% من الألياف يرغب أحمد في تقليل تكلفة المزيج.

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي واستنتج حلول البرنامج المقابل؟

التمرين رقم 15:

احدى الشركات المنتجة للأدوات الرياضية قررت طرح ثلاثة أنواع من الكرات في السوق وبعد دراسة أولية تبين أن العائد من كل نوع على النحو التالي:

النوع الأول يحقق 5 وحدات نقدية ;

النوع الثاني يحقق 3 وحدات نقدية ;

النوع الثالث يحقق 6 وحدات نقدية.

وتمر الأنواع الثلاثة بثلاث ورشات وفق الجدول التالي:

النوع	التقطيع	الخياطة	الطباعة
النوع الاول	2	3	2
النوع الثاني	1	4	2
النوع الثالث	3	2	1

أما الطاقات الانتاجية في الورشات اسبوعيا كانت 48 ساعة للتقطيع و72 للخياطة و40 ساعة للطباعة.

المطلوب:

1. حل البرنامج المرافق للمسألة؟ واستنتج حلول البرنامج الأصلي؟

التمرين رقم 16:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z_0=2X_1+X_2 ,$$
$$4X_1+3X_2\leq 12,$$
$$4X_1+X_2\leq 8,$$
$$4X_1-X_2\leq 8,$$
$$X_1,X_2\geq 0$$

ويعطى لك جدول الحل النهائي للبرنامج السابق:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	؟	؟	؟	؟	؟	؟
؟	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	؟
؟	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	؟
؟	0	0	1	-2	1	؟

المطلوب:

1. أتمم الجدول مع إعطاء تفاصيل العمليات الحسابية؟

التمرين رقم 17:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z_0=5X_1+12X_2+4X_3.$$
$$X_1+2X_2+X_3\leq 5,$$
$$2X_1-X_2+3X_3=2,$$
$$X_1, X_2,X_3\geq 0.$$

وأعطي لك جدول الحل النهائي للبرنامج :

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	RHS
Z	?	?	$\frac{3}{5}$	?	?	?
?	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	?
?	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	?

المطلوب:

1. أكمل الجدول أعلاه؟
2. ما هو المورد الذي يجب رفعه والى أي مستوى؟
3. بافتراض أن عوامل الدالة قد تغيرت واصبحت $c_1=4,c_2=10$ فما الجديد؟
4. نفترض أن قيمة X_3 قد ارتفعت 4 الى 8 فما الجديد؟
5. اذا تغيرت معاملات X_3 وأصبحت $a_{23}=2$, $a_{13}=\frac{1}{2}$ فما الجديد؟
6. اذا قمنا بإدخال متغير جديد X_4 حيث $a_{14}=5,a_{24}=7,c_4=6$ فما الجديد؟
7. نقوم الآن بإضافة قيد جديد حيث $a_{32}=a_{31}=5,a_{33}=3,b_3=10$ فما الجديد؟

التمرين رقم 18:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z_0=20X_1+10X_2 ,$$
$$X_1+2X_2\leq 40,$$
$$3X_1+2X_2\leq 60,$$
$$X_1,X_2\geq 0$$

والجدول التالي يبين المرحلة النهائية في حل النموذج أعلاه:

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	?	?	?	?	?
?	?	?	α	$-\frac{1}{3}$	20
?	?	?	0	β	20

المطلوب:

1. أوجد قيم α، β وأتمم جدول السمبلكس؟
2. ما أثر ارتفاع العائد على X_2من 10الى15؟
3. ما أثر انخفاض العائد علىX_1من 20 إلى 10؟
4. ما هو أثر ارتفاع المورد الثاني من 60 إلى 130؟
5. ما أثر تغير معاملاتX_1من(2 2) إلى(2 1) ؟
6. بفرض إدخال متغير جديدX_3معاملاته(3 1)و$C_3=30$فما الجديد؟
7. بفرض إضافة قيد جديد$2X_1+3X_2 \geq 50$ فما الذي يحدث؟

التمرين رقم 19:

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z_0=3X_1+2X_2\ ,$$

$$X_1+X_2\leq 6\ ,$$

$$2X_1+X_2\leq 5,$$

$$-X_1+X_2\leq 1,$$

$$X_2\leq 2,$$

$$X_1,X_2\geq 0$$

وكان جدول الحل النهائي للبرنامج هو:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
X_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

المطلوب:

1. بفرض أن المورد الأول ارتفع من 6 الى 7 فما الجديد؟
2. بفرض أن المورد الاول ارتفع من 6 الى 7 والمورد الثاني انخفض من 8 الى 4 فكيف يتغير الحل؟
3. نقوم باضافة قيد جديد $X_1 \leq 3$ فما الذي يحدث؟
4. بافتراض تغير عوائد دالة الهدف من (3 2) الى (5 4) فما تأثير ذلك؟

التمرين رقم 20:

اليك نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Max } Z_0=10X_1+12X_2+6X_3\ ,$$

$$X_1+2X_2+3X_3\leq 80,$$

$$2X_1+X_2+X_3\leq 59,$$

$$3X_1+5X_2+4X_3\leq 120,$$

$$X_1,\ X_2, X_3\geq 0.$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للنموذج؟
2. اذا ارتفع المورد الأول بوحدة واحدة فما هو الجديد؟ ونفس السؤال بالنسبة للمورد الثاني والثالث؟
3. اذا تغير العائد على المنتج الاول بزيادة 5 وحدات فما الذي يحدث؟
4. أما اذا تغيرت معاملات X_3 من $\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ فما الجديد؟
5. اذا تغيرت معاملات X_1 من $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ فما الجديد؟
6. اذا اضفنا القيد التالي: $X_1+X_2+X_3 \leq 30$ فما تأثيره على الحل؟
7. ما هو تأثير اضافة متغير جديد X_4 بربح مقداره 12 للوحدة و معاملات فنية: $\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$؟

حلول التمارين

حل التمرين رقم 01:

نفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من A.

نفرض أن X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من B.

1. كتابة البرنامج الخطي:

$$\text{Max } Z_0=20X_1+25X_2.$$

$$2X_1+3X_2\leq 40,$$

$$X_1+2X_2\leq 20,$$

$$3X_1+X_2\leq 30,$$

$$X_1,X_2\geq 0 .$$

2. ايجاد الحل البياني للمسألة:

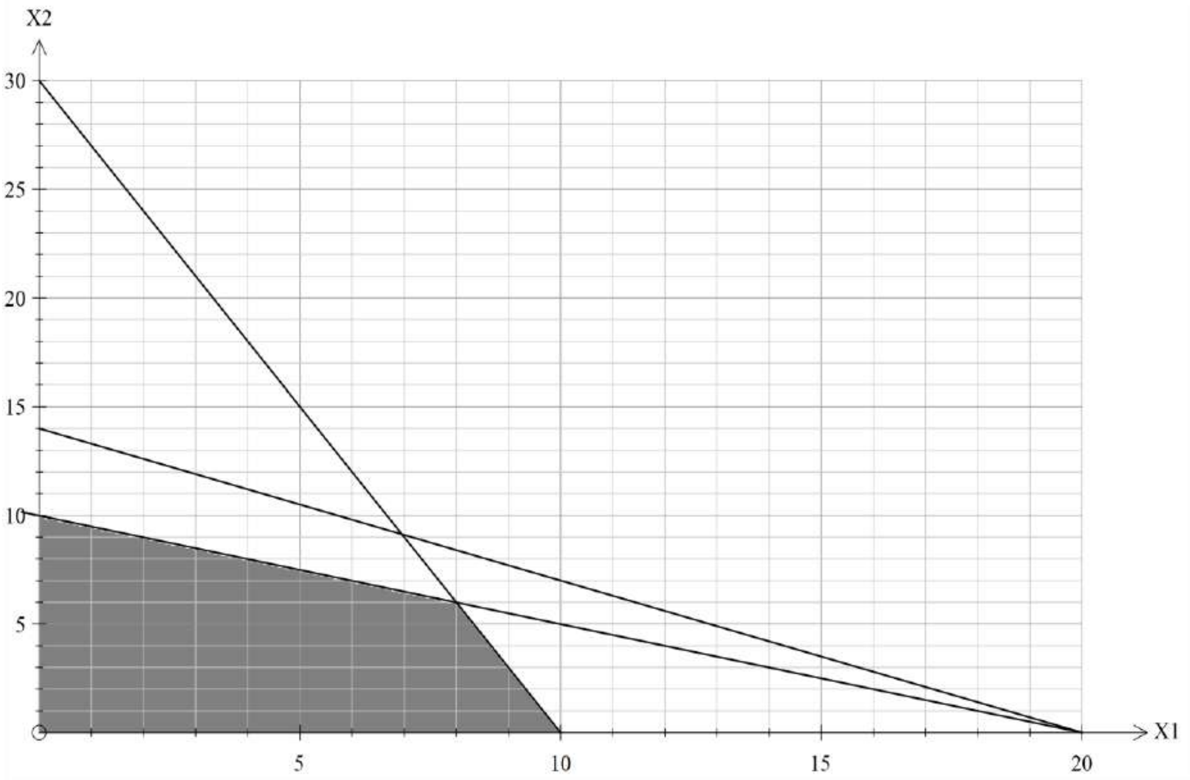
نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات:

$$2X_1+3X_2 = 40,$$
$$X_1+2X_2 = 20,$$
$$3X_1+X_2 = 30.$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم ايجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

معادلة القيد الثالث		معادلة القيد الثاني		معادلة القيد الأول	
X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1
30	0	10	0	40/3	0
0	10	0	20	0	20

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي.

حلول البرنامج موجودة في المضلع الملون ونختبر رؤوس هذا المضلع للوصول إلى الحل الأمثل من بينها:

$(X_1,X_2)=(0,10)$

$(X_1,X_2)=(10, 0)$

$(X_1,X_2)=(8,6)$

بالتعويض في دالة الهدف:

Max $Z_1=20(0)+25(10)=250$

Max $Z_2=20(10)+25(0)=200$

Max $Z_3=20(8)+25(6)=310$.

وبالتالي حلول البرنامج هي: $Z_0 = 310, X_1 = 8, X_2 = 6$

حل التمرين رقم 02:

نفرض أن X_1 تمثل عدد الحقائب صغيرة الحجم المنتجة.

نفرض أن X_2 تمثل عدد الحقائب كبيرة الحجم المنتجة.

أولا نقوم بكتابة البرنامج الخطي للمسألة:

$$Max\ Z0=30X_1+35X_2$$

$$3X_1+6X_2\leq 180,$$
$$6X_1+4X_2\leq 240,$$
$$X_1, X_2\geq 0\ .$$

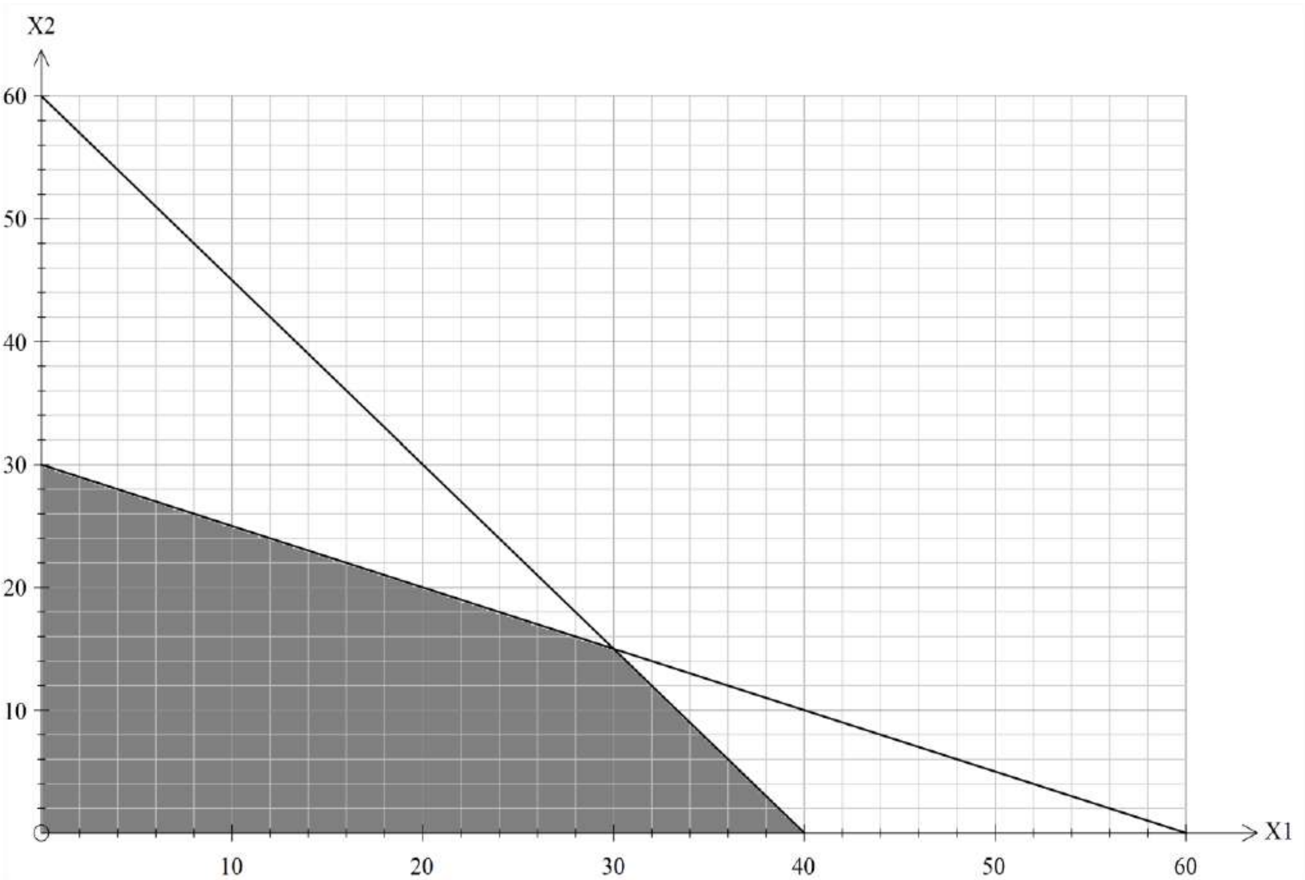
نحول المتراجحات إلى معادلات ثم نمثلها بيانيا:

$$3X_1+6X_2 = 180$$
$$6X_1+4X_2 = 240$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم ايجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الأولى		المعادلة الثانية	
X_1	X_2	X_1	X_2
0	30	0	60
60	0	40	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل.

نقارن بين رؤوس المضلع الملون في دالة الهدف ونجد:

$(X_1,X_2)= (0,30)$
$(X_1,X_2) = (30, 0)$
$(X_1,X_2)= (30,15)$

$\text{Max } Z_0= 30X_1+35X_2$

$Z_1= 30(0)+35(30)=1050,$

$Z_2= 30(30)+35(0)=900,$

$Z_1= 30(30)+35(15)=1425$

الحل الأمثل هو إنتاج 30 حقيبة صغيرة و 15 حقيبة كبيرة لنتحصل على ربح قدره 1425.

حل التمرين رقم 03:

نفرض أن X_1هي السيارة ذات 8 ركاب.

نفرض أن X_2 هي المركبة ذات20 راكب.

1. كتابة البرنامج الخطي:

$$\text{Min } Z_0=110X_1+305X_2$$

$$X_1+X_2\leq 12,$$
$$8X_1+20X_2\geq 120,$$
$$X_1+X_2\geq 0.$$

2. إيجاد الحل الأمثل بيانيا:

تحويل المتراجحات إلى معادلات ثم تمثيلها بيانيا:

$$X_1+X_2= 12,$$

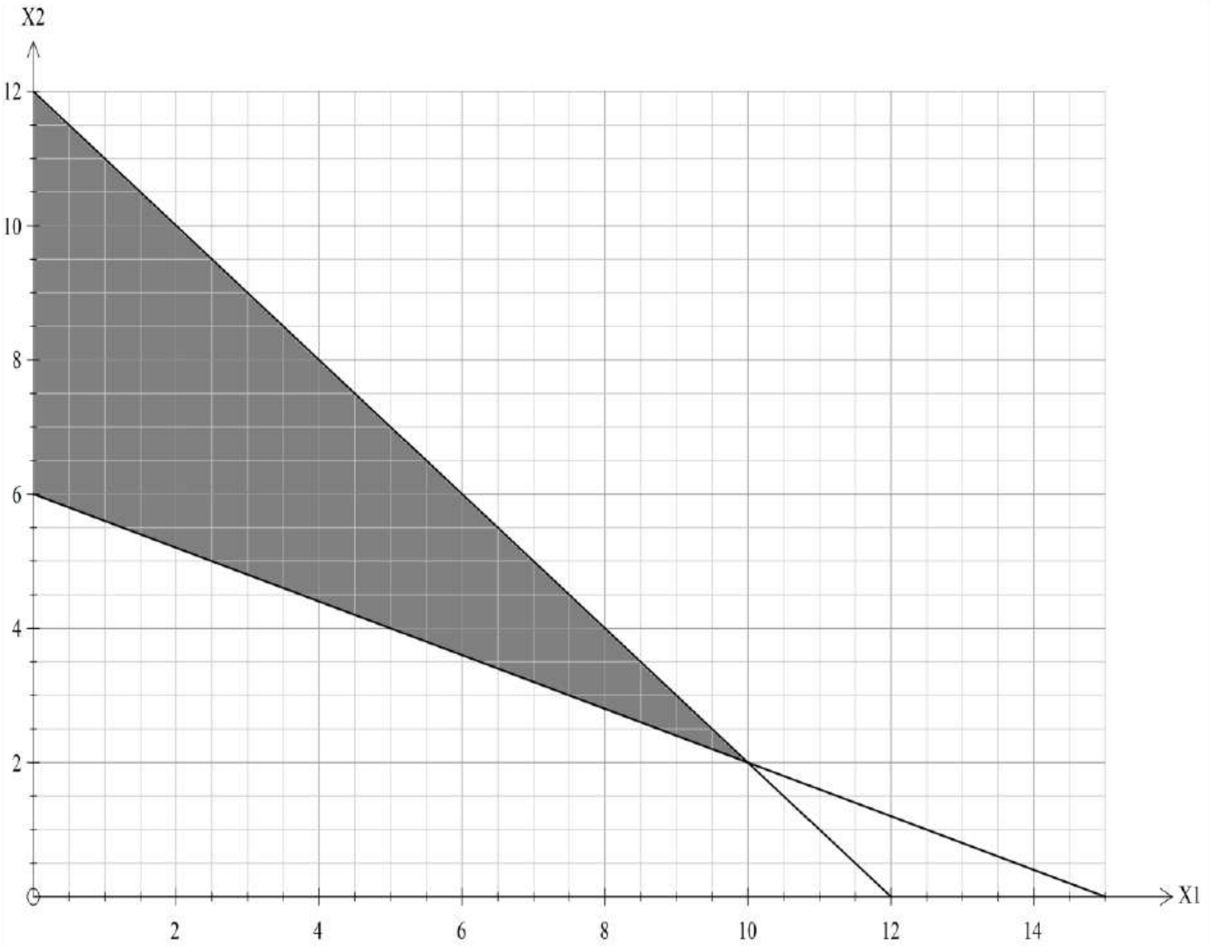
$$8X_1+20X_2= 120.$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم إيجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الثانية		المعادلة الأولى	
X_2	X_1	X_2	X_1

0	12	0	6
12	0	15	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل.

نقارن بين رؤوس المضلع ونجد:

$(X_1,X_2)=(0,12)$

$(X_1,X_2)=(0,6)$

$(X_1,X_2)=(10,2)$

بالتعويض في دالة الهدف:

$Z_0=110(0)+305(12)= 3660$

$Z_0=110(0)+305(6)=1830$

$Z_0=110(10)+305(2)=1710.$

تبحث المؤسسة عن تقليل التكاليف وبالتالي الحل الأمثل هو استئجار 10 سيارات ذات السعة 8 ركاب و2 مركبة من ذات السعة 20 راكب وبالتالي تكون تكلفة النقل هي 1710.

حل التمرين رقم 04:

نفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى.

نفرض أن X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

ويكون البرنامج الخطي على الشكل:

$$\text{Max } Z_0 = 5X_1 + 10X_2,$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 40,$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 45,$$
$$X_1, X_2 \geq 0,$$

نقوم بتحويل المتراجحات الى معادلات ثم نمثلها:

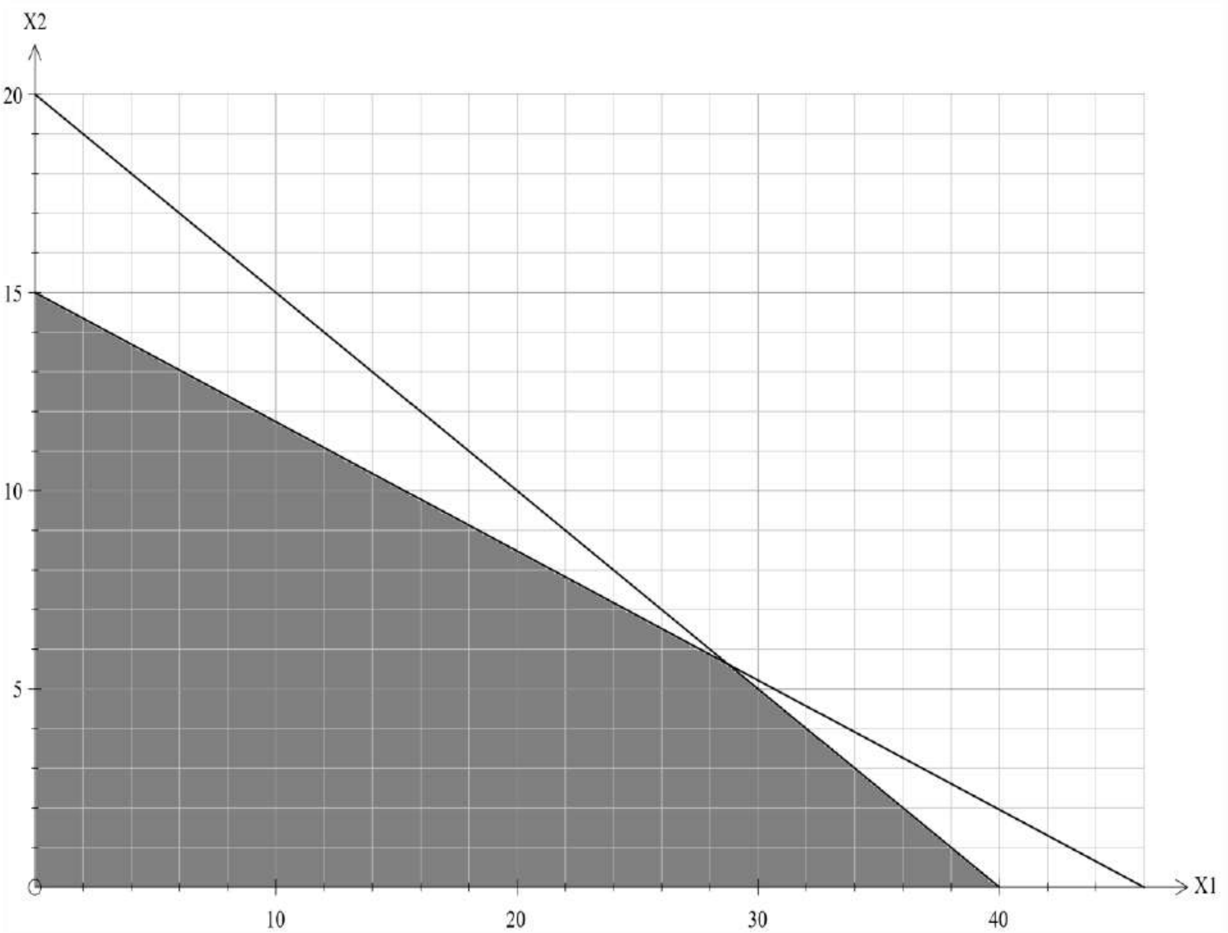
$$X_1 + 2X_2 = 40,$$

$$X_1 + 3X_2 = 45.$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم ايجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الأولى		المعادلة الثانية	
X_1	X_2	X_1	X_2
0	20	0	15
40	0	45	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل.

نقارن بين رؤوس المضلع ونجد:

$(X_1,X_2)=(40,0)$

$(X_1,X_2)=(30,5)$

$(X_1,X_2)=(0,15)$

بالتعويض في دالة الهدف:

$Z_0=5(40)+10(0)=200 \quad Z_0=5(30)+10(5)=200$

$Z_0=5(0)+10(15)=150.$

في هذه الحالة لدينا أكثر من حل للمسألة فإما نقوم بإنتاج 40 وحدة من السلعة الأولى فقط ونتحصل على ربح قدره 200 وحدة نقدية أو نقوم بإنتاج 30 وحدة من السلعة الاولى و5 وحدات من السلعة الثانية ونتحصل على نفس المقدار من الربح وهو 200 وحدة نقدية.

حل التمرين رقم 05:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات ثم نمثلها:

$$4X_1+3X_2 = 12,$$

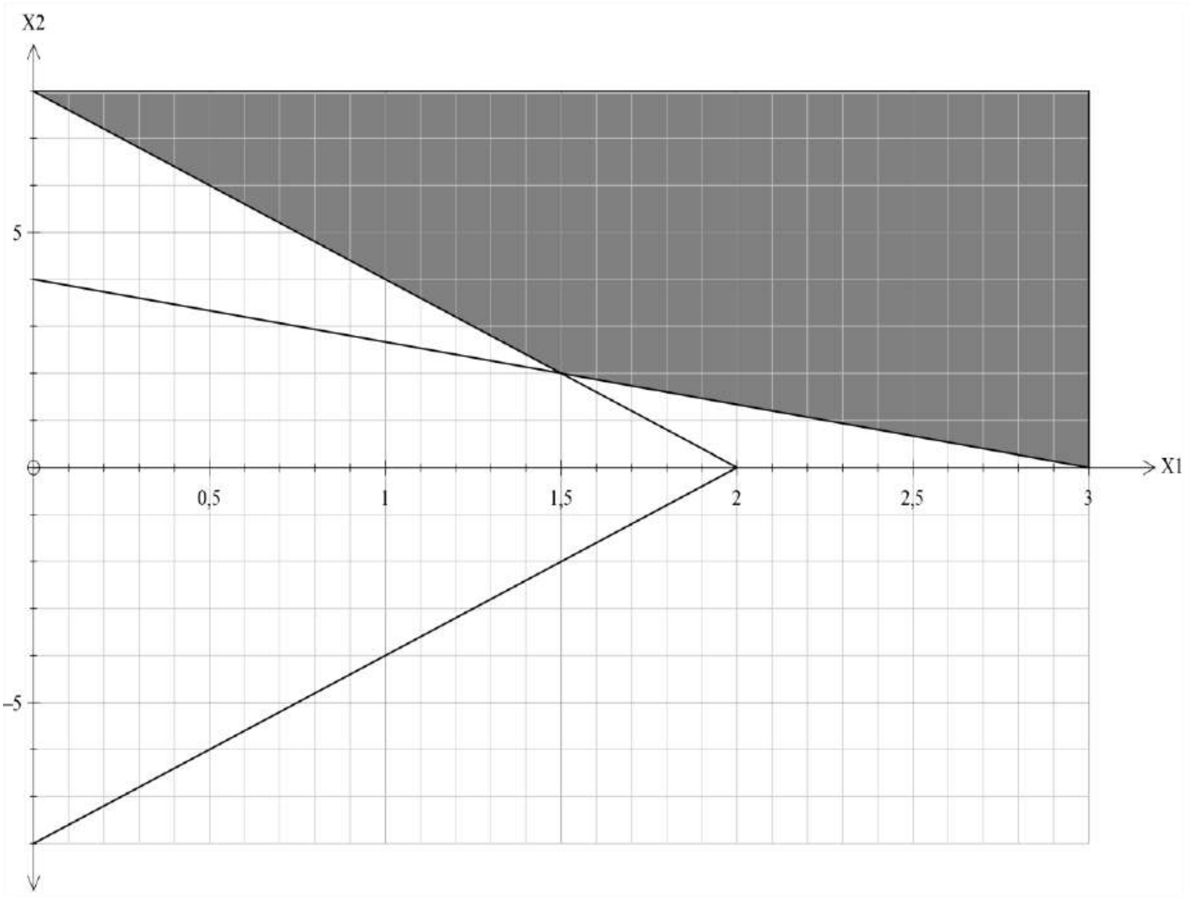
$$4X_1+X_2 =8,$$

$$4X_1-X_2 = 8.$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم إيجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الاولى		المعادلة الثانية		المعادلة الثالثة	
X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
0	4	0	8	0	-8
3	0	2	0	2	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل، نلاحظ في هذه الحالة أن مضلع الحل غير محدد وهي حالة خاصة تكون فيها لا نهائية الحلول.

حل التمرين رقم 06:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات ثم نمثلها:

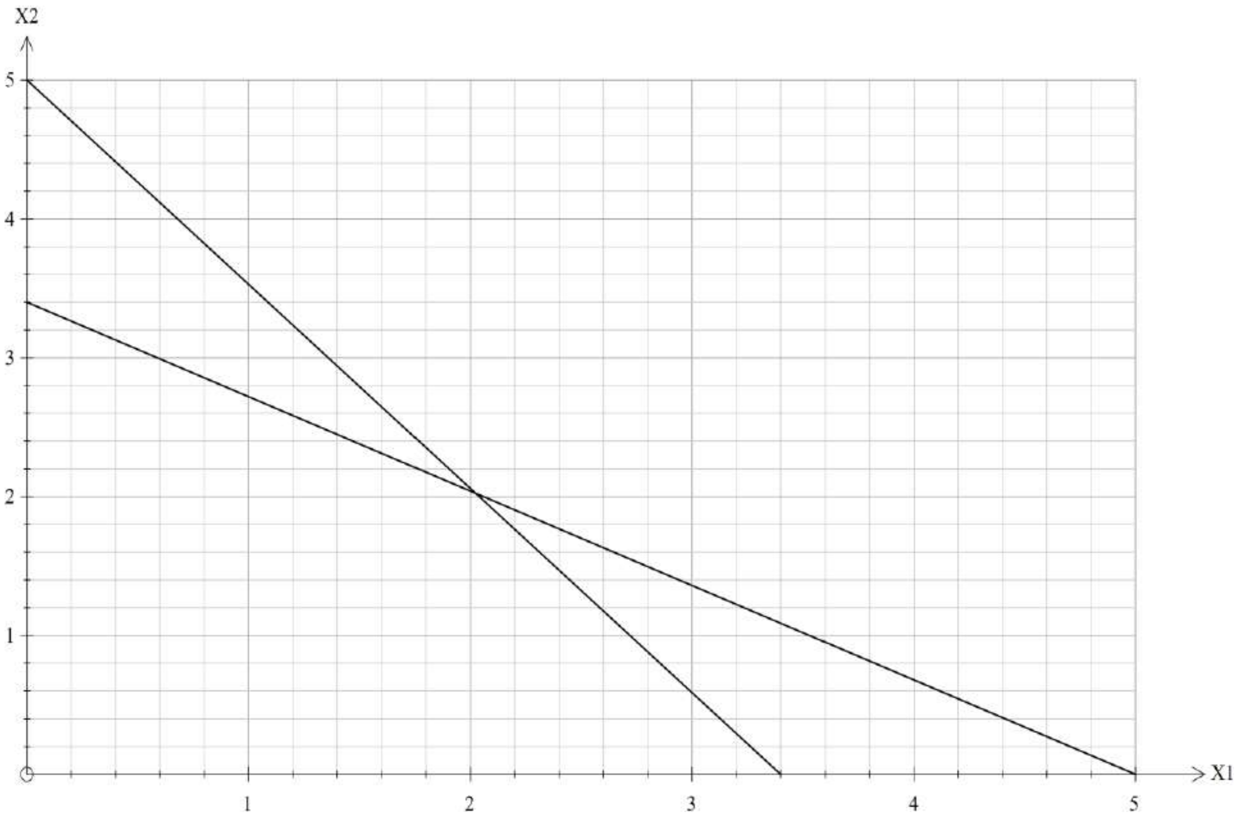
$$3X_1+2X_2 = 10,$$

$$4X_1+6X_2 = 20.$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم ايجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الأولى		المعادلة الثانية	
X_1	X_2	X_1	X_2
0	5	0	20/6
10/3	0	5	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي وفي هذه الحالة القيدين متناقضين ما أدى إلى إقصاء كل الفضاء وهذه هي أيضا حالة خاصة تدعى باستحالة الحل.

حل التمرين رقم 07:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات ثم نمثلها:

X+2Y = 10,

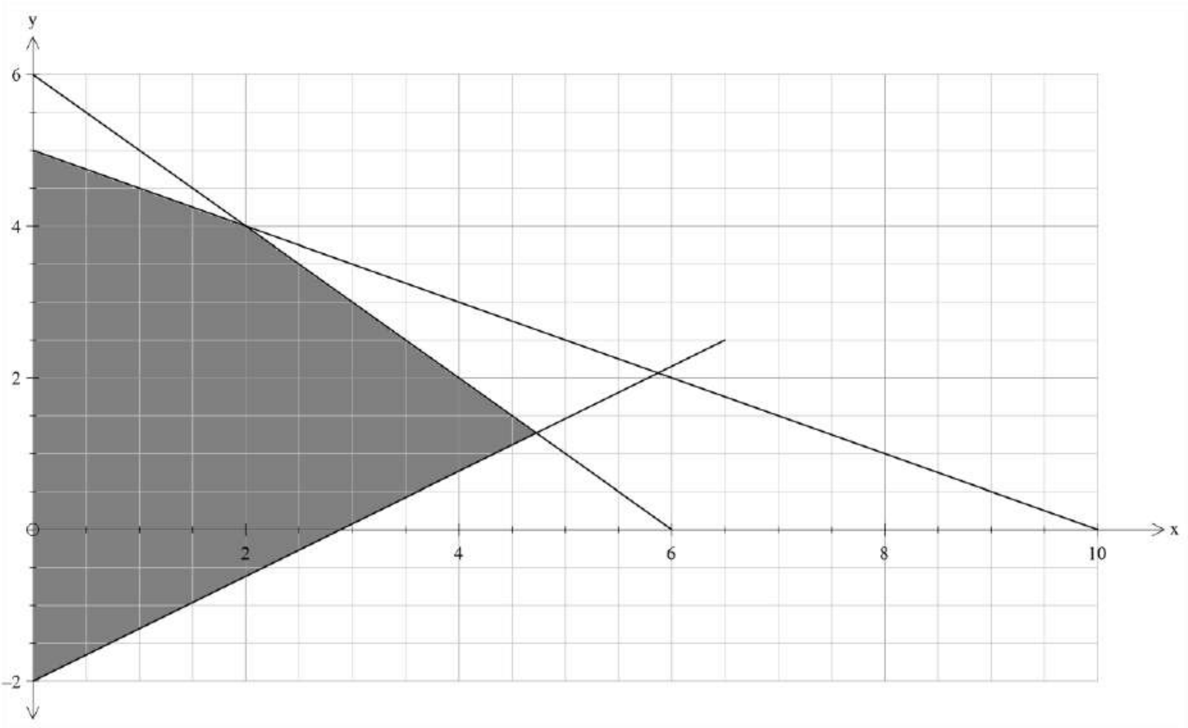
2X-3Y = 6,

X+Y = 6,

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم ايجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الأولى		المعادلة الثانية		المعادلة الثالثة	
X	Y	X	Y	X	Y
0	5	0	-2	0	6
10	0	3	0	6	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل.

ونقارن بين رؤوس المضلع:

(X,Y)=(0,-2)
(X,Y)=(2,4)
(X,Y)=(0,5)
(X,Y)=(24/5,6/5)

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$Z_1=15(0)+20(-2)=-40$ مرفوض لأن المتغيرين موجبين

$Z_1=15(2)+20(4)=110$

$Z_1=15(0)+20(5)=100$

$Z_1=15(24/5)+20(6/5)=96$

وبالتالي فإن الحل الأمثل هو $(X,Y)=(24/5,6/5)$ حيث $Z_0=96$.

حل التمرين رقم 08:

1. نقوم بكتابة البرنامج الخطي:

نفرض أن X_1 كمية المادة الأولى.

نفرض أن X_2 كمية المادة الثانية.

$$\text{Min } Z_0=20 X_1+ 30 X_2,$$

$$5X_1+ 10 X_2\geq 90,$$

$$4X_1+ 3 X_2\geq 48,$$

$$0,5 X_1 \geq 1,5,$$

$$X_1+ X_2\geq 0.$$

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات ثم نقوم بتمثيلها بيانيا:

$$5X_1+ 10 X_2= 90,$$

$$4X_1+ 3 X_2= 48,$$

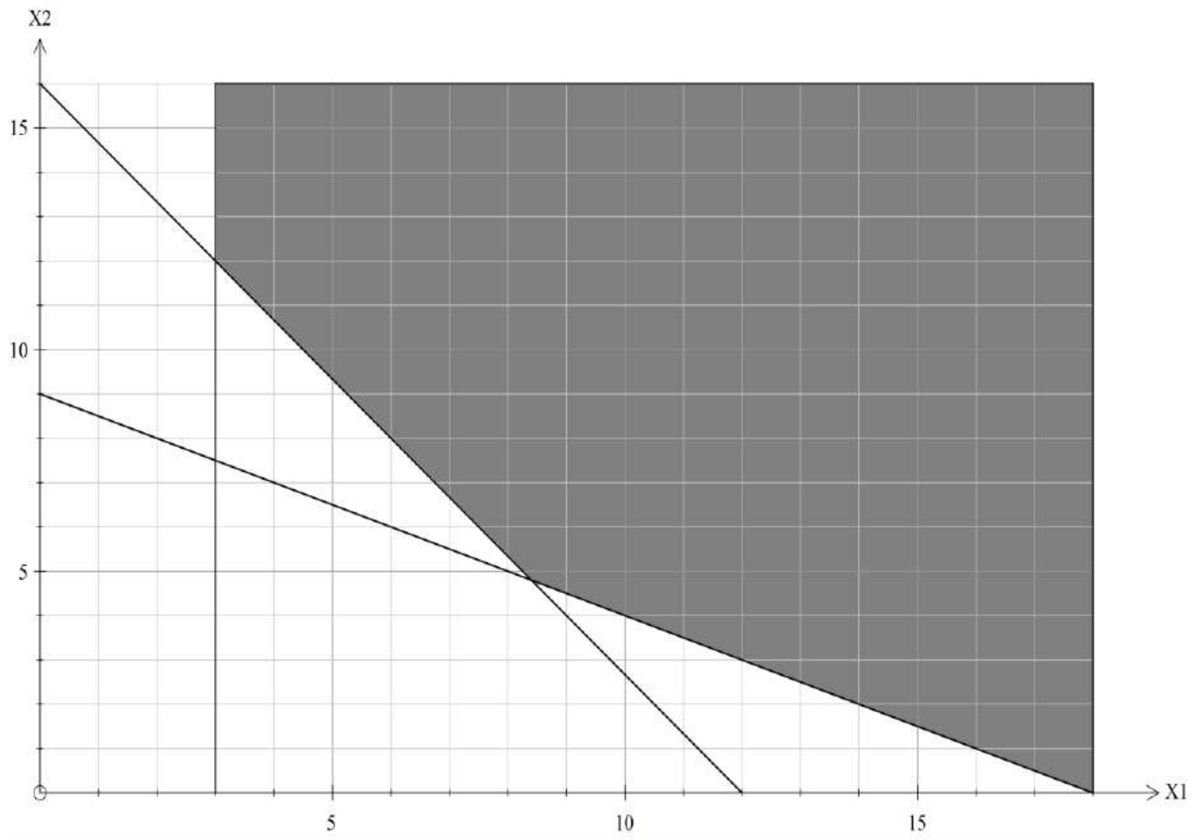
$$0,5 X_1 = 1,5.$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم إيجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الثالثة		المعادلة الثانية		المعادلة الأولى	
X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1
0	0	16	0	9	0

18	0	12	0	3	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل وهو غير محدود.

نقارن بين رؤوس المضلع الظاهرة:

$(X_1,X_2)=(18,0)$

$(X_1,X_2)=(8,4,4,8)$

$(X_1,X_2)=(3,12)$

$Z_1=20(18)+30(0)=360$

$Z_2=20(8,4)+30(4,8)=312$

$Z_3=20(3)+30(12)=420$

المزرعة تبحث عن تقليل التكلفة فتشتري 8,4 كيلوغرام من المادة الأولى و4,8 كيلوغرام من المادة الثانية لتكون التكلفة هي 312 وحدة نقدية.

2. الحل بطريقة Simplex:

تحضير البرنامج للحل:

$$Min\ Z_0=20X_1+30X_2+0m_1+0m_2+0m_3,$$

$$5X_1+10X_2-S_1+m_1=90,$$

$$4X_1+3X_2-S_2+m_2=48,$$

$$0{,}5X_1-S_3+m_3=1{,}5,$$

$$X_1+X_2\geq 0.$$

Z_0	X_1 $-20+\frac{19m}{2}$	X_2 $-30+13m$	S_1 $-m$	S_2 $-m$	S_3 $-m$	m_1 0	m_2 0	m_3 0	RHS $\frac{279m}{2}$
m_1	5	10	-1	0	0	1	0	0	90
m_2	4	3	0	-1	0	0	1	0	48
m_3	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
Z_0	$-5+3m$	0	$-3+\frac{3m}{10}$	$-m$	$-m$	$3-\frac{13m}{10}$	0	0	$\frac{45m}{2}+270$
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	0	0	9
m_2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{10}$	-1	0	$\frac{-3}{10}$	1	0	21
m_3	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
Z_0	0	0	$-3+\frac{3m}{10}$	$-m$	$-10+5m$	$3-\frac{3m}{10}$	0	$10-6m$	$285-\frac{27m}{2}$
X_2	0	1	$\frac{-1}{10}$	0	1	$\frac{1}{10}$	0	-1	$\frac{15}{2}$
m_2	0	0	$\frac{3}{10}$	-1	5	$\frac{-3}{10}$	1	-5	$\frac{27}{2}$
X_1	1	0	0	0	-2	0	0	2	3
Z_0	0	0	$\frac{-12}{5}$	-2	0	$-m\frac{12}{5}$ $\frac{2}{5}$	$2-m$	$-m$	312
X_2	0	1	$\frac{-4}{25}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{24}{5}$
S_3	0	0	$\frac{3}{50}$	$\frac{-1}{5}$	1	$\frac{-3}{50}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{27}{10}$

X_1	**1**	**0**	$\frac{3}{25}$	$\frac{-2}{5}$	**0**	$\frac{-3}{25}$	$\frac{2}{5}$	**0**	$\frac{42}{5}$

المزرعة تقوم بشراء $\frac{42}{5}$من المادة الأولى و$\frac{24}{5}$من المادة الثانية حتى تكون التكلفة هي 312 وحدة نقدية.

حل التمرين رقم 09:

نقوم أولا بكتابة البرنامج الخطي:

نفرض أنX_1 كمية المادة الأولى.

نفرض أنX_2 كمية المادة الثانية.

نفرض أنX_3كمية المادة الثالثة.

Max $Z_0=4X_1+5X_2+6X_3$,

$12X_1+10X_2+14X_3 \leq 5000$,

$5X_1+4X_2+3X_3 \leq 1000$,

$4X_1+3X_2+5X_3 \leq 800$,

$2X_1+7X_2+3X_3 \leq 1000$,

$X_1+3X_3 \leq 400$,

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$.

ثم نقوم بتحضير البرنامج للحل:

Max $Z_0=5X_1+4X_2+6X_3+0S_1+0S_2+0S_3+0S_4+0S_5$,

$12X_1+10X_2+14X_3+S_1 = 5000$,

$5X_1+4X_2+3X_3+S_2 = 1000$,

$4X_1+3X_2+5X_3+S_3= 800$,

$2X_1+7X_2+3X_3+S_4= 1000$,

$X_1+3X_3+S_5 = 400$,

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$.

Z_0	**X_1 -4**	**X_2 -5**	**X_3 -6**	**S_1 0**	**S_2 0**	**S_3 0**	**S_4 0**	**S_5 0**	**RHS 0**
S_1	**12**	**10**	**14**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**5000**
S_2	**5**	**4**	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1000**

S_3	4	3	5	0	0	1	0	0	800
S_4	2	7	3	0	0	0	1	0	1000
S_5	0	1	3	0	0	0	0	1	400
Z_0	-4	-3	0	0	0	0	0	2	800
S_1	12	$\frac{16}{3}$	0	1	0	0	0	$\frac{-14}{3}$	$\frac{9400}{3}$
S_2	5	3	0	0	1	0	0	-1	600
S_3	4	$\frac{4}{3}$	0	0	0	1	0	$\frac{-5}{3}$	$\frac{400}{3}$
S_4	2	6	0	0	0	0	1	-1	600
X_3	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
Z_0	0	$\frac{-5}{3}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2800}{3}$
S_1	0	$\frac{4}{3}$	0	1	0	-3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8200}{3}$
S_2	0	$\frac{4}{3}$	0	0	1	$\frac{-5}{4}$	0	$\frac{13}{12}$	$\frac{1300}{3}$
X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-5}{12}$	$\frac{100}{3}$
S_4	0	$\frac{16}{3}$	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1600}{3}$
X_3	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
Z_0	5	0	0	0	0	$\frac{9}{4}$	0	$\frac{-7}{4}$	1100
S_1	-4	0	0	1	0	-4	0	2	2600
S_2	-4	0	0	0	1	$\frac{-9}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	300
X_2	3	1	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{-5}{4}$	100
S_4	-16	0	0	0	0	$\frac{-9}{2}$	1	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{214783647}$
X_3	-1	0	1	0	0	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	100
Z_0	$\frac{9}{13}$	0	0	0	0	$\frac{27}{26}$	$\frac{7}{26}$	0	1100
S_1	$\frac{12}{13}$	0	0	1	0	$\frac{-34}{13}$	$\frac{-4}{13}$	0	2600
S_2	$\frac{36}{13}$	0	0	0	1	$\frac{-9}{26}$	$\frac{-11}{26}$	0	300
X_2	$\frac{-1}{13}$	1	0	0	0	$\frac{-3}{26}$	$\frac{5}{26}$	0	100
S_5	$\frac{-32}{13}$	0	0	0	0	$\frac{-9}{13}$	$\frac{2}{13}$	1	$\frac{1}{214783647}$

X_3	$\frac{11}{13}$	0	1	0	0	$\frac{7}{26}$	$\frac{-3}{26}$	0	100

ومنه ينتج المحل 100 وحدة من حلوى الهلال و 100 وحدة من حلوى الطبقات للحصول على ربح قدره 1100 وحدة نقدية.

حل التمرين رقم 10:

طريقة Simplex:

نقوم بكتابة البرنامج الخطي أولا:

نفرض أن X_1 كمية المادة الأولى.

نفرض أن X_2 كمية المادة الثانية.

Min $Z_0=X_1+ 3X_2$,

$X_2=3$,

$2X_1+ X_2 \leq 6$,

$X_1+ X_2 \geq 4$,

$X_1, X_2 \geq 0$.

تحضير البرنامج الخطي للحل:

Min $Z_0=X_1+ 3X_2+0m_1+0S_2+0\,m_3$,

$X_2+m_1=3$,

$2X_1+ X_2 +S_2= 6$,

$X_1+ X_2 -S_3+m_3= 4$,

$X_1, X_2 \geq 0$.

Z_0	X_1 -1+m	X_2 -3+2m	S_3 -m	m_1 0	S_2 0	m_3 0	RHS 7m
m_1	0	1	0	1	0	0	3

S_2	2	1	0	0	1	0	6
m_3	1	1	-1	0	0	1	4
Z_0	-1+m	0	-3m	3-2m	0	0	9+m
X_2	0	1	0	1	0	0	3
S_2	2	0	0	-1	1	0	3
m_3	1	0	-1	-1	0	1	1
Z_0	0	0	-1-2m	2-M	0	1-m	10
X_2	0	1	0	1	0	0	3
S_2	0	0	2	1	1	-2	1
X_1	1	0	-1	-1	0	1	1

الطريقة البيانية:

نحول المتراجحات الى معادلات ثم نمثلها بيانيا:

$X_2=3$,

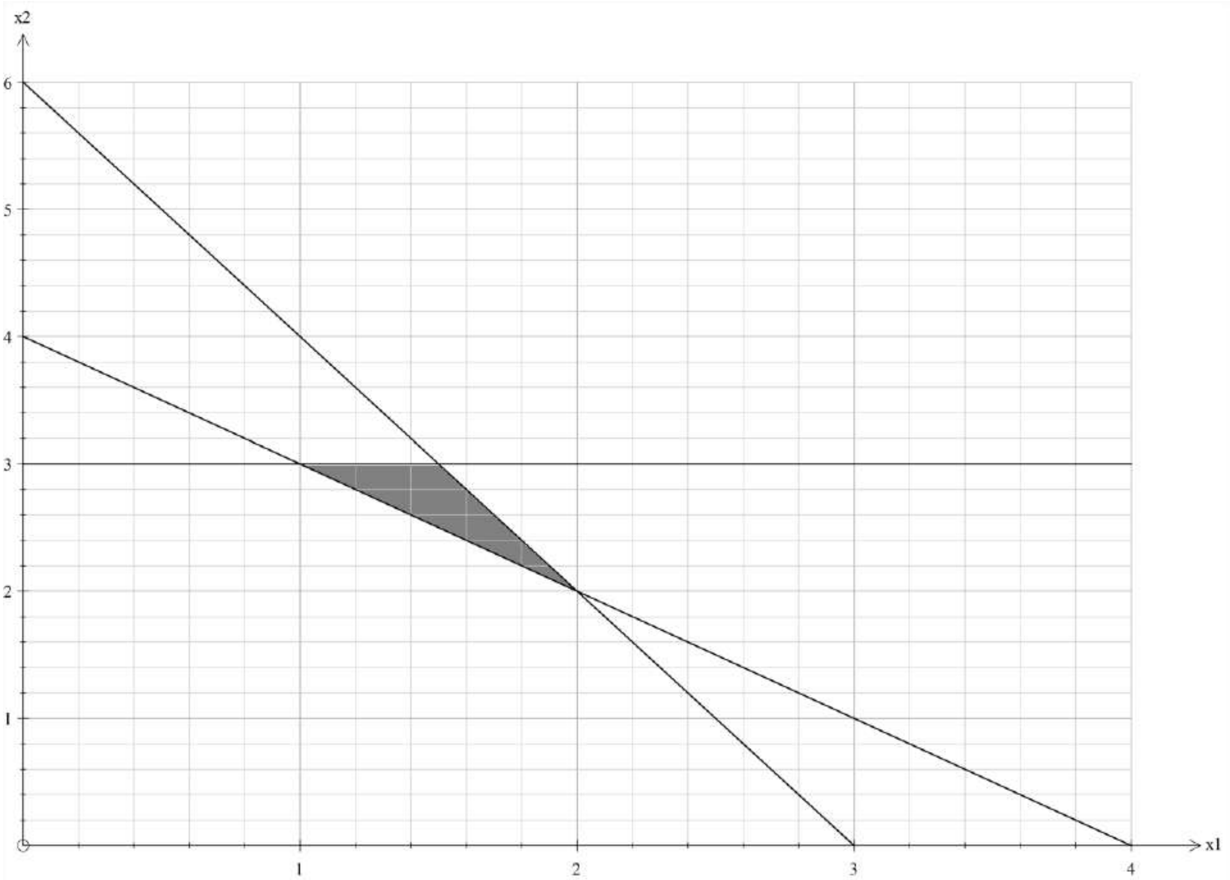
$2X_1+X_2=6$,

$X_1+X_2=4$,

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة للمتغير الأول ثم ايجاد المتغير الثاني والعكس وهكذا.

المعادلة الأولى		المعادلة الثانية	
X_1	X_2	X_1	X_2
0	6	0	4
3	0	4	0

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي حتى نتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل.

نقارن بين رؤوس المضلع الظاهرة:

$(X_1,X_2)=(1,3)$

$(X_1,X_2)=(2,2)$

$(X_1,X_2)=(3/2,3)$

$Z_1= 1+3(3)=10$

$Z_2=2+3(2)=8$

$Z_3=3/2+3(3)=21/2$

الحل الثاني أقل تكلفة لكنه لا يحقق القيد الأول بإنتاج ثلاث وحدات من المنتج الثاني لذلك الحل الأمثل هو $(X_1,X_2)=(1,3)$ و $Z_0=10$.

حل التمرين رقم 11:

تحضير البرنامج:

$$\text{Max } Z_0= 3X_1+2X_2+5X_3+0S_1+0S_2+0S_3,$$

$$X_1+2X_2+X_3 +S_1= 430,$$

$$3X_1+2X_3 +S_2= 460,$$

$$X_1+4X_2 +S_3= 420,$$

$$X_1+X_2+X_3 \geq 0.$$

Z_0	X_1 -3	X_2 -2	X_3 -5	S_1 0	S_2 0	S_3 0	RHS 0
S_1	1	2	1	1	0	0	430
S_2	3	0	2	0	1	0	460
S_3	1	4	0	0	0	1	420
Z_0	9/2	-2	0	0	5/2	0	1150
S_1	-1/2	2	0	1	½	0	200
X_3	3/2	0	1	0	½	0	230
S_3	1	4	0	0	0	1	420
Z_0	4	0	0	1	2	0	1350
X_2	-1/4	1	0	½	¼	0	100
X_3	3/2	0	1	0	½	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20

ومنه حلول البرنامج الخطي هي:

$$X_2=100,\ X_3=230,\ Z_0=1350.$$

حل التمرين رقم 12:

أولا نقوم بكتابة البرنامج الأصلي أو الأولي(Primal) :

لنفرض أن X_1كمية المنتج أ.

ونفرض أن X_2كمية المنتج ب.

$Max\ Z_0=10X_1+16X_2,$

$X_1+2{,}5X_2\leq 195$,

$2X_1+X_2\leq 160$,

$X_1+1{,}5X_2\leq 120,$

$X_1,X_2\geq 0$.

نقوم بتحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي أو المقابل:

$Min\ y_0= 195\ y_1+160\ y_2+120\ y_3,$

$y_1+2\ y_2+ y_3\geq 10,$

$\frac{5}{2}\,y_1+ y_2+ \frac{3}{2}y_3\geq 16,$

$y_1, y_2, y_3\geq 0.$

تحضير البرنامج:

$Min\ y_0= 195\ y_1+160\ y_2+120\ y_3+0m_1+0m_2,$

$y_1+2\ y_2+ y_3 -S_1+m_1=10,$

$\frac{5}{2}\,y_1+ y_2+ \frac{3}{2}y_3 -S_2+m_2= 16,$

$y_1, y_2, y_3\geq 0.$

y_0	y_1 -195 $+\frac{7}{2}m$	y_2 -160 $+3m$	y_3 -120 $+\frac{5}{2}m$	S_1 $-m$	S_2 $-m$	m_1 0	m_2 0	RHS $26m$
m_1	1	2	1	-1	0	1	0	10
m_2	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	1	16
y_0	0	$-82+\frac{8}{5}m$	$-3+\frac{2}{5}m$	$-m$	$-78+\frac{2}{5}m$	0	$78-\frac{7}{5}m$	$1248+\frac{18}{5}m$
m_1	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$
y_1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{32}{5}$
y_0	0	0	$\frac{35}{2}$	$-\frac{205}{4}$	$-\frac{115}{2}$	$\frac{205}{4}-m$	$\frac{115}{2}-m$	$\frac{2865}{2}$

y_2	**0**	**1**	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
y_1	**1**	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
y_0	**0**	**-70**	**0**	$-\frac{15}{2}$	**-75**	$\frac{15}{2}-m$	**75-m**	**1275**
y_3	**0**	**4**	**1**	$-\frac{5}{2}$	**1**	$\frac{5}{2}$	**-1**	**9**
y_1	**1**	**-2**	**0**	$\frac{3}{2}$	**-1**	$-\frac{3}{2}$	**1**	**1**

ومنه حلول البرنامج الثنائي هي:

$y_1=1, y_3=9, y_0=1275$.

وعليه نستنتج حلول البرنامج الأصلي من خلال الجدول أعلاه:

$X_1=\frac{15}{2}, X_2=75, Z_0=1275.$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = T \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

حل التمرين رقم 13:

كتابة البرنامج الخطي للمسألة:

بفرض أن X_1هو عدد الطائرات التي تتسع لـ 200 راكب.

وبفرض أن X_2 هو عدد الطائرات التي تتسع لـ 100 راكب.

$\text{Min } Z_0=800000X_1+200000X_2,$

$X_1 \leq 12,$

$X_2 \leq 9$,

$200X_1+100X_2 \geq 1600,$

$6X_1+6X_2 \geq 90,$

$X_1, X_2 \geq 0.$

تحضير البرنامج:

$\text{Min } Z_0 = 800000X_1 + 200000X_2,$
$X_1 + S_1 = 12,$

$X_2 + S_2 = 9\ ,$

$200X_1 + 100X_2 - S_3 + m_3 \geq 1600,$
$6X_1 + 6X_2 - S_4 + m_4 \geq 90,$
$X_1, X_2 \geq 0.$

Z_0	X_1 $-800000+206m$	X_2 $-200000+106m$	S_3 $-m$	S_4 $-m$	S_1 0	S_2 0	m_3 0	m_4 0	RHS $1690m$
S_1	1	0	0	0	1	0	0	0	12
S_2	0	1	0	0	0	1	0	0	9
m_3	200	100	-1	0	0	0	1	0	1600
m_4	6	6	0	-1	0	0	0	1	90
Z_0	0	$200000+3m$	$-4000+\frac{3}{100}m$	$-m$	0	0	$4000-\frac{103}{100}m$	0	$6400000+42m$
S_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{200}$	0	1	0	$-\frac{1}{200}$	0	4
S_2	0	1	0	0	0	1	0	0	9
X_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{200}$	0	0	0	$\frac{1}{200}$	0	8
m_4	0	3	$\frac{3}{100}$	-1	0	0	$-\frac{3}{100}$	1	42
Z_0	0	0	$-4000+\frac{3}{100}m$	$-m$	0	$-200000-3m$	$4000-\frac{103}{100}m$	0	$4600000+15m$
S_1	0	0	$\frac{1}{200}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{200}$	0	$\frac{17}{2}$
X_2	0	1	0	0	0	1	0	0	9
X_1	1	0	$-\frac{1}{200}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{200}$	0	$\frac{7}{2}$
m_4	0	0	$\frac{3}{100}$	-1	0	-3	$-\frac{3}{100}$	1	15
Z_0	0	0	0	$-\frac{400000}{3}$	0	-600000	$-m$	$\frac{400000}{3}-m$	6600000

S_1	**0**	**0**	**0**	$\frac{1}{6}$	**1**	**1**	**0**	$-\frac{1}{6}$	**6**
X_2	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**9**
X_1	**1**	**0**	**0**	$-\frac{1}{6}$	**0**	**-1**	**0**	$\frac{1}{6}$	**6**
S_3	**0**	**0**	**1**	$-\frac{100}{3}$	**0**	**-100**	**-1**	$\frac{100}{3}$	**500**

لنقل المعتمرين يتطلب كراء 6 طائرات التي تحمل 200 راكب و 9 طائرات من التي تحمل 100 راكب وتكون التكلفة الكلية مقدرة بـ 6600000 وحدة نقدية.

أما حلول البرنامج المرافق فهي:

$y_1=0, y_2=-600000, y_3=0, y_4=\frac{400000}{3}, y_0=6600000.$

حل التمرين رقم 14:

كتابة البرنامج الخطي:

نفرض أن X_1 تمثل كمية الحبوب.

وبفرض أن X_2تمثل كمية فول الصويا.

Min $Z_0= 0,3\ X_1+0,9\ X_2,$

$0,09X_1+0,6\ X_2=0,3,$

$0,02X_1+0,06\ X_2\leq 0,05\ ,$

$X_1, X_2\geq 0.$

نقوم بتحضير البرنامج للحل:

Min $Z_0= 0,3\ X_1+0,9\ X_2,$

$0,09X_1+0,6\ X_2 +m_1= 0,3\ ,$

$0,02X_1+0,06\ X_2+S_2= 0,05\ ,$

$X_1, X_2\geq 0.$

Z_0	X_1 -0,3+0,09m	X_2 -0,9+0,6m	m_1 0	S_2 0	RHS 0,3m
m_1	0,09	0,6	1	0	0,3
S_2	0,02	0,06	0	1	0,05
Z_0	-0,165	0	$\frac{3}{2}-m$	0	0,45
X_2	$\frac{3}{20}$	1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
S_2	0,011	0	$-\frac{1}{10}$	1	0,02

ومنه يجب على أحمد تقديم نصف كيلوغرام من فول الصويا ليقلل التكاليف وتصبح 0,45 وحدة نقدية.

$X_1=0$

$X_2=\frac{1}{2}$

$Z_0=0,45.$

أما حلول البرنامج المقابل فهي:

Max $y_0=0,3y_1+0,05y_2$

$y_1=\frac{3}{2}$

$y_2=0$

$y_0=0,45.$

حل التمرين رقم 15:

لنفرض أن X_1 هي كمية الكرات من النوع الاول ;

بفرض أن X_2 هي كمية الكرات من النوع الثاني ;

بفرض أن X_3 هي كمية الكرات من النوع الثالث

وعليه يكون البرنامج الخطي للمسألة:

Max $Z_0=5X_1+3X_2+6X_3$,

$2X_1+X_2+3X_3\leq 48,$

$3X_1+4X_2+2X_3\leq 72,$

$2X_1+2X_2+X_3\leq 40,$

$X_1,X_2,X_3\geq 0.$

تحويل البرنامج الأصلي الى البرنامج المرافق:

Min $Y_0 = 48y_1 + 72y_2 + 40y_3$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} =^{T} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$2y_1+3y_2+2y_3 \geq 5$,

$y_1+4y_2+2y_3 \geq 3$,

$3y_1+2y_2+y_3 \geq 6$,

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

تحضير البرنامج:

Min $Y_0 = 48y_1+72y_2+40y_3+0m_1+0m_2+0m_3$,

$2y_1+3y_2+2y_3-S_1+m_1= 5$,

$y_1+4y_2+2y_3-S_2+m_2= 3$,

$3y_1+2y_2+y_3-S_3+m_3= 6$,

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Y_0	y_1 -48 +6m	y_2 -72 +9m	y_3 -40 +5m	S_1 -m	S_2 -m	S_3 -m	m_1 0	m_2 0	m_3 0	RHS +14m
m_1	2	3	2	-1	0	0	1	0	0	5
m_2	1	4	2	0	-1	0	0	1	0	3
m_3	3	2	1	0	0	-1	0	0	1	6
Y_0	$-30+\frac{15}{4}m$	0	$-4+\frac{1}{2}m$	-m	$-18+\frac{5}{4}m$	-m	0	$18-\frac{9}{4}m$	0	$54+\frac{29}{4}m$
m_1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{11}{4}$
y_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
m_3	$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{2}$
Y_0	0	0	$-4+\frac{1}{2}m$	-m	$-12+\frac{1}{2}m$	$-12+\frac{1}{2}m$	0	$12-\frac{3}{2}m$	$12-\frac{3}{2}m$	$108+\frac{1}{2}m$
m_1	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
y_1	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Y_0	0	8-m	0	-m	$-\frac{72}{5}+\frac{4}{5}m$	$-\frac{56}{5}+\frac{2}{5}m$	0	$\frac{72}{5}-\frac{9}{5}m$	$\frac{56}{5}-\frac{7}{5}m$	$\frac{552}{5}+\frac{1}{5}m$
m_1	0	-1	0	-1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_3	0	2	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
y_1	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Y_0	0	-10	0	-18	0	-4	18-m	0	4-m	114
S_2	0	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y_3	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
y_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$

ومنه فإن حلول البرنامج المرافق هي:

$Y_0=114, y_1=\frac{7}{4}, y_2=0\ y_3=\frac{3}{4}$

نستنتج حلول البرنامج الأصلي من الجدول أعلاه

$Z_0=114, X_1=18, X_2=0, X_3=4$

حل التمرين رقم 16:

1. اتمام الجدول النهائي للحل:

$\text{Max } Z_0=2X_1+X_2$,

$4X_1+3X_2 \leq 12$,

$4X_1+X_2 \leq 8$,

$4X_1-X_2 \leq 8$,

$X_1, X_2 \geq 0$

ويعطى لك جدول الحل النهائي للبرنامج السابق:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	؟	؟	؟	؟	؟	؟
؟	**0**	**1**	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	**0**	؟
؟	**1**	**0**	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	**0**	؟
؟	**0**	**0**	**1**	**-2**	**1**	؟

من خلال الجدول يتضح أن المتغيرات المتواجدة داخل القاعدة هي: X_2،X_1،S_3على الترتيب لأن العمود في هذه المتغيرات أحادي.

الآن نوجد عمود الثوابت:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

نوجد قيم السطر Z:

$$[1 \quad 2 \quad 0] \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

الآن نعوض في القيود الثنائية لإيجاد معاملات X_1،X_2

$$4y_1 + 4y_2 + 4y_3 - 2 = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 4(0) - 2 = 0$$

$$3y_1 + y_2 - y_3 - 1 = 3\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - (0) - 1 = 0$$

ايجاد قيمة الحل:

$$Z_0 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + (2) = 5$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	5
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
X_1	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{2}$
S_3	0	0	1	-2	1	4

حل التمرين رقم 17:

Max $Z_0=5X_1+12X_2+4X_3$,

$X_1+2X_2+X_3\leq 5$,

$2X_1-X_2+3X_3=2$,

$X_1, X_2,X_3\geq 0$.

1. اتمام الجدول:

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	RHS
Z	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
?	**0**	**1**	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	**?**
?	**1**	**0**	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	**?**

نلاحظ أن المتغيرات التي تتواجد بها أعمدة أحادية هي X_1،X_2 وهي مرتبة في الجدول على هذا الأساس.

ايجاد عناصر الطرف الايمن:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

ايجاد قيمة الحل:

$$Z_0 = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3 = 5\left(\frac{9}{5}\right) + 12\left(\frac{8}{5}\right) + 4(0) = \frac{141}{5}$$

ايجاد قيم السطر Z:

$$[12 \quad 5] \times \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

الآن نعوض في قيود البرنامج الثنائي:

$$y_1 + 2y_2 - 5 = \frac{29}{5} + 2\left(-\frac{2}{5}\right) - 5 = 0$$

$$2y_1 - y_2 - 12 = 2\left(\frac{29}{5}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right) - 12 = 0$$

$$y_1 + 3y_2 - 4 = \frac{29}{5} + 3\left(-\frac{2}{5}\right) - 4 = \frac{3}{5}$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	RHS
Z	**0**	**0**	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$m-\frac{2}{5}$	$\frac{141}{5}$
X_2	**0**	**1**	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
X_1	**1**	**0**	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

2. المورد الذي يجب رفعه والى أي مستوى:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5+\Delta \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8+2\Delta}{5} \\ \frac{9+\Delta}{5} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\frac{8+2\Delta}{5} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -4 \rightarrow \Delta \in [-4+\infty[$$

$$\frac{9+\Delta}{5} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -9 \rightarrow \Delta \in [-9+\infty[$$

بالنسبة للمورد الأول يمكن رفعه في المجال المشترك وبدون أن يؤثر على عملية إعادة الحل أي لا تكون مرحلة جديدة من مراحل Simplex وهذا: $\Delta \in [-4+\infty[$.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2+\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8-\Delta}{5} \\ \frac{9+2\Delta}{5} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\frac{8-\Delta}{5} \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 8 \rightarrow \Delta \in]-\infty\ 8]$$

$$\frac{9+2\Delta}{5} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{9}{2} \rightarrow \Delta \in \left[-\frac{9}{2}+\infty\right[$$

بالنسبة للمورد الثاني يمكن رفعه في المجال المشترك وبدون أن يؤثر على عملية إعادة الحل أي لا تكون مرحلة جديدة من مراحل Simplex وهذا: $\Delta \in \left[-\frac{9}{2}\ 8\right]$.

أما إن أردنا الرفع من الموردين فيمكن ذلك في المجال المشترك: $\Delta \in [-4\ 8]$.

3. أثر تغير عوامل الدالة الى $c_1=4$،$c_2=10$:

$$[10 \quad 4] \times \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

نقوم بالبحث عن باقي قيم السطر Z:

$$y_1 + 2y_2 - 4 = \frac{24}{5} + 2\left(-\frac{2}{5}\right) - 4 = 0$$

$$2y_1 - y_2 - 10 = 2\left(\frac{24}{5}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right) - 10 = 0$$

$$y_1 + 3y_2 - 4 = \frac{24}{5} + 3\left(-\frac{2}{5}\right) - 4 = -\frac{2}{5}$$

نلاحظ أن القيد الثنائي الموافق للمتغير X_3 سالب وبالتالي فقد أصبح المتغير مرشحا للدخول الى القاعدة.

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	RHS
Z	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{24}{5}$	$m-\frac{2}{5}$	$\frac{141}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
X_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Z	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{34}{7}$	$-\frac{2}{7}+m$	$\frac{166}{7}$
X_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{13}{7}$
X_3	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$

نلاحظ تغير متغيرات الحل وقيمة الحل بعد تغير معاملات الدالة.

4. إذا قيمة X_3 قد ارتفعت4 إلى 8:

نحاول معرفة مدى منافسة هذا المتغير للمتغيرات الأخرى للدخول للقاعدة عن طريق القيد الثنائي المقابل له:

$$y_1 + 3y_2 - 8 = \frac{29}{5} + 3\left(-\frac{2}{5}\right) - 8 = -\frac{17}{5}$$

نلاحظ أن معامل X_3في سطر الحل أصبحت سالبة وهذا يعني أنه مرشح للدخول للقاعدة ويصبح الحل:

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	RHS
Z	0	0	$-\frac{17}{5}$	$\frac{29}{5}$	$m-\frac{2}{5}$	$\frac{141}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
X_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Z	$\frac{17}{7}$	0	0	$\frac{44}{7}$	$\frac{4}{7}+m$	$\frac{228}{7}$
X_2	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{13}{7}$
X_3	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$

نلاحظ تغير قيمة متغيرات الحل وقيمة الحل.

5. اذا تغيرت معاملات X_3 وأصبحت $a_{13}=\frac{1}{2}$، $a_{23}=2$:

نختبر القيد الثنائي الموالي للمتغير X_3:

$$\frac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 4 = \frac{1}{2}\left(\frac{29}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}\right) - 4 = -\frac{19}{10}$$

نلاحظ أن X_3 أصبح مرشحا للدخول للقاعدة:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	RHS
Z	0	0	$-\frac{19}{10}$	$\frac{29}{5}$	$m-\frac{2}{5}$	$\frac{141}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
X_1	1	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Z	$\frac{19}{9}$	0	0	$\frac{56}{9}$	$\frac{4}{9}+m$	32
X_2	$\frac{2}{9}$	1	0	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$	2
X_3	$\frac{10}{9}$	0	1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	2

نلاحظ تغير قيم متغيرات الحل وقيمة الحل.

6. اذا قمنا بإدخال متغير جديد: X_4 حيث $a_{14}=5$، $a_{24}=7$، $c_4=6$

نقوم بتعويض قيم الحل في القيد الثنائي المقابل للمتغير الجديد X_4:

$$5y_1 + 7y_2 - 6 = 5\left(\frac{29}{5}\right) + 7\left(-\frac{2}{5}\right) - 6 = \frac{101}{5}$$

لا تغيير على متغيرات الحل.

7. إضافة قيد جديد حيث: $a_{32}=a_{31}=5$، $a_{33}=3$، $b_{3}=10$

لا يتعلق الأمر بأمثليه البرنامج بل بقبولية البرنامج:

$X_1+2X_2+X_3 \leq 5$,

$2X_1-X_2+3X_3=2$,

$5X_1+5X_2+3X_3 \leq 10$,

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$.

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2	S_3	RHS
Z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$m-\frac{2}{5}$	0	$\frac{141}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
X_1	1	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
S_3	5	5	3	0	0	1	10
Z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$m-\frac{2}{5}$	0	$\frac{141}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
X_1	1	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
S_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	-3	-1	1	-7

ظهور قيمة سالبة على الموارد وبالتالي لا يمكن مواصلة الحل (Violation).

حل التمرين رقم 18:

Max $Z_0=20X_1+10X_2$,

$X_1+2X_2 \leq 40$,

$3X_1+2X_2 \leq 60$,

$X_1, X_2 \geq 0$

1. ايجاد قيم α،βوإتمام الجدول:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{1}{3} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow 40\alpha - \frac{60}{3} = 20 \Rightarrow \alpha = \alpha = 1$$

$$60\beta = 20 \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

وجود عمود أحادي في العمود الاول والواحد في السطر الثاني يعني أن X_1داخل القاعدة في السطر الثاني وعمود أحادي معS_1 يعني أن هذا المتغير داخل القاعدة في السطر الأول.

$$\begin{bmatrix} S1 & X1 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

الآن نعوض بقيمة حلول البرنامج الثنائي في قيود البرنامج الثنائي:

$$y_1 + 3y_2 - 20 = 0 + 3\left(\frac{20}{3}\right) - 20 = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 - 10 = 0 + 2\left(\frac{20}{3}\right) - 10 = \frac{10}{3}$$

$$y_0 = 40y_1 + 60y_2 = 40(0) + 60\left(\frac{20}{3}\right) = 400$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	**0**	$\frac{10}{3}$	**0**	$\frac{20}{3}$	**400**
S_1	**0**	$\frac{4}{3}$	**1**	$-\frac{1}{3}$	**20**
X_1	**1**	$\frac{2}{3}$	**0**	$\frac{1}{3}$	**20**

2. ارتفاع العائد على X_2من10الى15:

$$\begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

$$y_1 + 3y_2 - 20 = 0 + 3\left(\frac{20}{3}\right) - 20 = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 - 15 = 0 + 2\left(\frac{20}{3}\right) - 15 = -\frac{5}{3}$$

	X1	X2	S1	S2	RHS
Z0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20
X1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z0	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{4}$	425
X2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	15
X1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

أدى زيادة عائد x_2 إلى تغير الحل بعد ظهور قيمة سالبة على سطر Zمما أدى الى زيادة مرحلة في الحل أفضت الدخول X_2الى القاعدة وتغير قيم الحل إلى:

$Z_0=425$
$X_1=10$
$X_2=15$

3. أثر انخفاض العائد على X_1 من 20 الى 10:

$$[0 \quad 10]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$y_1 + 3y_2 - 10 = 0 + 3\left(\frac{10}{3}\right) - 10 = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 - 10 = 0 + 2\left(\frac{10}{3}\right) - 10 = -\frac{10}{3}$$

$$y_0 = 40y_1 + 60y_2 = 40(0) + 60\left(\frac{10}{3}\right) = 200$$

	X1	X2	S1	S2	RHS
Z0	0	$-\frac{10}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	200
S1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20

X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z_0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	250
X_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	15
X_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

أدى انخفاض عائد X_2 إلى تغير الحل بعد ظهور قيمة سالبة على سطر Z مما أدى الى زيادة مرحلة في الحل أفضت الى دخول X_2إلى القاعدة وتغير قيم الحل إلى:

$Z_0=250$

$X_1=10$

$X_2=15$

4. أثر ارتفاع المورد الثاني من 60 إلى 130:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{130}{3} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن أصبح فيه قيمة سالبة وهذا غير مقبول في البرمجة الخطية نظرا لعدم سلبية المتغيرات($X_1,X_2\geq 0$)وهذا يتطلب اخراج X_1من القاعدة وتغيير الحل.

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{130}{3}$
Z	0	30	20	0	800
S_2	0	-4	-3	1	10
X_1	1	2	1	0	40

بعد ارتفاع المورد الثاني لاحظنا أن الحل غير مجدي لذلك قمنا بإجراء مرحلة جديدة للتخلص من القيمة السالبة في الطرف الأيمن وقد تغيرت عناصر الحل إلى:

$Z_0=800$

$X_1=40$

5. تغير معاملات X_2من(2 2) إلى(2 1):

$$2y_1 + y_2 - 10 = 0 + \left(\frac{20}{3}\right) - 10 = -\frac{10}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

	X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**RHS**
Z_0	**0**	$-\frac{10}{3}$	**0**	$\frac{20}{3}$	**400**
S_1	**0**	$\frac{5}{3}$	**1**	$-\frac{1}{3}$	**20**
X_1	**1**	$\frac{2}{3}$	**0**	$\frac{1}{3}$	**20**
Z_0	**0**	**0**	**2**	**6**	**440**
X_2	**0**	**1**	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	**12**
X_1	**1**	**0**	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	**16**

أدى تغير معاملات المتغير الثاني X_2إلى ظهور قيمة سالبة في سطر الحلZ_0 مما أدى الى مواصلة الحل لتصبح النتائج:

$Z_0=440$

$X_1=16$

$X_2=12$

6. ادخال متغير جديدX_3معاملاته (13) و$C_3=30$:

القيد الثنائي لهذا المتغير الجديد هو:

$$3y_1 + y_2 - 30 \geq 0 \Rightarrow 3(0) + \frac{20}{3} - 30 \geq 0$$

$-\frac{70}{3} \geq 0$ وبالتالي يجب مواصلة الحل لأن قيمة المتغير الجديد سالبة في سطر الحلZ_0.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{70}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z_0	0	15	0	$\frac{70}{8}$	$\frac{30}{8}$	575
X_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{15}{2}$
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{35}{2}$

نتج عن إدخال متغير جديد تغير الحل ودخول هذا المتغير الجديد إلى القاعدة وتحسن الحل ليصبح:

$$Z_0=575$$

$$X_1=\frac{35}{2}$$

$$X_3=\frac{15}{2}$$

7. إضافة قيد جديد $2X_1+3X_2\geq 50$:

لا تحقق الحلول هذا القيد وبالتالي يجب مواصلة الحل

$$2X_1+3X_2\geq\ 50\Rightarrow 2(20)+3(0)\geq 50$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z_0	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	20
S_3	-2	-3	0	0	1	-50
Z_0	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	20

S_3+2 X_1	**0**	$-\frac{5}{3}$	**0**	$\frac{2}{3}$	**1**	**-10**
Z_0	**0**	**0**	**0**	**8**	**2**	**380**
S_1	**0**	**0**	**1**	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	**12**
X_1	**1**	**0**	**0**	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	**16**
X_2	**0**	**1**	**0**	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	**6**

بعد إضافة القيد الجديد تغير الحل بعد مواصلته ليصبح:

$Z_0=380$

$X_1=16$

$X_2=6$

حل التمرين رقم 19:

	X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**RHS**
Z	**0**	**0**	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	**0**	**0**	$\frac{38}{3}$
X_2	**0**	**1**	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	**0**	**0**	$\frac{4}{3}$
X_1	**1**	**0**	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	**0**	**0**	$\frac{10}{3}$
S_3	**0**	**0**	**-1**	**1**	**1**	**0**	**3**
S_4	**0**	**0**	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	**0**	**1**	$\frac{2}{3}$

1. إذا ارتفع المورد A من 6 الى 7:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل الجديد في الجدول وبما أن بقاء المتغيرات الأساسية كما هي من غير تغيير ولكن فقط تغيرت قيمتها وأصبحت:

$X_2=2$

$X_1=3$

$S_3=2$

$S_4=0$

استغلال تام للموارد.

أما قيمة دالة الهدف فهي:

$$Z_0=3(3)+2(2)=13$$

هذه الزيادة أدت الى زيادة الربح إلى13وحدة بدلا من$\frac{38}{3}$وكذلك غيرت الإنتاجية لـX_1 بالزيادة أماX_2 فقد تم تقليلها.

2. في حالة ارتفاع قيمة المورد الأول من 6 الى 7 والمورد الثاني من 8 الى 4:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

أصبح الحل غير أساسي أي أن التغيرات الجديدة أثرت على قيم $S_3=-2$ و $S_4=-\frac{4}{3}$ لذا يجب أن نستخدم أسلوب Dual-Simplexلتحسين الحل والتخلص من حالة الحل غير المجدي كما يبين الجدول التالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{23}{3}$
X_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
S_3	0	0	-1	1	1	0	-2
S_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$
Z	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	7
X_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
X_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
S_1	0	0	1	-1	-1	0	2
S_4	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0

الجدول الأول يوجد به قيم سالبة في الطرف الأيمن وهذا غير مجد ولا يمكن لذلك نستخدم طريقة Simplexبحيث المتغير الداخل هو S_1 و S_2 هو المتغير الخارج وباســتخدام خطوات طريقة Simplex تحصــلنا على الجدول الثاني وبالنظر الى معاملات الطرف الأيمن كلها موجبة أما الحل الجديد فهو:

$X_1=1$

$X_2=2$

$Z_0=3(1)+2(2)=7.$

3. في حالة إضافة قيد جديد $X_1\leq 3$:

نلاحظ أن هذا القيد لا يتوافق مع النتائج المتحصل عليها: $X_1=\frac{10}{3}$، $X_2=\frac{4}{3}$ فنحن بحاجة الى تحسين مجال الحل بتحويل القيد الى الصيغة القياسية ونضيف هذا القيد الى الحل الأمثل النهائي وبما أن المتغيرات X_1, X_2 متغيرات أساسية يجب أن يكون عمود معاملاتها عمود أحادي لذلك:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	RHS
Z_0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{38}{3}$
X_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
S_3	0	0	-1	1	1	0	0	3
S_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$
S_5	1	0	0	0	0	0	1	3
Z_0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	
X_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
S_3	0	0	-1	1	1	0	0	3
S_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$
S_5	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$
Z_0	0	0	1	0	0	0	2	12
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
X_1	1	0	0	0	0	0	1	3

S_3	**0**	**0**	$-\frac{1}{2}$	**0**	**1**	**0**	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
S_4	**0**	**0**	$-\frac{1}{2}$	**0**	**0**	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
S_2	**0**	**0**	$-\frac{1}{2}$	**1**	**0**	**0**	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

نلاحظ وجود قيمة سالبة في الطرف الأيمن لذلك نواصل حل جدول Simplex بإخراج S_5 وإدخال S_2 محله وبعد تحسين الحل تحصلنا على الجدول الأخير حيث أن قيمة دالة الهدف قد انخفضت إلى 12.

4. تغير عوائد دالة الهدف من (3,2) إلى (5,4) :

هذه التغيرات شملت المتغيرين الأساسين X_1،X_2 وتؤثر كما يلي:

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4] = [4 \quad 5 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{3} + \frac{-5}{3} + 0 & \frac{-4}{3} + \frac{10}{3} + 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$$

هذا يعني أن:

$y_1=1$
$y_2=2$
$y_3=0$
$y_4=0$

ثم نقوم بحساب معاملات دالة الهدف في الجدول الجديد:

X_1 : $y_1+2y_2-y_3-5=1+2(2)-0-5=0$
X_2 : $2y_1+y_2+y_3+y_4-4=2(1)+2+0+0-4=0$
S_1 : $y_1-0=1-0=1$
S_2 : $y_2-0=2-0=2$
S_3 : $y_3-0=0-0=0$
S_4 : $y_4-0=0-0=0$

هذا يعني أن معاملات دالة الهدف للجدول هي موجبة أو تساوي الصفر وهذا يعني لا تغيير على الحل فقط تتغير قيمة دالة الهدف وتصبح: $Z_0=5\cdot\left(\frac{10}{3}\right)+4\left(\frac{4}{3}\right)=22$

حل التمرين رقم 20:

$Max\ Z_0=10X_1+12X_2+6X_3$,
$X_1+2X_2+3X_3\leq 80$,
$2X_1+X_2+X_3\leq 59$,
$3X_1+5X_2+4X_3\leq 120$,
$X_1, X_2, X_3\geq 0$.

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأمثل للنموذج:

تحضير البرنامج:

$Max\ Z_0=10X_1+12X_2+6X_3+0S_1+0S_2+0S_3$,
$X_1+2X_2+3X_3+S_1= 80$,
$2X_1+X_2+X_3+S_2= 59$,
$3X_1+5X_2+4X_3+S_3= 120$,
$X_1, X_2, X_3\geq 0$.

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z_0	-10	-12	-6	0	0	0	0
S_1	1	2	3	1	0	0	80
S_2	2	1	1	0	1	0	59
S_3	3	5	4	0	0	1	120
Z_0	$-\frac{14}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{12}{5}$	288
S_1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	32
S_2	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	35
X_2	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	24
Z_0	0	0	4	0	2	2	358
S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	37
X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	25
X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	9

إذن الحلول هي:

$Z_0=358, X1=25, X_2=9$

2. إذا ارتفع المورد الأول بوحدة واحدة:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 81 \\ 59 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 25 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نلاحظ زيادة الباقي من المورد الأول بوحدة واحدة من 37 إلى 38 .

أما إذا ارتفع المورد الثاني بوحدة واحدة:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{260}{7} \\ \frac{180}{7} \\ \frac{60}{7} \end{bmatrix}$$

نلاحظ عند زيادة المورد الثاني بوحدة واحدة زيادة طفيفة في فائض المورد الأول وزيادة طفيفة في كمية المنتج الأول بينما انخفضت كمية المنتج الثاني قليلا.

أما في حالة ارتفاع المورد الثالث بوحدة واحدة:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 80 \\ 59 \\ 121 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{256}{7} \\ \frac{174}{7} \\ \frac{65}{7} \end{bmatrix}$$

نلاحظ عند زيادة المورد الثالث بوحدة واحدة انخفاض طفيف في فائض المورد الأول وانخفاض قليل لكمية المنتج الأول وزيادة ضئيلة في كمية المنتج الثاني.

3. إذا تغير العائد على المنتج الأول بزيادة 5 وحدات:

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{39}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

بالتعويض في القيود الثنائية:

$$y_1+2y_2+3y_3-15=0+2\left(\frac{39}{7}\right)+3\left(\frac{9}{7}\right)-15=3$$

$$2y_1+y_2+5y_3-12=2(0)+\left(\frac{39}{7}\right)+5\left(\frac{9}{7}\right)-12=0$$

$$3y_1+y_2+4y_3-6=3(0)+\left(\frac{39}{7}\right)+4\left(\frac{9}{7}\right)-6=\frac{33}{7}$$

$$y_0=80y_1+59y_2+120y_3=80(0)+59\left(\frac{39}{7}\right)+120\left(\frac{9}{7}\right)=483$$

زيادة العائد بخمس وحدات على المنتج الأول لم تؤثر على الحل بزيادة مراحله ولكن حسنت الحل من 358 الى 483.

4. أما إذا تغيرت معاملات X_3 من $\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$:

نعوض في القيد الثنائي الموالي للمتغير X_3:

$$y_1+y_2+2y_3-6=1(0)+(2)+2(2)-6=0$$

لا يتأثر الحل بالتغير الحاصل لمعاملات المتغير الثالث.

5. اذا تغيرت معاملات X_1 من $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$:

نعوض في القيد الثنائي الموالي للمتغير X_1:

$$2y_1+4y_2+6y_3-10=2(0)+4(2)+6(2)-10=10$$

لا يتأثر الحل بالتغير الحاصل لمعاملات المتغير الأول.

6. إذا أضفنا القيد التالي: $X_1+X_2+X_3\leq 30$

Z_0	**0**	**0**	**4**	**0**	**2**	**2**	**0**	**358**
S_1	**0**	**0**	$\frac{10}{7}$	**1**	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	**0**	**37**
X_1	**1**	**0**	$\frac{1}{7}$	**0**	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	**0**	**25**
X_2	**0**	**1**	$\frac{5}{7}$	**0**	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	**0**	**9**
S_4	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**30**

Z_0	0	0	4	0	2	2	0	358
S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	37
X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	25
X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	9
S_4	0	0	$-\frac{11}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	-4

ظهور (violation) قيمة سالبة في الطرف الأيمن الذي يمثل الموارد وهو يتناقض مع الواقع.

7. ما هو تأثير اضافة متغير جديد X_4بربح مقداره 12 للوحدة و معاملات فنية: $\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$؟

القيد الثنائي المقابل لهذا المتغير الجديد هو:

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 12 = 2(0) + 2(2) + 2(2) - 12 = -4$$

المتغير الجديد مرشح لدخول القاعدة:

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{10}{7}\\ \frac{8}{7}\\ -\frac{2}{7}\end{bmatrix}$$

Z_0	0	0	4	-4	0	2	2	358
S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	37
X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	25
X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	9
Z_0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{891}{2}$
S_1	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{23}{4}$
X_4	$\frac{7}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{175}{8}$
X_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{61}{4}$

أدى دخول المتغير الجديد الى دخوله للقاعدة وتحسين الحل من 358 إلى 445.5 .

البرمجــة الخطية بالأهـــداف

GOAL PROGRAMMING

تقديم عام حول نموذج البرمجة بالأهداف:

إن أسلوب برمجة الأهداف هو امتداد للأسلوب البرمجة الخطية يتم صياغته على أساس تحديد الأهداف المراد تحقيقها والقيم المقابلة لكل هدف والتي تعرف بالقيم المستهدفة، حيث يعبر عن كل هدف بقيد يعرف بقيد الهدف في شكل معادلة تحتوي على متغيرين يمثل أحدهما الكمية التي تفوق القيمة المستهدفة ويمثل الأخر الكمية التي تقل عن القيمة المستهدفة وتسمى هذه المتغيرات بمتغيرات الانحرافDeviations variables،أما دالة الهدف في هذا الأسلوب فهي تعبر عن تصغير مجموع الانحرافات إلى أدنى حد ممكن، وبإمكاننا توضيح ذلك في شكل رياضي بعد عرض بعض أهم المفاهيم والتعارف التي قدمت لهذا الأسلوب وكان من بينها :

تعرف برمجة الأهداف بأنها تمثيل المشكلة بنموذج رياضي يسعى إلى أقرب وأحسن الحلول للقيم المحددة مسبقا لعدد من الأهداف، أي يهدف النموذج الرياضي للبرمجة بالأهداف إلى تخفيض مجموع الانحرافات عن الأهداف المحددة مسبقا إلى أدنى حد ممكن. ويعرف كذلك بأنه نموذج رياضي يسعى إلى تحقيق عدة أهداف ضمن بيئة قرار معينة يحدد منها العناصر الأساسية للنموذج وهي متغيرات القرار والقيود ودالة الهدف.

وقد تمثل برمجة الأهداف إحدى التقنيات التي تبشر بنجاح تحليل قرار متعلق بأهداف متعددة وهي أداة فعالة وتعد أسلوبا متطور ذا مستوى اختيار عال، إذ تقدم حلا معاصرا لنظام معقد ذي أهداف متناقضة وتحل مشاكل اتخاذ القرار ذات الهدف الواحد والأهداف المتعددة.

وفي تعريف آخر: يعتبر نموذج البرمجة بالأهداف امتدادا لنموذج البرمجة الخطية، يساعد صانع القرار حل مشاكله بأخذ بعين الاعتبار جميع الأهداف سواء كانت رئيسية أو ثانوية فرعية حتى ولو كانت متعارضة ومتناقضة. وفي تعريف آخر: يعرف بأنه أحد النماذج الرياضية متعددة الأهداف الذي يسعى لإيجاد أقرب وأحسن حل يوفق إلى أقصى حد ممكن بين مجموعة الأهداف المرتبة للمشكلة وذلك من خلال تحديد قيم متغيرات القرار التي تخفض مجموع الانحرافات عن الأهداف المحددة مقدما إلى أدنى حد ممكن.

إن نموذج البرمجة بالأهداف تعتبر طريقة من الطرق التي تساعد على التسيير الحسن والأمثل في ظل تعدد الأهداف والطموحات في شكل نموذج رياضي خطي، إذ تعتبر واحدة من أقدم تقنيات اتخاذ القرار المتعددة المعايير التي توصل إلى أمثل مستوى من الأهداف المنشودة. ويعرفه B.B.Pal and B.Mortra (2003) بأنه من أساليب البرمجة الرياضية التي تستخدم في ظل تعدد وتعارض الأهداف المطلوب تحقيقها لمتخذي القرار عن المفاضلة بين القرارات في حالات عديدة.

لنموذج البرمجة بالأهداف يتميز بالعديد من المزايا من أهمها:

1- يأخذ النموذج في الاعتبار الأهداف المتعددة ويتمشى ذلك مع اتجاه الأهداف المتعددة في كثير من القرارات ومنها القرارات الخاصة بإدارة وتخطيط المنسق المتكامل بين الإنتاج والتوزيع في المؤسسات الاقتصادية؛

2- يوفر هذا النموذج كمية كبيرة من البيانات لمتخذي القرار تساعدهم في اتخاذ القرار السليم وتجعل الإدارة أكثر فهماً لطبيعة المشكلة؛

3- يسمح النموذج بعملية التوفيق بين الأهداف المتعارضة ولذلك فإنّ القيمة الحقيقية لنموذج برمجة الأهداف تكمن في قدرته على إيجاد حلول للمشاكل التي تتضمن أهدافاً متعددة ومتعارضة وفقاً لهيكل أو تفضيلات الإدارة؛

4- يؤدي استخدام نموذج برمجة الأهداف إلى التحديد الأمثل لقيم الأهداف ولذلك فإنّ الأهداف التي نحصل عليها من النموذج تكون أهدافاً قابلة للتحقق ومتناسبة مع الإمكانيات والموارد المتاحة للمنظمة ؛

5- يساعد نموذج برمجة الأهداف الإدارة على تحقيق المنفعة القصوى من المصادر المستخدمة في الإنتاج ؛

6- قيم الأهداف التي نحصل عليها من نموذج برمجة الأهداف هي القيم المثلى التي يجب استخدامها في الرقابة وتقييم الأداء، حيث يمكن التعرف على ما تمّ إنجازه بناءً على المخطط وتحليل الانحرافات أولاً بأول وتحديد أسبابها واتخاذ الإجراءات اللازمة لعلاجها وتجنب تكرار حدوثها.

1-1- مصطلحات ومفاهيم فلسفية أساسية في نموذج البرمجة بالأهداف:

من أجل الاستفادة والتتبع الكامل لأهمية وفعالية استعمال البرمجة بالأهداف يستوجب الاهتمام وفهم بعض المفاهيم والمصطلحات الفلسفية التي نعتبرها أساسية في عملية تطبيق هذا النموذج، ما يسمح بتحديد المعلمات والمتغيرات بشكل مناسب ومن تم تسهل عملية حل و تحليل أي مشكلة قد يصادفها صانع القرار، ومن بين هاته المفاهيم التي يرتكز عليها نموذج البرمجة بالأهداف نجد:

- **متخذ القرار**: يشير هذا المصطلح إلى صانع القرار الذي يتمثل في شخص أو فرد أو منظمة أو مؤسسة أو مصلحة أو مجموعة الأشخاص الذي تكون له مشكلة معينة ويحاول اتخاذ موقف قراري بشأن حلها؛

- **متغيرات القرار**: وهي بمثابة مجموعة من العوامل المؤثرة على مشكلة القرار المقترحة ويريد المقرر أن يبحث عن قيمها المثلى حيث إذا تحكم فيها فإنه يصل إلى حل المشكلة؛

- **المعايير**: وهي بمثابة مقاييس يتم تقييم بها البدائل المقترحة في ظل مجموعة من الأهداف المراد الوصول إليها والتي تنطوي عليها المشكلة؛ على سبيل المثال التكلفة، الربح، الوقت، المسافة، الكمية، الأداء، الجودة...الخ؛

- **الأهداف**: وهي الأهداف العامة والأغراض المراد الوصول إليها من المشكلة المقترحة وقد تكون في حالة التدنية، أو التعظيم أو التساوي؛

- **القيم المستهدفة**: وهي قيم الأهداف التي يتم تحديدها مسبقا من طرف متخذ القرار يرغب الوصول إليها، وهنا نشير إلى أن هناك علاقة مابين الأهداف المنشودة وقيمها المستهدفة وتكون يا إما أكبر أو تساوي($\leq$)، أصغر أو تساوي($\geq$)، تساوي ($=$)؛

- **متغيرات الانحراف**(Deviational Variable): وهي تعبر عن المسافة ما بين القيم المستهدفة وقيم الأهداف المنشودة المحصل عليها، فإذا كانت القيمة المنجزة أو المحصل من الهدف أكبر من المستوى المستهدف لنفس الهدف في هذه الحالة الفرق (المسافة) بينهما تسمى بمتغير انحرف موجب يرمز له عموما بـ (δ^+)(Positive Deviational Variable)، و إذا كانت القيمة المنجزة المحصل عليها من الهدف أقل من المستوى المستهدف (Target Level) في هذه الحالة الفرق بينهما يعطي متغير انحراف سالب يرمز له بـ (δ^-)(Negaive Deviational Variable)؛

- **القيود**: وهي تلك الشروط والالتزامات يستوجب على المتخذ القرار احترامها وأخذها في عين الاعتبار مثل ساعات العمل، الميزانية المتاحة، اليد العاملة، مساحة التخزين، العرض الممكن الطلب المتاح...الخ ويعبر عنها بمعادلات تكون في التساوي (Equality) أو لا متساوية (Inequality)؛

- **شرط عدم السلبية**: وهي أن جميع القيم المحصل عليها سواء كانت متغيرات القرار، متغيرات الانحراف تكون غير سالبة أي أكبر أو يساوي الصفر؛

- **المنطقة المجدية**: وهي منطقة الحلول المثلى التي تخدم وتصلح لمتخذ القرار؛

- الرضا: ويتمثل في أن الحلول وقيم الأهداف المحققة يكون متخذ القرار راضي بها وقد تكون في شكل نسب تنحصر مابين 0 و 1 سواء راضي تماما أين تكون نسبة تحقيق أو نسبة الانجاز الهدف في حدود 1 أي 100% كما قد تكون في حدود 0 أي 0 % متخذ القرار غير راضي تماما بها وقد تأخذ نسب أخرى؛

- **الأمثلة**: يستعمل هذا المصطلح عموما في إطار متخذ القرار وتعني الحصول على أحسن الحلول لأي مشكلة (الحل الأمثل) بمعنى أخر الحل المرضي المناسب الأفضل وقد استعمل هذا المصطلح من طرف (Pareto 1896)؛

- **الأولوية والترتيب**:هذا المصطلح الفلسفي يُعتمد عليه في نوع من أنواع البرمجة بالأهداف اللكسغوغرافية (المعجمية) سيتم مناقشة ذلك في الخطوات الآتية تقوم على فرضية حل المشكلة في شكل مراحل متتابعة حسب ترتيب الأهداف وفقا لأهمية كل منها حسب رؤية متخذ القرار؛

- **التوازن**: والمقصود بذلك تحق التوازن مابين القيم المستهدفة والقيم المنجزة من مختلف الأهداف وذلك بتحقيق وتحديد الانحرافات الفاصلة فيما بينها.

2-1- الإطار العام والصياغة العامة لنموذج البرمجة بالأهداف:

في ضوء المفاهيم والمصطلحات السابقة الذكر يمكن صياغة نموذج البرمجة بالأهداف حسب Charnes and al. (1955)و (1961) Charnes and cooperفي الشكل الرياضي كما يلي:

$$Minimise \ \sum_{i=1}^{p} |f_i(x) - g_i|$$

Subject to:

نموذج رقم(01); $Cx \leq c$ (نظام القيود)

$x_j \geq 0$ (من أجل $j = 1,2,3 \dots \dots n$);

حيث:

$f_i(x)$: تمثل الأهداف المراد تحقيقها يعبر عنها بدوال من الشكل: $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, x_j$ ؛

g_i : القيمة المستهدفة المحددة من قبل الخاصة بكل هدف i من أجل $i = 1,2,3 \dots \dots p$ ؛

x_j : متغيرات القرار من أجل $j = 1,2,3 \dots \dots n$ ؛

a_{ij}: تمثل المعلمات التكنولوجية؛

C : مصفوفة معاملات قيود النظام؛

c : شعاع الموارد المتاحة؛

$\sum_{i=1}^{p} |f_i(x) - g_i|$: تمثل دالة الهدف والتي تعبر عن المسافة الفاصلة ما بين الهدف المراد تحقيقه والمنجز و القيمة المستهدفة المحددة في بداية الأمر.

ويمكن كتابة النموذج رقم **(01)** في صياغة أخرى كما يلي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} (\delta_i^+ + \delta_i^-)$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i\ ;$$

$$Cx \le c;$$

نموذج رقم (02)

$$x_j \ge 0;$$

$$\delta_i^+, \delta_i^-,\ x_j \ge 0;$$

من أجل $i = 1,2,3 \dots \dots m,\ j = 1,2,3 \dots \dots n$.

ما يميز هذا النموذج هو أن دالة الهدف تضم الانحرافات غير المرغوب فيها عن مستويات الأهداف المطلوب تحقيقها، بحيث يتم تقليل مجموع هذه الانحرافات إلى أدنى حد ممكن. ومن الممكن أن يكون الانحراف أكبر من قيمة الهدف ويرمز له بالرمز (δ_i^+)، أو أن يكون الانحراف أصغر من قيمة الهدف ويرمز له بالرمز (δ_i^-)، وتتوقف إشارة الانحراف في دالة الهدف على نوعية الهدف المراد تحقيقه من طرف متخذ القرار.

و يمكن توضيح الحالات التي تظهر بها الانحرافات في دالة الهدف فيما يلي:

- **تحقيق مستوى الهدف بالضبط:** أي أنّ متخذ القرار يرغب في تحقيق مستوى الهدف بالضبط بدون أي زيادة أو نقص عن هذه القيمة، وفي هذه الحالة يتم وضع متغيرات الانحراف (δ_i^+, δ_i^-) في دالة الهدف مع بعض، بمعنى آخر تكون القيمة المحققة المنجزة من الهدف مساوية لقيمته المستهدفة $(f_i(x) = g_i)$ وبالتالي الانحرافات غير مرغوب فيها والواجب تقليلها إلى أقل حد ممكن (δ_i^+, δ_i^-).

- **تحقيق أكبر قيمة للهدف: و** يعني القيمة المراد تحقيقها من الهدف من الأحسن أن تكون أكبرمن أو تساوي القيمة المستهدفة من الهدف نفسه $(f_i(x) \geq g_i)$ وعليه يكون الانحراف السالب (δ_i^-) هو الانحراف غير مرغوب فيه والذي يجب تقليله إلى أدنى حد ممكن ويتم وضعه لوحده في دالة الهدف.

-**تحقيق أقل قيمة للهدف: و** يعني القيمة المراد تحقيقها من الهدف من الأحسن أن تكون أصغر من أو تساوي القيمة المستهدفة من الهدف نفسه $(f_i(x) \leq g_i)$ وعليه يكون الانحراف الموجب(δ_i^+)هو الانحراف غير مرغوب فيه والذي يجب تقليله إلى أدنى حد ممكن ويتم وضعه لوحده في دالة الهدف.

بصفة عامة إذا كان قيد الهدف (**أصغر من أو يساوي** $\geq$) وذلك قبل إضافة متغير الانحراف فإننا سوف نضيف متغير الانحراف الموجب (δ_i^+) إلى دالة الهدف، أما إذا كان قيد الهدف (**أكبر من أو يساوي** $\leq$) فسوف يتم إضافة متغير الانحراف السالب (δ_i^-) إلى دالة الهدف، أما إذا كان قيد الهدف (**بشكل مساواة =**) فإنّ دالة الهدف سوف تحتوي على كل من متغيري الانحراف الموجب والسالب(δ_i^+, δ_i^-).

ويمكن تعريف متغيري الانحراف الموجب والسالب(δ_i^+, δ_i^-) رياضيا كما يلي:

$$\delta_i^+ = \frac{1}{2}\left[\!\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right| + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right)\right]\!\right] ;$$

$$\delta_i^- = \frac{1}{2}\left[\!\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right| - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right)\right]\!\right] ;$$

والمجموع فيما بين هذه الانحرافات يعطي ما يلي:

$$\delta_i^+ + \delta_i^- = \frac{1}{2}\left[\!\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right| + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right)\right]\!\right]$$

$$+$$

$$\frac{1}{2}\left[\!\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right| - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right)\right]\!\right]$$

$$\delta_i^+ + \delta_i^- = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - g_i\right|.$$

وننوه هنا أن ناتج جداء الانحراف الموجب والانحراف السالب يأخذ في غالب الحالات القيمة صفر$(\delta_i^+ \times \delta_i^-)$ لأنه لا يمكن أن يتحققا مع بعض Jaha Nshahcoo. GR. Et al (2008) يعني الانحراف الموجب والانحراف السالب لنفس الهدف أحدهما أو كلاهما يأخذ صفر.

مع كل ذلك إلا أن بعد مرور الزمن والتغيرات البيئية والاقتصادية التي عرفتها مختلف المؤسسات، أصبح في كل مرة يتم تعديل هذا النموذج حسب رؤية متخذ القرار في مشكلاته المتعددة ورغباته المختلفة، وهذا ما نتج عنه أنواع عديدة من البرمجة بالأهداف، إضافة إلى أن الموارد الموجودة لتحقيق الأهداف المطلوبة تكون عادة محدودة بطبيعتها لذلك فإنّ التحقيق الكامل للأهداف المرغوبة ومعالجتها معا يكون في غالب الأحيان أمراً صعباً وهذا ما يترتب عنه تحقيق بعض الأهداف وإهمال البعض الآخر، وهذا ما دفع العديد من الباحثين إعادة النظر في صياغة نموذج البرمجة بالأهداف والتي سيتم مناقشتها في الأجزاء الآتية.

2- الأنواع الأساسية لنموذج البرمجة بالأهداف

من الأنواع الأساسية الأكثر استعمالا وشيوعا والتي جاءت نتيجة للتغيرات التي تعرفها البيئة واختلاف رؤية متخذ القرار في مستويات تحقيق أهدافه المنشودة من مشاكله المختلفة التي غالبا ما تكون متفاوتة فيما بينها من حيث الأهمية، نجد البرمجة بالأهداف ذات الأولوية، البرمجة بالأهداف الموزونة أو المرجحة، البرمجة بالأهداف تقليل/تعظيم (**MINMAX**) ويمكن توضيحها فيما يلي:

2-1-البرمجة بالأهداف المرجحة (بالأوزان)(Weighted Goal Programming):

تم تطوير هذا النموذج من طرف Charnes and al. (1977) حيث يعمل على تخصيص أوزان نسبية مختلفة لمتغيرات الانحراف الموجبة والسالبة الخاصة بكل هدف، ويمكن صياغة هذا النموذج في الشكل التالي:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}(w_i^+ \delta_i^+ + w_i^- \delta_i^-)$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i\ ;$$

نموذج رقم (03)

$$Cx \leq c;$$

$$x_j \geq 0;$$

$$\delta_i^+, \delta_i^-,\ x_j \geq 0;$$

من أجل $i = 1,2,3 \ldots \ldots m, j = 1,2,3 \ldots \ldots n\ .$

حيث:

w_i^+ : الأهمية النسبية لانحرافات الموجبة؛

w_i^- : الأهمية النسبية لانحرافات السالبة.

المعاملات w_{i}هي بمثابة نسب مئوية يتم تحديدها في بداية عملية صنع القرارتعبرعن درجة الأهمية تكون مربوطة بالانحرافات المعاقبة من طرف متخذ القرار، وتأخذ نسب منخفضة في حالة الانحرافات غير مرغوب فيها الخاصة بالأهداف المهمة، وقد تكون ذات نسب مرتفعة بالنسبة للانحرافات غير مرغوب فيها الخاصة بالأهداف الأقل أهمية، وقد تلعب w_{i} دورين مهمين في نفس الوقت هما:

- تكون في عوض توحيد وحدات القياس المختلفة للأهداف؛
- تعمل على تثمين وتقييم كل هدف وإعطاءه درجة مكانته عند متخذ القرار.

بالرغم من ذلك فان هذه الصياغة قد تجعل الأهداف غالبا بنفس الأهمية، لكن الواقع يعكس ذلك فقد نجد متخذ القرار يفضـــل أن تكون الأهداف مختلفة الأهمية يعني البعض منها يفوق مســـتوى الأهمية من الأهداف الأخرى، مثل تقييم البدائل القرارية يُفضـــل اختيار الأحســـن منها بناء على العائد المالي ثم بعدها تقيم من جانب التكلفة وبعد من جانب البيئة...الخ، وهذا يشير إلى الحاجة إلى إدخال نظام الأولوية والأهمية على النموذج السابق.

2-2-البرمجة بالأهداف ذات الأولوية (Lexicographic Goal Programming):

من بين المناهج والمتغيرات الأساسية كذلك نجد نموذج البرمجة بالأهداف التتابعية Dauer k. (1972) أو ما تسمى بالبرمجة بالأهداف ذات الأولوية أو الديناميكية Ijiriy (1965)،Romero (1991)Tmiz et al1995 والتي تعتمد على أسلوب متدرج أو تتابعي حسب الأولويات للوصول إلى حل المشكلة كليا، ولهذا سميت بالتتابعية **Sequentional** أو الديناميكية على عكس الساكنة **Static** التي توصلنا إلى حل المشكلة نهائيا بشكل شامل لكل الأولويات معا (نموذج المعيار الشامل).

ويعتمد هذا النموذج على مجموعة من الفرضيات يمكن حصرها على الآتي:

- تعدد الأهداف المزمع تحقيقها؛
- وجود نظام أو هيكل ترتيب مسبق للأولويات تحقيق أهداف النموذج؛
- تعدد القيود المفروضة ؛
- قابلية المشكلة للتقسيم إلى مشاكل فرعية مترابطة؛
- قابلية المتغيرات القرارية والإنحرافية للتجزئة؛
- شرط عدة السالبية.

ويتكون نموذج البرمجة بالأهداف التتابعية من نفس عناصر النموذج العام للبرمجة بالأهداف السابق الذكر، من دالة هدف تتضمن متغيرات الانحراف الغير مرغوب فيها والمراد تدنيتها إلى أقل حد ممكن، ويكون ذلك حسب نوع الهدف، ونجد كذلك قيود الهدف وقيود النظام، ولتوضيح ذلك نعرض الصياغة الرياضية (**1991**) التالية:

$$Min\ z = [P_1(\delta_i^+, \delta_i^-)\ , P_2(\delta_i^+, \delta_i^-), \dots \dots \dots P_k(\delta_i^+, \delta_i^-)]$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i\ ;$$

$$Cx \leq c;$$

نموذج رقم (04)

$$x_j \geq 0;$$

$$\delta_i^+, \delta_i^-,\ x_j \geq 0;$$

و $(j = 1;2 \dots\dots\dots n)$ و $(i = 1;2 \dots\dots\dots m)$ من أجل حيث: $(P = 1;2 \dots\dots\dots k)$

P تعبر عن ترتيب الأهداف حســـب الأولوية، أما بقيت الرموز والمعلمات قد تم تحديد معناها في النموذج رقم (01)، (02)، (03) السالفة الذكر.

عملية حل هذا النموذج تكون في شكل مراحل حيث يتجزأ النموذج إلى عدة مراحل حسب أهمية الهدف، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

المرحلة الأولى:

$$Min\ \ z_1 = P_1(\delta_i^+, \delta_i^-)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i$$

$$Cx \leq c;$$

$$x_j \geq 0;$$

$$\delta_i^+ et \delta_i^- \geq 0$$

المرحلة الثانية:

$$Min\ \ z_1 = P_1(\delta_i^+, \delta_i^-)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i$$

$$Cx \leq c;$$

$$x_j \geq 0;$$

$$\delta_i^+ et \delta_i^- \geq 0$$

$$Z_1 = a$$

حيث a تمثل قيمة Z_1 المحصل عليها في المرحلة الأولى نضيفها إلى المرحلة الثانية كقيد جديد مع القيود السابقة، ونكمل عملية الحل إلى آخر مرحلة عند درجة الأولوية k مع إضافة حلول المراحل السابقة في شكل قيود مع قيود النموذج العام.

3-2- البرمجة بالأهداف تقليل/تعظيم (MINMAX Goal Programming):

تم تطوير هذا النموذج من طرف Fal vell A.B (1976) وطبقا له يتم تقليل مجموع الانحرافات المناسبة للأهداف المراد الوصول إليها من طرف متخذ القرار، بعبارة أخرى تقليل الانحرافات الأكثر أهمية وهي الأقل تفضيلا الأكثر عقوبة غير مرغوب فيها من طرف صانع القرار، والصياغة الرياضية لهذا النموذج تكون حسب Romero(1991) في ما يلي:

$$=D Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}(w_i^+\delta_i^+ + w_i^-\delta_i^-)$$

Subject to:

$$w_i^+\delta_i^+ + w_i^-\delta_i^- \leq D$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - \delta_i^+ + \delta_i^- = g_i\ ;$$

$$Cx \leq c;$$

نموذج رقم (05)

$$x_j \geq 0;$$

$$\delta_i^+, \delta_i^-,\ x_j \geq 0;$$

من أجل $i = 1,2,3 \ldots \ldots m, j = 1,2,3 \ldots \ldots n$.

حيث:

Z : تمثل القيمة D وتوضح في النموذج أعلاه الانحرافات العظمى المراد تقليلها، بعبارة أخرى تمثل أدنى انحراف أعظمي محصل عليه، وهي الانحرافات غير مرغوب فيها التي يستلزم عدم تجاوزها بالنسبة إلى القيمة D تحدد من السابق والتي يُطلب من طرف صانع القرار تقليلها إلى أقل حد ممكن.

تمارين محلولـــة حول نموذج البرمجـة بالأهداف

التمرين رقم 01: حدد الانحرافات غير المرغوب فيها للمعلومات التالية:

1. تعظيم الربح؛
2. تقليل التكاليف؛
3. الإنتاج بكمية معينة (مضبوطة)؛

التمرين رقم 02: نفترض العلاقات الرياضية التالية:

$$\text{Max } z_1 = 3x_1 + 2x_2 \text{............... (01)}$$

$$\text{Min } z_2 = 3x_1 + 2x_2 \text{..............(02)}$$

المطلوب هو تحديد الانحرافات غير المرغوب فيها.

التمرين رقم 03:

مؤسسة ننتج نوعين من المنتجات وكانت المعلومات المتوفرة عن ذلك موضحة كما يلي:

- مدة انتاج المنتج الأول هي ساعتين؛
- مدة انتاج المنتج الثاني هي ثلاثة ساعات؛
- مدة اشتغال آلـة الإنتاج هي 10 ساعات في اليوم وهناك 20 آلـة؛
- المؤسسة تشتغل 5 أيام في الأسبوع فقط؛
- المواد الأولية والامكانيات الأخرى متوفرة بكمية كبيرة؛
- الربح المحقق من كل منتج هو 20 ون و 15 ون على التوالي؛
- تكلفة انتج المنتجين هي 15 ون و10 ون على التوالي؛
- المؤسسة تسعى إلى تحقيق أقصى ربح ممكن لا يقل عن 10000 ون في الأسبوع، وكمية انتاج من كلا المنتجين في حدود 700وحدة في الأسبوع. وتسعى كذلك إلى تقليل تكلفة الإنتاج الاجمالية بحيث لا تتجاوز 5000 ون.

المطلوب:

1. تحديد متغيرات القرار؛
2. تحديد الأهداف المراد بلوغها؛
3. تحديد متغيرات الانحراف غير المرغوب فيها؛

4. تحديد القيم المحققة والقيم المستهدف (ما هو الفرق بينهما؟).
5. صياغة البرنامج الرياضي.

التمرين رقم 04: ليكن لدينا البرنامج الرياضي التالي:

$$MinZ = 5N1 + 1P2 + 3N3 + 3N4$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

المطلوب:

1. تحديد متغيرات القرار ومتغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها ومتغيرات الأوزان؛
2. تحديد قيود الهدف وقيود الموارد، وما الفرق بينهما؟
3. ما نوع هذا النموذج؟

التمرين رقم 05: لدينا نتائج تطبيق نموذج البرمجة الخطية بالأهداف على إحدى المشكلات الإنتاجية موضحة في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	مستوى إنجازها	الرضا على الانجاز
X_1	300	الهدف الأول : الربح	%20	لا
X_2	0	الهدف الثاني : التكاليف	%100	نعم
P1	0	الهدف الثالث: الإنتاج	%100	نعم
N1	2400			
P2	0			
N2	0			
P3	0			
N3	0			

المطلوب:

تحليل النتائج الموضحة في الجدول أعلاه.

التمرين رقم 06: مؤسسة تنتج منتجين(x_2،x_1) وتريد بناء خطة إنتاجية يومية تسعى من خلالها تحقيق عدة أهداف متمثلة في: تحقيق أقصى ربح ممكن لا يقل عن 3000ون ، تخفيض التكاليف الى أدنى حد ممكن لا تتجاوز 50% من القيمة المستهدفة من الربح، و تلبية الطلب المتوقع من السوق في حدود 300 وحدة لكلا المنتجين.

و للإنتاج وحدة واحدة من x_1وx_2 تتحمل المؤسسة تكلفة قدرها 5 و10 وحدة نقدية على التوالي ، و ساعة واحدة للإنتاج وحدة واحدة من كل منتج (x_2،x_1)، وفي مقابل ذلك تتحصل المؤسسة من بيع المنتجين x_1وx_2على ربح قدره 2 و 3 وحدة نقدية على التوالي، وللعلم أن المؤسسة تشغل 100 عامل وكل عامل يشتغل 8 ساعات في اليوم، ولإنتاج وحدة واحدة من كل منتج يتطلب استغراق ساعة واحدة.

المطلوب:

1- لبناء خطة إنتاجية مثلى، ما هو الأسلوب الرياضي المناسب لذلك؟

2- حدد الصياغة الرياضية لهذا الأسلوب بالاعتماد على المعلومات الموضحة في النص (المسألة) أعلاه؟

3- أذكر مزايا وعيوب هذا الأسلوب؟

التمرين رقم (07): حل البرنامج التالي:

$$max z_1 = x_1 + 2x_2$$
$$min z_2 = 2x_1 + x_2$$

Subject to :

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

التمرين رقم (08): ما إسم هذا البرنامج الرياضي وكيف يتم حله:

$$Min\ z = P1\ (\delta_1^+), P2(\delta_2^+, \delta_3^-), P3(\delta_4^+, \delta_5^+)$$

Subject To

$$Goal\ 1: x_1 + x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 10;$$
$$Goal\ 2: x_1 + x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 50;$$
$$Goal\ 3: x_1 + x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 25;$$
$$Goal\ 4: x_1 + x_2 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 8;$$
$$Goal\ 5: x_1 + x_2 + \delta_5^- - \delta_5^+ = 50;$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\delta_1^-, \delta_1^+, \delta_2^-, \delta_2^+, \delta_3^-, \delta_3^+, \delta_4^-, \delta_4^+, \delta_5^-, \delta_5^+ >=0$$

التمرين رقم (09): مؤسسة تنتج منتجين حيث الربح المحقق منهما على التوالي 100 ون و 150 ون وتخصص لإنتاج كل وحدة منهما 4 و 3 ساعات عمل على التوالي، ولتحقيق ذلك يشترط على المؤسسة استعمال وحدتين من مادة اولية لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الاول ووحدة واحدة لإنتاج المنتج الثاني، علما أن المادة تلك متوفرة وبشكل كبير تريد المؤسسة استغلالها على الأقل بكمية قدرها 50 وحدة و كذلك انتاج كل وحدة من المنتجين يشترط عدم تجاوز 75 ساعة.

الطموح التي تسعى إليه المؤسسة يكمن في:

- أقصى ربح ممكن على الأقل 7000 ون؛
- وقت العمل من الأفضل لا يتجاوز 120 ساعة عمل؛
- السعي إلى انتاج 40 وحدة فما فوق من كل منتج.

المطلوب:

1. بناء البرنامج الرياضي لهذه المسالة في شكله العادي وحله؛
2. إعادة صياغة البرنامج الرياضي مع الحل لكن ينبغي الأخذ في الحسبان درجة الاهمية المعطاة من طرف متخذ القرار للأهداف المراد الوصول إليها التي يعبر عنها أحيانا بالأوزان وأحيانا وبالأولوية وهي موضحة في الجدول أدناه؛
3. حل البرنامج الرياضي مرة أخرى باستعمال طريقة النسب.

جدول يوضح توزيع درجة الاوزان ومستويات الاولوية على الأهداف

الأهداف	درجة الأوزان	مستوى الأولوية
الربح	4	الاولى
وقت العمل	2	الثالثة
انتاج المنتج الأول	3	الثانية
انتاج المنتج الثاني	3	الثانية

التمرين رقم 10: شركة صناعية تنتج ثلاث أنواع من الأكواب والمعلومات عن ذلك ملخصة في الجدول التالي:

المعلومات	المنتج A	المنتج B	المنتج C
ساعات الطبخ في الفرن	2 ساعة	3 ساعة	4 ساعة
ساعات اتمام انتاج المنتج نهائيا	3 ساعة	5 ساعة	10 ساعة
الربح الوحدي من كل منتج	1 ون	2 ون	3 ون

الشركة تخصص 3000 ساعة عمل للطبخ في الفرن و 3000 ساعة للإنجاز النهائي، كما لها أهداف استراتيجية تطمح الوصول إليها و هي:

- استراتيجية تكثيف الإنتاج على الأقل 600 كوب وهذا بسبب الطلب العالي على منتجاتها؛
- الوصول إلى ربح لا يقل عن 1000 ون؛
- التقليل من ساعات الطبخ وساعات الانجاز النهائي؛
- التأكيد من تصنيع 200 كوب على الأقل من كل نوع.

المطلوب:

بناء البرنامج الرياضي لهذه المسالة في شكله العادي وحله ؛

حلول التمارين

في بداية الأمر قبل الخوض في حل التمارين المقترحة في هذا الجزء نريد الاشـــارة الى بعض الأمور أولها هو تحديد الرموز المستعملة حيث بالنسبة للانحرافات المتحدث عنها في هذا النوع من النماذج قد نغيرها كما يلي:

- الانحراف الموجب نرمز له بـــ P بدلا من δ^+
- الانحراف السالب نرمز له بـــ N بدلا من δ^-

الأمر الثاني هو أن حل هذه التمارين لا يكون يدويا وإنما نستعين بالبرنامج الالكتروني LINDO وهو أحد أشهر البرامج في حل النماذج الرياضية الخطية.

حل التمرين رقم 01:

الانحرافات غير مرغوب فيها هي الانحرافات المراد التخلص منها أي تقليلها الى أدنى حد ممكن وهنا قد يحقق متخذ القرار إلى مستوى الهدف المراد الوصول إليه، وعليه الانحرافات غير مرغوب فيها المتعلقة بالمعلومات السابقة هي:

بالنسبة لتعظيم الربح فإن الانحراف غير مرغوب فيه هو السالب (δ_i^-) وهذا يعني أنه مادام الربح فمتخذ القرار لا يريد أن تكون القيمة المحققة أقل من القيمة المستهدفة فمن الأفضل أن تكون أكبر ما يمكن.

بالنسبة لتقليل التكاليف فإن الانحراف غير مرغوب فيه هو الموجب (δ_i^+) وهذا يعني أنه مادام التكلفة فمتخذ القرار لا يريد أن تكون القيمة المحققة أكبر من القيمة المستهدفة فمن الأفضل أن تكون أصغر ما يمكن.

بالنسبة للإنتاج فهنا متخذ القرار يريد أن يكون الإنتاج محدد بقيمة معينة يعني لا أقل ولا أكثر وعندئذ الانحرافات غير مرغوب فيها في هذه الحالية هي الموجبة والسالبة مع بعض (δ_i^-)، (δ_i^+).

حل التمرين رقم 02:

- بالنسبة للعلاقة الأولى رقم (01) فالانحراف غير المرغوب فيه هو السالب (δ_i^-) ؛
- بالنسبة للعلاقة الثانية رقم (02) فلانحراف غير المرغوب فيه هو الموجب (δ_i^+).

حل التمرين رقم 03:

1- تحديد متغيرات القرار:

متغيرات القرار هي المتغيرات التي تبنى عليها المشكلة المطروحة وعلى أساسها تتحقق خطة الإنتاج ومن ثم يتم تحديد قيمة الأهداف المراد بلوغها، وفي هذه المسالة نجد متغيرين هما:

- x_1 متغير القرار الأول والذي يعبر عن كمية الإنتاج من المنتج الأول؛

- x_2متغير القرار الثاني والذي يعبر عن كمية الإنتاج من المنتج الثاني؛

2- تحديد الأهداف المراد بلوغها:

نجد في هذه المسألة ثلاثة أهداف يطمح صاحب الشركة الوصول إليها وهي:

- g_1 (goal one) الهدف الأول والذي يعبر عن تحقيق اقصى ربح ويصاغ رياضيا بالعلاقة ($\text{Max}\, z_1 20x_1 + 15x_2 \geq 10000$)؛
- g_2 (goal two) الهدف الثاني والذي يعبر عن تحقيق كمية انتاج معينة ومضبوطة لتفادي مشكلة التخزين وتجاوبا للطلب السوقي ويصاغ رياضيا بالعلاقة ($z_2 = x_1 + x_2 = 700$)؛
- g_3 (goal three) الهدف الثالث والذي يعبر عن تحقيق أدنى حد ممكن من التكاليف الإجمالية ويصاغ رياضيا بالعلاقة($\text{Min}\, z_3 = 15x_1 + 10x_2 < 5000$)؛

3- تحديد القيم الحقيقة والقيم المستهدفة:

القيم الحقيقة هي القيم التي يبحث عليها مسيري المؤسسة من ربح أو تكلفة أو كمية إنتاج أو أي كان من الأهداف، وتكون معبر عنها بعلاقات رياضية نبحث عليها بناءا على قيم متغيرات القرار.

أما **القيم المستهدفة** فهي القيم التي يطمح أو يرغب مسيري المؤسسة الوصول إليها تكون قيمها محددة مسبقا متنبأ إليها ومخطط لها بناءا على الخبرة والتجربة والعمليات الحسابية للفترات السابقة، ويكون ذلك عموما في الأجل القصير والمتوسط.

وعلى أساس ذلك تكون القيم الحقيقة والقيم المستهدفة في هذه المسألة هي:

- القيمة الحقيقة للربح هي ممثلة بالمعادلة $20x_1 + 15x_2$ والقيمة المستهدفة هي 10000 ون فما فوق؛
- القيمة الحقيقة للإنتاج معبر عنها في المعادلة $x_1 + x_2$والقيمة المستهدفة هي في حدود 700 وحدة؛
- القيمة الحقيقة للتكلفة معبر عنها في المعادلة $15x_1 + 10x_2$والقيمة المستهدفة هي 5000ون كحد أقصى.

4- تحديد متغيرات الانحراف غير المرغوب فيها هي:

بالنسبة لتعظيم الربح فإن الانحراف غير مرغوب فيه هو السالب (δ_i^-) وهذا يعني أنه مادام الامر متعلق بالربح، فمتخذ القرار لا يريد أن تكون القيمة المحققة ($20x_1 + 15x_2$) أقل من القيمة المستهدفة (10000 ون) فمن الأفضل أن تكون أكبر ما يمكن.

بالنسبة للإنتاج فهنا متخذ القرار يريد أن يكون الإنتاج الكلي عند قيمة معينة ومضبوطة يعني لا أقل ولا أكثر، فمتخذ القرار يريد أن تكون القيمة المحققة ($x_1 + x_2$) مساوية للقيمة المستهدفة (700 ون)، وعندئذ الانحرافات غير مرغوب فيها في هذه الحالية هي الموجبة والسالبة مع بعض (δ_i^-)، (δ_i^+).

بالنسبة لتقليل التكاليف فإن الانحراف غير مرغوب فيه هو الموجب (δ_i^+)، وهذا يعني أنه مادام الامر متعلق بالتكلفة، فمتخذ القرار لا يريد أن تكون القيمة المحققة $(15x_1 + 10x_2)$ أكبر من القيمة المستهدفة (5000 وحدة) فمن الأفضل أن تكون أصغر ما يمكن.

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

الأهداف	الانحرافات غير المرغوب فيها
الهدف الأول : الربح	N1
الهدف الثاني : الإنتاج	N2, P2
الهدف الثالث: ا التكاليف	P3

5- صياغة البرنامج الرياضي:

$$MinZ = N1 + P2 + N2 + P3$$

Subject to: تحت شرط

$$20X_1 + 15X_2 + N1 - P1 = 10000$$

$$X_1 + X_2 + N2 - P2 = 700$$

$$15X_1 + 10X_2 + N3 - P3 = 5000$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 1000$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3) \geq 0$$

حل التمرين رقم 04:

1- تحديد متغيرات القرار ومتغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها ومتغيرات الأوزان من خلال الجدول الآتي:

متغيرات القرار	متغيرات الانحراف	متغيرات الأوزان
X_1 ، X_2	$N1, P2, N3, N4$ N1 يقابل هدف التعظيم (MAX) P2 يقابل هدف التدنية (MIN) N3 يقابل هدف التعظيم (MAX) N4 يقابل هدف التعظيم (MAX)	$W1 = 5$ $W2 = 1$ $W3 = 3$ $W4 = 3$

2- تحديد قيود الهدف وقيود الموارد من خلال الجدول الآتي:

قيود الموارد	قيود الهدف
	$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$
$2X_1 + 1X_2 \geq 50$	$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$
$X_1 + 1X_2 \leq 75$	$X_1 + N3 - P3 = 40$
	$X_2 + N4 - P4 = 40$

الفرق بين قيود الهدف وقيود الموارد هو أن الأولى تكون مرتبطة بالأهداف التي تسعى لها الشركة الوصول اليها كالربح والتكلفة والإنتاج وما شابه ذلك ويضاف إليها في البرنامج الرياضي متغيرات الانحراف حتى يتم التوزان بين القيمة الحقيقية والقيمة المستهدفة، أما الثانية فهي القيود المرتبطة بالإمكانيات والموارد المتاحة في العملية الإنتاجية من ساعات العمل والمواد الأولية .. الخ، وتكتب في البرنامج الرياضي بدون متغيرات انحراف.

3- نوع هذا النموذج:

من خلال مناقشتنا لمتغيرات وعناصر النموذج المعطى في التمرين أعلاه يتضح أنه نموذج البرمجة الخطية بالأهداف بالأوزان.

حل التمرين رقم 05:

تحليل نتائج الجدول:

- يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدفين الثاني والثالث كانا بنسبة كاملة أي انجاز تام ما يجعل متخذ القرار راضي عن ذلك، أما الهدف الأول الخاص بالربح فنسبة انجازه كانت ضعيفة في حدود 20% وهذا ما يجعل متخذ القرار غير راضي عن ذلك.
- يلاحظ أنه ينبغي إنتاج 300 وحدة من المنتج الأول (X1) وعدم انتاج المنتج الثاني (X2).

يلاحظ أن قيم متغيرات الانحراف كلها كانت تأخذ القية صفر (0) ما يعني أن الأهداف المتعلقة بها فيما يخص الهدف الثاني والثالث قد تحققت بالتمام ما جعل متخذ القرار راضي، أما متغير الانحراف (N1) هو الوحيد الذي أخد القيمة 2400 ما يدل على أن الهدف الأول لم يتحقق بالتمام ما جعل متخذ القرار غير راضي

حل التمرين رقم 06:

1- الأسلوب المناسب لحل المسألة تلك هو نموذج البرمجة الخطية بالأهداف نظرا لوجود أكثر من هدف.

2- الصياغة الرياضية هي:

لتحديد الصياغة الرياضية لهذا النموذج نتبع الخطوات التالية:

أولا: تحديد متغيرات القرار:

لدينا:

x1 يمثل كمية المتج الأول ؛

X2 يمثل كمية المنتج الثاني.

ثانيا: تحديد الأهداف وصياغتها الرياضية:

لدينا ثلاث أهداف وهي:

- الهدف الأول (Goal one) : تحقيق أقصى ربح لا يقل عن 3000 ون و دالته الرياضية هي:
  $$2X_1 + 3X_2 \geq 3000$$
- الهدف الثاني (Goal two) : تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن حيث لا تتجاوز 50% من القيمة المستهدفة من الربح، يعني 1500 ون والصياغة الرياضية لذلك هي:
  $$5X_1 + 10X_2 \leq 1500$$
- الهدف الثالث (Goal three) : استراتيجة الانتاج في حدود الطلب المتوقع والمقدر بـ 300 وحدة لكلا المنتجين وصياغته الرياضية هي:
  $$X_1 + X_2 = 300$$

ثالثا: تحديد الانحرافات غير المرغوب فيها : يمكن توضيحها في الجدول التالي:

الانحرافات غير المرغوب فيها	الأهداف
N1	الهدف الأول : الربح
P2	الهدف الثاني : التكاليف
N3, P3	الهدف الثالث :الإنتاج

رابعا: قيود النظام (الشروط): في هذه الحالة لدينا قيد واحد وهو خاص بساعات العمل صياغته الرياضية هي:

$$X_1 + X_2 \leq 800$$

خامسا: صياغة دالة الهدف :

$$MinZ = N1 + P2 + P3 + N3$$

سادسا: صياغة النموذج

$$MinZ = N1 + P2 + P3 + N3$$

Subject to: تحت شرط

$$2X_1 + 3X_2 + N1 - P1 = 3000$$

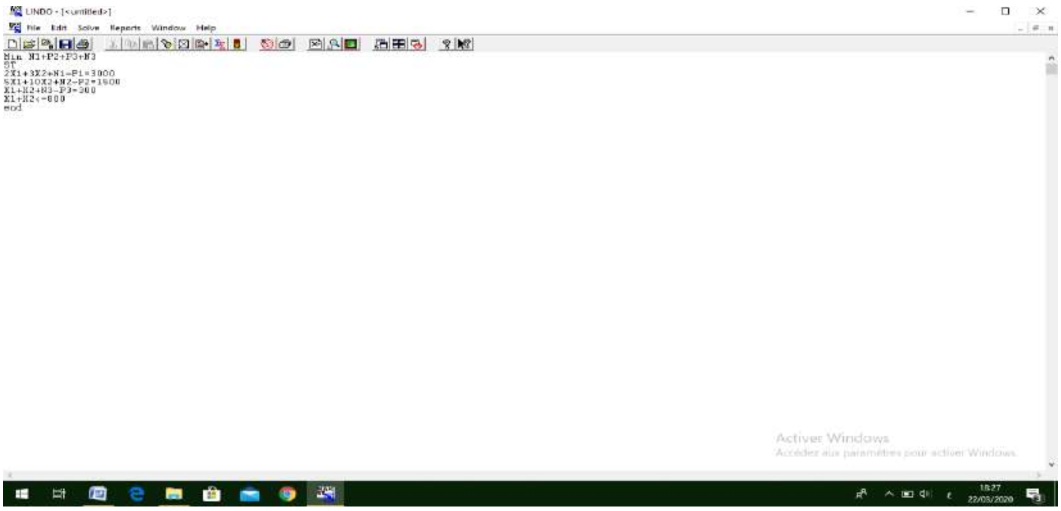
$$5X_1 + 10X_2 + N2 - P2 = 1500$$

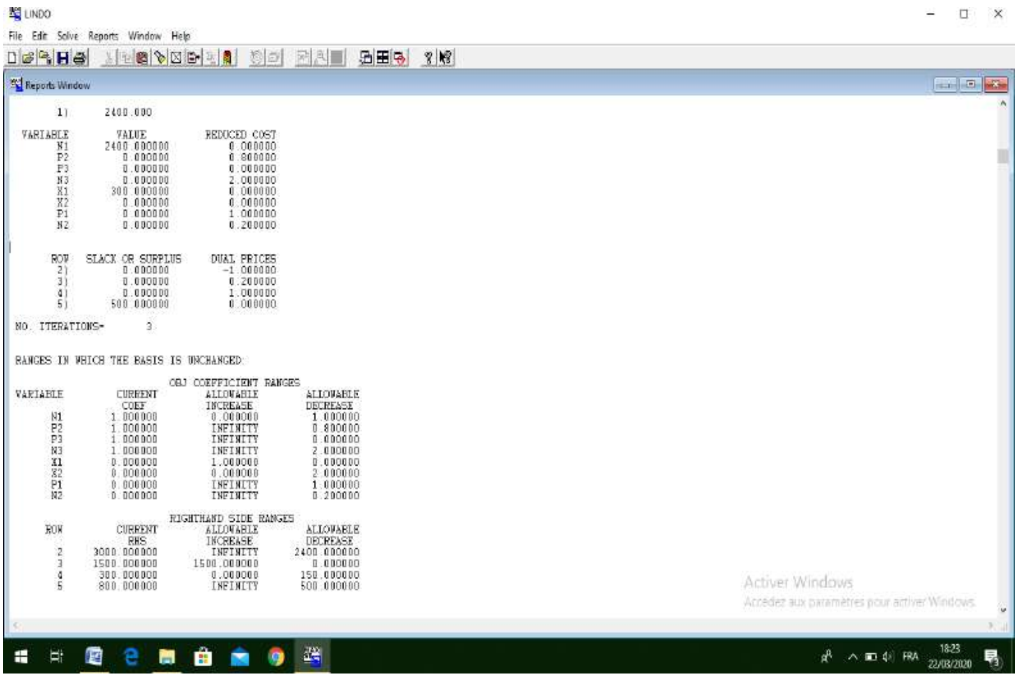
$$X_1 + X_2 + N3 - P3 = 300$$

$$X_1 + X_2 \leq 800$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3) \geq 0$$

حل النموذج أعلاه باستعمال برنامج LINDO هو كالتالي:





الصورة أعلاه هي مخرجات برنامج LINDO ويمكن استخلاصها في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	مستوى إنجازها	الرضا على الانجاز
X_1	300	الهدف الأول : الربح	%20	لا
X_2	0	الهدف الثاني : التكاليف	%100	نعم

P1	0	الهدف الثالث: الإنتاج	%100	نعم
N1	2400			
P2	0			
N2	0			
P3	0			
N3	0			

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدفين الثاني والثالث كانا بنسبة كاملة أي انجاز تام ما يجعل متخذ القرار راضي عن ذلك، أما الهدف الأول الخاص بالربح فنسبة انجازه كانت ضعيفة في حدود 20% وهذا ما يجعل متخذ القرار غير راضي عن ذلك.

3- مزايا وعيوب نموذج البرمجة بالأهداف:

من مزايا نموذج البرمجة بالأهداف نجد:

- أخد في الحسبان حزمة من الأهداف دفعة واحدة؛
- مشاركة صاحب القرار في بناء النموذج؛
- السماح بمعرفة مستوى انجاز الأهداف المراد الوصول إليها.

من عيوب نموذج البرمجة بالأهداف:

- اختلاف وحدات قياس الأهداف؛
- صعوبة التطلع على نية متخذ القرار ما يجعل الحصول على المعلومة صعب أحيانا؛
- صعوبة الحل يدويا؛
- الضبابية في معلمات ومعاملات النموذج؛

حل التمرين رقم 07:

يلاحظ على النموذج أعلاه أنه يتضمن هدفين ما يجعله ينتمي إلى عائلة نماذج البرمجة الخطية بالأهداف إلا أن في هذه الحالة لم تعطى القيم المستهدفة للأهداف، وعليه لحل هذا النموذج ينبغي البحث عن القيم المستهدفة من خلال تقسيم النموذج إلى نموذجين واحد خاص بالهدف الأول والآخر خاص بالهدف الثاني، مع العلم أن القيود تبقى نفسها، وفيما بعد تأتي الخطوة الثانية أين يصاغ النموذج العام للبرمجة بالأهداف، ويتم إجراء ذلك كما يلي:

أولا: تقسيم النموذج:

النموذج الثاني $minZ_2$	النموذج الاول $maxz_1$
$minz_2 = 2x_1 + x_2$ **Subject to :** $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \leq 1$ $x_{1,}x_2 \geq 0$	$maxz_1 = x_1 + 2x_2$ **Subject to :** $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 \leq 1$ $x_{1,}x_2 \geq 0$

يلاحظ أن النموذجين من نماذج البرمجة الخطية الأحادية الهدف وعليه يتم حلها ببساطة والقيم المحصل عليها لكل من Z_1وz_2هي بمثابة القيم المستهدفة، وباستعمال البرنامج الالكترونيLINDO كانت النتائج ملخصة في الجدول أدناه:

القيمة المستهدفة	الأهداف
2	z_1
0	z_2

ثانيا: بناء وصياغة نموذج البرمجة بالأهداف:

بعد تحديد القيم المستهدف والموضحة في الجدول أعلاه بإمكاننا صياغة نموذج البرمجة بالأهداف كما يلي:

أولا: تحديد الأهداف وصياغتها الرياضية:

لدينا هدفين وهي:

- الهدف الأول (Goal one) : التعظيم حيث ينبغي أن لا يقل عن 2 و دالته الرياضية هي:
$$X_1 + 2X_2 \geq 2$$
- الهدف الثاني (Goal two) : التخفيض إلى أدنى حد ممكن حيث لا يتجاوز 0 والصياغة الرياضية لذلك هي:
$$2X_1 + 1X_2 \leq 0$$

ثانيا: تحديد الانحرافات غير المرغوب فيها : يمكن توضيحها في الجدول التالي:

الانحرافات غير المرغوب فيها	الأهداف
N1	الهدف الأول :التعظيم MAX
P2	الهدف الثاني : التدنية MIN

ثالثا: قيود النظام (الشروط):

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

رابعا: صياغة دالة الهدف :

$$MinZ = N1 + P2$$

سادسا: صياغة النموذج

$$MinZ = N1 + P2$$

Subject to: تحت شرط

$$X_1 + 2X_2 + N1 - P1 = 2$$

$$2X_1 + X_2 + N2 - P2 = 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

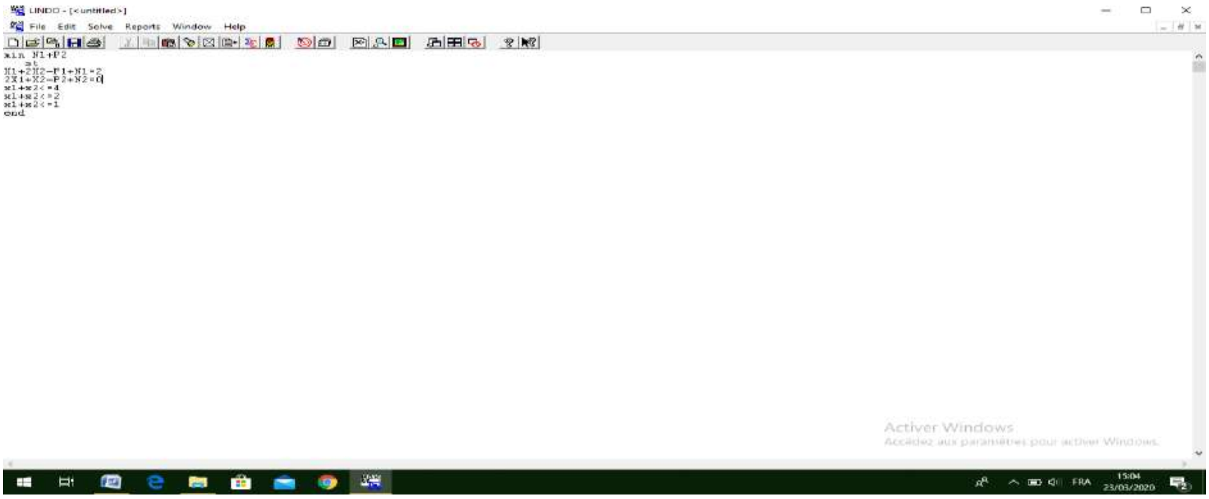
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_{1,}x_2 \geq 0$$

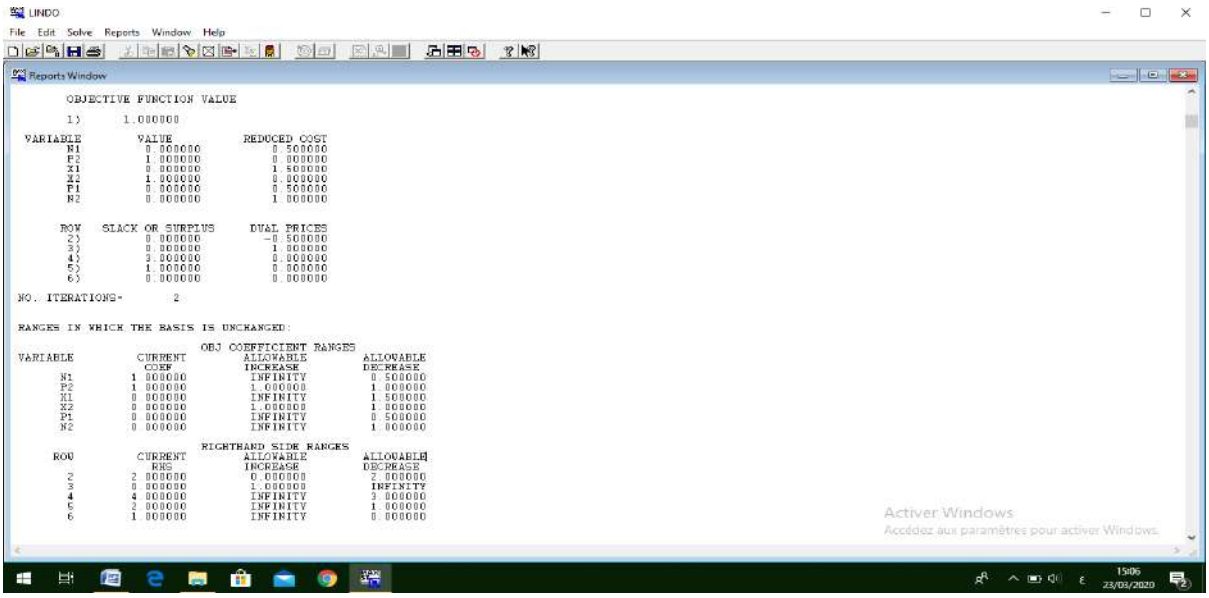
$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2) \geq 0$$

حل النموذج باستعمال برنامج LINDO كانت نتائجه ملخصة في الجدول التالي:

كتابة النموذج على البرنامج:



مخرجات النموذج على البرنامج:



ملخص النتائج في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	مستوى إنجازها	الرضا على الانجاز
X_1	0	الهدف الأول :التعظيم MAX	%100	نعم
X_2	1	الهدف الثاني : التدنية MIN	ما لا نهاية	لا
P1	0			
N1	0			
P2	1			
N2	0			

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الاول كان بنســـبة كاملة أي انجاز تام ما يجعل متخذ القرار راضي عن ذلك، أما الهدف الثاني الخاص بالتدنية فنســـبة انجازه غير محدودة وهذا ما يجعل متخذ القرار غير راضي عن ذلك تماما.

للإشارة النموذج المصاغ في هذه المسالة دو صياغة رياضية يعني ليس له تعبير اقتصادي مما جعل النتائج ليس لها أي مدلول فكيف ما كانت فهي مقبولة، أما عندما يكون النموذج مســتنبط من تعبير اقتصــادي فينبغي على الباحث إعطاء التفســـير للنتائج، وعليه الهدف الرئيسيـ من هذا التمرين هو تعلم الكيفية التي نتعامل بها مع هذا النوع من النماذج الرياضية.

حل التمرين رقم 08:

أولا: اسم هذا البرنامج:

يلاحظ على النموذج أنه يحتوي على هيكل الاولويات مما يدل على أنه نموذج البرمجة بالأهداف ذات الاولوية.

ثانيا: كيفية حل النموذج:

لحل هذا النموذج يجب تقسيمه إلى ثلاث مراحل وذلك حسب الاولوية المعطاة للأهداف وهنا يلاحظ أنه هناك ثلاثة خطوات وهي كما يلي:

خطوة 1 : الاولوية الأولى P1 تضم الهدف الأول والنموذج الموافق لذلك هو:

$$Min\ z1 = \ (P1)$$

Subject To

$$Goal\ 1: x_1 + x_2 + N1 - P1 = 10;$$

$$Goal\ 2: x_1 + x_2 + N2 - P2 = 50;$$

$$Goal\ 3: x_1 + x_2 + N3 - P3 = 25;$$

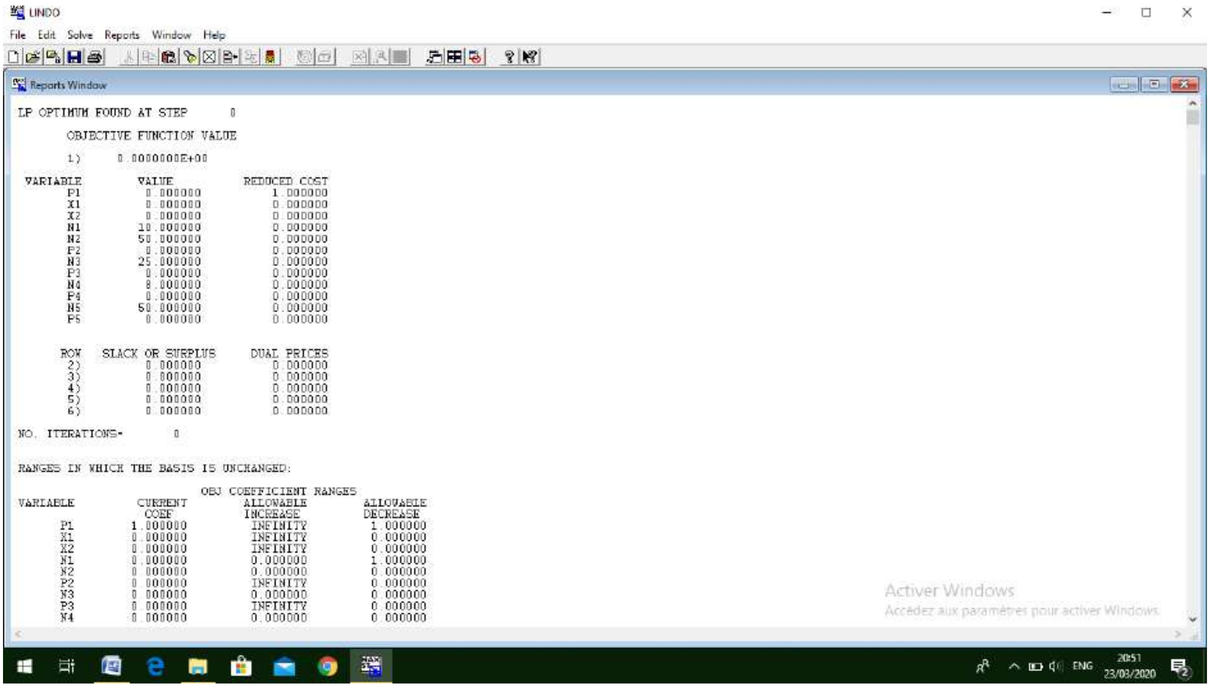
$$Goal\ 4: x_1 + x_2 + N4 - P4 = 8;$$

$$Goal\ 5: x_1 + x_2 + N5 - P5 = 50;$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$P1, N1, P2, N2, P3, N3, N4, P4, P5, N5 >= 0$$

الحل باستعمال برنامج LINDO هو:



ما نحتاجه من مخرجات نموذج الخطو الاولى هو قيمة Z1 والمساوية إلى 0 وهي قيمة P1 التي سوف نضيفها الى نموذج الخطوة الثانية كقيد إضافي الى القيود الالية للنموذج العام.

الخطوة الثانية : الأولوية الثانية P2 تضم الهدف الثاني والثالث والنموذج الموافق لذلك هو:

$$Min\ z1 = (P2 + N3)$$

Subject To

$$Goal\ 1: x_1 + x_2 + N1 - P1 = 10;$$

$$Goal\ 2: x_1 + x_2 + N2 - P2 = 50;$$

$$Goal\ 3: x_1 + x_2 + N3 - P3 = 25;$$

$$Goal\ 4: x_1 + x_2 + N4 - P4 = 8;$$

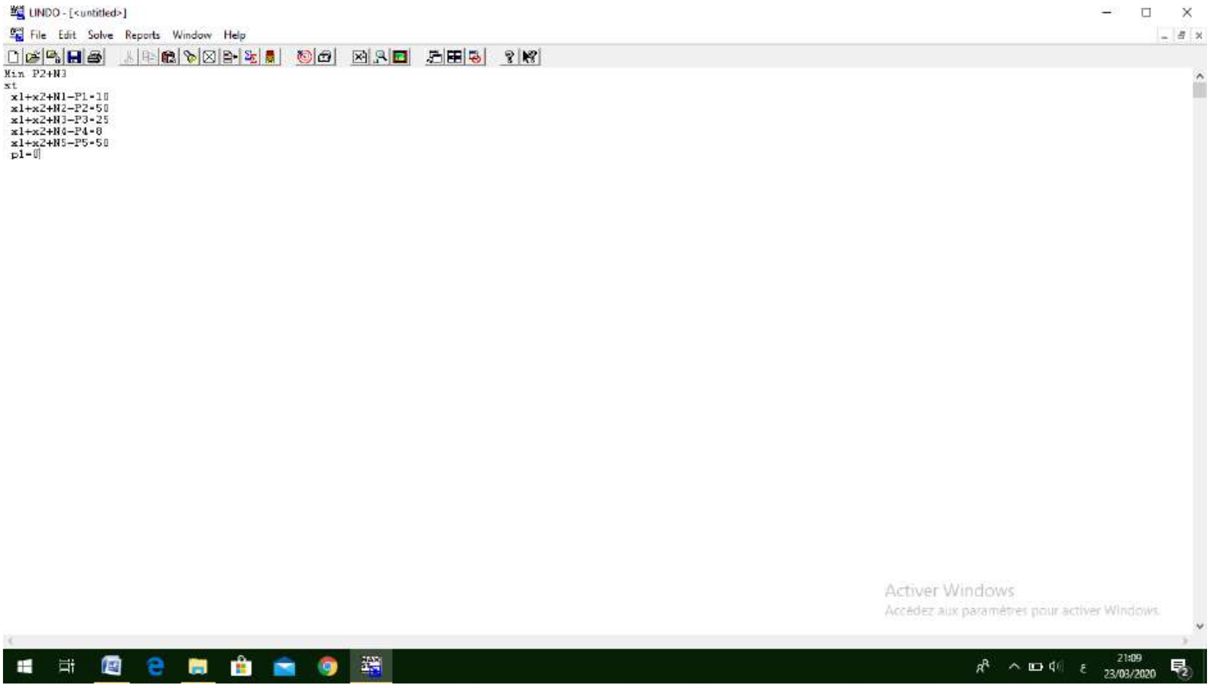
$$Goal\ 5: x_1 + x_2 + N5 - P5 = 50;$$

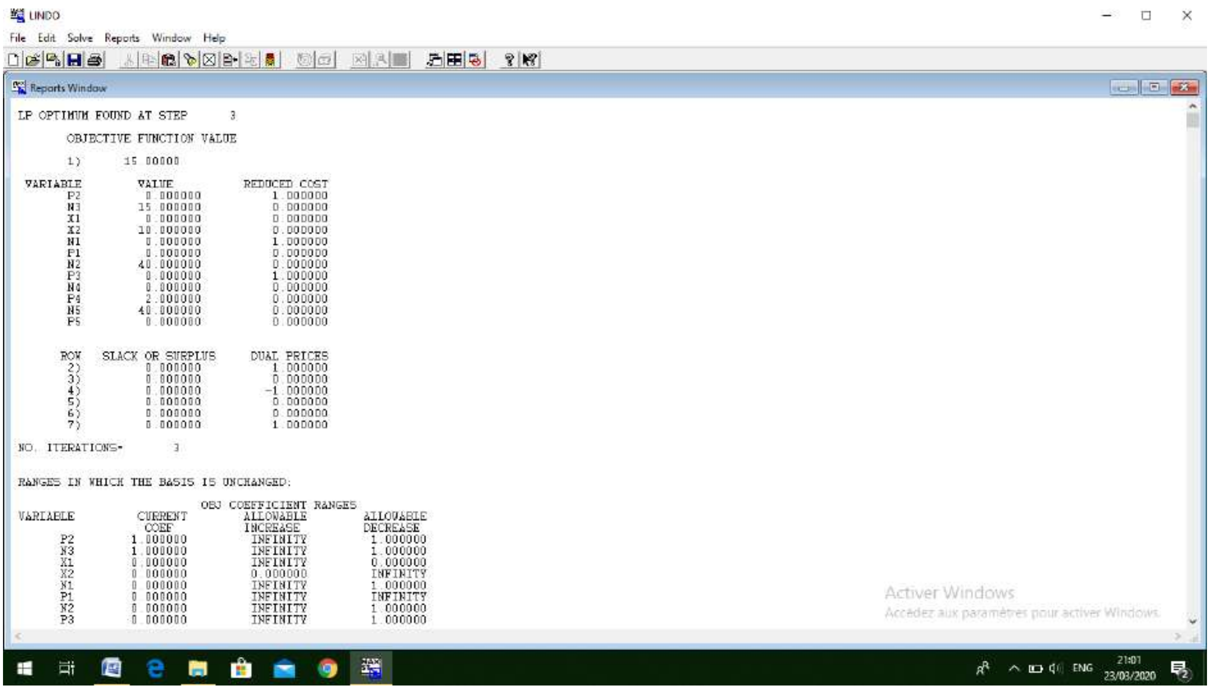
قيد إضافي (حل الخطوة الأولى) P1=0

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$P1, N1, P2, N2, P3, N3, N4, P4, P5, N5 >= 0$$

الحل باستعمال برنامج LINDO هو:





ما نحتاجه من مخرجات نموذج الخطو الثانية هو قيمة Z2 والمســـاوية إلى 15 وهي قيمة P2 المســـاوية إلى 0 مع N3 المساوية إلى 15 التي سوف نضيفها إلى نموذج الخطوة الثالثة كقيد إضافي الى القيود النموذج العام مع حلول الخطوة الأولى. وهي الخطوة الأخيرة والتي تعتبر الحل النهائي.

الخطوة الثالثة (الاخيرة) : الاولوية الثالثة P3 تضم الهدف الرابع والخامس والنموذج الموافق لذلك هو:

$$Min\ z1 = (P4 + P5)$$

Subject To

$$Goal\ 1: x_1 + x_2 + N1 - P1 = 10;$$

$$Goal\ 2: x_1 + x_2 + N2 - P2 = 50;$$

$$Goal\ 3: x_1 + x_2 + N3 - P3 = 25;$$

$$Goal\ 4: x_1 + x_2 + N4 - P4 = 8;$$

$$Goal\ 5: x_1 + x_2 + N5 - P5 = 50;$$

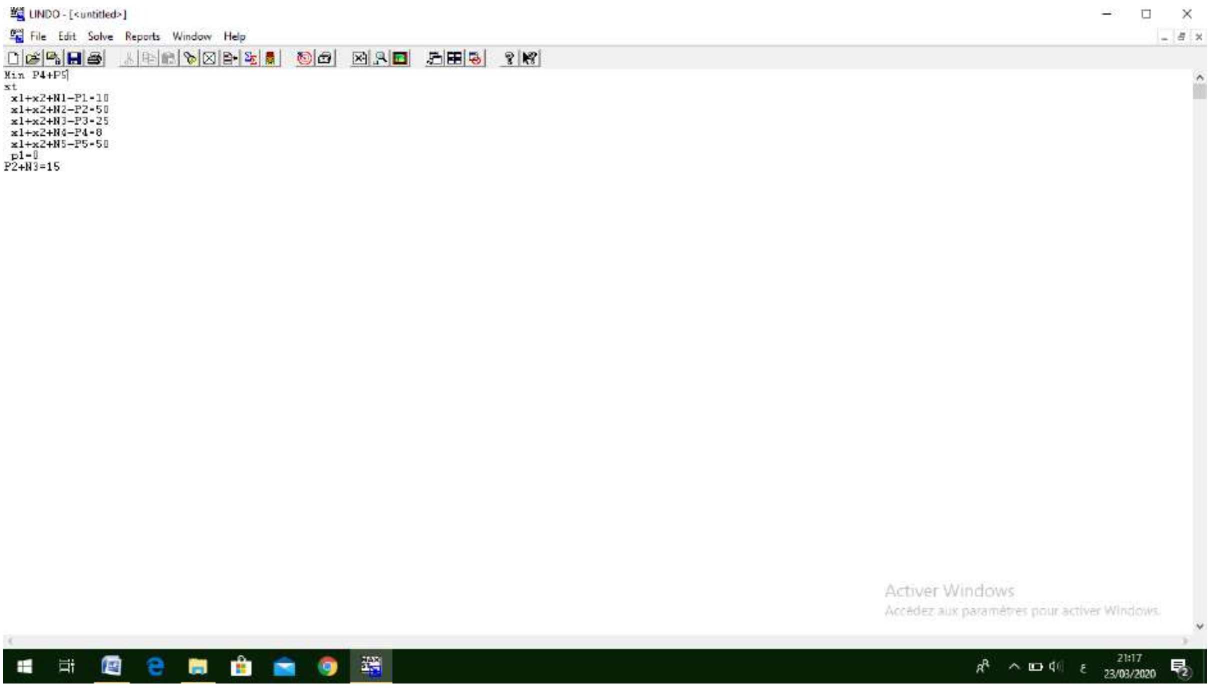
P1=0 **قيد إضافي (حل الخطوة الأولى)**

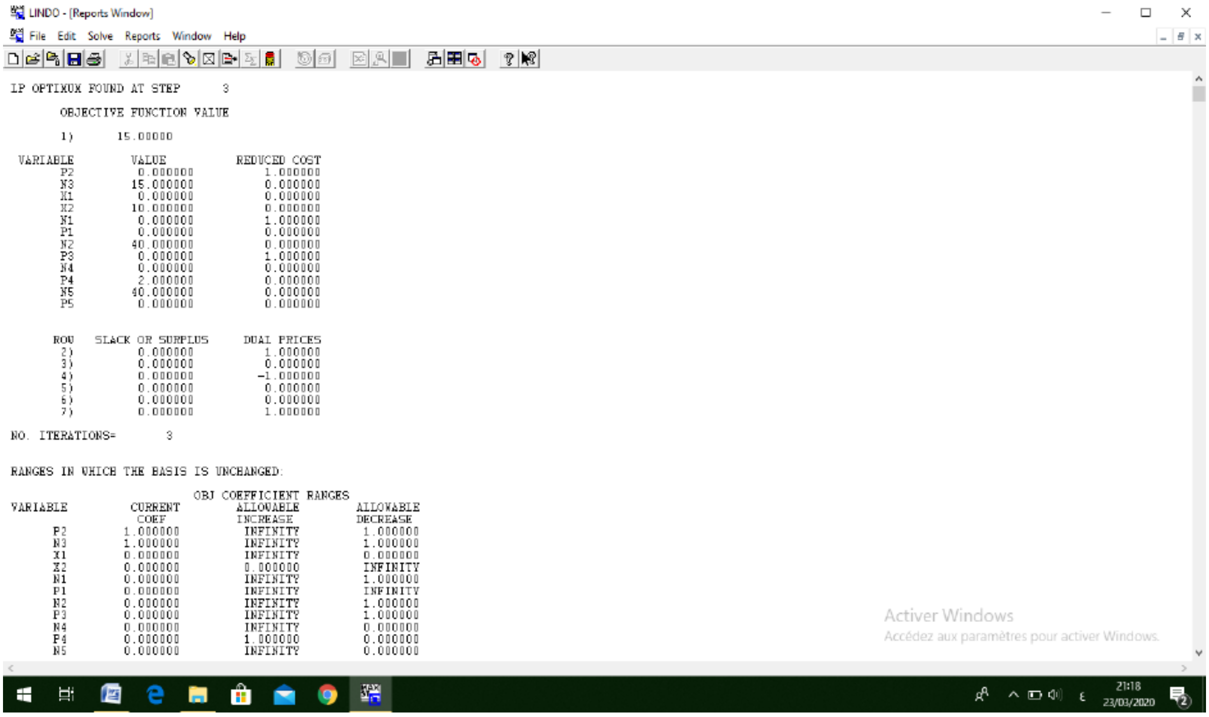
P2+N3=15 **قيد إضافي (حل الخطوة الثانية)**

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$P1, N1, P2, N2, P3, N3, N4, P4, P5, N5 >= 0$$

حل النموذج باستعمال برنامج LINDO هو:





```
LINDO - [Reports Window]
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      15.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       P2         0.000000          1.000000
       N3        15.000000          0.000000
       X1         0.000000          0.000000
       X2        10.000000          0.000000
       N1         0.000000          1.000000
       P1         0.000000          0.000000
       N2        40.000000          0.000000
       P3         0.000000          1.000000
       N4         0.000000          0.000000
       P4         2.000000          0.000000
       N5        40.000000          0.000000
       P5         0.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          1.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000         -1.000000
       5)         0.000000          0.000000
       6)         0.000000          0.000000
       7)         0.000000          1.000000

NO. ITERATIONS=       3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      P2        1.000000        INFINITY         1.000000
      N3        1.000000        INFINITY         1.000000
      X1        0.000000        INFINITY         0.000000
      X2        0.000000        0.000000         INFINITY
      N1        0.000000        INFINITY         1.000000
      P1        0.000000        INFINITY         INFINITY
      N2        0.000000        INFINITY         1.000000
      P3        0.000000        INFINITY         1.000000
      N4        0.000000        INFINITY         0.000000
      P4        0.000000        1.000000         0.000000
      N5        0.000000        INFINITY         0.000000
```

وهكذا نصل في الأخير إلى الحل النهائي للنموذج وهذا بتتبعنا إلى هيكل الاولوية المفترض والنتائج نستخلصها من مخرجات البرنامج الموضحة في الشكل أعلاه في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	مستوى إنجازها	الرضا على الانجاز
X_1	0	الهدف الأول : التدنية MIN	%100	نعم
X_2	10	الهدف الثاني : التدنية MIN	%180	نعم
P1	0	الهدف الثالث: التعظيم MAX	%40	لا
N1	0	الهدف الرابع : التدنية MIN	%75	لا
P2	0	الهدف الخامس : التدنية MIN	%180	نعم
N2	40			
P3	0			
N3	15			
P4	2			
N4	0			
P5	0			
N5	40			

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الأول كان بنسبة كاملة أي انجاز تام أما الهدفين الثاني والخامس فنسبة انجازهما تجاوزت الحد وهذا كله قد يجعل متخذ القرار راضي.

أما الهدفين الثالث والرابع فنسبة إنجازهما لم تكن في مستوى التمام ما جعل متخذ القرار غير راض عن ذلك.

للإشارة النموذج المصاغ في هذه المسالة ذو صياغة رياضية يعني ليس له تعبير اقتصادي مما جعل النتائج ليس لها أي مدلول فكيف ما كانت فهي مقبولة، أما عندما يكون النموذج مستنبط من تعبير اقتصادي فينبغي على الباحث إعطاء التفسير للنتائج، وعليه الهدف الرئيسي من هذا التمرين هو تعلم الكيفية التي نتعامل بها مع هذا النوع من النماذج الرياضية.

حل التمرين رقم 09:

1- الصياغة العامة لنموذج البرمجة بالأهداف:

لتحديد الصياغة الرياضية لهذا النموذج وفق معطيات التمرين نتبع الخطوات التالية:

أولا: تحديد متغيرات القرار:

لدينا:

x1 يمثل كمية المنتج الأول ؛

X2 يمثل كمية المنتج الثاني.

ثانيا: تحديد الأهداف وصياغتها الرياضية:

لدينا ثلاث أهداف وهي:

- الهدف الأول (Goal one) : تحقيق اقصى ربح لا يقل عن 7000 ون و دالته الرياضية هي:

$$100X_1 + 150X_2 \geq 7000$$

- الهدف الثاني (Goal two) : تخفيض وقت العمل إلى أدنى حد ممكن حيث لا يتجاوز 120 ساعة والصياغة الرياضية لذلك هي:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

- الهدف الثالث (Goal three) : السعي إلى تحقيق 40 وحدة فما فوق من المنتج الاول والمنتج الثاني (كل على حدى) وصياغته الرياضية هي:

$$X_1 \geq 40$$

$$X_2 \geq 40$$

ثالثا: تحديد الانحرافات غير المرغوب فيها : يمكن توضيحها في الجدول التالي:

الانحرافات غير المرغوب فيها	الأهداف
N1	الهدف الأول : الربح
P2	الهدف الثاني : وقت العمل
N3, N4	الهدف الثالث: استراتيجية الإنتاج

رابعا: قيود النظام (الشروط): في هذه الحالة لدينا قيدين واحد خاص باستغلال أقصى حد ممكن من المادة الأولية المتاحة والآخر خاص بفترة الانتاج على الالة وصياغتها الرياضية هي:

$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

خامسا: صياغة دالة الهدف :

$$MinZ = N1 + P2 + N3 + N4$$

سادسا: صياغة النموذج في الشكل العام:

$$MinZ = N1 + P2 + N3 + N4$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

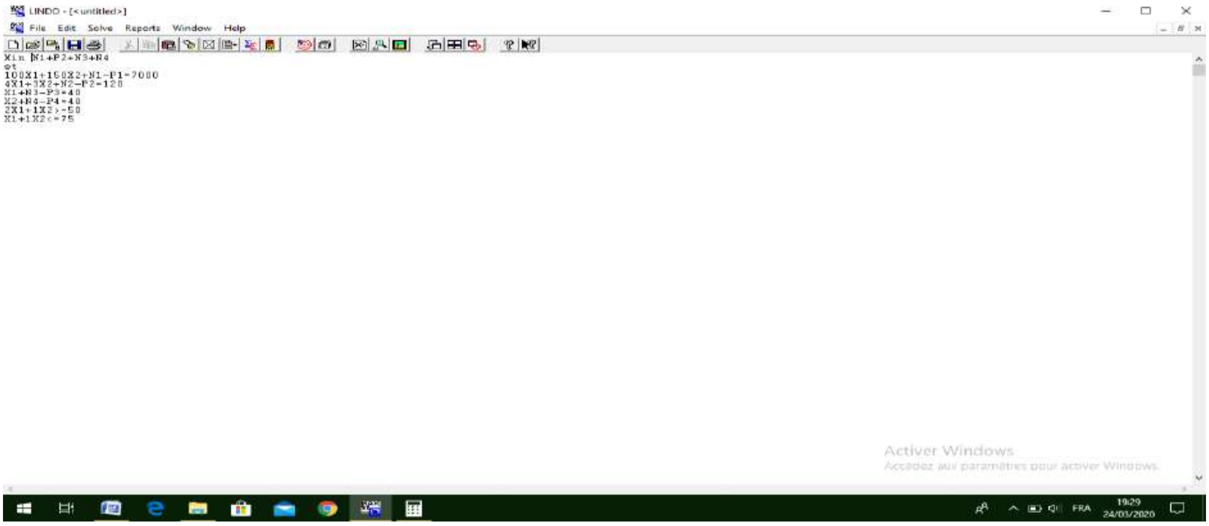
$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

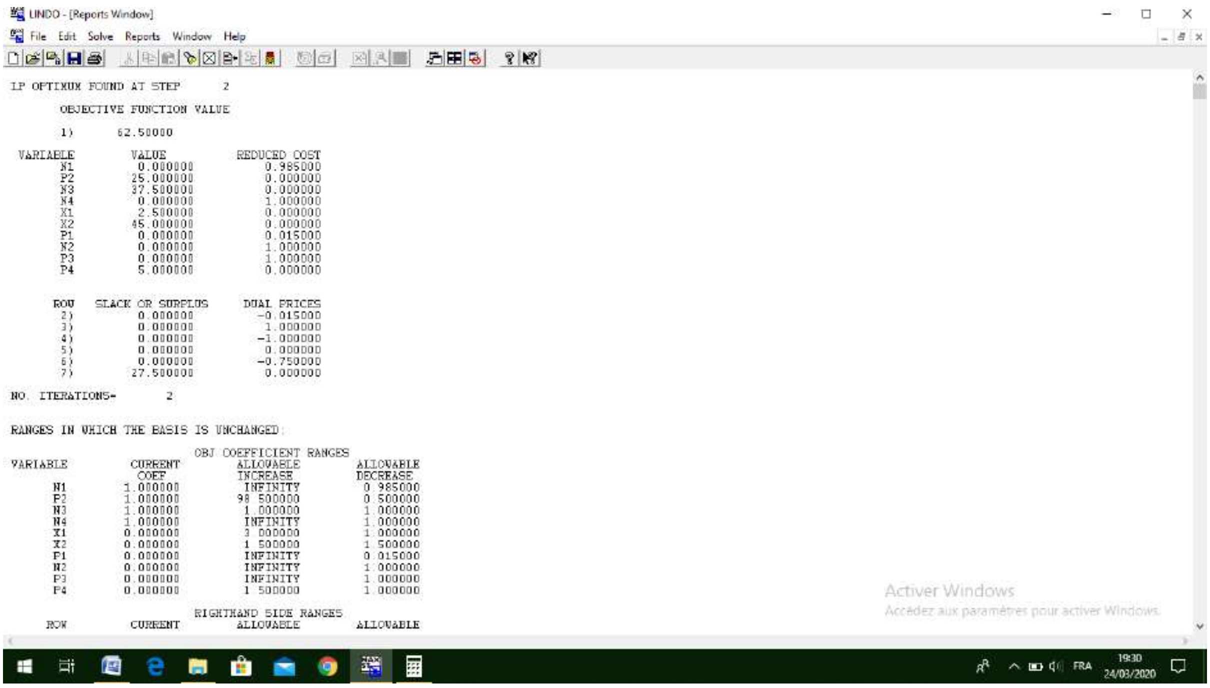
$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

حل النموذج أعلاه باستعمال برنامج LINDO هو كالتالي:





وهكذا نصل في الأخير إلى الحل النهائي للنموذج والنتائج نستخلصها من مخرجات البرنامج الموضحة في الشكل أعلاه في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	نسبة الانجاز	الرضا على الانجاز
X_1	2,5	الهدف الأول : الربح	%100	نعم
X_2	45	الهدف الثاني : العمل	%79.16	لا
P1	0	الهدف الثالث: استراتيجية الإنتاج		
		استراتيجية المنتج الاول	6,25%	لا
		استراتيجية المنتج الثاني	112 .5%	نعم

N1	0
P2	25
N2	0
P3	0
N3	37,5
P4	5
N4	0

ملاحظة: فيما يخص نسبة الانجاز لجميع التمارين تحسب بكل بساطة كما يلي:

بالنســـبة للهدف الاول: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســـاوي إلى 0 يعني ذلك أن الهدف المراد الوصول إليه قد انجز بالتمام 100% معناه لا يوجد مسافة أو فجوة ما بين الهدف المحقق والقيمة المستهدفة وعند ذلك نقول أن قيمة الفعلية للربح هي : 7000 ون؛

بالنسـبة للهدف الثاني: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 25 ساعة بنسـبة قدرها 20,83 % الحاصلة من قسمة قيمة الانحراف 25 على القيمة المستهدفة (25/120=0,2083) ومن تم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسـبة قدرها (79.16%= 20,83 % -100 %) أما قيمته الفعلية فهي مسـاوية إلى 145 سـاعة أي القيمة المستهدفة 120 ساعة مضاف إليها قيمة الانحراف غير المرغوب فيه والمقدرة بـــــ 25 ساعة، يعني أن ساعات العمل كان يطمح متخذ القرار أن لا تتجاوز الحد 120 ولكن وجدنا من خلال تطبيق هذا النموذج والنتائج المحصل عليها أنها تجاوزت ذلك الحد.

ملاحظة: إذا كُنا أمام هدف التعظيم فإن الانحراف غير المرغوب فيه يُطرح من القيمة المُســـتهدفة وإذا كُنا أمام هدف التقليل فيكون العكس أي الانحراف غير مرغوب فيه يُضــاف إلى القيمة المُســـتهدفة، وقد نوضح ذلك في الجدول التالي:

طبيعة الهدف	القيمة المستهدفة (g*)	الانحراف غير مرغوب فيه	القيمة الفعلية للهدف
التعظيم MAX	G(x)>=g*max (دالة الهدف)	N	G=g*-N
التدنية MIN	G(x)<=g*min (دالة الهدف)	P	G=g*+p

بالنسبة للهدف الثالث: هنا بالنسبة للمنتج الأول فيلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 37,5 وحدة بنســـبة قدرها 93,75 % الحاصـــلة من قســـمة قيمة الانحراف 37,5 وحدة على القيمة المســـتهدفة (37,5/40=0,9375) ومن تم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسبة قدرها (6,25= %93,75 % -100%) أما قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 2,5 ون تحسب هكذا (2,5=40*25, 6%)؛

أما بالنســـبة للمنتج الثاني فيلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســـاوي إلى 0 ولكن الانحراف المعاكس المرغوب فيه مساوي إلى 5 وحدة هذا ما يعني أن الهدف المتعلق بالمنتج الاول قد تحقق بدرجة تجاوزت التمام (100%) أي بنسـبة قدرها 12.5% (0,125 =5/40) والتي تضـاف إلى النسـبة الكاملة (100%) حيث تصـبح نسـبة إنجاز الهدف 112.5% يعني بقيمة فعلية قدرها 45 وحدة (45=40*112,5%).

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الاول كان بنســـبة كاملة أي انجاز تام أما الهدف الثاني فكان إنجازه دون التمام (100%) أي بنسبة قدرها 76,16% والهدف الثالث من ناحية المنتج الاول فانجازه كان ضعيف جدا حيث نسبته لم تتعدى 6,25% أما من ناحية المنتج الثاني فقد تحقق الانجاز بنسبة كبيرة جدا إذ وصلت إلى حدود 112.5%.

2- بناء نموذج جديد يأخذ في الحسبان الأوزان والأولوية:

2-1: بناء نموذج البرمجة بالأهداف مع الأوزان:

نفس الخطوات السابقة التي تم اتباعها في المطلب الاول فقط يتم التغيير على مستوى الخطوة السادسة المتعلقة بصياغة النموذج والتي سنضيف لها الاوزان فقط وعند ذلك يصبح النموذج كما يلي:

$$MinZ = 5N1 + 1P2 + 3N3 + 3N4$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

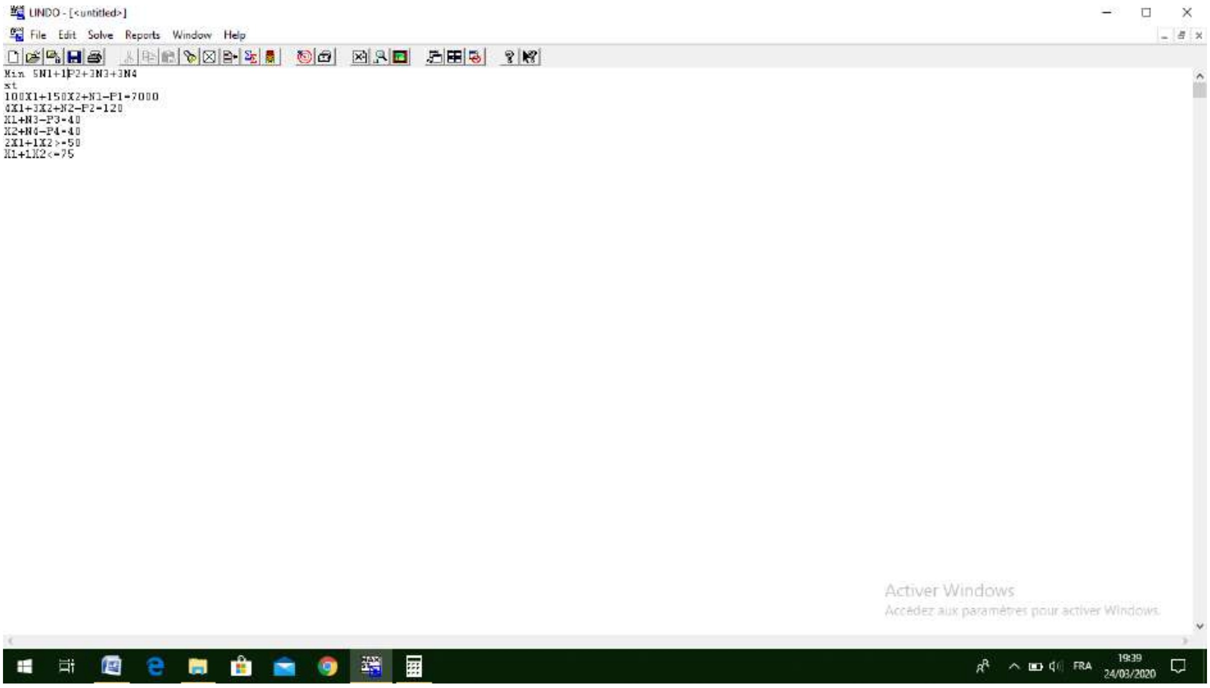
$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

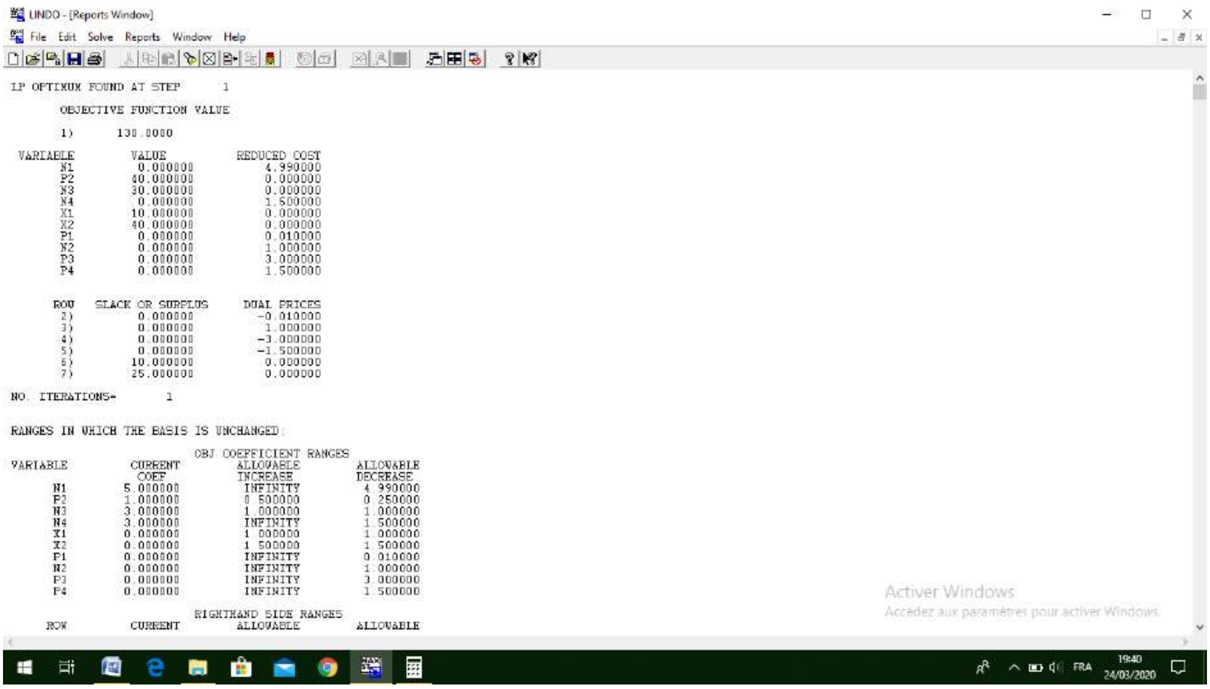
$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

حل النموذج أعلاه باستعمال برنامج LINDO هو كالتالي:





وهكذا نصل في الأخير إلى الحل النهائي للنموذج و النتائج نستخلصها من مخرجات البرنامج الموضحة في الشكل أعلاه في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	نسبة الانجاز	الرضا على الانجاز
X_1	10	الهدف الأول : الربح	%100	نعم
X_2	40	الهدف الثاني : العمل	%66,67	لا

P1	0	الهدف الثالث: استراتيجية الإنتاج		
		استراتيجية المنتج الاول	25%	لا
		استراتيجية المنتج الثاني	100%	نعم
N1	0			
P2	40			
N2	0			
P3	0			
N3	30			
P4	0			
N4	0			

ملاحظة: فيما يخص نسبة الانجاز لجميع التمارين تحسب بكل بساطة كما يلي:

بالنســـبة للهدف الاول: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســـاوي إلى 0 يعني ذلك أن الهدف المراد الوصول إليه قد انجز بالتمام 100% معناه لا يوجد مسافة أو فجوة ما بين الهدف المحقق والقيمة المستهدفة وعند ذلك نقول أن قيمة الربح هي : 7000 ون؛

بالنسبة للهدف الثاني: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 40 ساعة بنسبة قدرها 33,33% الحاصلة من قسمة قيمة الانحراف 40 على القيمة المستهدفة (40/120=0,3333) ومن ثم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسبة قدرها (100% -33,33% = 66,67%) أما قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 160 ساعة يعني 40 ساعة مضاف إليها القيمة المستهدفة 120 ساعة.

بالنســـبة للهدف الثالث: هنا بالنســـبة للمنتج الأول فيلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســـاوي إلى 30 وحدة بنسبة قدرها 75% الحاصلة من قسمة قيمة الانحراف 30 وحدة على القيمة المستهدفة (30/40=0,75) ومن تم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسبة قدرها (25%= 75% -% 100%) أما قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 10 ون تحسب هكذا (25%*40=10)؛

أما يلاحظ بالنسبة للمنتج الثاني أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 يعني الهدف قد تحقق بنسبة كاملة (100%).

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الاول كان بنســـبة كاملة أي انجاز تام أما الهدف الثاني فكان إنجازه دون التمام (100%) أي بنســـبة قدرها 66,67% والهدف الثالث من ناحية المنتج الاول فإنجازه كان دون المتوسط حيث نسبته لم تتعدى 25 % أما من ناحية المنتج الثاني فقد تحقق بنسبة كاملة (100%).

2-2: بناء نموذج البرمجة بالأهداف مع الأولوية:

نفس الخطوات السابقة التي تم اتباعها في المطلب الأول فقط يتم التغيير على مستوى الخطوة السادسة المتعلقة بصياغة النموذج والتي سنضيف لها الأولوية وعند ذلك يصبح النموذج كما يلي:

$$MinZ = P1(N1), P2(N3 + N4), P3(P2)$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

لحل هذا النموذج يجب تقسيمه إلى ثلاث مراحل وذلك حسب الاولوية المعطاة للأهداف وهنا يلاحظ أنه هناك ثلاثة نماذج وهي كمايلي:

خطوة 1 : الاولوية الاولى P1 تضم الهدف الأول والنموذج الموافق لذلك هو:

$$MinZ = P1(N1)$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

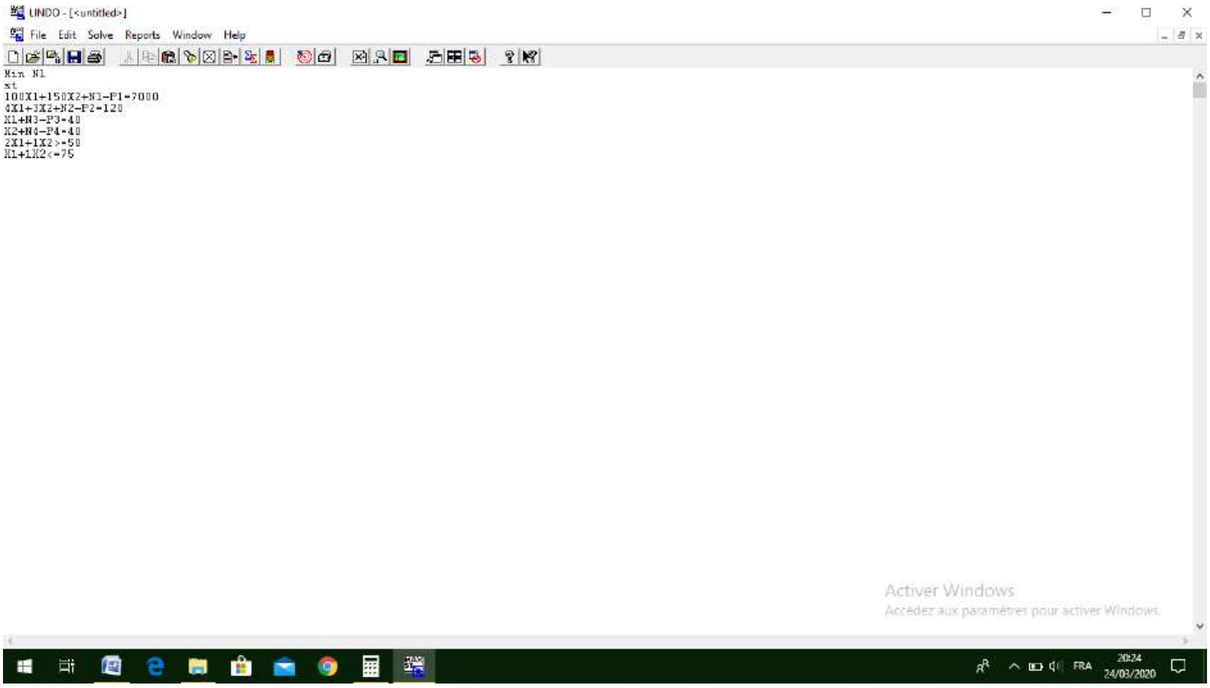
$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

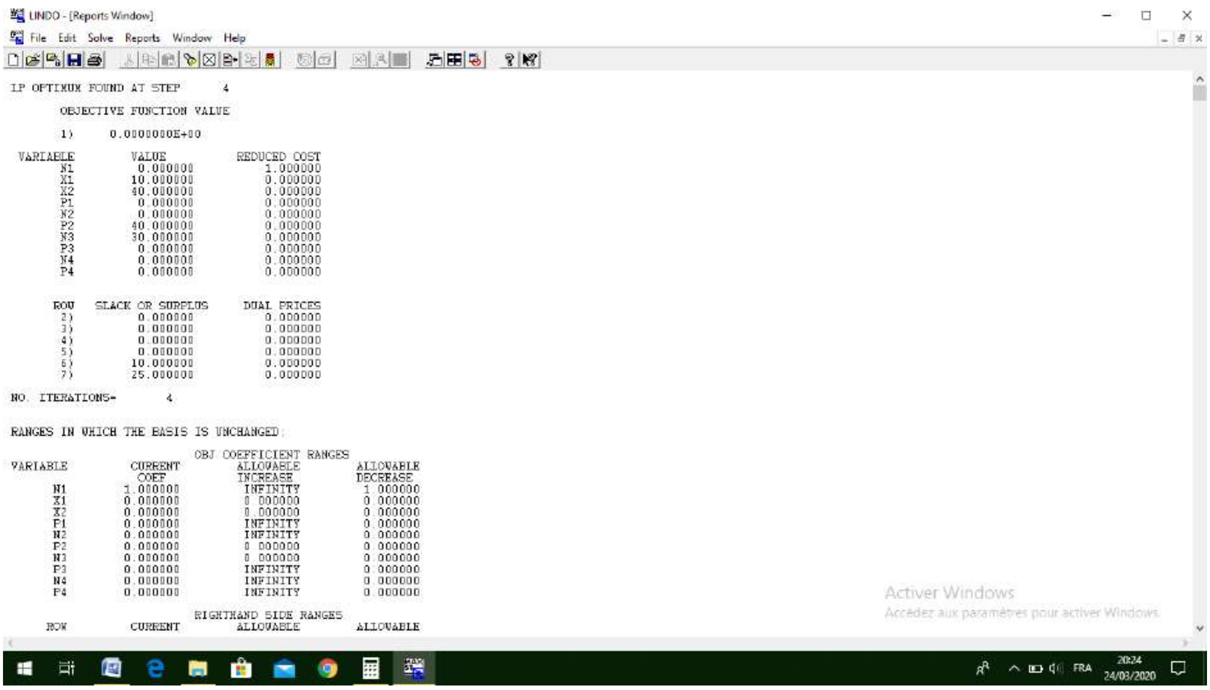
$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

حل النموذج أعلاه باستعمال برنامج LINDO هو كالتالي:



```
LINDO - [<untitled>]
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help
Min N1
st
100X1+150X2+N1-P1=7000
4X1+3X2+N2-P2=120
X1+N3-P3=40
X2+N4-P4=40
2X1+1X2>=50
X1+1X2<=75
```

```
LINDO - [Reports Window]
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)     0.0000000E+00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       N1         0.000000          1.000000
       X1        10.000000          0.000000
       X2        40.000000          0.000000
       P1         0.000000          0.000000
       N2         0.000000          0.000000
       P2        40.000000          0.000000
       N3        30.000000          0.000000
       P3         0.000000          0.000000
       N4         0.000000          0.000000
       P4         0.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000          0.000000
       5)         0.000000          0.000000
       6)        10.000000          0.000000
       7)        25.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      N1        1.000000        INFINITY         1.000000
      X1        0.000000        0.000000         0.000000
      X2        0.000000        0.000000         0.000000
      P1        0.000000        INFINITY         0.000000
      N2        0.000000        INFINITY         0.000000
      P2        0.000000        0.000000         0.000000
      N3        0.000000        0.000000         0.000000
      P3        0.000000        INFINITY         0.000000
      N4        0.000000        INFINITY         0.000000
      P4        0.000000        INFINITY         0.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
```


ما نحتاجه من مخرجات نموذج الخطو الاولى هو قيمة Z1 والمساوية إلى 0 وهي قيمة N1 التي سوف نضيفها الى نموذج الخطوة الثانية كقيد إضافي إلى القيود الأولوية للنموذج العام.

الخطوة الثانية : الأولوية الثانية P2 تضم الهدف الثالث والرابع والنموذج الموافق لذلك هو:

$$MinZ2 = P2(N3 + N4)$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

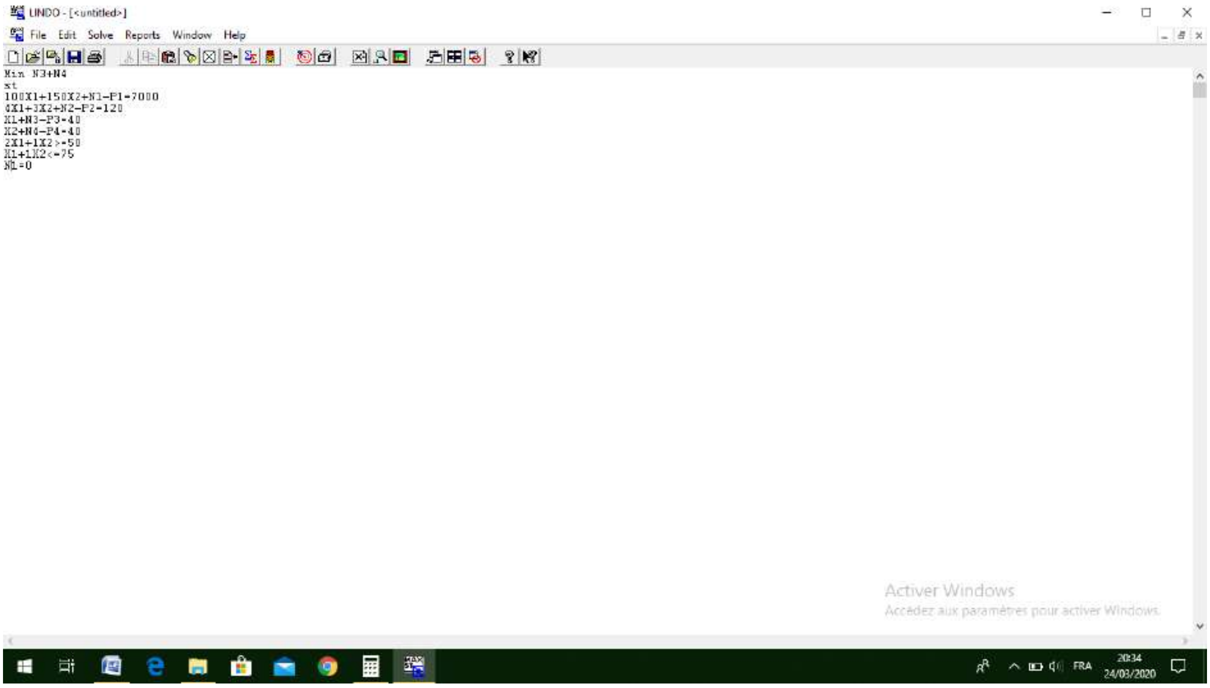
$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

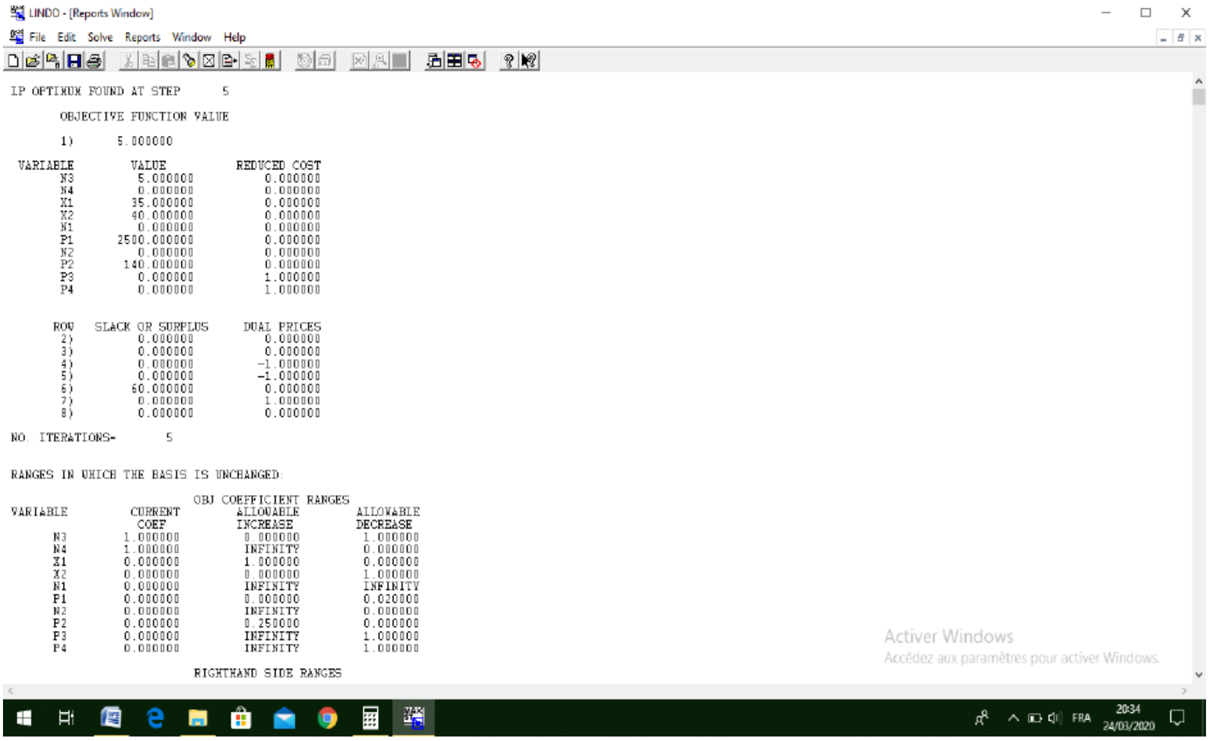
$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

حل الخطوة الأولى (قيد إضافي) $N1 = 0$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

الحل باستعمال برنامج LINDO هو :





```
IP OPTIMUM FOUND AT STEP      5

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      5.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       N3         5.000000          0.000000
       N4         0.000000          0.000000
       X1        35.000000          0.000000
       X2        40.000000          0.000000
       N1         0.000000          0.000000
       P1      2500.000000          0.000000
       N2         0.000000          0.000000
       P2       140.000000          0.000000
       P3         0.000000          1.000000
       P4         0.000000          1.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000          0.000000
       4)         0.000000         -1.000000
       5)         0.000000         -1.000000
       6)        60.000000          0.000000
       7)         0.000000          1.000000
       8)         0.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       5

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      N3        1.000000         0.000000         1.000000
      N4        1.000000         INFINITY         0.000000
      X1        0.000000         1.000000         0.000000
      X2        0.000000         0.000000         1.000000
      N1        0.000000         INFINITY         INFINITY
      P1        0.000000         0.000000         0.020000
      N2        0.000000         INFINITY         0.000000
      P2        0.000000         0.250000         0.000000
      P3        0.000000         INFINITY         1.000000
      P4        0.000000         INFINITY         1.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
```

ما نحتاجه من مخرجات نموذج الخطوة الثانية هو قيمة Z2 والمساوية إلى 5 وهي قيمة N3 مع N4 التي سوف نضيفها إلى نموذج الخطوة الثالثة كقيد إضافي إلى القيود الأولوية مع إضافة حلول الخطوة الأولى .

خطوة 1 : الاولوية الثالثة P3 تضم الهدف الثاني والنموذج الموافق لذلك هو:

$$MinZ = P3(P2)$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

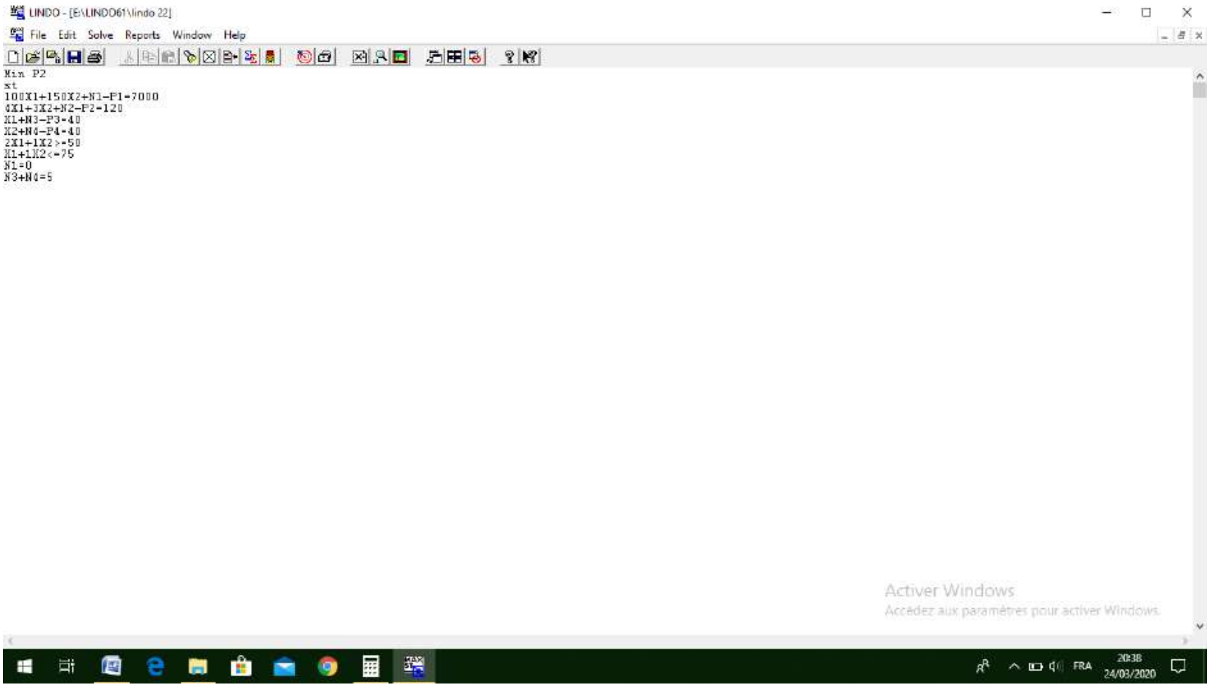
$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

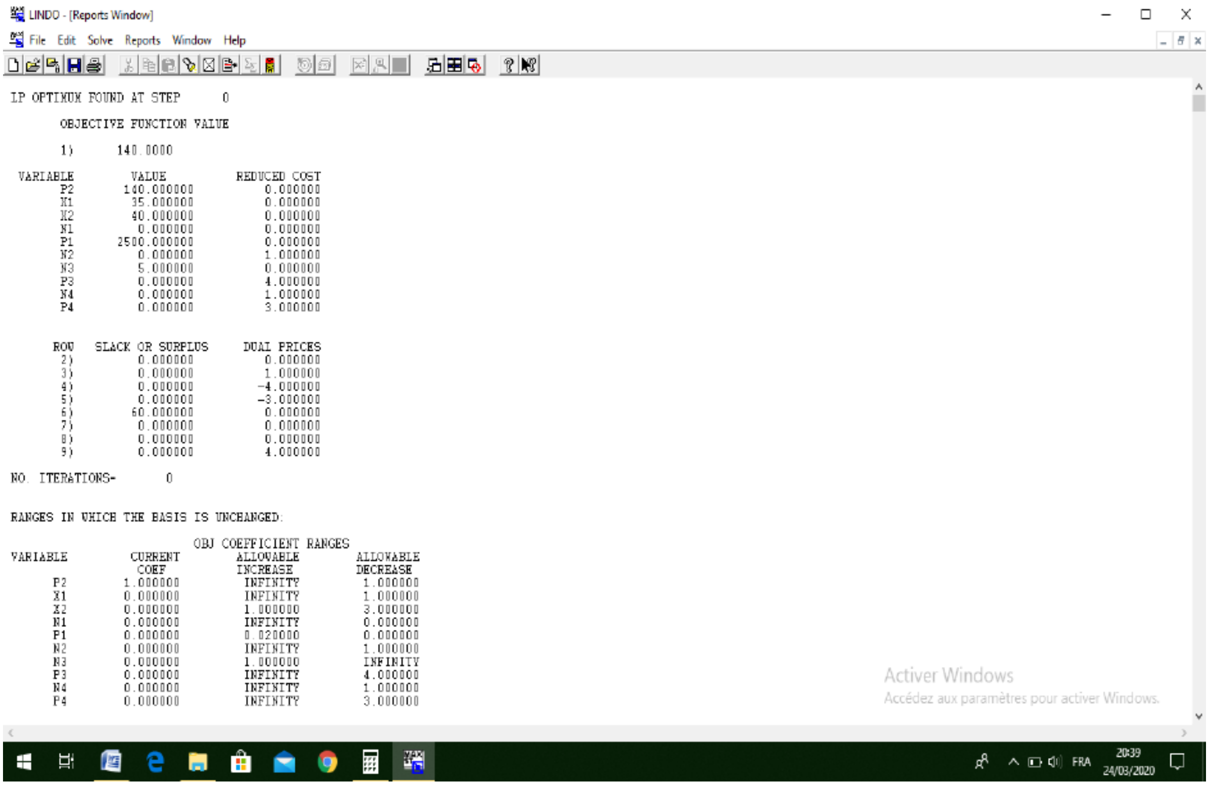
$N1 = 0$(**حل الخطوة الأولى (قيد إضافي**)

$N3 + N4 = 0$ (**حل الخطوة الثانية (قيد إضافي**)

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

حل النموذج أعلاه باستعمال برنامج LINDO هو كالتالي:





وهكذا نصل في الأخير إلى الحل النهائي للنموذج وهذا تتبعا إلى هيكل الاولوية المفترض و النتائج نستخلصها من مخرجات البرنامج الموضحة في الشكل أعلاه في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	نسبة الانجاز	الرضا على الانجاز
X_1	35	الهدف الأول : الربح	**135,71%**	نعم
X_2	40	الهدف الثاني : العمل	116,66%بالانخفاض	لا
P1	2500	الهدف الثالث: استراتيجية الإنتاج		
		استراتيجية المنتج الاول	87,5%	لا
		استراتيجية المنتج الثاني	100%	نعم
N1	0			
P2	140			
N2	0			
P3	0			
N3	5			
P4	0			
N4	0			

ملاحظة: فيما يخص نسبة الانجاز لجميع التمارين تحسب بكل بساطة كما يلي:

بالنســبة للهدف الأول: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســاوي إلى 0 ولكن الانحراف المرغوب فيه أي الايجابي قد كان يســـــاوي إلى 2500 هذا ما يوضح أن هذا الهدف قد تحقق بنســـــبة تجاوزت التمام قدرها %135,71 (%135,71 =%100+%35,71=2500/7000=0,3571) يعني قيمته الفعلية فهي مســـاوية إلى 9500 ون تحسب هكذا (%135,71*7000=9499,72=9500)؛

بالنسبة للهدف الثاني: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 140 ون بنسبة قدرها 116,66% الحاصلة من قسـمة قيمة الانحراف 140 على القيمة المســتهدفة (140/120=1,1666) ونقول في هذه الحالة أن الهدف المراد الوصـول اليه من المفروض حسـب رغبة متخذ القرار لا يتجاوز 120 سـاعة ولكن ما تبينه النتائج هو الابتعاد عن القيمة المستهدفة كان بمقدار 140 ساعة أي اصبحت القيمة الفعلية للهدف الثاني مساوية إلى 260 ساعة بالتقريب.

وللتوضيح بالنسبة للهدف الثاني هو أن الانحراف غير مرغوب فيه المعبر عنه بـ P2 بدل ما يقلل إلى أدنى حد ممكن فقد كان العكس أي زاد في حجم أي المسـافة زادت من 0 الى أن وصـلت إلى 140 يعني العملية عكسـية الشـيئ الذي جعلنا نضـيف 140 سـاعة إلى 120 سـاعة القيمة المسـتهدفة ما جعل قيمة الهدف الحقيقة والفعلية تأخذ القيمة 260 ساعة.

بالنسبة للهدف الثالث: هنا بالنسبة للمنتج الأول فيلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 5 وحدة بنسبة قدرها 12,5% الحاصلة من قسمة قيمة الانحراف 5 وحدة على القيمة المستهدفة (5/40=0,125) ومن تم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسبة قدرها (87,5%= 12,5%- 100%) أما قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 35 ساعة تحسب هكذا (35=40*87,5%)؛

أما بالنسبة للمنتج الثاني فأن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 يعني أن الهدف قد تحقق بنسبة كاملة (100%).

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الاول كان بنسبة كاملة أي انجاز تام أما الهدف الثاني فكان إنجازه دون التمام (100%) أي بنسبة قدرها 116,66% (-) بالانخفاض والهدف الثالث من ناحية المنتج الأول فانجازه كانت نسبته في حدود 87,5 % أما من ناحية المنتج الثاني فقد تحقق بنسبة كاملة (100%).

3- حل نموذج البرمجة بالأهداف باستعمال النسب:

في هذه الحالة نقوم بحل النموذج المصاغ في المطلب الأول مع إدخال النسب بدل الأوزان وهيكل الأولوية والنسب هي حاصل قسمة الانحراف غير المرغوب فيه بالنسبة للقيمة المستهدفة، والصياغة الرياضية الموافقة لذلك هي على النحو التالي:

$$MinZ = \frac{N1}{7000} + \frac{P2}{120} + \frac{N3}{40} + \frac{N4}{40}$$

Subject to: تحت شرط

$$100X_1 + 150X_2 + N1 - P1 = 7000$$

$$4X_1 + 3X_2 + N2 - P2 = 120$$

$$X_1 + N3 - P3 = 40$$

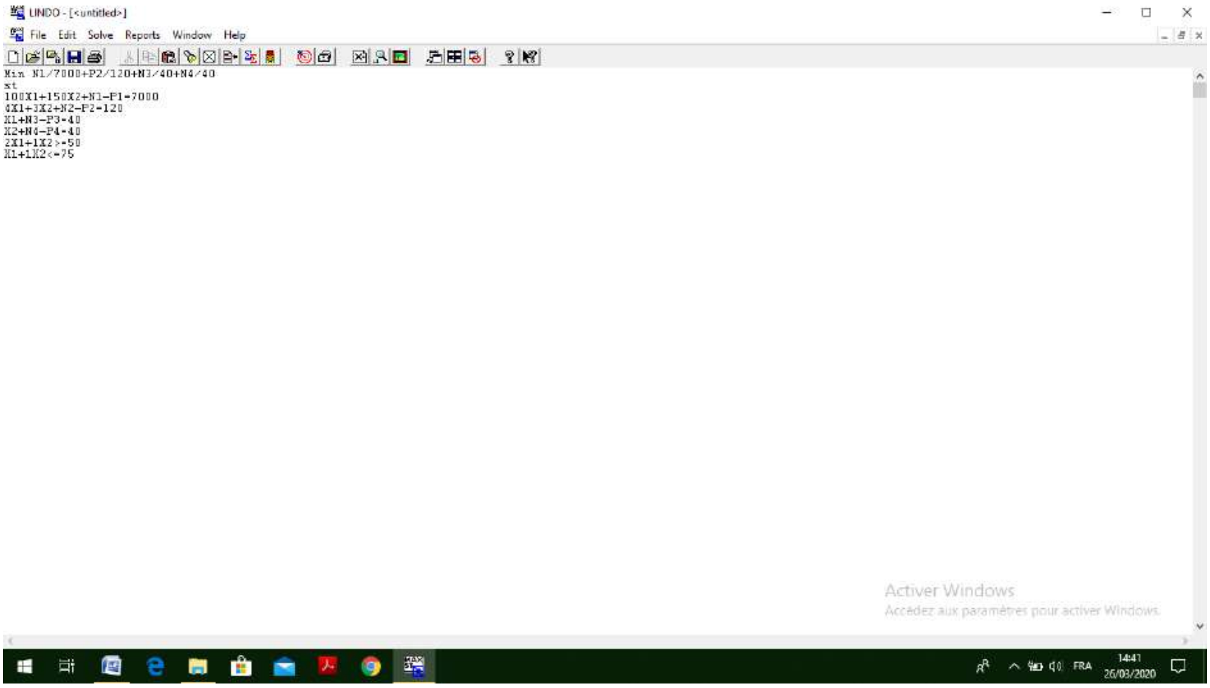
$$X_2 + N4 - P4 = 40$$

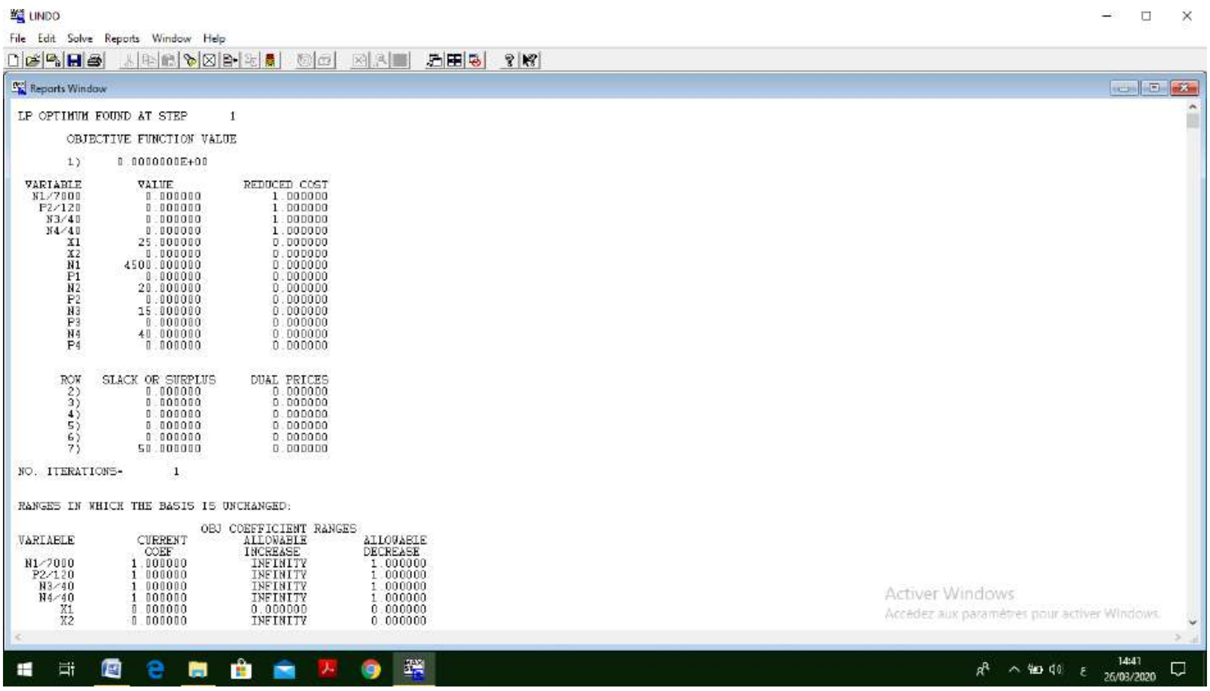
$$2X_1 + 1X_2 \geq 50$$

$$X_1 + 1X_2 \leq 75$$

$$(X1, X2, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4) \geq 0$$

حل النموذج باستعمال برنامج LINDO هو:





و النتائج نستخلصها من مخرجات البرنامج الموضحة في الشكل أعلاه في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	نسبة الانجاز	الرضا على الانجاز
X_1	25	الهدف الأول : الربح	35.72%	لا
X_2	0	الهدف الثاني : العمل	بالانخفاض116,66%	لا

P1	0	الهدف الثالث: استراتيجية الإنتاج		
		استراتيجية المنتج الاول	**62.5%**	لا
		استراتيجية المنتج الثاني	00%	لا
N1	4500			
P2	0			
N2	20			
P3	0			
N3	15			
P4	0			
N4	40			

ملاحظة: فيما يخص نسبة الانجاز لجميع التمارين تحسب بكل بساطة كما يلي:

بالنسبة للهدف الأول: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 4500 بنسبة قدرها 64.28% الحاصلة من قسمة قيمة الانحراف 4500 على القيمة المستهدفة (64.28% =4500/7000) ومن تم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسبة قدرها (35.72% =64.28% -100%) أما قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 2500,4ون ساعة تحسب هكذا (35.72*7000=2500.4)؛

بالنسبة للهدف الثاني: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 ولكن الانحراف المرغوب فيه أي السلبي قد كان يساوي إلى 20 هذا ما يوضح أن هذا الهدف قد تحقق بنسبة تجاوزت التمام قدرها 116.66% (20/120=0.1666=16.66%+100%= 116.66%) يعني قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 140 ون تحسب هكذا (40=116.66*120=139.99%)؛

وللتوضيح بالنسبة للهدف الثاني هو أن الانحراف غير مرغوب فيه المعبر عنه بـ P2 بدل ما يقلل إلى أدنى حد ممكن فقد كان العكس أي زاد في حجمه أي المسافة زادت من 0 الى أن وصلت إلى 20 يعني العملية عكسية الشيئ الذي جعلنا نضيف 20 ساعة إلى 120 ساعة القيمة المستهدفة ما جعل قيمة الهدف الحقيقة والفعلية تأخذ القيمة140 ساعة.

بالنسبة للهدف الثالث: هنا بالنسبة للمنتج الأول فيلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 15 وحدة بنسبة قدرها 37.5% الحاصلة من قسمة قيمة الانحراف 15 وحدة على القيمة المستهدفة (15/40=0.375) ومن تم نقول أن إنجاز الهدف لم يكن بالتمام وإنما بنسبة قدرها (62.5% =37.5% -100%) أما قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 35 ساعة تحسب هكذا (25=62.5*40%)؛

أما بالنســبة للمنتج الثاني فأن الانحراف غير المرغوب فيه مســاوي إلى 40 يعني أن الهدف لم يتحقق نهائيا، هذا ما تينه النتائج حيث ما دام الانحراف غير مرغوب فيه مساوي الى القيمة المستهدفة يعني أن الفرق بينهما هو 0 يعني نسبة الإنجاز هي 0%.

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الاول كان بنســبة **35.72%** يعني دون التمام، أما الهدف الثاني فكان إنجازه دون التمام (100%) أي بنســبة قدرها 116,66% (-) بالانخفاض والهدف الثالث من ناحية المنتج الأول فإنجازه كانت نسبته في حدود **62.5%** أما من ناحية المنتج الثاني فقد تحقق بنسبة 00% يعني لم ينجز نهائيا.

حل التمرين رقم 10 :

الصياغة العامة لنموذج البرمجة بالأهداف:

لتحديد الصياغة الرياضية لهذا النموذج وفق معطيات التمرين نتبع الخطوات التالية:

أولا: تحديد متغيرات القرار:

لدينا:

x1 يمثل الكمية المنتجة من النوع الأول من الأكواب ؛

X2 يمثل الكمية المنتجة من النوع الثاني من الأكواب؛

X3 يمثل الكمية المنتجة من النوع الثالث من الأكواب.

ثانيا: تحديد الأهداف وصياغتها الرياضية:

لدينا أربع أهداف وهي:

- الهدف الأول (Goal one) : تكثيف الإنتاج بحيث لا يقل عن 600 كوب من مختلف الانواع ودالته الرياضية هي:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 600$$

- الهدف الثاني (Goal one) : تحقيق اقصى ربح لا يقل عن 1000 ون و دالته الرياضية هي:

$$1X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 1000$$

- الهدف الثالث (Goal three) : التقليل من ساعات الطبخ والانجاز النهائي والصياغة الرياضية لذلك هي:

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 3000$$

$$3X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 3000$$

- الهدف الرابع (Goal four) : التأكيد من تصــنيع 200 كوب على الأقل من كل نوع (كل على حدى) وصياغته الرياضية هي:

$$X_1 \geq 200$$

$$X_2 \geq 200$$

$$X_3 \geq 200$$

ثالثا: تحديد الانحرافات غير المرغوب فيها : يمكن توضيحها في الجدول التالي:

الانحرافات غير المرغوب فيها	الأهداف
N1	الهدف الأول : تكثيف الانتاج
N2	الهدف الثاني : تعظيم الربح
P3, P4	الهدف الثالث: تقليل ساعات العمل
N5 , N6 ,N7	الهدف الرابع: التأكد من تصنيع المنتجات

رابعا: قيود النظام (الشروط): في هذه الحالة لا يوجد قيود وإنما كلها كانت أهداف يسعى متخذ القرار الوصول إليها.

خامسا: صياغة دالة الهدف :

$$MinZ = N1 + N2 + P3 + P4 + N5 + N6 + N7$$

سادسا: صياغة النموذج في الشكل العام:

$$MinZ = N1 + N2 + P3 + P4 + N5 + N6 + N7$$

Subject to: تحت شرط

$$X_1 + X_2 + X_3 + N1 - P1 = 600$$

$$1X_1 + 2X_2 + 3X_3 + N2 - P2 = 1000$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + N3 - P3 = 3000$$

$$3X_1 + 5X_2 + 10X_3 + N4 - P4 = 3000$$

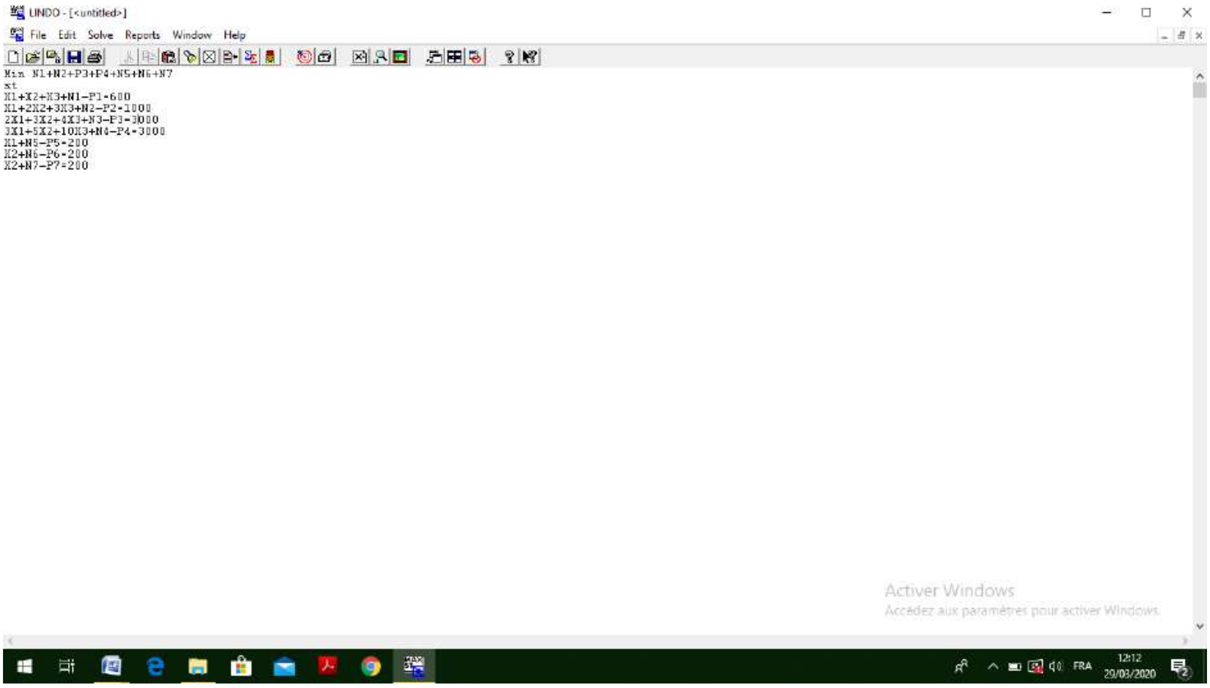
$$X_1 + N5 - P5 = 200$$

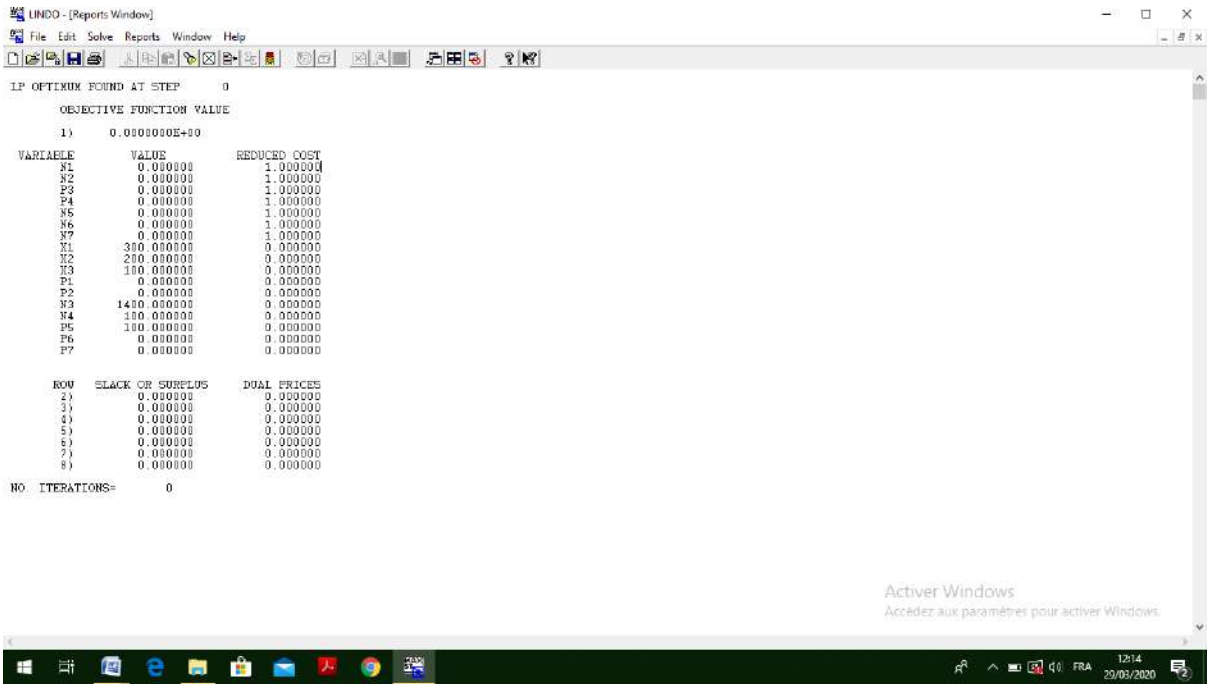
$$X_2 + N6 - P6 = 200$$

$$X_2 + N7 - P7 = 200$$

$$(X1, X2, X3, P1, N1, P2, N2, P3, N3, P4, N4, P5, N5, P6, N6, P7, N7) \geq 0$$

حل النموذج أعلاه باستعمال برنامج LINDO هو كالتالي:





النتائج نستخلصها من مخرجات البرنامج الموضحة في الشكل أعلاه في الجدول التالي:

المتغيرات	القيمة	الأهداف	نسبة الانجاز	الرضا على الانجاز	القيمة الفعلية للهدف
X_1	300	الهدف الأول : تكثيف الانتاج	100%	نعم	600
X_2	200	الهدف الثاني : تعظيم الربح	100%	نعم	1000
			%146.66	نعم	1600

X_3	100	الهدف الثالث: تقليل ساعات العمل	103.33%	نعم	2900
P1	0	الهدف الرابع: التأكد من تصنيع المنتجات	%150	نعم	300
			%100	نعم	200
			%100	نعم	200
N1	0				
P2	0				
N2	0				
P3	0				
N3	1400				
P4	0				
N4	100				
P5	100				
N5	0				
P6	0				
N6	0				
P7	0				
N7	00				

بالنســبة للهدف الأول: يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســاوي إلى 0 يعني أن الهدف قد تحقق بنســبة كاملة (100%) وقيمته الفعلية هي 600.

بالنســـبة للهدف الثاني: فأن الانحراف غير المرغوب فيه مســـاوي إلى 0 يعني أن الهدف قد تحقق بنســـبة كاملة (100%) وقيمته الفعلية هي 1000.

بالنســبة للهدف الثالث: فيما يخص لســاعات الطبخ يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مســاوي إلى 0 ولكن الانحراف المرغوب فيه قد كان يســاوي إلى 1400 هذا ما يوضح أن هذا الهدف قد تحقق بنســبة تجاوزت التمام قدرها 146.66% (1400/3000=0.4666=46.66%+100%= 146.66%) يعني قيمته الفعلية فهي مســاوية إلى 1600 وتحسب بطرح القيمة 1400 من القيمة المستهدفة 3000.

أما بالنسبة ساعات العمل على الإنجاز النهائي يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 ولكن الانحراف المرغوب فيه قد كان يساوي إلى 100 هذا ما يوضح أن هذا الهدف قد تحقق بنسبة تجاوزت التمام قدرها 103.33% (103.33% =100%+3.33%=100/3000=0.033) يعني قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 2900 وتحسب بطرح القيمة 100 من القيمة المستهدفة 3000.

بالنسبة للهدف الرابع: فيما يخص المنتج الأول يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 ولكن الانحراف المرغوب فيه قد كان يساوي إلى 100 هذا ما يوضح أن هذا الهدف قد تحقق بنسبة تجاوزت التمام قدرها 150% (150% =100%+50%=100/200=0.50) يعني قيمته الفعلية فهي مساوية إلى 300 ون تحسب هكذا (300=200*150%)؛

بالنسبة للمنتج الثاني يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 يعني أن الهدف قد تحقق بنسبة كاملة (100%) وقيمته الفعلية هي 200.

بالنسبة للمنتج الثالث يلاحظ أن الانحراف غير المرغوب فيه مساوي إلى 0 يعني أن الهدف قد تحقق بنسبة كاملة (100%) وقيمته الفعلية هي 200.

القرار: يلاحظ من الجدول أعلاه أن تحقيق الهدف الأول والهدف الثاني كان بنسبة كاملة أي انجاز تام (100%). أما الهدف الثالث فكان بالنسبة لساعات الطبخ نسبة انجاز قدرها 146.66% أما ساعات الانتاج النهائي فكانت نسبة الإنجاز في حدود 103.33%، وأما الهدف الرابع من ناحية المنتج الأول فإنجازه كان في حدود 150% أما من ناحية المنتج الثاني والمنتج الثالث فقد تحققت نسبة انجازهما (100%).

نماذج النقـــل

TRANSPORTATION MODELS

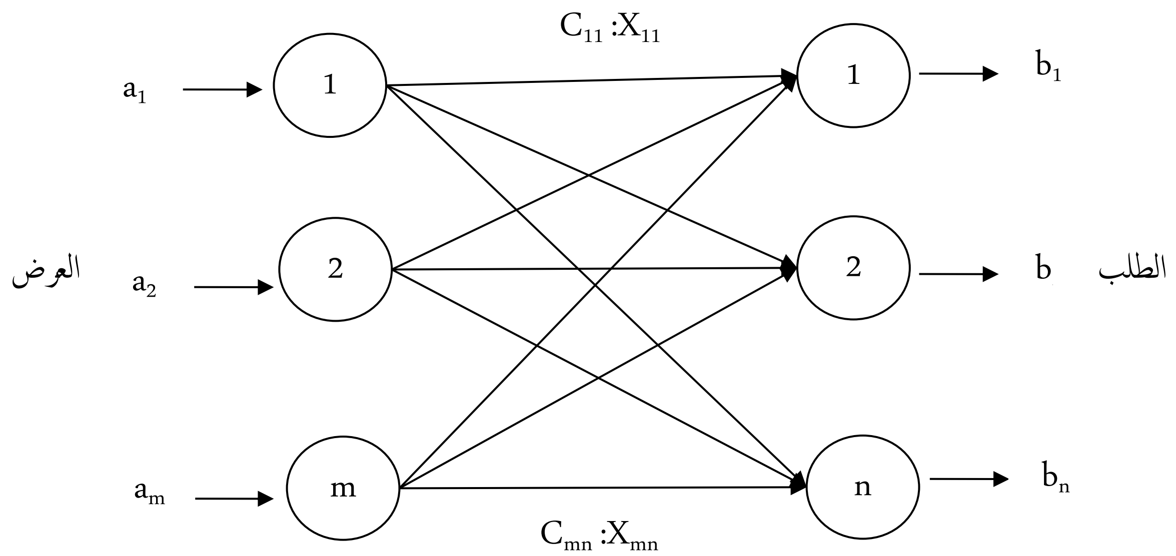
تقديم عام حول مشاكل النقل:

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية وتهتم بنقل البضائع من أماكن تواجدها أو أماكن العرض نحو أماكن الطلب أو الاستهلاك وقد يكون الهدف هو تقليل التكاليف أو زيادة الربح أو تقليل الفترة الزمنية وقد تحتوي برامجها الخطية على عديد القيود والمتغيرات مما يصعب حلها يدويا عن طريق السمبلكس لذلك وجد نموذج النقل لحل هاته المسائل.

1- تعريف نموذج النقل (Transportation Model):

يعتبر نموذج النقل احد النماذج الشبكية مثله مثل نموذج PERT وشبكات المياه وشبكة الهاتف وشبكات الطرق وغيرها، ورغم أن مشكلة النقل هي حالة خاصة من البرمجة الخطية يمكن حلها بأسلوب السمبلكس الا انه توجد طرق أخرى أسهل للحل، ويهدف نموذج النقل الى تخفيض تكلفة لنقل السلع أو وقت تسليمها من أماكن تواجدها وتسمى منابع الى أماكن الطلب وتسمى اتجاهات وغالبا ما يفترض النموذج التعادل بين العرض والطلب.

والمخطط التالي يوضح نموذج النقل:



2- تكوين جدول النقل:

الى من	I	II	III	العرض
A	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
B	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
C	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	a_3
الطلب	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i$ $\sum b_j$

حيث:

I,II,III مواقع الطلب

A,B,C مصادر العرض

C_{ij}: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i الى الموقع j

X_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المصدر i الى الموقع j.

4- طريقة الحل:

أ. ايجاد الحل المبدئي ويتم بثلاث طرق:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية وتبدأ من الخانة في الأعلى الى اليسار ونقوم بتوزيع من اليسار الى اليمين ومن الاعلى الى الاسفل حتى تكتمل الكميات المراد توزيعها والكميات المطلوبة يتم تلبتها ثم نحسب تكلفة النقل بهاته الطريقة ;
- طريقة أقل تكلفة ويتم التوزيع بداية بالخانة المقابلة لأقل تكلفة ثم نشطب السطر أو العمود الذي تشبع أي العرض ساوى الطلب وهكذا حتى يتم توزيع كل الكميات المعروضة على أماكن الطلب ثم نحسب تكلفة النقل الكلية ;
- طريقة فام وتتم بزيادة عمود وسطر لجدول النقل حيث نحسب فيه الفرق بين أقل قيمتين في السطر والعمود لكل سطر وعمود ثم نختار أكبر قيمة بين هاته القيم ثم نوزع في أقل خانة الموافقة لذلك السطر

أو العمود وهكذا دواليك حتى يتم توزيع كل الكمية المعروضة على أماكن الطلب ونحسب التكلفة الكلية للنقل.

ب. التحقق من أن الحل نهائي أو يحتاج لمزيد من المراحل عن طريق حرف T على اليمين العناصر الموجودة داخل القاعدة أي التي وزعت عليها السلع وعلى اليسار العناصر خارج القاعدة وتمثل الخانات الفارغة ونقوم بفرض أن المعامل الأول معدوم نحسب بقية المعاملات ثم بالتعويض في الجهة اليسرى نقارن فغذا تحصلنا على جميع الاسطر سالبة أو معدومة فإن هذا الحل هو الحل الامثل، وفي حالة وجود أسطر موجبة نختار المتغير الأكبر من بينها ليتم ادخاله للقاعدة ونقوم بانشاء حلقة +-+- حيث نطرح اقل قيمة في الحلقة في الخانات التي توجد بها علامة الطرح ونضيفها في الخانات التي توجد بها علامة الزائد وهكذا نتحصل على حل جديد نقوم بفحصه.

عادة الحل الأمثل يتكون من عدد الخانات مساوي لمجموع عدد الاسطر وعدد الاعمدة مطروحا منه الواحد.

5- **نموذج اعادة النقل:**

في هذا النموذج يفترض أن كل مصدر يلعب دور مصدر واتجاه في نفس الوقت ونفس الأمر بالنسبة للاتجاه فهو اتجاه ومصدر في نفس الوقت، ويتم الاعتماد على هذا النموذج نظرا لكون نموذج النقل المباشر مكلف ويفضل النقل غير المباشر حيث يتم تضخيم النموذج والكميات المتاحة في كل مصدر(اتجاه) ترفع بالكمية الاجمالية للعرض(الطلب) ثم نقوم بحل النموذج على طريقة نموذج النقل حتى نتحصل على الحل الأمثل.

6- **نموذج تقليل الفترة الزمنية:**

هذا النموذج يهدف الى نقل الموارد حيث الهدف هو تقليل فترة النقل ويتم عبر ثلاث خطوات:

أ. ايجاد الحل المبدئي عن طريق الزاوية الشمالية الغربية ;

ب. حساب $Max\ t_{ij}$ عبر ممر الحل المبدئي ونشطب على جميع الخلايا حيث t_{ij} أكبر أو يساوي $Max\ t_{ij}$;

ج. تحسين الحل باستبدال الاشارة -+-+ تبدأ في الخلية $Max\ t_{ij}$ واذا لم نستطع استبدال الاشارة واقامة الحلقة فيعني أن العملية انتهت وهذا هو الحل الأمثل.

7- **نموذج التخصيص:**

تمثل مسألة التخصيص حالة خاصة من مسائل النقل وتتمثل في توزيع العمال أو المهام أو المكاتب أو أي شيء نريد توزيعه على مجموعة من العمال أو المقاولين أو مكاتب الدراسات والهدف هو تقليل التكلفة الاجمالية أقل ما يمكن بحيث العرض والطلب المقابل لكل سطر وعمود هو الواحد ويتم الحل وفق الخطوات الآتية:

أ. ايجاد اقل تكلفة في كل سطر ثم نقوم بطرحها من السطر نفسه فاذا تحصلنا على عدد كاف من الاصفار للتخصيص نتوقف ;

ب. اذا لم نتحصل على عدد كاف نقوم بإيجاد اقل قيمة في كل عمود ثم نطرحها من العمود نفسه فاذا تحصلنا على عدد كاف من الاصفار للتخصيص نتوقف ؛

ج. اذا لم نتحصل على عدد كاف نقوم بشطب اكبر عدد من الاصفار بأقل عدد من الخطوط ثم نختار اقل قيمة من بين القيم غير المشطوبة بالخطوط فنطرحها من الخانات غير المشطوبة ونضيفها في تقاطع الخطوط وبالتالي نتحصل على عدد كاف من الاصفار نقوم بالتخصيص ونحسب التكلفة تبعا للجدول الأول.

ملخص حول مشاكل النقل:

<table dir="rtl">
<tr><th colspan="3">مشاكل النقل</th></tr>
<tr><td>النموذج الرياضي</td><td colspan="2">$$MinZ_0 = \sum c_{ij}X_{ij}$$ $$\sum X_{ij} = a_i$$ $$\sum X_{ij} = b_j$$ $$X_j \geq 0$$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">خطوات الحل</td><td rowspan="3">الحل المبدئي
من الافضل أن يكون عدد الحلول يعادل عدد الاسطر مجموع مع عدد الأعمدة مطروحا منه الواحد.m+n-1في حالة عدد الحلول أقل نضيف خلايا جديدة بقيمة ε المهملة الى الصفر حتى نتحقق من الحل.</td><td>طريقة الزاوية الشمالية الغربية
نقوم بالتوزيع من الخانة في الأعلى أقصى اليسار ثم ننتقل يمينا لإفراغ السطر ومن الأعلى إلى الأسفل لتفريغ العمود حتى نوزع كل كميات العرض على أماكن الطلب.</td></tr>
<tr><td>طريقة أقل تكلفة
نعتمد في التوزيع على الخانة الأقل تكلفة وفي حالة التساوي بين عدة خانات نختار واحدة ثم نشطب السطر أو العمود الذي تشبع أو تم تفريغه ونواصل العملية إلى غاية توزيع كل كميات العرض على أماكن الطلب.</td></tr>
<tr><td>طريقة فوجل أو Vam
نقوم بإضافة سطر و عمود لجدول النقل نحسب فيه الفرق بين أقل قيمتين لكل سطر وعمود وتمثل هذه القيم تكلفة الفرصة البديلة فيما لو استخدمنا التكلفة الأعلى بدلا من التكلفة الأقل ثم نحدد السطر أو العمود ذي الرقم الأكبر ثم نحدد المربع الذي تكون تكلفة نقل الوحدة فيه أقل ما يمكن ونضع فيه أكبر كمية ممكنة ثم نلغي المربعات الأخرى وهكذا نواصل العمليات الى غاية توزيع كل كميات العرض على أماكن الطلب</td></tr>
<tr><td colspan="2">نتأكد من أمثلية الحل أو نحدد المتغير المرشح للدخول للقاعدة والمتغير المرشح للخروج من القاعدة إذا كانت قيم R سالبة أو معدومة فإن الحل المبدئي المحصل عليه هو الحل الأمثل أما اذا وجدت قيم R موجبة نختار أكبر المتغير الذي تقابله أكبر قيمة موجبة هو المتغير المرشح للدخول للقاعدة ثم نقوم بتكوين</td></tr>
</table>

	حلقة +-+- تبدأ + عند خلية المتغير المرشح للدخول ثم نختبر الحل في كل مرة حتى نتحصل على قيم NBV كلها سالبة أو معدومة.	
	NBV	**BV**
	$X_{ij}: u_i + v_j - c_{ij} = R$	$X_{ij}: u_i + v_j = c_{ij}$
نموذج أقل فترة زمنية		
النموذج الرياضي	$MinT_k for\ all\ k$	
خطوات الحل	الخطوة الاولى	ايجاد الحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.
	الخطوة الثانية	حساب $Maxt_{ij}$ عبر ممر الحل المبدئي ثم يشطب على جميع الخلايا حيث $t_i \geq Maxt_{ij}$
	الخطوة الثالثة	تحسين الحل باستبدال الاشارة -+-+ حيث الاشارة – تبدأ في الخلية $Maxt_{ij}$ اذا عملية تكوين الحلقات لم تعد ممكنة فقد انتهت عملية الحل.
مسائل التخصيص		
اذا تحصلنا على التخصيص في أي خطوة تتوقف عملية الحل ونحسب قيمة الحل.	الخطوة الأولى	نطرح أقل قيمة في كل سطر من قيم السطر
	الخطوة الثانية	نطرح أقل قيمة في العمود من قيم العمود
	الخطوة الثالثة	نقوم بتشطيب جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط ونقوم بطرح أقل قيمة من القيم التي لم تشطب ونضيفها في تقاطع الخطوط.

تمارين محلولة حول مشاكل النقل

التمرين رقم 01:يمتلك مصنع ثلاثة مستودعات هي C,B,A تمثل أماكن العرض وأن الطاقة الاستيعابية لها: 250،350،300 وحدة على الترتيب فإذا أراد المصنع توريد منتجاته الى ثلاثة من كبار تجار الجملة يمثلون أماكن الطلب وبطاقة استيعابية تقدر بـ 200 للتاجر الأول و300 للتاجر الثاني و400 للتاجر الثالث ويبين الجدول التالي تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مخزن المصنع الى مستودعات التجار بالوحدة النقدية.

إلى / من	التاجر الأول	التاجر الثاني	التاجر الثالث
A	5	4	3
B	7	5	6
C	5	6	9

المطلوب:

1. اعرض البيانات على شكل شبكة؟
2. أوجد الحل المبدئي لمسألة النقل بالطرق التالية:
   أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية ؛
   ب. طريقة أقل تكلفة ؛
   ج. طريقة فام Vam.ماذا تلاحظ؟
3. أوجد الحل النهائي لمشكلة النقل هاته؟

التمرين رقم 02:يقوم مستثمر بانتاج سلعة السيراميك وتتوزع وحداته الانتاجية في كل من الجزائر، وهران، غرداية ثم تنقل الى مراكز التجميع المتواجدة في سطيف،الجلفة، بشار،ورقلة ليتم بعدها توزيعها على تجار الجملة والتجزئة.

وقد وضع خطة أولية بناءا على دراسة جدوى اقتصادية مفادها أن الطاقة الانتاجية لوحدة الجزائر هي 2000 طن والطاقة الانتاجية لوحدة وهران هي 1300 طن وطاقة وحدة غرداية 1700 طن أي أن اجمالي ما تنتج الوحدات 5000 طن وقد بينت الدراسة أن الطلب للمراكز الاربعة سيكون 1000 طن لمركز سطيف و 2000 طن لمركز الجلفة و 500 طن لمركز بشار و1500 طن لمركز ورقلة.

وقد تم تقدير تكلفة نقل الطن الواحد من وحدات الانتاج الى مراكز التوزيع بالوحدة النقدية في الجدول التالي:

الى / من	سطيف	الجلفة	بشار	ورقلة

الجزائر	10	8	6	4
وهران	14	17	5	2
غرداية	18	7	11	9

المطلوب:

1. أوجد الحل الامثل لتوزيع السيراميك نحو المراكز الانتاجية بأقل تكلفة ممكنة؟

التمرين رقم 03: تملك شركة أسمدة ثلاثة مراكز توزيع C,B,A وتقوم ببيع منتجاتها الى خمسة محلات لبيع المواد الزراعية فإذا كانت تكاليف النقل من المراكز نحو المحلات والكميات المعروضة والمطلوبة موضحة في الجدول التالي:

المراكز	1	2	3	4	5	الكميات المتاحة
A	4	2	5	3	1	200
B	4	2	3	5	6	150
C	1	2	4	3	7	250
الكميات المطلوبة	90	120	100	85	205	

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لتوزيع الأسمدة بأقل تكلفة ممكنة؟

التمرين رقم 04: لتكن لدينا مصفوفة النقل التالية:

	I	II	III	IV	a_i
A	2	1	3	2	90
B	2	3	3	1	70
C	3	3	2	1	50
b_j	80	60	40	30	210

المطلوب:

1. أوجد الحل المبدئي بالطرق الثلاث: الشمالية الغربية، اقل تكلفة، طريقة فام؟
2. أوجد الحل النهائي لمشكلة النقل هاته؟

التمرين رقم 05:احدى الجامعات يزاول فيها عدد كبير من الطلبة لذلك فقد أجرت حافلات نقل عديدة وقد وزعت على ثلاثة خطوط رئيسية (3,2,1) كما يتم تجميع كل حافلة في مرآب (C,B,A) موزعة على أحياء المدينة المتباعدة وقد تم تقدير المسافة بين المرآب وكل خط وكذلك الأعداد المطلوبة من الحافلات لكل خط اضافة الى قدرة كل مرآب على استيعاب الحافلات كما في الجدول التالي:

إلى / من	A	B	C	عدد الحافلات في الخطوط
1	3	5	8	4
2	2	3	9	10
3	6	2	4	18
عدد الحافلات في كل مرآب	2	16	14	32 / 32

المطلوب:

1. فما هي كيفية الوصول الى أقل مقدار من المسافة وأقل عدد من الحافلات التي تحتاجها الخطوط من كل مرآب؟

التمرين رقم 06:تمتلك إحدى شركات الإسمنت ثلاث مقالع رئيسية لاستخراج الحجر الذي هو المادة الأولية لصناعة الإسمنت تم نقل وتسويق هذه المادة الى أربعة معامل متوزعة في مناطق جغرافية مختلفة والطاقة الاستخراجية للمقالع هي: المقلع الأول 300 طن المقلع الثاني 200 طن والمقلع الثالث 250 طن أما طاقة المعمل الإنتاجية فهي المعمل الأول 150 طن والمعمل الثاني 100 طن والمعمل الثالث 200 طن أما المعمل الرابع 50 طن.

وقد كانت تكلفة النقل من المقلع الأول للمعامل الأربعة على التوالي: 4,3,1,2 وتكلفة النقل من المقلع الثاني الى المعامل الأربعة على التوالي هي: 5,4,2,6 بينما تكلفة النقل من المقلع الثالث الى المعامل الأربعة كانت: 3,7,1,8.

وقد قررت الشركة فتح مصنع جديد لإستيعاب الطاقة الاستخراجية الفائض وقد توفرت لديها البيانات عن البدائل التالية:

تكلفة النقل	البديل A	البديل B
المقلع الأول	2	4
المقلع الثاني	3	2
المقلع الثالث	1	2

المطلوب:

1. شكل جدول النقل للمسألة؟
2. أوجد الحل لمشكلة النقل وأي البديلين تختار الشركة؟

التمرين رقم 07:مؤسسة تقوم بنقل منتجاتها من مصنعين نحو ثلاث مخازن وكانت تكلفة النقل مبينة في الجدول التالي:

المخازن / المصانع	I	II	III	العرض
المصنع الأول	10	20	30	100
المصنع الثاني	20	50	40	200
الطلب	100	100	100	300

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لمسألة النقل ؟
2. إذا توفرت لديك المعلومات حول تكاليف النقل بين المصانع نفسها وبين المخازن حل نموذج إعادة النقل؟ماذا تلاحظ ؟

	المصنع الأول	المصنع الثاني
المصنع الأول	0	20
المصنع الثاني	10	0

	المصنع الأول	المصنع الثاني
المخزنI	20	30
المخزنII	40	20
المخزنIII	50	70

	المخزنI	المخزنII	المخزنIII
المخزنI	0	40	10
المخزنII	10	0	20
المخزنIII	80	20	0

التمرين رقم 08:منجمين لاستخراج الفوسفات بحيث يتم نقل المواد المستخرجة إلى مصنعين لإتمام عملية التصنيع وقد كان خيار المؤسسة بين النقل المباشر من المناجم نحو المصانع أو إعادة النقل بين مختلف الأماكن وقد توفرت تكلفة النقل بين مختلف المناجم والمصانع:

	المصنع A	المصنع B	المصنع C	العرض
المنجم الاول	1	3	5	10
المنجم الثاني	9	6	3	8
الطلب	2	6	10	18

	المنجم الاول	المنجم الثاني
المنجم الاول	0	14
المنجم الثاني	12	0

	المنجم الاول	المنجم الثاني
المصنع A	10	12
المصنع B	14	11
المصنع C	16	20

	المصنع A	المصنع B	المصنع C
المصنع A	0	14	18
المصنع B	11	0	16
المصنع C	15	13	0

المطلوب:

1. أيهما أقل تكلفة النقل المباشر أم إعادة النقل بالنسبة للمؤسسة؟

التمرين رقم 09: مؤسسة تقوم بتوزيع منتجاتها انطلاقا من ثلاثة مخازن الى نقطتي بيع والجدول التالي يبين طاقة المخازن وطلبات نقاط البيع وتكاليف النقل:

	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2	العرض
المخزن I	1	2	10
المخزن II	2	5	10
المخزن III	3	4	10
الطلب	10	20	

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل هذه؟
2. أوجد الحل الأمثل لمشكل إعادة النقل إذا علمت أن تكاليف النقل بين النقاط بينها والمخازن بينها هي:

	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2
نقطة البيع 1	0	8
نقطة البيع 2	1	0

	المخزن I	المخزن II	المخزن III
نقطة البيع 1	2	4	6
نقطة البيع 2	3	2	7

	المخزن I	المخزن II	المخزن III
المخزن I	0	4	1

المخزن II	1	0	2
المخزن III	8	2	0

التمرين رقم 10:اليك جدول النقل التالي:

	السوق 1	السوق 2	العرض
المعمل I	10	12	10
المعمل II	16	12	10
المعمل III	14	8	10
الطلب	20	10	

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل هذه ؟
2. قارن النتيجة المتحصل عليها أعلاه مع حلول مشكلة إعادة النقل في ضوء المعطيات التالية:

	المعمل I	المعمل II	المعمل III
المعمل I	0	1	1
المعمل II	1	0	2
المعمل III	1	1	0

	المعمل I	المعمل II	المعمل III
السوق 1	1	1	1
السوق 2	2	0	1

	السوق 1	السوق 2
السوق 1	0	1
السوق 2	2	0

التمرين رقم 11:تقوم شركة بتخصيص ستة مشاريع الى ستة من مكاتب الدراسات وكانت تكاليف الدراسة لكل مكتب لمختلف المشاريع معطاة في الجدول التالي:

	I	II	III	IV	V	VI
P_1	65	73	63	57	0	0
P_2	67	70	65	58	0	0
P_3	68	72	69	55	0	0
P_4	67	75	70	59	0	0
P_5	71	69	75	57	0	0
P_6	69	71	66	59	0	0

المطلوب:

1. أوجد التخصيص الأمثل للمشاريع على مكاتب الدراسات؟

التمرين رقم 12:أعلنت شركة عن أربعة وظائف شاغرة فتقدم للوظيفة خمسة مهندسين والجدول التالي يمثل التكاليف المقدرة لكل مهندس في كل وظيفة:

		الوظائف			
		J_1	J_2	J_3	J_4
المهندسين	**مصطفى**	7	10	7	11
	عيسى	4	6	10	6
	جمال	3	5	3	5
	مختار	6	9	12	9
	محمد	9	8	11	8

المطلوب:

1. ساعد الشركة على اختيار أربعة مهندسين لشغل الوظائف؟

التمرين رقم 13:مؤسسة تجارية لديها أربعة رجال بيع يراد توزيعهم على أربعة مناطق مختلفة فإذا كان تقدير إدارة المؤسسة للأرباح اليومية لكل رجل بيع في كل منطقة بعد دراسة جدوى مقدرة في الجدول التالي:

	I	II	III	IV
أحمد	16	10	14	11
اسلام	14	11	15	15
رضا	15	15	13	12
محمود	13	12	14	15

المطلوب:

1. إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على المناطق المختلفة؟

التمرين رقم 14: ترغب مؤسسة في انجاز أربع مهمات وكان عدد الموظفين المكلفين بالإنجاز أربعة والجدول التالي يبين تكلفة انجاز كل موظف للمهمات الأربعة:

المهمات / الموظفين	A	B	C	D
I	5	6	2	4
II	9	5	1	9
III	1	2	6	1
IV	7	6	15	12

المطلوب:

1. أوجد التخصيص الأفضل للموظفين؟

التمرين رقم 15: شركة تأجير السيارات السياحية لديها سيارة فائضة في كل مدينة من المدن التالية: F,E,D,C,B,A ولديها عجز في كل مدينة من المدن التالية: 1،2،3،4،5،6 فإذا كانت المسافات بين المدن المختلفة بالكيلومترات كما هو مبين في الجدول التالي:

	1	2	3	4	5	6
A	41	72	39	52	25	51
B	22	29	49	65	81	50
C	27	39	60	51	32	32
D	45	50	48	52	37	43
E	29	40	39	26	30	33
F	82	40	40	60	51	30

المطلوب:

1. فأي سيارة ترسلها الشركة من أية مدينة بحيث يكون مجموع المسافات المقطوعة أقل ما يمكن؟

التمرين رقم 16:الجدول التالي يوضح أزمنة انجاز المهام (C,B,A) بواسطة الاجهزة 4,3,2,1.

الأجهزة / المهام	1	2	3	4
A	14	12	10	16
B	16	10	12	14
C	10	18	12	12

المطلوب:

1. تحديد المهام التي يمكن أن تنجز من كل جهاز بشكل يعمل على تخفيض الزمن؟

التمرين رقم 17:شركة لإنتاج الألبان تمتلك ثلاثة معامل إنتاجية القدرة الانتاجية لكل معمل هي (110,80,100) وحدة يوميا على التوالي وعلى الشركة أن تجهز أربعة مراكز استهلاكية بكمية مقدارها (100,50,60,80) وحدة يوميا على التوالي هدف الشركة هو توزيع منتجاتها على المراكز الاستهلاكية بأسرع وقت ممكن وذلك تجنبا لتلف المنتوجات مع العلم أن الوقت المتطلب لإيصال المنتج الواحد من المعمل الى المراكز الاستهلاكية هو (1,3,2,1) ساعة على التوالي ومن المعمل الثاني هو (3,4,2,2) ساعة على التوالي ومن المعمل الثالث هو (2,4,3,3) ساعة على التوالي.

المطلوب:

1. أوجد التوزيع الأمثل للمنتوجات والذي يحقق أقل وقت ممكن لتوزيع المنتوجات؟

التمرين رقم 18:مؤسسة تنتج الأجبان تمتلك أربعة معامل وتقوم بتوريد منتجاتها الى ستة من تجار الجملة وتحرص على ايصال منتجاتها في أقرب وقت حتى لا تفسد السلع والجدول التالي يوضح الوقت اللازم للنقل لكل تاجر:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	a_i
U_1	25	30	20	40	45	37	37
U_2	30	25	20	30	40	20	22
U_3	40	20	40	35	45	22	32

U_4	25	24	50	27	30	25	14
b_j	15	20	15	25	20	10	

المطلوب:

1. أوجد التوزيع الأمثل للمنتوجات والذي يحقق أقل وقت ممكن لتوزيع المنتوجات؟

التمرين رقم 19: تقوم ثلاث مؤسسات للصحة الجوارية بإجلاء الحالات الخطيرة والحرجة للمرضى نحو خمسة مستشفيات جامعية قصد استشفاء هؤلاء المرضى والجدول التالي يبين الوقت اللازم للنقل من المؤسسات الجوارية إلى المستشفيات بالإضافة إلى القدرة الاستيعابية لكل مستشفى وعدد الحالات التي يتعين نقلها:

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	a_i
E1	3	7	5	4	5	11
E_2	9	5	6	6	2	13
E_3	3	10	8	7	5	8
b_j	5	8	5	10	6	

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل لنقل المرضى في أسرع وقت نحو المستشفيات؟

التمرين رقم 20: إليك جدول النقل التالي الذي يوضح المدة الزمنية للنقل من المصادر نحو الاتجاهات لسلعة ما:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	10	0	20	11	15
S_2	1	7	19	20	25
S_3	12	14	16	18	5
b_j	12	8	15	10	45

المطلوب:

1. ما هو الزمن الذي يسمح بنقل السلع بأقل فترة زمنية؟

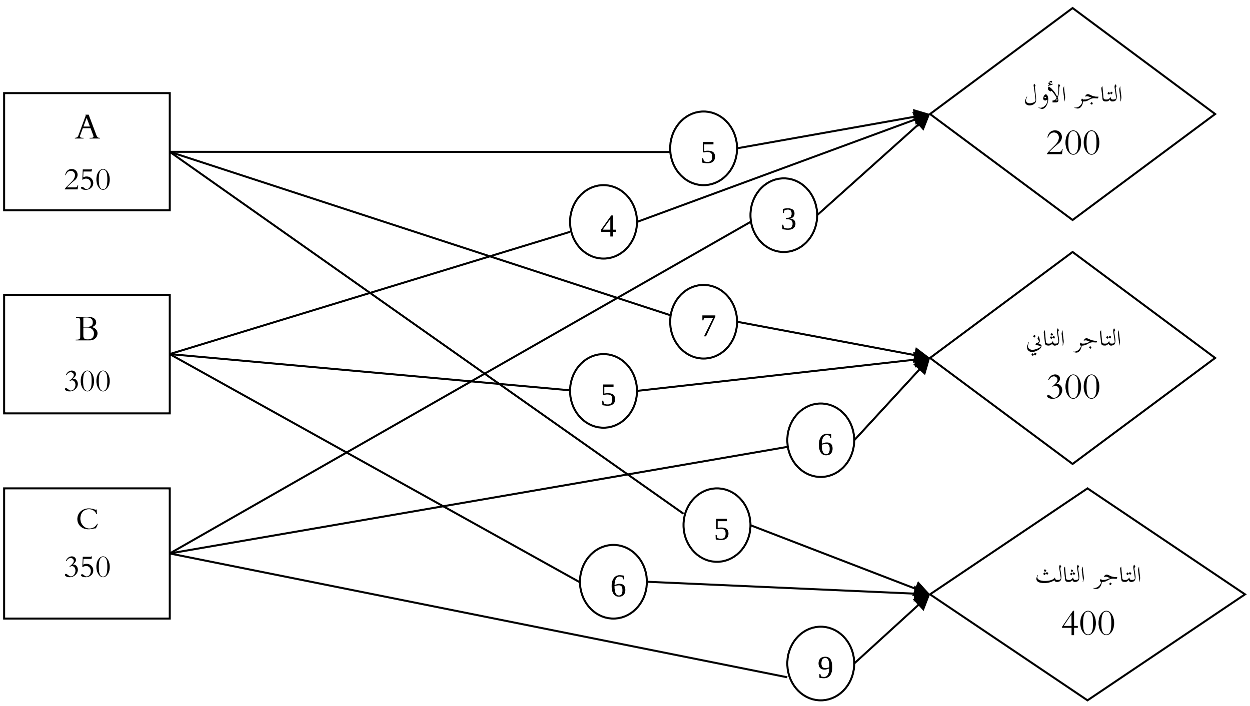
حلول التمارين

حل التمرين رقم 01:

يمتلك مصنع ثلاثة مستودعات هي C,B,A تمثل أماكن العرض وأن الطاقة الاستيعابية لها: 250،350،300 وحدة على الترتيب فإذا أراد المصنع توريد منتجاته الى ثلاثة من كبار تجار الجملة يمثلون أماكن الطلب وبطاقة استيعابية تقدر بـ 200 للتاجر الأول و300 للتاجر الثاني و400 للتاجر الثالث ويبين الجدول التالي تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مخزن المصنع الى مستودعات التجار بالوحدة النقدية.

إلى / من	التاجر الأول	التاجر الثاني	التاجر الثالث
A	**5**	**4**	**3**
B	**7**	**5**	**6**
C	**5**	**6**	**9**

1. عرض البيانات على شكل شبكة:



2. إيجاد الحل المبدئي لمسألة النقل بالطرق التالية:

د. طريقة الزاوية الشمالية الغربية :

5 / **200**	**4**	**3**	**200**
7 / **50**	**5** / **250**	**6**	**300**
5	**6** / **100**	**9** / **300**	**400**
250	**350**	**300**	**900**

$Z_0=5(200)+7(50)+5(250)+6(100)+9(300)=5900$

هـ. طريقة أقل تكلفة :

5	4	3 200	200
7	5 300	6	300
5 250	6 50	9 100	400
250	350	300	900

$Z_0=3(200)+5(300)+5(250)+6(50)+9(100)=4550$

و. طريقة فام Vam

5	4	3 200	200	1
7	5	6	300	1
5	6	9	400	1
250	350	300	900	P_i
2	1	3	P_j	

5	4	3		
7	5	6 100	300	1
5	6	9	400	1
250	350	100	700	P_i
2	1	3	P_j	

5	4	3		
7	5	6	200	2
5 250	6	9	400	1
250	350		600	P_i
2	1		P_j	

5	4	3	
7	5 200	6	200
5	6 150	9	150
	350		350

5	4	3 200	200
7	5 200	6 100	300
5 250	6 150	9	400
250	350	300	900

$Z_0=3(200)+5(200)+5(250)+6(150)+6(100)=4350$

نلاحظ أن الحل تحسن بين الطرق الثلاث فكانت طريقة فام الأقل تكلفة.

3. إيجاد الحل النهائي لمشكلة النقل:

نختبر إن كان الحل المحصل عليه بطريقة فام هو الحل النهائي:

B.V	N.B.V
$X_{13} : u_1+v_3=3$	$X_{11} : u_1+v_1-5=-4$
$X_{22} : u_2+v_2=5$	$X_{12} : u_1+v_2-4=-2$
$X_{23} : u_2+v_3=6$	$X_{21} : u_2+v_1-7=-3$
$X_{31} : u_3+v_1=5$	$X_{33} : u_3+v_3-9=-2$
$X_{32} : u_3+v_2=6$	
$u_1=0$ $v_1=1$ $u_2=3$ $v_2=2$ $u_3=4$ $v_3=3$	

بما أن القيم المحسوبة للمتغيرات خارج القاعدة كلها سالبة فإن هذا الحل هو الحل النهائي.

حل التمرين رقم 02:

1. إيجاد الحل الأمثل:

نشرع في ايجاد الحل المبدئي باستعمال طريقة أقل تكلفة ثم نختبره:

10 1000	8 300	6 500	4 200	2000
14	17	5	2 1300	1300
18	7 1700	11	9	1700
1000	2000	500	1500	5000

$Z_0=10(1000)+8(300)+6(500)+4(200)+2(1300)+7(1700)=30700$

بما أن عدد الحلول 6 مساوي لعدد الأسطر مجموعة مع عدد الأعمدة مطروحا منها الواحد نقوم باختبار الحل $m+n-1=6$.

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=10$	$u_2+v_1-14=-6$
$u_1+v_2=8$	$u_2+v_2-17=-11$
$u_1+v_3=6$	$u_2+v_3-5=-1$
$u_1+v_4=4$	$u_3+v_1-18=-9$
$u_2+v_4=2$	$u_3+v_3-11=-6$
$u_3+v_2=7$	$u_3+v_4-9=-6$
$u_1=0$ $v_1=10$ $u_2= -2$ $v_2=8$ $u_3= -1$ $v_3=6$ $v_4=4$	

بما أن جميع المتغيرات خارج القاعدة تعطي قيما سالبة فالحل المبدئي هو الحل الأمثل.

حل التمرين رقم 03:

1. ايجاد الحل الأمثل لتقليل تكاليف النقل:

نقوم أولا بإيجاد الحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

1 / 200	3	5	2	4	200
6 / 5	5 / 85	3 / 60	2	4	150
7	3	4 / 40	2 / 120	1 / 90	250
205	85	100	120	90	

$Z_0=1(200)+5(6)+5(85)+3(60)+4(40)+2(120)+1(90)= 1325$

نلاحظ أن عدد الحلول هو 7 حلول $m+n-1=3+5-1=7$ نختبر ان كان الحل نهائيا:

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=1$	$u_1+v_2-3=-3$
$u_2+v_1=6$	$u_1+v_3-5=-7$
$u_2+v_2=5$	$u_1+v_4-2=-6$
$u_2+v_3=3$	$u_1+v_5-4=-9$
$u_3+v_3=4$	$u_2+v_4-2=-1$
$u_3+v_4=2$	$u_2+v_5-4=-4$
$u_3+v_5=1$	$u_3+v_1-7=0$
	$u_3+v_2-3=3$
$u_1=0$	$v_1=1$
$u_2=5$	$v_2=0$
$u_3=6$	$v_3=-2$
	$v_4=-4$
	$v_5=-5$

نلاحظ أن المتغير X_{32} موجب وهو مرشح للدخول للقاعدة لذلك نقوم بإجراء حلقة تبدأ عند المتغير المرشح للدخول +-+- ونحرك الكمية الأقل وفقا للحلقة:

(1) 200	(3)	(5)	(2)	(4)	200
(6) 5	(5) - 85	(3) + 60	(2)	(4)	150
(7)	(3) +	(4) - 40	(2) 120	(1) 90	250
205	85	100	120	90	

يصبح لدينا:

(1) 200	(3)	(5)	(2)	(4)	200
(6) 5	(5) 45	(3) 100	(2)	(4)	150
(7)	(3) 40	(4)	(2) 120	(1) 90	250
205	85	100	120	90	

$Z_0=1(200)+5(6)+5(45)+3(40)+3(100)+2(120)+1(90)= 1205$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=1$	$u_1+v_2-3=-3$
$u_2+v_1=6$	$u_1+v_3-5=-7$
$u_2+v_2=5$	$u_1+v_4-2=-3$
$u_2+v_3=3$	$u_1+v_5-4=-6$
$u_3+v_2=3$	$u_2+v_4-2=2$
$u_3+v_4=2$	$u_2+v_5-4=-1$
$u_3+v_5=1$	$u_3+v_1-7=-3$
	$u_3+v_3-4=-3$
$u_1=0$	$v_1=1$
$u_2=5$	$v_2=0$
$u_3=3$	$v_3=-2$
	$v_4=-1$
	$v_5=-2$

نلاحظ أن المتغير X_{24} موجب وهو مرشح للدخول للقاعدة لذلك نقوم بإجراء حلقة تبدأ عند المتغير المرشح للدخول +-+- ونحرك الكمية الأقل وفقا للحلقة كما في المرحلة السابقة:

1 / 200	3	5	2	4	200
6 / 5	5 - / 45	3 / 100	2 +	4	150
7	3 + / 40	4	2 - / 120	1 / 90	250
205	85	100	120	90	

يصبح لدينا:

1 / 200	3	5	2	4	200
6 / 5	5	3 / 100	2 / 45	4	150
7	3 / 85	4	2 / 75	1 / 90	250
205	85	100	120	90	

$Z_0=1(200)+5(6)+3(100)+2(45)+3(85)+2(75)+1(90)= 1035$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=1$	$u_1+v_2-3=-5$
$u_2+v_1=6$	$u_1+v_3-5=-7$
$u_2+v_3=3$	$u_1+v_4-2=-5$
$u_2+v_4=2$	$u_1+v_5-4=-8$
$u_3+v_2=3$	$u_2+v_2-5=-2$
$u_3+v_4=2$	$u_2+v_5-4=-3$
$u_3+v_5=1$	$u_3+v_1-7=-1$
	$u_3+v_3-4=-1$
$u_1=0$	$v_1=1$
$u_2=5$	$v_2=-2$
$u_3=5$	$v_3=-2$
	$v_4=-3$
	$v_5=-4$

بما أن جميع المتغيرات خارج القاعدة تعطي قيما سالبة فالحل المبدئي هو الحل الأمثل.

حل التمرين رقم 04:

1. ايجاد الحل المبدئي بالطرق الثلاث:

أولا بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

2 / 80	1 / 10	3	2	90
2	3 / 50	3 / 20	1	70
3	3	2 / 20	1 / 30	50
80	60	40	30	210

$Z_0=2(80)+1(10)+3(50)+3(20)+2(20)+1(30)=450$

ثانيا بطريقة أقل تكلفة:

2 / 10	1 / 60	3 / 20	2	90
2 / 70	3	3	1	70
3	3	2 / 20	1 / 30	50
80	60	40	30	210

$Z_0=2(10)+1(60)+3(20)+2(70)+2(20)+1(30)=350$

ثالثا بطريقة فام:

2	1 / 60	3	2	90	1
2	3	3	1	70	1
3	3	2	1	50	1

80	60	40	30	210	p_i
1	2	1	1	p_j	

$X_{12}=60$

2	1	3	2	30	1
2	3	3	1 30	70	1
3	3	2	1	50	1
80		40	30	150	p_i
1		1	1	p_j	

$X_{24}=30$

2	1	3	2	30	1
2	3	3	1	40	1
3	3	2 40	1	50	1
80		40		120	p_i
1		1		p_j	

$X_{33}=40$

2 30	1	3	2	30
2 40	3	3	1	40
3 10	3	2	1	10
80				80

$X_{11}=30$, $X_{21}=40$, $X_{31}=10$

2 30	1 60	3	2	90
2 40	3	3	1 30	70
3 10	3	2 40	1	50
80	60	40	30	210

$Z_0=2(30)+1(60)+2(40)+1(30)+3(10)+2(40)=340$

2. إيجاد الحل النهائي:

نقوم باختبار الحل المحصل عليه بطريقة فام وهو غالبا ما يعد الحل الأمثل.

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=2$	$u_1+v_3-3=-2$
$u_1+v_2=1$	$u_1+v_4-2=-1$
$u_2+v_1=2$	$u_2+v_2-3=-2$
$u_2+v_4=1$	$u_2+v_3-3=-2$
$u_3+v_1=3$	$u_3+v_2-3=-1$
$u_3+v_3=2$	$u_3+v_4-1=1$
$u_1=0$	$v_1=2$
$u_2=0$	$v_2=1$
$u_3=1$	$v_3=1$
	$v_4=1$

بما أن المتغير X_{34} قيمته موجب في الجدول فهو مرشح للدخول للقاعدة ونقوم بإنشاء حلقة تبدأ عند المتغير المرشح +-+- :

2 / 30	1 / 60	3	2	90
2 + / 40	3	3	1 - / 30	70
3 - / 10	3	2 / 40	1 +	50
80	60	40	30	210

وتصبح لدينا:

2 / 30	1 / 60	3	2	90
2 / 50	3	3	1 / 20	70
3	3	2 / 40	1 / 10	50
80	60	40	30	210

$Z_0=2(30)+1(60)+2(50)+1(20)+2(40)+1(10)=330$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=2$	$u_1+v_3-3=-2$
$u_1+v_2=1$	$u_1+v_4-2=-2$
$u_2+v_1=2$	$u_2+v_2-3=-1$
$u_2+v_4=1$	$u_2+v_3-3=-1$
$u_3+v_3=2$	$u_3+v_1-3=0$
$u_3+v_4=1$	$u_3+v_2-3=-1$
$u_1=0$ $u_2=1$ $u_3=1$	$v_1=2$ $v_2=1$ $v_3=1$ $v_4=0$

بما أن جميع قيم المتغيرات خارج القاعدة سالبة فإن الحل هو النهائي والأمثل.

حل التمرين رقم 05:

1. إيجاد الحل النهائي:

أولا نوجد الحل المبدئي بإحدى الطرق الثلاث ولتكن طريقة فام:

3	5	8	4	2
2	3	9	10	1
6	2	4 14	18	2
2	16	14	32	P_i
1	1	4	P_j	

$X_{33}=14$

3	5	8	4	2
2	3	9	10	1
6	2 4	4	4	4
2	16		18	P_i
1	1		P_j	

$X_{32}=4$

3	5	8	4	2
2	3 10	9	10	1
6	2	4		
2	12		14	p_i
1	2		p_j	

$X_{22}=10$

3 2	5 2	8	4
2	3	9	
6	2	4	
2	2		4

$X_{11}=2$, $X_{12}=2$

3 2	5 2	8	4
2	3 10	9	10
6	2 4	4 14	18
2	16	14	32

$Z_0=3(2)+5(2)+3(10)+2(4)+4(14)=110$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=3$ $u_1+v_2=5$ $u_2+v_2=3$ $u_3+v_2=2$ $u_3+v_3=4$	$u_1+v_3-8=-1$ $u_2+v_1-2=-1$ $u_2+v_3-9=-4$ $u_3+v_1-6=-6$
$u_1=0$ $v_1=3$ $u_2=-2$ $v_2=5$ $u_3=-3$ $v_3=7$	

بما أن جميع قيم المتغيرات خارج القاعدة سالبة فإن الحل هو النهائي والأمثل.

حل التمرين رقم 06:

تشكيل جدول النقل وحله اذا كان البديل A:

2 150	1	3	4	2	300	1
6	2	4	5	3	200	1
8	1	7	3	1	250	2
150	100	200	50	250		p_i
4	1	1	1	1	p_j	

$X_{11}=150$

2	1	3	4	2	150	1
6	2	4	5	3	200	1
8	1 100	7	3	1	250	2
	100	200	50	250		p_i
	1	1	1	1	p_j	

$X_{32}=100$

2	1	3	4	2	150	1
6	2	4	5	3	200	1
8	1	7	3	1 150	150	2
		200	50	250		p_i
		1	1	1	p_j	

$X_{35}=150$

2	1	3	4	2 100	150	1
6	2	4	5	3	200	1
8	1	7	3	1		
		200	50	100		p_i
		1	1	1	p_j	

$X_{15}=100$

2	1	3 50	4	2	50	1
6	2	4	5	3	200	1
8	1	7	3	1		
		200	50			p_i
		1	1		p_j	

$X_{13}=50$

2	1	3	4	2	
6	2	4 150	5 50	3	200
8	1	7	3	1	
		150	50		

$X_{23}=150, X_{24}=50$

2 150	1	3 50	4	2 100	300
6	2	4 150	5 50	3	200
8	1 100	7	3	1 150	250
150	100	200	50	250	

$Z_0=2(150)+3(50)+2(100)+4(150)+5(50)+1(100)+1(150)=1750$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=2$	$u_1+v_2-1=1$
$u_1+v_3=3$	$u_1+v_4-4=0$
$u_1+v_5=2$	$u_2+v_1-6=-3$
$u_2+v_3=4$	$u_2+v_2-2=1$
$u_2+v_4=5$	$u_2+v_5-3=0$
$u_3+v_2=1$	$u_3+v_1-8=-7$
$u_3+v_5=1$	$u_3+v_3-7=-5$
	$u_3+v_4-3=0$
$u_1=0$	$v_1=2$
$u_2=1$	$v_2=2$
$u_3=-1$	$v_3=3$
	$v_4=4$
	$v_5=2$

نظرا لوجود قيم موجبة للمتغيرات خارج القاعدة نقوم بانشاء حلقة +-+-ابتداءا من المتغير المرشح للدخول للقاعدة:

2 150	1 + 	3 50	4 	2 - 100	300
6 	2 	4 150	5 50	3 	200
8 	1 - 100	7 	3 	1 + 150	250
150	100	200	50	250	

يصبح لدينا:

2 150	1 100	3 50	4 	2 	300
6 	2 	4 150	5 50	3 	200
8 	1 	7 	3 	1 250	250
150	100	200	50	250	

$Z_0=2(150)+3(50)+1(100)+4(150)+5(50)+1(250)=1650$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=2$	$u_1+v_4-4=0$
$u_1+v_2=1$	$u_2+v_1-6=-3$
$u_1+v_3=3$	$u_2+v_2-2=0$
$u_1+v_5=2$	$u_2+v_5-3=0$
$u_2+v_3=4$	$u_3+v_1-8=-7$
$u_2+v_4=5$	$u_3+v_2-1=-1$
$u_3+v_5=1$	$u_3+v_3-7=-5$
	$u_3+v_4-3=0$
$u_1=0$	$v_1=2$
$u_2=1$	$v_2=1$
$u_3=-1$	$v_3=3$
	$v_4=4$
	$v_5=2$

بما أن جميع قيم المتغيرات خارج القاعدة معدومة أو سالبة فهذا هو الحل الأمثل.

تشكيل جدول النقل وحله اذا كان البديل B:

2 150	1	3	4	4	300	1
6	2	4	5	2	200	2
8	1	7	3	2	250	1
150	100	200	50	250		p_i
4	1	1	1	2	p_j	

$X_{11}=150$

2	1	3	4	4	150	2
6	2	4	5	2 200	200	2
8	1	7	3	2	250	1
	100	200	50	250		p_i
	1	1	1	2	p_j	

$X_{25}=200$

2	1	3 150	4	4	150	2
6	2	4	5	2		
8	1	7	3	2	250	1
	100	200	50	50		p_i
	0	4	1	2	p_j	

$X_{13}=150$

2	1	3	4	4	
6	2	4	5	2	
8	1 100	7 50	3 50	2 50	250
	100	50	50	50	

$X_{32}=100$, $X_{33}=50$, $X_{34}=50$, $X_{35}=50$

2 / 150	1	3 / 150	4	4	300
6	2	4	5	2 / 200	200
8	1 / 100	7 / 50	3 / 50	2 / 50	250
150	100	200	50	250	

$Z_0=2(150)+3(150)+2(200)+1(100)+7(50)+3(50)+2(50)=1850$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=2$	$u_1+v_2-1=-4$
$u_1+v_3=3$	$u_1+v_4-4=-5$
$u_2+v_5=2$	$u_1+v_5-4=-6$
$u_3+v_2=1$	$u_2+v_1-6=0$
$u_3+v_3=7$	$u_2+v_2-2=-1$
$u_3+v_4=3$	$u_2+v_3-4=3$
$u_3+v_5=2$	$u_2+v_4-5=-2$
	$u_3+v_1-8=-2$
$u_1=0$	$v_1=2$
$u_2=4$	$v_2=-3$
$u_3=4$	$v_3=3$
	$v_4=-1$
	$v_5=-2$

نظرا لوجود قيمة موجبة للمتغيرات خارج القاعدة X_{23} نقوم بانشاء حلقة +-+-ابتداءا من المتغير المرشح للدخول للقاعدة:

2 / 150	1	3 / 150	4	4	300
6	2	4 / +	5	2 / - / 200	200
8	1 / 100	7 / - / 50	3 / 50	2 / + / 50	250
150	100	200	50	250	

يصبح لدينا:

2 150	1	3 150	4	4	300
6	2	4 50	5	2 150	200
8	1 100	7	3 50	2 100	250
150	100	200	50	250	

$Z_0=2(150)+3(150)+4(50)+2(150)+1(100)+3(50)+2(100)=1700$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=2$	$u_1+v_2-1=-1$
$u_1+v_3=3$	$u_1+v_4-4=-2$
$u_2+v_3=4$	$u_1+v_5-4=-3$
$u_2+v_5=2$	$u_2+v_1-6=-3$
$u_3+v_2=1$	$u_2+v_2-2=-1$
$u_3+v_4=3$	$u_2+v_4-5=-2$
$u_3+v_5=2$	$u_3+v_1-8=-5$
	$u_3+v_3-7=-3$
$u_1=0$ $u_2=1$ $u_3=1$	$v_1=2$ $v_2=0$ $v_3=3$ $v_4=2$ $v_5=1$

بما أن جميع قيم المتغيرات خارج القاعدة معدومة أو سالبة فهذا هو الحل الأمثل.

من الأفضل اختيار البديل A لأنه أقل تكلفة من البديل B.

حل التمرين رقم 07:

1. حل نموذج النقل:

أولا نوجد الحل المبدئي باستعمال طريقة أقل تكلفة:

10	20 100	30	100	10
20	50	40	200	20
100	100	100	300	p_i
10	30	10	p_j	

$X_{12}=100$

10	20	30	
20 100	50	40 100	200
100		100	300

$X_{21}=100, X_{23}=100$

10	20 100	30	100
20 100	50	40 100	200
100	100	100	300

$Z_0=20(100)+20(100)+40(100)=8000$

ثانيا بما أن عدد الحلول أقل من عدد الأسطر مجموع مع عدد الأعمدة مطروحا منه الواحد نضيف خانة نضع بها الكمية ε التي هي قيمة مهملة وقريبة من الصفر حتى نتمكن من اختبار ان كان الحل المحصل عليه حلا نهائيا:

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=10$ $u_1+v_2=10$ $u_2+v_1=20$ $u_2+v_3=40$	$u_1+v_3-30=0$ $u_2+v_2-50=-30$
$u_1=0$ $v_1=10$ $u_2=10$ $v_2=10$ $v_3=30$	

بما أن جميع القيم للمتغيرات خارج القاعدة فالحل هو الأمثل.

2. حل نموذج إعادة النقل:

باستخدام طريقة فام:

نقوم باضافة قيمة العرض الاجمالي أو الطلب الاجمالي في جميع صفوف العرض أو أعمدة الطلب.

	المصنع الأول	المصنع الثاني	المخزن I	المخزن II	المخزن III		
المصنع الأول	0	20	10	20	30	400	10
المصنع الثاني	10	0	20	50	40	500	10
المخزن I	20	30	0	40	10	300	10
المخزن II	40	20	10	0 300	20	300	10

المخزن III	50	70	80	20	0	300	20
	300	300	400	400	400		p_i
	10	20	10	20	10	p_j	

X_{44}=300

0	20	10	20 100	30	400	10
10	0	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0	300	20
300	300	400	100	400		p_i
10	20	10	20	10	p_j	

X_{14}=100

0	20	10	20	30	300	10
10	0 300	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0	300	20
300	300	400		400		p_i
10	20	10		10	p_j	

X_{22}=300

0	20	10	20	30	300	10
10	0	20	50	40	200	10

20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0 300	300	20
300		400		400		p_i
10		10		10	p_j	

X_{55}=300

0	20	10	20	30	300	10
10	0	20	50	40	200	10
20	30	0	40	10 100	300	10
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0		
300		400		100		p_i
10		10		20	p_j	

X_{35}=100

0	20	10	20	30	300	10
10	0	20	50	40	200	10
20	30	0 200	40	10	200	20
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0		
300		400				p_i
10		10			p_j	

X_{33}=200

0 300	20	10	20	30	300	10
10	0	20	50	40	200	10
20	30	0	40	10		
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0		
300		200				p_i
10		10			p_j	

X_{11}=300

0	20	10	20	30	
10	0	20 200	50	40	200
20	30	0	40	10	
40	20	10	0	20	
50	70	80	20	0	
		200			

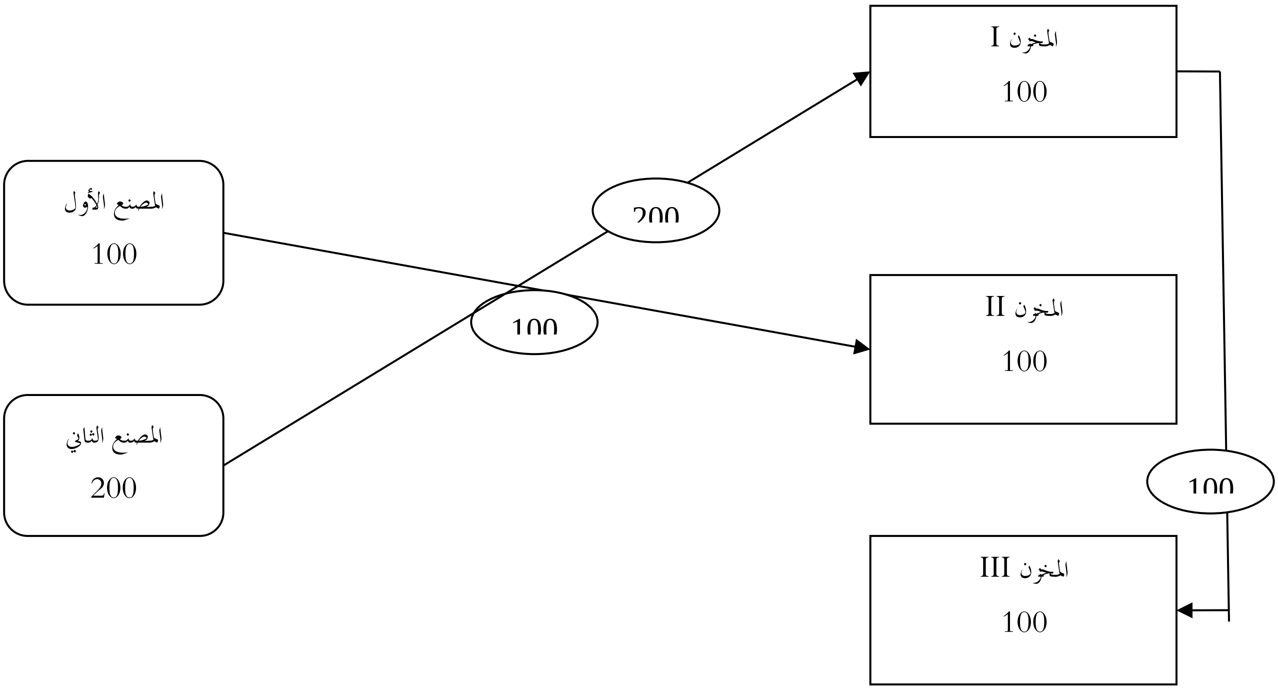
X_{23}=200

0 300	20	10	20 100	30	400
10	0 300	20 200	50	40	500
20	30	0 200	40	10 100	300
40	20	10	0 300	20	300
50	70	80	20	0 300	300
300	300	400	400	400	

Z_0=20(100)+20(200)+10(100)=7000

الكميات التي توجد في قطر الجدول كلها معدومة نظرا لعدم نقل السلعة بل تبقى في نفس المكان وبالتالي تكلفتها معدومة.

نلاحظ أن نموذج إعادة النقل أقل تكلفة من نموذج النقل المباشر ونوضح عملية إعادة النقل بالرسم البياني التالي:



حل التمرين رقم 08:

نقوم بحل نموذج النقل ثم نموذج إعادة النقل ونقارن:

1 / 2	3 / 6	5 / 2	**10**
9	6	3 / 8	**8**
2	6	10	

$$Z_0=1(2)+3(6)+5(2)+3(8)=54$$

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=1$ $u_1+v_2=3$ $u_1+v_3=5$	$u_2+v_1-9=-10$ $u_2+v_2-6=-5$

$u_2+v_3=3$	
$u_1=0$ $v_1=1$ $u_2=-2$ $v_2=3$ $v_3=5$	

بما أن المتغيرات خارج القاعدة تعطي قيما سالبة فهذا هو الحل النهائي.

	المنجم الأول	المنجم الثاني	المصنع I	المصنع II	المصنع III		
المنجم الأول	0	14	1	3	5	28	1
المنجم الثاني	12	0	9	6	3	26	3
المصنع I	10	12	0	14	18	18	10
المصنع II	14	11	11	0	16	18	11
المصنع III	16	20	15	13	0 18	18	13
	18	18	20	24	28		p_i
	10	11	1	3	3	p_j	

$X_{55}=18$

0	14	1	3	5	28	1
12	0 18	9	6	3	26	3
10	12	0	14	18	18	10
14	11	11	0	16	18	11
16	20	15	13	0		
18	18	20	24	10		p_i
10	11	1	3	2	p_j	

$X_{22}=18$

0	14	1	3	5	28	1
12	0	9	6	3	8	3

10	12	0	14	18	18	10
14	11	11	0 18	16	18	11
16	20	15	13	0		
18		20	24	10		p_i
10		1	3	2	p_j	

X_{44}=18

0	14	1	3	5	28	1
12	0	9	6	3	8	3
10	12	0 18	14	18	18	10
14	11	11	0	16		
16	20	15	13	0		
18		20	6	10		p_i
10		1	3	2	p_j	

X_{33}=18

0 18	14	1	3	5	28	1
12	0	9	6	3	8	3
10	12	0	14	18		
14	11	11	0	16		
16	20	15	13	0		
18		2	6	10		p_i
12		8	3	2	p_j	

X_{11}=18

0	14	1 2	3	5	10	1
12	0	9	6	3	8	3
10	12	0	14	18		

14	11	11	0	16		
16	20	15	13	0		
		2	6	10		p_i
		8	3	2	p_j	

$X_{13}=2$

0	14	1	3 6	5	8	1
12	0	9	6	3	8	3
10	12	0	14	18		
14	11	11	0	16		
16	20	15	13	0		
			6	10		p_i
			3	2	p_j	

$X_{14}=6$

0	14	1	3	5 2	2
12	0	9	6	3 8	8
10	12	0	14	18	
14	11	11	0	16	
16	20	15	13	0	
				10	

$X_{15}=2$, $X_{25}=8$

0 18	14	1 2	3 6	5 2	28
12	0 18	9	6	3 8	26
10	12	0 18	14	18	18
14	11	11	0	16	18

			18		
16	20	15	13	0 18	18
18	18	20	24	28	

$Z_0=1(2)+3(6)+5(2)+3(8)=54$

تكلفة نموذج النقل ونموذج إعادة النقل متساوية ولا توجد عملية إمكانية إعادة النقل ومن الأفضل الاعتماد على النقل المباشر.

<u>حل التمرين رقم 09:</u>

1. إيجاد الحل الأمثل لمشكل النقل:

	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2	العرض	
المخزن I	1	2	10	1
المخزن II	2 10	5	10	3
المخزن III	3	4	10	1
الطلب	10	20		p_i
	1	2	p_j	

$X_{21}=10$

	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2	العرض
المخزن I	1	2 10	10
المخزن II	2	5	10
المخزن III	3	4 10	10
الطلب		20	

$X_{12}=10, X_{32}=10$

	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2	العرض
المخزن I	1 / ε	2 / 10	10
المخزن II	2 / 10	5	10
المخزن III	3	4 / 10	10
الطلب	10	20	

$Z_0=2(10)+2(10)+4(10)=80$

نختبر إن كان الحل نهائي ونظرا لكون عدد الحلول أقل من عدد الأسطر مجموع مع عدد الأعمدة مطروحا منه الواحد نضيف في خانة من الخانات الفارغة الكمية ε المهملة والقريبة الى الصفر:

B.V	N.B.V
$u_1+v_1=1$ $u_1+v_2=2$ $u_2+v_1=2$ $u_3+v_2=4$	$u_2+v_2-5=-2$ $u_3+v_1-3=0$
$u_1=0 \quad v_1=1$ $u_2=1 \quad v_2=2$ $u_3=2$	

بما أن جميع قيم المتغيرات خارج القاعدة في الاختبار كانت سالبة فهذا الحل هو الحل الأمثل.

2. ايجاد الحل لمشكلة إعادة النقل:

نضيف قيمة العرض الاجمالي أو الطلب الاجمالي على اعتبار أنهما متساويان لكل كمية مطلوبة وكمية معروضة.

	المخزن I	المخزن II	المخزن III	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2		
المخزن I	0	4	1	1	2	40	1
المخزن II	1	0	2	2	5	40	1
المخزن III	8	2	0	3	4	40	2

نقطة البيع 1	2	4	6	0	8	30	2
نقطة البيع 2	3	2	7	1	0 30	30	1
	30	30	30	40	50		p_i
	1	2	1	1	2	p_j	

X_{55}=30

0	4	1	1	2 20	40	1
1	0	2	2	5	40	1
8	2	0	3	4	40	2
2	4	6	0	8	30	2
3	2	7	1	0		
30	30	30	40	20		p_i
1	2	1	1	2	p_j	

X_{15}=20

0	4	1	1	2	20	1
1	0	2	2	5	40	1
8	2	0 30	3	4	40	2
2	4	6	0	8	30	2
3	2	7	1	0		
30	30	30	40			p_i
1	2	1	1		p_j	

X_{33}=30

0	4	1	1	2	20	1
1	0	2	2	5	40	1
8	2	0	3	4	10	1
2	4	6	0	8	30	2

			30			
3	2	7	1	0		
30	30		40			p_i
1	2		1		p_j	

$X_{44}=30$

0	4	1	1	2	20	1
1	0	2	2	5	40	1
	30					
8	2	0	3	4	10	1
2	4	6	0	8		
3	2	7	1	0		
30	30		10			p_i
1	2		1		p_j	

$X_{22}=30$

0	4	1	1	2	20	1
1	0	2	2	5	10	1
8	2	0	3	4	10	5
			10			
2	4	6	0	8		
3	2	7	1	0		
30			10			p_i
1			1		p_j	

$X_{34}=10$

0	4	1	1	2	20	1
20						
1	0	2	2	5	10	1
10						
8	2	0	3	4		
2	4	6	0	8		

3	2	7	1	0		
30						p_i
1					p_j	

$X_{11}=20, X_{21}=10$

	المخزن I	المخزن II	المخزن III	نقطة البيع 1	نقطة البيع 2	
المخزن I	0 / 20	4	1	1	2 / 20	40
المخزن II	1 / 10	0 / 30	2	2	5	40
المخزن III	8	2	0 / 30	3 / 10	4	40
نقطة البيع 1	2	4	6	0 / 30	8	30
نقطة البيع 2	3	2	7	1	0 / 30	30
	30	30	30	40	50	

$Z_0=2(20)+1(10)+3(10)=80$

نلاحظ أن عملية النقل المباشر وإعادة النقل لهما نفس التكلفة.

حل التمرين رقم 10:

1. ايجاد الحل الامثل لمشكلة النقل:

	السوق 1	السوق 2	العرض	
المعمل I	10	12	10	2
المعمل II	16	12	10	4
المعمل III	14	8 / 10	10	6
الطلب	20	10		p_i
	4	4	p_j	

$X_{22}=10$

	السوق 1	السوق 2	العرض	
المعمل I	10 10	12	10	2
المعمل II	16 10	12	10	4
المعمل III	14	8		
الطلب	20			p_i
	4		p_j	

$X_{11}=10, X_{21}=10$

	السوق 1	السوق 2	العرض
المعمل I	10 10	12	10
المعمل II	16 10	12	10
المعمل III	14	8 10	10
الطلب	20	10	

$Z_0=10(10)+16(10)+8(10)=340$

2. حل مشكلة إعادة النقل:

نضيف القيمة الاجمالية للعرض أو الطلب الى كل كمية عرض وكمية طلب.

	المعمل I	المعمل II	المعمل III	السوق 1	السوق 2		
المعمل I	0	1	1	10	12	40	1
المعمل II	1	0	2	14	12	40	1
المعمل III	1	1	0	16	8	40	1
السوق 1	1	1	1	0 30	1	30	1
السوق 2	2	0	1	2	0	30	1
	30	30	30	50	40		p_i
	1	1	1	2	1	p_j	

$X_{44}=30$

0	1	1	10	12	40	1
1	0	2	14	12	40	1
1	1	0	16	8	40	1
1	1	1	0	1		
2	0	1	2 20	0	30	1
30	30	30	20	40		p_i
1	1	1	8	8	p_j	

X_{54}=20

0	1	1	10	12	40	1
1	0	2	14	12	40	1
1	1	0	16	8	40	1
1	1	1	0	1		
2	0	1	2	0 10	10	1
30	30	30		40		p_i
1	1	1		8	p_j	

X_{55}=10

0	1	1	10	12	40	1
1	0	2	14	12	40	1
1	1	0	16	8 30	40	1
1	1	1	0	1		
2	0	1	2	0		
30	30	30		30		p_i
1	1	1		4	p_j	

X_{35}=30

0 30	1	1	10	12	40	1
1	0	2	14	12	40	1
1	1	0	16	8	10	1
1	1	1	0	1		
2	0	1	2	0		
30	30	30				p_i
1	1	1			p_j	

X_{11}=30

0	1	1	10	12	10	1
1	0 30	2	14	12	40	2
1	1	0	16	8	10	1
1	1	1	0	1		
2	0	1	2	0		
	30	30				p_i
	1	1			p_j	

X_{22}=30,

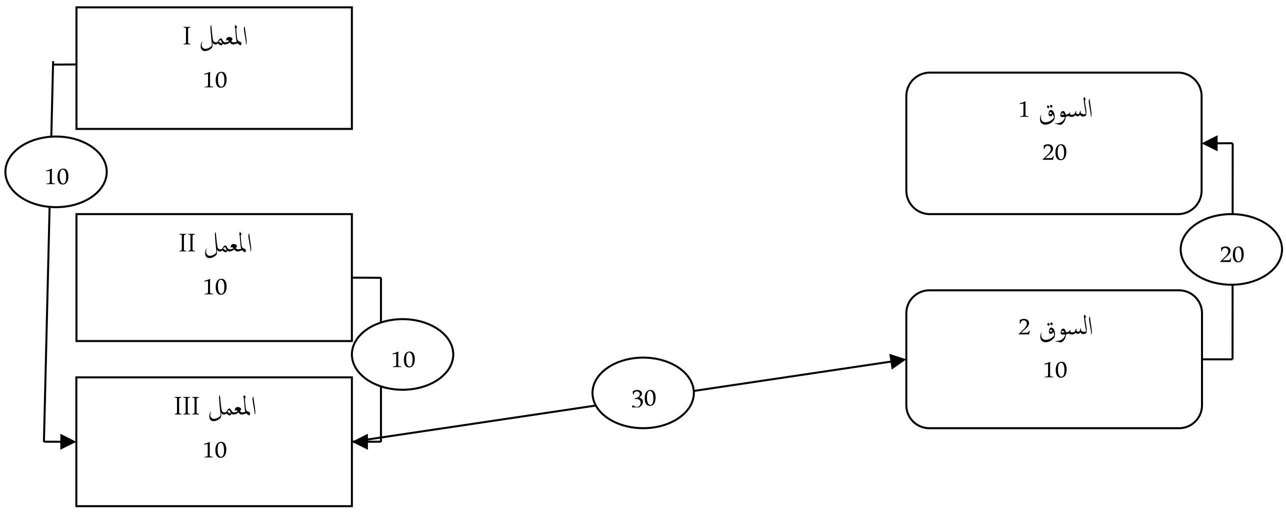
0	1	1 10	10	12	10
1	0	2 10	14	12	10
1	1	0 10	16	8	10
1	1	1	0	1	
2	0	1	2	0	
		30			

X_{13}=10, X_{23}=10, X_{33}=10

	المعمل I	المعمل II	المعمل III	السوق 1	السوق 2	
المعمل I	0 (30)	1	1 (10)	10	12	40
المعمل II	1	0 (30)	2 (10)	14	12	40
المعمل III	1	1	0 (10)	16	8 (30)	40
السوق 1	1	1	1	0 (30)	1	30
السوق 2	2	0	1	2 (20)	0 (10)	30
	30	30	30	50	40	

$Z_0=1(10)+2(10)+8(30)+2(20)=290$

نلاحظأن عملية إعادة النقل أقل تكلفة من عملية النقل المباشر ويمكن توضيح عملية إعادة النقل بالرسم البياني التالي:



حل التمرين رقم 11:

1. إيجاد التخصيص الأمثل:

	I	II	III	IV	V	VI	P_i
P_1	65	73	63	57	0	0	0
P_2	67	70	65	58	0	0	0
P_3	68	72	69	55	0	0	0
P_4	67	75	70	59	0	0	0
P_5	71	69	75	57	0	0	0
P_6	69	71	66	59	0	0	0

	I	II	III	IV	V	VI
P_1	65	73	63	57	0	0
P_2	67	70	65	58	0	0
P_3	68	72	69	55	0	0
P_4	67	75	70	59	0	0
P_5	71	69	75	57	0	0
P_6	69	71	66	59	0	0
q_j	65	69	63	55	0	0

	I	II	III	IV	V	VI
P_1	0	4	0	2	0	0
P_2	2	1	2	3	0	0
P_3	3	3	6	0	0	0
P_4	2	6	7	4	0	0
P_5	6	0	12	2	0	0
P_6	4	2	3	4	0	0

	I	II	III	IV	V	VI
P_1	0	6	0	2	2	2
P_2	0	1	0	1	0	0
P_3	3	5	6	0	2	2
P_4	0	6	5	2	0	0
P_5	4	0	10	0	0	0
P_6	2	2	1	2	0	0

$Z_0=67+69+63+59+0+0=258$

حل التمرين رقم 12:

1. إيجاد التخصيص الأمثل:

	J_1	J_2	J_3	J_4	p_i
مصطفى	7	10	7	11	7
عيسى	4	6	10	6	4
جمال	3	5	3	5	3
مختار	6	9	12	9	6
محمد	9	8	11	8	8

	J_1	J_2	J_3	J_4
مصطفى	0	3	0	4
عيسى	0	2	6	2
جمال	0	2	1	2
مختار	0	3	6	3
محمد	1	0	3	0
q_j	0	0	0	0

	J_1	J_2	J_3	J_4
مصطفى	0	3	0	4
عيسى	0	2	6	2
جمال	0	2	1	2
مختار	0	3	6	3
محمد	1	0	3	0

	J_1	J_2	J_3	J_4
مصطفى	0	1	0	2
عيسى	0	0	6	0
جمال	0	0	1	0
مختار	0	1	6	1
محمد	3	0	5	0

$Z_0=7+6+6+5=24$

حل التمرين رقم 13:

1. ايجاد التخصيص الأمثل:

	I	II	III	IV	p_i
أحمد	16	10	14	11	10
اسلام	14	11	15	15	11
رضا	15	15	13	12	12
محمود	13	12	14	15	12

	I	II	III	IV
أحمد	6	0	4	1
اسلام	3	0	4	4
رضا	3	3	1	0
محمود	1	0	2	3
q_j	1	0	1	0

	I	II	III	IV
أحمد	5	0	3	1
اسلام	2	0	3	4
رضا	2	3	0	0
محمود	0	0	1	3

	I	II	III	IV
أحمد	4	0	2	0
اسلام	1	0	2	3
رضا	3	4	0	0

محمود	0	0	1	3

$Z_0=11+11+13+13=48$

حل التمرين رقم 14:

1. إيجاد التخصيص الأمثل:

المهام / الموظفين	A	B	C	D	p_i
I	5	6	2	4	2
II	9	5	1	9	1
III	1	2	6	1	1
IV	7	6	15	12	6

المهام / الموظفين	A	B	C	D
I	3	4	0	2
II	8	4	0	8
III	0	1	5	0
IV	1	0	9	6
q_j	**0**	**0**	**0**	**0**

المهام / الموظفين	A	B	C	D
I	3	4	0	2
II	8	4	0	8
III	0	1	5	0
IV	1	0	9	6

المهام / الموظفين	A	B	C	D
I	1	2	0	0
II	6	2	0	6
III	0	1	5	0
IV	1	0	9	6

$Z_0=1+6+4+1=12$

حل التمرين رقم 15:

1. إيجاد الحل الأمثل:

6	5	4	3	2	1		p_i
51	25	52	39	72	41	A	25
50	81	65	49	29	22	B	22
32	32	51	60	39	27	C	27
43	37	52	48	50	45	D	37
33	30	26	39	40	29	E	26
30	51	60	40	40	82	F	30

6	5	4	3	2	1	
26	0	27	14	47	16	A
28	59	43	27	7	0	B
5	5	24	33	12	0	C
6	0	15	11	13	8	D
7	4	0	13	14	3	E
0	21	30	10	10	52	F
0	0	0	10	7	0	q_j

6	5	4	3	2	1	
26	0	27	4	40	16	A
28	59	43	17	0	0	B
5	5	24	23	5	0	C
6	0	15	1	6	8	D
7	4	0	3	7	3	E

~~0~~	~~21~~	~~30~~	~~0~~	~~3~~	~~52~~	F

6	5	4	3	2	1	
26	0	27	3	39	16	A
28	60	44	17	0	1	B
4	5	24	22	4	0	C
5	0	15	0	5	8	D
6	4	0	2	6	3	E
0	22	31	0	3	53	F

$Z_0=30+25+26+48+27+29=185$

حل التمرين رقم 16:

1. إيجاد الحل الأمثل:

الأجهزة / المهام	1	2	3	4	p_i
A	14	12	10	16	10
B	16	10	12	14	10
C	10	18	12	12	10

الأجهزة / المهام	1	2	3	4
A	4	2	0	6
B	6	0	2	4
C	0	8	2	2
q_j	0	0	0	2

الأجهزة / المهام	1	2	3	4
A	4	2	0	4

B	6	0	2	2
C	0	8	2	0

$Z_0=10+10+10=30$

حل التمرين رقم 17:

1. إيجاد الحل الذي يقلل الفترة الزمنية:

أولا نقوم بالحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	المركز الاستهلاكي 4	المركز الاستهلاكي 3	المركز الاستهلاكي 2	المركز الاستهلاكي 1	
المعمل الأول	1 100	3	2	1	100
المعمل الثاني	3	4 50	2 30	2	80
المعمل الثالث	2	4	3 30	3 80	110
	100	50	60	80	

$Max\ t_{ij}(1,4,2,3,3)=4 \quad Tk_1=4$

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي $Max\ t_{ij}$نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند $Max\ t_{ij}$:

1 - 100	3 +	2	1	100
3 +	4 - 50	2 30	2	80
2	4	3 30	3 80	110
100	50	60	80	

1 50	3 50	2	1	100
3 50	4	2 30	2	80
2	4	3 30	3 80	110
100	50	60	80	

$Max\ t_{ij}(1,3,3,2,3,3)=3 \qquad Tk_2=3$

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي $Max\ t_{ij}$ نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند $Max\ t_{ij}$:

(1) 50	(3) 50	(2)	(1)	100
(3) - 50	(4)	(2) + 30	(2)	80
(2) +	(4)	(3) - 30	(3) 80	110
100	50	60	80	

(1) 50	(3) 50	(2)	(1)	100
(3) 20	(4)	(2) 60	(2)	80
(2) 30	(4)	(3)	(3) 80	110
100	50	60	80	

$Max\ t_{ij}(1,3,3,2,2,3)=3$ $Tk_3=3$

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي $Max\ t_{ij}$ نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند $Max\ t_{ij}$:

(1) 50	(3) 50	(2)	(1)	100
(3) - 20	(4)	(2) 60	(2) +	80
(2) + 30	(4)	(3)	(3) - 80	110
100	50	60	80	

(1) 50	(3) 50	(2)	(1)	100
(3)	(4)	(2) 60	(2) 20	80
(2) 50	(4)	(3)	(3) - 60	110
100	50	60	80	

$Max\ t_{ij}(1,3,2,2,2,3)=3$ $Tk_4=3$

لا يمكن اقامة الحلقة وبالتالي فهذا هو الحل الأمثل والمسار الذي يقلل الزمن.

حل التمرين رقم 18:

1. إيجاد الحل الذي يقلل الفترة الزمنية:

أولا نقوم بالحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
U_1	25 / 15	30 / 20	20 / 2	40	45	37	37
U_2	30	25	20 / 13	30 / 9	40	20	22
U_3	40	20	40	35 / 16	45 / 16	22	32
U_4	25	24	50	27	30 / 4	25 / 10	14
	15	20	15	25	20	10	

$\text{Max } t_{ij}=(25,30,20,20,30,35,45,30,25)=45$ $Tk_1=45$

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي $\text{Max } t_{ij}$ نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند $\text{Max } t_{ij}$:

25 / 15	30 / 20	20 / 2	40	45	37	37
30	25	20 / 13	30 / 9	40	20	22
40	20	40	35 / 16	45 - / 16	22 +	32
25	24	50	27	30 + / 4	25 - / 10	14
15	20	15	25	20	10	

25 / 15	30 / 20	20 / 2	40	45	37	37
30	25	20 / 13	30 / 9	40	20	22

40	20	40	35 / 16	45 / 6	22 / 10	32
25	24	50	27	30 / 14	25	14
15	20	15	25	20	10	

Max t_{ij}=(25,30,20,20,30,35,45,30,22)=45 Tk_2=45

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

25 / 15	30 / 20	20 / 2	40	45	37	37
30	25	20 / 13	30 (-) / 9	40 (+)	20	22
40	20	40	35 (+) / 16	45 (-) / 6	22 / 10	32
25	24	50	27	30 / 14	25	14
15	20	15	25	20	10	

25 / 15	30 / 20	20 / 2	40	45	37	37
30	25	20 / 13	30 / 3	40 / 6	20	22
40	20	40	35 / 22	45	22 / 10	32
25	24	50	27	30 / 14	25	14
15	20	15	25	20	10	

Max t_{ij}=(25,30,20,20,30,40,35,30,22)=40 Tk_3=40

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

25 / 15	30 / 20	20 / 2	40	45	37	37
30	25	20 / 13	30 / 3	40 (-) / 6	20	22
40	20	40	35 / 22	45	22 / 10	32
25	24	50	27	30	25	14

				14		
15	20	15	25	20	10	

لا يمكن اقامة الحلقة وبالتالي فهذا هو الحل الأمثل والمسار الذي يقلل الزمن.

حل التمرين رقم 19:

1. إيجاد الحل الذي يقلل الفترة الزمنية:

أولا نقوم بالحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

3 5	7 6	5	4	5	11
9	5 2	6 5	6 6	2	13
3	10	8	7 4	5 6	10
5	8	5	10	6	

Max t_{ij}=(3,7,5,6,6,7,5)=7 $\qquad$ Tk_1=7

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

3 5	7 - 6	5 +	4	5	11
9	5 + 2	6 - 5	6 6	2	13
3	10	8	7 4	5 6	10
5	8	5	10	6	

3 5	7 1	5 5	4	5	11
9	5 7	6	6 6	2	13
3	10	8	7 4	5 6	10
5	8	5	10	6	

Max t_{ij}=(3,7,5,5,6,7,5)=7 Tk_2=7

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

3 / 5	7 / - 1	5 / 5	4 / +	5	11
9	5 / + 7	6	6 / - 6	2	13
3	10	8	7 / 4	5 / 6	10
5	8	5	10	6	

3 / 5	7	5 / 5	4 / 1	5	11
9	5 / 8	6	6 / 5	2	13
3	10	8	7 / 4	5 / 6	10
5	8	5	10	6	

Max t_{ij}=(3,5,5,4,6,7,5)=7 Tk_3=7

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

3 / - 5	7	5 / 5	4 / + 1	5	11
9	5 / 8	6	6 / 5	2	13
3 / +	10	8	7 / - 4	5 / 6	10
5	8	5	10	6	

3 / 1	7	5 / 5	4 / 5	5	11
9	5 / 8	6	6 / - 5	2	13

3 4	10	8	7	5 6	10
5	8	5	10	6	

Max t_{ij}=(3,5,4,5,6,3,5)=6 Tk_4=6

لا يمكن اقامة الحلقة وبالتالي فهذا هو الحل الأمثل والمسار الذي يقلل الزمن.

حل التمرين رقم 20:

1. إيجاد الحل الذي يقلل الفترة الزمنية:

أولا نقوم بالحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

10 12	0 3	20	11	15
1	7 5	19 15	20 5	25
12	14	16	18 5	5
12	8	15	10	

Max t_{ij}=(10,0,7,19,20,18)=20 Tk_1=20

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

10 - 12	0 3	20	11 +	15
1 +	7 5	19 15	20 - 5	25
12	14	16	18 5	5
12	8	15	10	

10 7	0 3	20	11 5	15
1 5	7 5	19 15	20	25
12	14	16	18 5	5
12	8	15	10	

Max t_{ij}=(10,0,1,7,19,11,18)=19 Tk_2=19

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

10 / 7	0 / 3	20	11 / 5	15
1 / 5	7 / 5	19 - / 15	20	25
12	14	16	18 / 5	5
12	8	15	10	

لا يمكن اقامة الحلقة وبالتالي فهذا هو الحل الأمثل والمسار الذي يقلل الزمن.

نظريــة الألعاب
GAME THEORY

1. تقديم عام حول نظرية الألعاب:

أ. تعني كلمة مبارة المنافسة بين جهتين أو أكثر وفقا لقاعدة محددة مسبقا حيث أن كل جهة أو منافس يملك مجموعة من الاستراتيجيات التي تساعده.

ب. تسعى نظرية الالعاب الى تحديد الاستراتيجيات المثلى التي تحقق أعلى ربح متوقع أو أقل خسارة متوقعة مع الأخذ في الحسبان منافسة جهات أخرى.

ج. اللاعب يطلق على كل متنافس والذي له دور مهم في عملية اتخاذ القرار عن طريق تحديد الاستراتيجية المناسبة له.

د. مصفوفة الدفع هي عبارة عن مصفوفة ذات صفوف وأعمدة عناصرها تمثل النتائج التي يحصل عليها كل لاعب نتيجة لتطبيقه لمختلف الاستراتيجيات ويمكن أن تكون النتيجة ربح أو خسارة أو تعادل.

ه. اللعبة غالبا ما تعبر عن حساب اللاعب A وبالتالي المصفوفة كالآتي:

$$\begin{array}{cc} & \mathrm{B} \\ \mathrm{A} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

2. **معيار (MinMax(MaxMin:** بالنسبة للاعب A وعند اختياره الاستراتيجية الاولى ممكن أن يربح (a_{11} ,a_{12}, . ..,a_{1n}) ولكن في كل الحالات يضمن Min (a_{11} ,a_{12}, . ..,a_{1n}) وهكذا في الاستراتيجيات الأخرى وثم نأخذ أكبر قيمة من بين القيم الدنيا التي اخترناها في كل استراتيجية أي MaxMin أما اللاعب المنافس وعند اختياره للاستراتيجية الاولى يمكن أن يخسر $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ وبالتالي في أسوأ الحالات يمكن أن يخسر Max(a_{11} ,a_{21}, . ..,a_{m1}) ونفس الشيء بالنسبة لباقي الاستراتيجيات ثم نأخذ أقل قيمة من بين القيم التي اخترناها في كل استراتيجية أي MinMax فإذا وجدت نقطة تعادل بين MaxMin و MinMax فهي نقطة التوازن والقيمة المقابلة لها هي قيمة المباراة والاستراتيجيات التي تؤدي اليها هي التي يختارها كل لاعب.

3. **حل اللعبة بمزيج الاستراتيجيات:** اذا تعذر ايجاد نقطة توازن حسب المعيار السابق فإن اللاعبين سيختاران مزيج من الاستراتيجيات ونحسب احتمال أن يلعب اللعب كل استراتيجية بطريقتين:

أ. الحل البياني: يصلح فقط اذا كان عدد الأعمدة أو الأسطر يساوي اثنين ففي حالة 2xn نمثل المستقيمات ثم نختار أكبر أو أعلى تقاطع في الغلاف السفلي أما في حالة mx2 نمثل المستقيمات ونختار أقل قيمة أو التقاطع

الأقرب للمحور العمودي من الغلاف الخارجي أو الأيمن بعد تحديد احداثيات الحل نعوض في احدى معادلات التقاطع الذي خلف الحل لنحسب قيمة اللعبة.

ب. **معيار الهيمنة:** في حالة عدد الاسطر وعدد الاعمدة معا أكبر من اثنين يأتي أسلوب الهيمنة لتقليص المصفوفة اما أعمدة أو عدد الأسطر حتى يتوفر لدينا العدد اثنين من الاسطر أو الاعمدة وذلك بالتخلي عن بعض الاستراتيجيات غير المربحة أو التي تؤدي الى خسارة كبيرة ويمكن أن نستخدم المتوسط المرجح للمفاضلة بين استراتيجيتين أو أكثر مقارنة باستراتيجية واحدة.

ج. **الحل بطريقة السمبلكس:** وعند تعذر الحل بالطريقة البيانية تأتي طريقة السمبلكس القوية ويمكن تلخيصها:

B / A	y_1	y_2	...	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}

ويصبح البرنامج الخطي باختصار:

$$Min\ Z_0 = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$$

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \geq 1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \geq 1$$

$$\cdots \quad \cdots \cdots \quad \cdots$$

$$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \geq 1$$

$$X_1, X_2, \dots, X_m \geq 0$$

حيث: $V^* = \frac{1}{X_0} - k$

ثم نقوم بحل النموذج المقابل لكونه الأسهل في الحل:

$$Max\ y_0 = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq 1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq 1$$

$$\cdots \quad \cdots \cdots \quad \cdots$$

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq 1$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$$

حيث: $V^* = \frac{1}{Y_0} - k$

K: هو ثابت نضيفه للمصفوفة في حالة وجود أرقام سالبة حتى تكون جميع الأرقام موجبة أو معدومة.

4- ملخص حول نظرية الألعاب:

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="3">نظرية الألعاب(اللعبة غالبا تعبر عن حساب اللاعب A)</td></tr>
<tr><td>أسلوب
MaxMin(MinMax)</td><td colspan="2">نختار بالنسبة لـ A أسوأ نتيجة لكل استراتيجية ثم من بينها يختار أكبر قيمة من هاته القيم أي MaxMin ونختار بالنسبة للاعب Bأقصى خسارة لكل استراتيجية ثم نختار أقل خسارة بين هاته القيم أي MinMax وعند ايجاد نقطة تعادل بين MaxMin وبين MinMax تسمى بنقطة التوازن.</td></tr>
<tr><td>الحل البياني فقط في حالة:
$m = 2$ أو $n = 2$
حيث $m \times n$
$x_1 + x_2 = 1$
$y_1 + y_2 = 1$</td>
<td>$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \end{pmatrix}$
<table dir="rtl">
<tr><th>الربح المتوقع لـA</th><th>إستراتيجياتB</th></tr>
<tr><td>$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = v$
$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} = v$
$(a_{13} - a_{23})x_1 + a_{23} = v$
$(a_{14} - a_{24})x_1 + a_{24} = v$</td><td>1
2
3
4</td></tr>
</table>
بعد تمثيل المستقيمات حيث x محصور بين الصفر والواحد لأنها احتمال نمثل بخط عمودي عند الواحد في محور الفواصل ومحور التراتيب أين x تساوي الصفر وبعدها نختار MaxMin أي أعلى نقطة في الغلاف السفلي هي الحل الأمثل وعند ايجاد x_1 يمكننا ايجاد قيمة اللعبة ثم احتمال الاستراتيجية الأخرى للاعب A أي x_2.</td>
<td>$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$
<table dir="rtl">
<tr><th>إستراتيجياتA</th><th>الربح المتوقعB</th></tr>
<tr><td>1
2
3
4</td><td>$(a_{11} - a_{12})y_1 + a_{12} = v$
$(a_{21} - a_{22})y_1 + a_{22} = v$
$(a_{31} - a_{32})y_1 + a_{32} = v$
$(a_{41} - a_{42})y_1 + a_{42} = v$</td></tr>
</table>
بعد تمثيل المستقيمات حيث y محصور بين الصفر والواحد لأنه احتمال نمثل بخط أفقي عند الواحد في محور التراتيب ومحور الفواصل أين y يساوي الصفر وبعدها نختار MinMax أي النقطة القريبة من محور التراتيب في الغلاف الأيمن وهي الحل الأمثل وعند ايجاد y_1 يمكننا ايجاد قيمة اللعبة ثم احتمال الاستراتيجية الأخرى للاعب B أي y_2.</td></tr>
<tr><td>أسلوب الهيمنة</td><td colspan="2">يتم بتقليص المصفوفة الى سطرين أو عمودين حتى نتمكن من حلها بيانيا ففي بعض الحالات بعض الاستراتيجيات لن تلعب اطلاقا لأنها غير مربحة لصاحبها وهي مهمنة باستراتيجيات أخرى.</td></tr>
<tr><td>أسلوب Simplex
عندما يكون عدد الاسطر والاعمدة أكبر من 2
في حالة معاملات سالبة نضيف k أكبر من أكبر معامل سالب للمصفوفة كلها.</td><td colspan="2">$$A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$Max\ y_0 = y_1 + y_2 + y_3$$
$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \le 1$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \le 1$$
$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \le 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$
$$v^* = \frac{1}{y_0} - k$$</td></tr>
</table>

$$y_1^* = y_1 \times \frac{1}{y_0}$$ $$y_2^* = y_2 \times \frac{1}{y_0}$$ $$y_3^* = y_3 \times \frac{1}{y_0}$$ $$x_1^* = x_1 \times \frac{1}{y_0}$$ $$x_2^* = x_2 \times \frac{1}{y_0}$$ $$x_3^* = x_3 \times \frac{1}{y_0}$$	

تمارين محلولة حول نظرية الألعاب

التمرين رقم 01:إن حصيلة المنافسة بين اثنين من المؤسسات Y,X أدت الى ظهور مصفوفة الدفع التالية:

المؤسسة X	المؤسسة Y		
		y_1	y_2
	x_1	-2	5
	x_2	2	-3

المطلوب:

1. أوجد قيمة اللعبة باستعمال الطريقة البيانية ؟

التمرين رقم 02:تتنافس مؤسستين في السوق ولكل مؤسسة استراتيجيات لمواجهة الأخرى كما يوضح الجدول التالي:

المؤسسة A	المؤسسة B		
		T_1	T_2
	S_1	1	2
	S_2	3	5
	S_3	-3	4
	S_4	7	-6

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني للمصفوفة اللعبة ؟

التمرين رقم 03:تعطى لك مصفوفة اللعبة التالية:

اللاعب A	اللاعب B			
		B_1	B_2	B_3
	A_1	65	62,5	80
	A_2	67,5	65	80

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني للمصفوفة اللعبة؟

التمرين رقم 04:إليك مصفوفة اللعبة التالية:

		اللاعب B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
اللاعب A	A_1	2	2	3	-1
	A_2	4	3	2	6

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني للمصفوفة اللعبة؟

التمرين رقم 05 :لتكن مصفوفة اللعبة التالية:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	1	-1	-2	-1
X_2	0	-2	8	6

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني للمصفوفة اللعبة؟

التمرين رقم 06:لتكن مصفوفة اللعبة التالية:

		اللاعب B	
		B_1	B_2
اللاعب A	A_1	2	4
	A_2	2	3
	A_3	3	2
	A_4	-2	6

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني للمصفوفة اللعبة؟

التمرين رقم 07:المصفوفة التالية تلخص نتائج الاستراتيجيات التي تنتهجها مؤسستين متنافستين في السوق:

		اللاعب B		
		B_1	B_2	B_3
اللاعب A	A_1	1	8	3
	A_2	6	4	5
	A_3	0	1	2

المطلوب:

حل اللعبة باستعمال أسلوب الهيمنة؟

التمرين رقم 08:لتكن مصفوفة اللعبة التي تعبر عن استراتيجيات مؤسستين متنافستين:

		المؤسسة B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
المؤسسة A	A_1	3	-2	-4	0	6
	A_2	-4	2	-1	7	-8
	A_3	2	-5	-4	1	-1
	A_4	0	-3	-2	-1	-1

المطلوب:

حل اللعبة باستعمال أسلوب الهيمنة؟

التمرين رقم 09:إليك مصفوفة اللعبة التالية:

		اللاعب B		
		B_1	B_2	B_3
اللاعب A	A_1	15	30	28
	A_2	43	22	52
	A_3	16	33	29

	A_4	25	10	26

المطلوب:

1. حل اللعبة باستعمال أسلوب الهيمنة؟

التمرين رقم 10:نتيجة للمنافسة بين شركتين تم الحصول على مصفوفة اللعبة التالية:

	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	5	10
x_2	2	-3	0
x_3	- 4	5	8

المطلوب:

1. استعمل أسلوب الهيمنة حتى يتسنى الحل بالطريقة البيانية وما هي قيمة اللعبة؟

التمرين رقم 11:إليك مصفوفة اللعبة التالية:

		B		
		B_1	B_2	B_3
A	A_1	-3	-2	6
	A_2	2	0	4
	A_3	5	-2	-4

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للعبة؟

التمرين رقم 12:إليك مصفوفة اللعبة التالية:

		اللاعب B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
اللاعب A	A_1	-4	-2	-2	3	1
	A_2	1	0	1	0	0
	A_3	-6	-5	-2	-4	4
	A_4	3	1	-6	0	-8

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للعبة ؟

التمرين رقم 13: إليك مصفوفة اللعبة التالية:

		اللاعب y			
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
اللاعب X	X_1	8	2	9	5
	X_2	6	5	7	8
	X_3	7	3	-4	7

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للعبة ؟

التمرين رقم 14:يتنافس مطعمان فيما بينهما لزيادة مبيعاتهما كل على حساب الآخر وكلا المطعمين يعتمد على ثلاث استراتيجيات ومصفوفة اللعبة هي:

B / A	نظافة المطعم	سعر الأطعمة	معاملة الزبون
نظافة المطعم	0	2	5
سعر الأطعمة	-5	4	2
معاملة الزبون	2	0	-1

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للعبة واستراتيجية كل مطعم ؟

التمرين رقم 15:فيما يلي مصفوفة العائد الخاصة بالاستراتيجيات التي تستخدمها الشركتين Y,X.

استراتيجيات الشركة Y				
		عدم القيام بحملة اعلانية	حملة اعلانية متوسطة	حملة اعلانية كبيرة
	عدم القيام بحملة اعلانية	50	40	28

استراتيجيات الشركة X	حملة اعلانية متوسطة	70	50	45
	حملة اعلانية كبيرة	75	47,5	50

المطلوب:

2. أوجد الحل الأمثل للعبة وإستراتيجية كل شركة ؟

التمرين رقم 16:إليك مصفوفة اللعبة التالية:Y

$$X\begin{bmatrix}12 & -8 & -2\\ -6 & 7 & 3\\ 10 & -6 & 2\end{bmatrix}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للعبة وإستراتيجية كل شركة باستعمال طريقة السمبلكس ؟

التمرين رقم 17:تتنافس مؤسستين من أجل الهيمنة على السوق ومصفوفة الدفع معطاة كما يلي:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-1	1	-1
A_2	0	1	0	0
A_3	0	0	1	1

المطلوب:

1. أوجد الاستراتيجية أو مزيج الاستراتيجيات المثلى لكلا المؤسستين ونتيجة المنافسة باستعمال طريقة السمبلكس ؟

التمرين رقم 18:لتكن مصفوفة الدفع التالية:

		اللاعب B			
		S_1	S_2	S_3	S_4
اللاعب A	S_1	3	-1	-3	-1,5
	S_2	-3	3	-1	1,5
	S_3	-4	-3	3	0,5
	S_4	-1	0	-3	-1

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل للعبة باستعمال طريقة السمبلكس ؟

التمرين رقم 19:

لتكن لدينا مصفوفة اللعب التالية: استراتيجية B

$$\text{استراتيجيةاللاعب}A \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

1. حدد قيمة المباراة وربح وخسارة كل لاعب باستعمال طريقة السمبلكس؟

التمرين رقم 20:

فيما يلي مصفوفة العائد الخاصة بالطرف A.

		استراتيجيات الطرف B			
استراتيجيات الطرف A		1	2	3	4
	1	5	10	-10	8
	2	6	7	0	7
	3	4	1	8	9

المطلوب:

1. استخدم البرمجة الخطية في الوصول الى حل المباراة بين الطرفين باستعمال طريقة السمبلكس؟

حلول التمارين

حل التمرين رقم 01:

1. إيجاد الحل البياني:

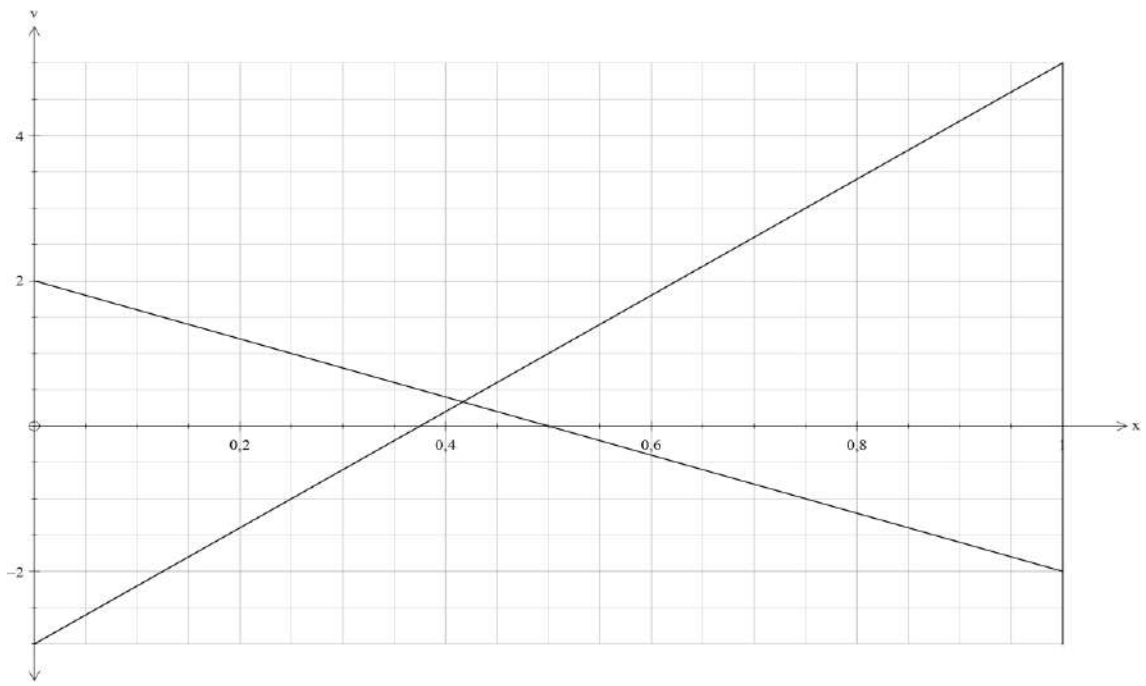
المؤسسة X	المؤسسة Y		
		y_1	y_2
	x_1	-2	5
	x_2	2	-3

B strategy	A payoff
1	$(-2-2)x_1+2=v$
2	$(5-(-3))x_1+(-3)=v$

B strategy	A payoff
1	$-4x_1+2=v$
2	$8x_1+(-3)=v$

x_1	0	1
v	2	-2

x_1	0	1
v	-3	5



نلاحظ وجود نقطة وحيدة للتقاطع في الغلاف السفلي نظرا لوجود مستقيمين فقط.

$$-4x_1 + 2 = 8x_1 - 3 \Rightarrow 12x_1 = 5$$

$$x_1 = \frac{5}{12}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{12}$$

$$v = 8(x_1) - 3 = 8\left(\frac{5}{12}\right) - 3 = \frac{1}{3}$$

إذن حلول اللعبة هي: $x_1 = \frac{5}{12}, x_2 = \frac{7}{12}, v = \frac{1}{3}$

حل التمرين رقم 02:

1. ايجاد الحل البياني:

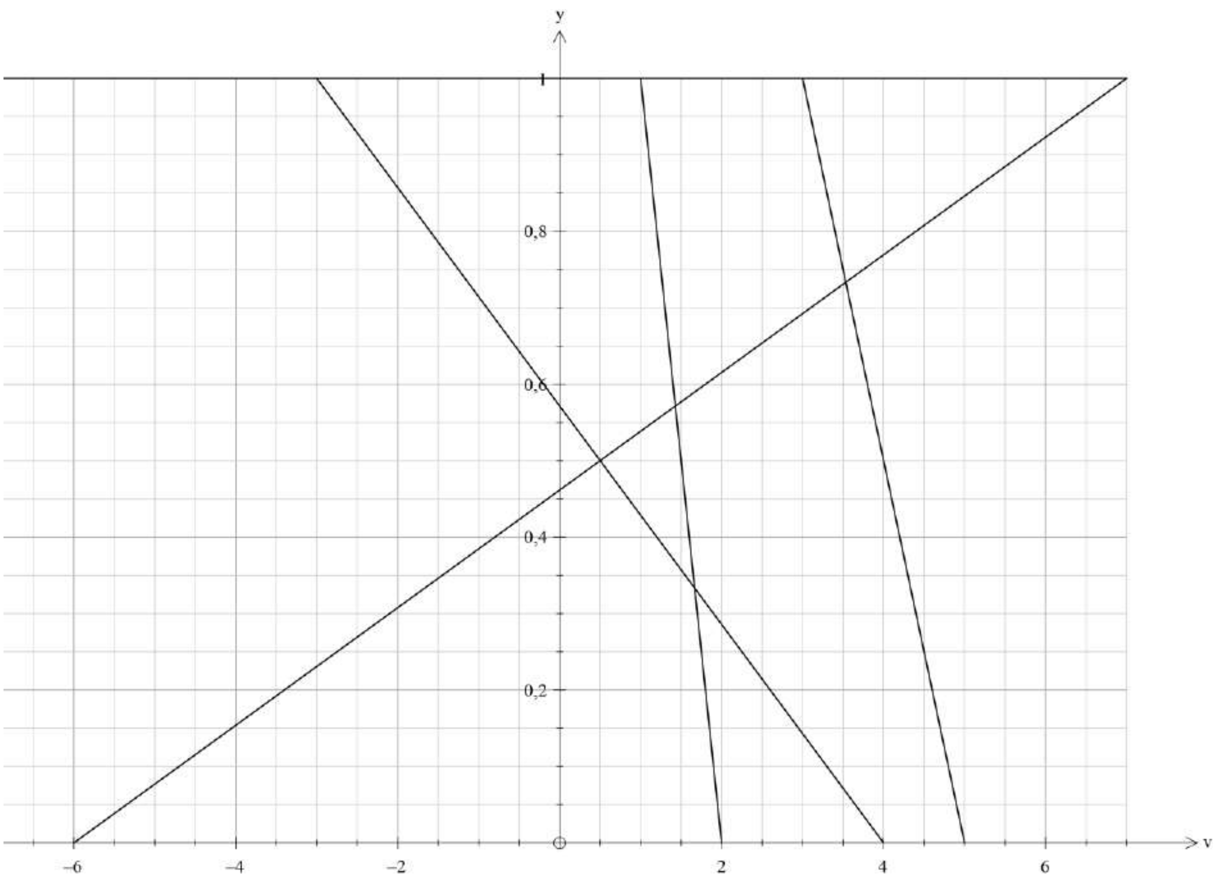
	المؤسسة B		
المؤسسة A		T_1	T_2
	S_1	1	2
	S_2	3	5
	S_3	-3	4
	S_4	7	-6

A strategy	B payoff
1	$(1-2)y_1+2=v$
2	$(3-5)y_1+5=v$
3	$(-3-4)y_1+4=v$
4	$(7-(-6))y_1+(-6)=v$

A strategy	B payoff
1	$-1y_1+2=v$
2	$-2y_1+5=v$
3	$-7y_1+4=v$
4	$13y_1-6=v$

y_1	0	1
v	2	1

y_1	0	1	y_1	0	1	y_1	0	1
v	5	3	v	4	-3	v	-6	7



نأخذ نقطة التقاطع أقصى اليسار في الغلاف الأيمن وهنا توجد نقطة واحدة وهي تقاطع للمستقيمين الثاني والرابع.

$$-2y_1 + 5 = 13Y_1 - 6 \Rightarrow 15y_1 = 11$$

$$y_1 = \frac{11}{15}$$

$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{4}{15}$$

$$v = 13\left(\frac{11}{15}\right) - 6 = \frac{53}{15}$$

ومنه حلول اللعبة هي: $y_1 = \frac{11}{15}, y_2 = \frac{4}{15}, v = \frac{53}{15}$

حل التمرين رقم 03:

1. إيجاد الحل البياني:

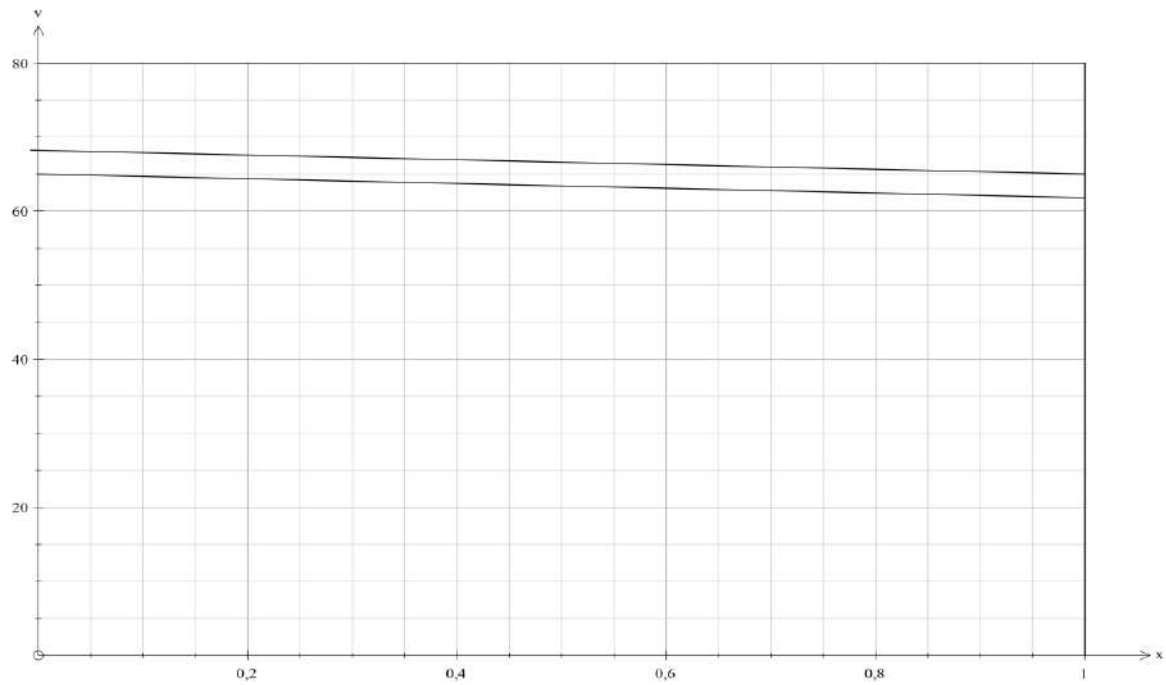
اللاعب A	اللاعب B			
		B_1	B_2	B_3
	A_1	65	62,5	80
	A_2	67,5	65	80

B strategy	A payoff
1	$(65-67,5)x_1+67,5=v$
2	$(62,5-65)x_1+65=v$
3	$(80-80)x_1+80=v$

B strategy	A payoff
1	$-2,5x_1+67,5=v$
2	$-2,5x_1+65=v$
3	$0+80=v$

x_1	0	1
v	67,5	65

x_1	0	1
v	65	62,5



نظرا لعدم وجود نقطة تقاطع في الغلاف السفلي فليس هناك حل للعبة.

حل التمرين رقم 04:

1. ايجاد الحل البياني:

		اللاعب B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
اللاعب A	A_1	2	2	3	-1
	A_2	4	3	2	6

A strategy	B payoff
1	$(2-4)y_1+4=v$
2	$(2-3)y_1+3=v$
3	$(3-2)y_1+2=v$
4	$(-1-6)y_1+6=v$

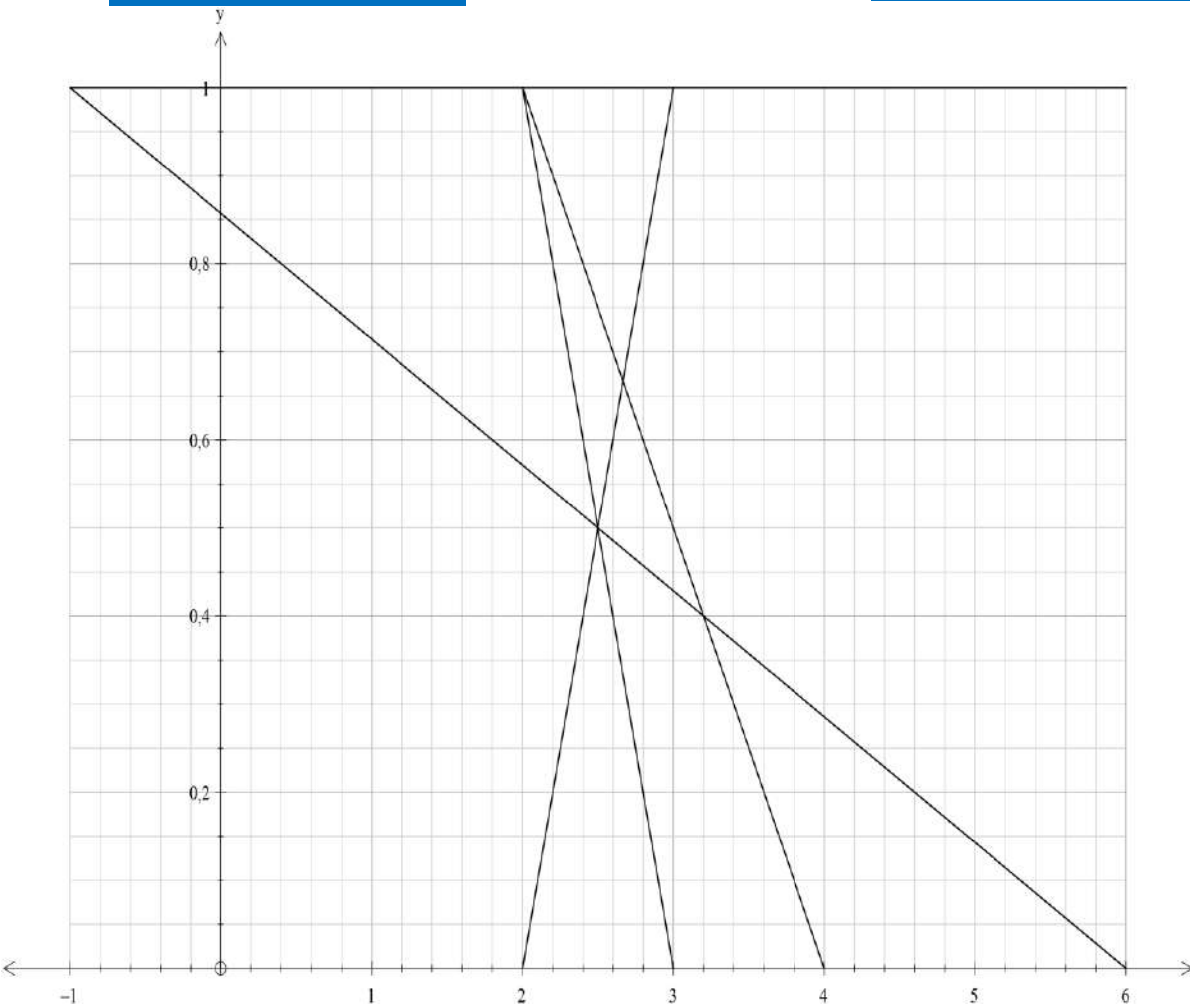
A strategy	B payoff
1	$-2y_1+4=v$
2	$-1y_1+3=v$
3	$y_1+2=v$
4	$-7y_1+6=v$

y_1	0	1
v	6	-1

y_1	0	1
v	2	3

y_1	0	1
v	3	2

y_1	0	1
v	4	2



نلاحظ أن الغلاف الأيمن يشمل نقطتي تقاطع بين المستقيمات ونختار التي تكون على اليسار أي قريبة من محور التراتيب وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الأول والثالث:

$$-2y_1 + 4 = y_1 + 2 \Rightarrow 3y_1 = 2$$

$$y_1 = \frac{2}{3}$$

$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$v = y_1 + 2 = \frac{8}{3}$$

ومنه حلول اللعبة هي: $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{1}{3}, v = \frac{8}{3}$

حل التمرين رقم 05:

1. ايجاد الحل البياني:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	1	-1	-2	-1
X_2	0	-2	8	6

B strategy	A payoff
1	$(1-0)x_1+0=v$
2	$(-1-(-2))x_1+(-2)=v$
3	$(-2-8)x_1+8=v$
4	$(-1-6)x_1+6=v$

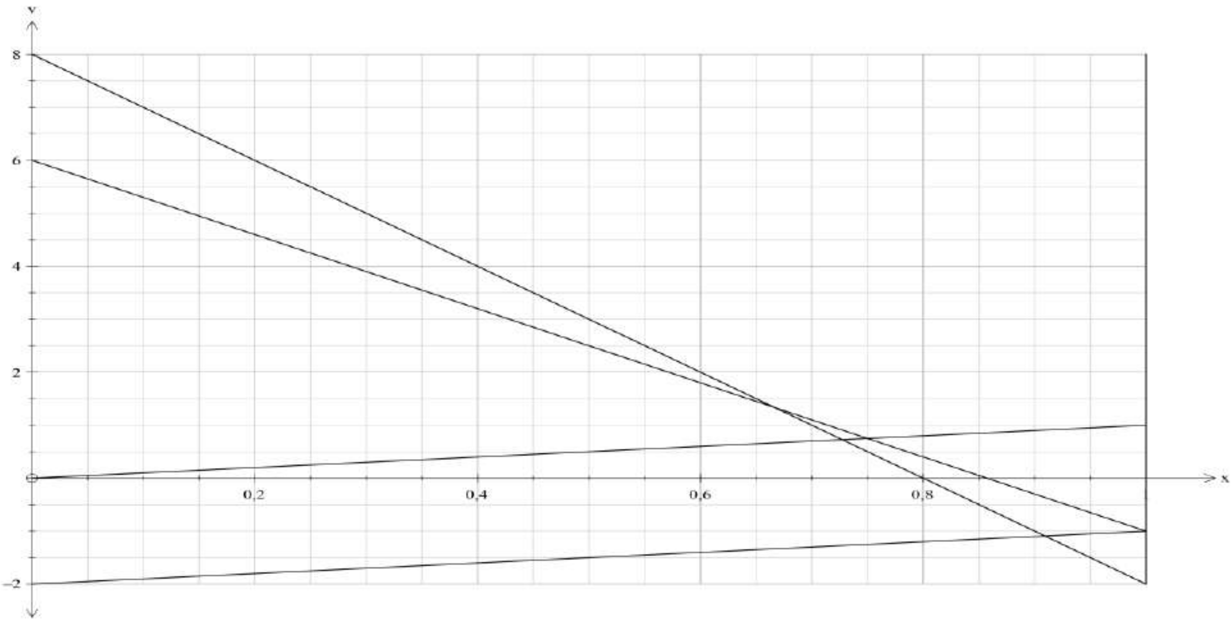
B strategy	A payoff
1	$x_1+0=v$
2	$x_1+(-2)=v$
3	$-10x_1+8=v$
4	$-7x_1+6=v$

x_1	0	1
v	-2	-1

x_1	0	1
v	0	1

x_1	0	1
v	6	-1

x_1	0	1
v	8	-2



نلاحظ أن الغلاف السفلي يشمل نقطة تقاطع بين المستقيمات وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الثاني والثالث:

$$X_1 - 2 = -10X_1 + 8$$

$$X_1 = \frac{10}{11}$$

$$X_1 + X_2 = 1 \Rightarrow X_2 = \frac{1}{11}$$

$$v = \frac{10}{11} - 2 = -\frac{12}{11}$$

ومنه حلول اللعبة: $X_1 = \frac{10}{11}, X_2 = \frac{1}{11}, v = -\frac{12}{11}$

حل التمرين رقم 06:

1. الحل البياني للعبة:

		اللاعب B	
		B_1	B_2
اللاعب A	A_1	2	4
	A_2	2	3
	A_3	3	2
	A_4	-2	6

A strategy	B payoff

1	$(2-4)y_1+4=v$
2	$(2-3)y_1+3=v$
3	$(3-2)y_1+2=v$
4	$(-2-6)y_1+6=v$

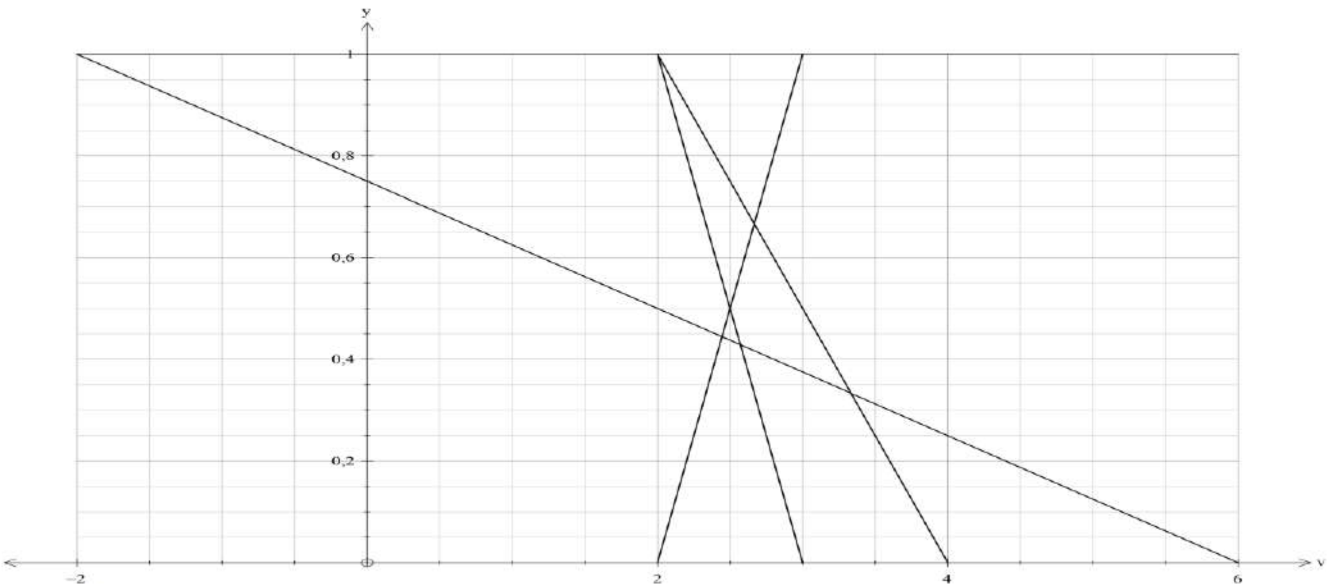
y_1	0	1
v	6	-2

y_1	0	1
v	2	3

y_1	0	1
v	3	2

y_1	0	1
v	4	2

A strategy	B payoff
1	$-2y_1+4=v$
2	$-y_1+3=v$
3	$y_1+2=v$
4	$-8y_1+6=v$



نلاحظ أن الغلاف الأيمن يشمل نقطتي تقاطع بين المستقيمات ونختار التي تكون على اليسار أي قريبة من محور التراتيب وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الأول والثالث:

$$-2Y_1 + 4 = Y_1 + 2$$

$$Y_1 = \frac{2}{3}$$

$$Y_1 + Y_2 = 1 \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

ومنه حلول اللعبة: $v = \frac{8}{3}, Y_2 = \frac{1}{3}, Y_1 = \frac{2}{3},$

حل التمرين رقم 07:

1. الحل باستعمال أسلوب الهيمنة:

		اللاعب B			MaxMin
		B_1	B_2	B_3	
اللاعب A	A_1	1	8	3	1
	A_2	6	4	5	4
	A_3	0	1	2	0
MinMax		6	8	5	

نلاحظ أننا عندما نستخدم أسلوب MaxMinMinMax لا نجد نقطة توازن أو تعادل بين اللاعبين كما نلاحظ بالنسبة للاعب B أن الاستراتيجية B_2 مهيمنة من الإستراتيجيات B_2,B_1 لذلك تصبح مدفوعة اللعبة كما يلي:

		B_1	B_3
اللاعب A	A_1	1	3
	A_2	6	5
	A_3	0	2

وبالتالي يمكن حل اللعبة بيانيا:

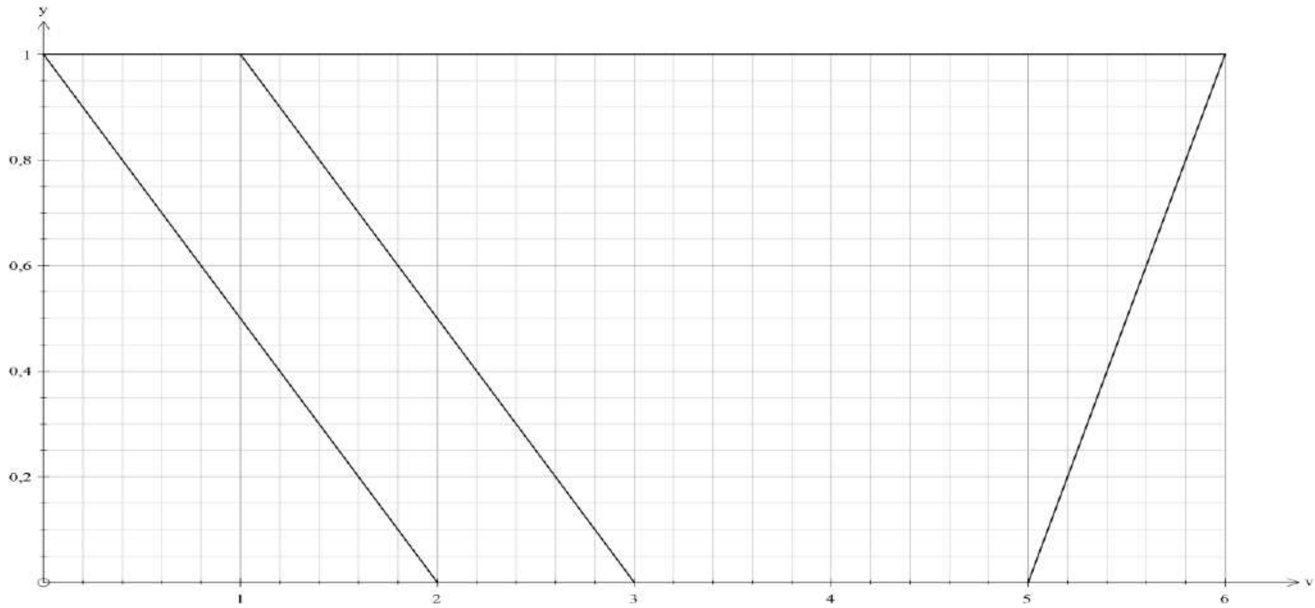
A strategy	B payoff
1	$(1-3)y_1+3=v$
2	$(6-5)y_1+5=v$
3	$(0-2)y_1+2=v$

A strategy	B payoff
1	$-2y_1+3=v$
2	$y_1+5=v$
3	$-2y_1+2=v$

y_1	0	1
v	3	1

y_1	0	1
v	5	6

y_1	0	1
v	2	0



نظرا لعدم وجود نقطة تقاطع بين المستقيمات الممثلة للمعادلات فلا يوجد حل للعبة.

حل التمرين رقم 08:

1. حل اللعبة باستعمال اسلوب الهيمنة:

		المؤسسة B					MaxMin
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
المؤسسة A	A_1	3	-2	-4	0	6	-4
	A_2	-4	2	-1	7	-8	-8
	A_3	2	-5	-4	1	-1	-5
	A_4	0	-3	-2	-1	-1	-3
MinMax		3	2	-1	7	6	

نلاحظ عدم وجود نقطة توازن أو تعادل بين اللاعبين بعد استعمال أسلوب MaxMinMinMax ونلاحظ أن الاستراتيجيات A_2 ,A_3 مهيمنة من الاستراتيجيات A_1,A_4 لذلك تصبح مصفوفة الدفع كما يلي:

		المؤسسة B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
المؤسسة A	A_1	3	-2	-4	0	6
	A_4	0	-3	-2	-1	-1

B strategy	A payoff
1	$(3\text{-}0)x_1+0=v$
2	$(-2-(-3))x_1+(-3)=v$
3	$(-4-(-2))x_1+(-2)=v$
4	$(0-(-1))x_1+(-1)=v$
5	$(6-(-1))\ x_1+(-1)=v$

B strategy	A payoff
1	$3x_1=v$
2	$x_1+(-3)=v$
3	$-2x_1+(-2)=v$
4	$x_1+(-1)=v$
5	$7\ x_1+(-1)=v$

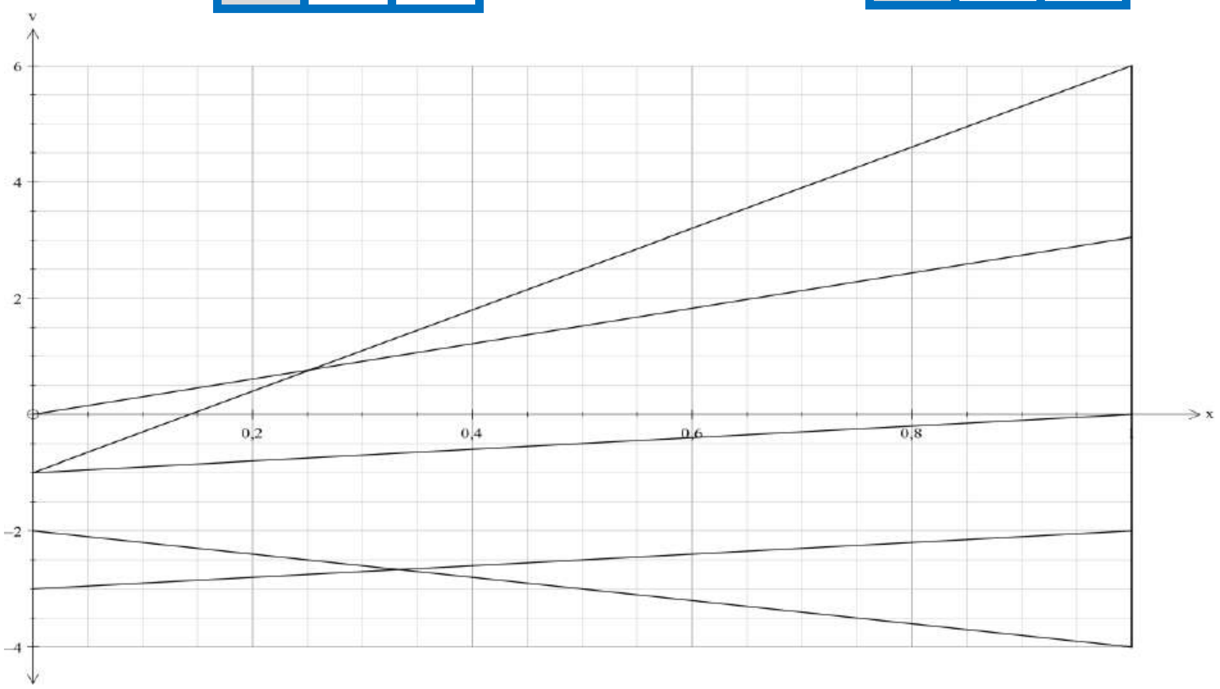
x_1	0	1
v	-1	6

x_1	0	1
v	-1	0

x_1	0	1
v	-2	-4

x_1	0	1
v	-3	-2

x_1	0	1
v	0	3



نلاحظ أن الغلاف السفلي يشمل نقطة تقاطع بين المستقيمات وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الثاني والثالث:

$$X_1 - 3 = -2X_1 - 2$$

$$X_1 = \frac{1}{3}$$

$$X_1 + X_2 = 1 \Rightarrow X_2 = \frac{2}{3}$$

$$v = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

ومنه حلول اللعبة هي: $X_1 = \frac{1}{3}, X_2 = \frac{2}{3}, v = -\frac{8}{3}$

حل التمرين رقم 09:

1. إيجاد حل اللعبة باستعمال أسلوب الهيمنة:

		اللاعب B			MaxMin
اللاعب A		B_1	B_2	B_3	
	A_1	15	30	28	15
	A_2	43	22	52	22
	A_3	16	33	29	16
	A_4	25	10	26	10
MinMax		43	33	52	

نلاحظ عدم وجود نقطة توازن بين اللاعبين بعد استخدام اسلوب MaxMin ، MinMax كما نلاحظ أن الاستراتيجية B_3 مهيمنة من B_1,B_2 نفس الأمر نلاحظ أن الاستراتيجية A_2 مهيمنة من طرف الاستراتيجيات A_1,A_3,A_4 وتصبح مصفوفة اللعبة كما يلي:

		اللاعب B	
اللاعب A		B_1	B_2
	A_1	15	30
	A_3	16	33
	A_4	25	10

نقوم بحل اللعبة بيانيا:

A strategy	B payoff
1	$(15-30)y_1+30=v$
2	$(16-33)y_1+33=v$
3	$(25-10)y_1+10=v$

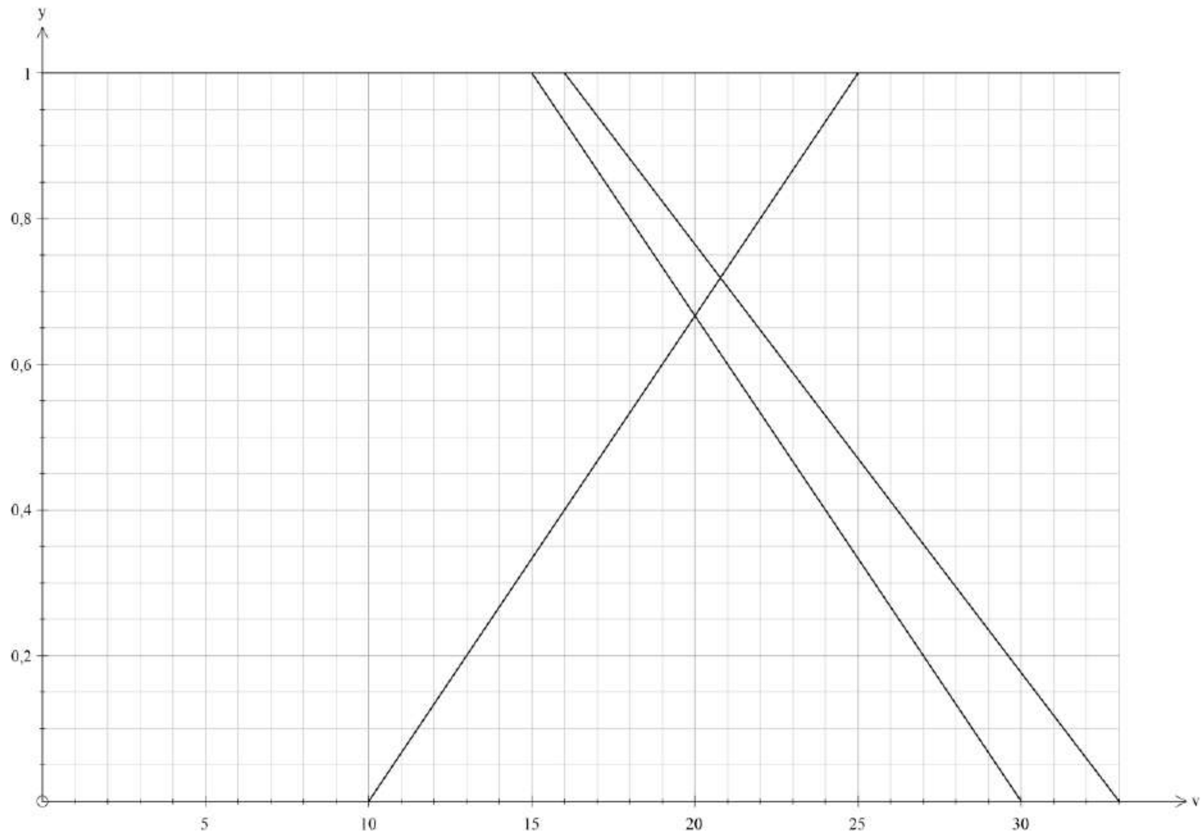
A strategy	B payoff

1	$-15y_1+30=v$
2	$-17y_1+33=v$
3	$15y_1+10=v$

y_1	0	1
v	30	15

y_1	0	1
v	33	16

y_1	0	1
v	10	25



نلاحظ أن الغلاف الأيمن يشمل نقطتي تقاطع بين المستقيمات ونختار التي تكون على اليسار أي قريبة من محور التراتيب وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الثاني والثالث:

$$-17Y_1 + 33 = 15Y_2 + 10$$

$$Y_1 = \frac{23}{32}$$

$$Y_1 + Y_2 = 1 \Rightarrow Y_2 = \frac{9}{32}$$

$$v = -17\left(\frac{23}{32}\right) + 33 = \frac{665}{32}$$

ومنه حلول اللعبة هي: $Y_1 = \frac{23}{32}, Y_2 = \frac{9}{32}, v = \frac{665}{32}$

حل التمرين رقم 10:

1. ايجاد حل اللعبة باستخدام اسلوب الهيمنة:

	y_1	y_2	y_3	MaxMin
x_1	-2	5	10	-2
x_2	2	-3	0	-3
x_3	-4	5	8	-4
MinMax	2	5	10	

نلاحظ عدم وجود نقطة توازن أو تعادل بين اللاعبين كما نلاحظ أن الاستراتيجية x_3 مهيمنة من طرف الاستراتيجيات x_1,x_2 وتصبح مصفوفة اللعبة:

	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	5	10
x_2	2	-3	0

ويمكن حلها بيانيا:

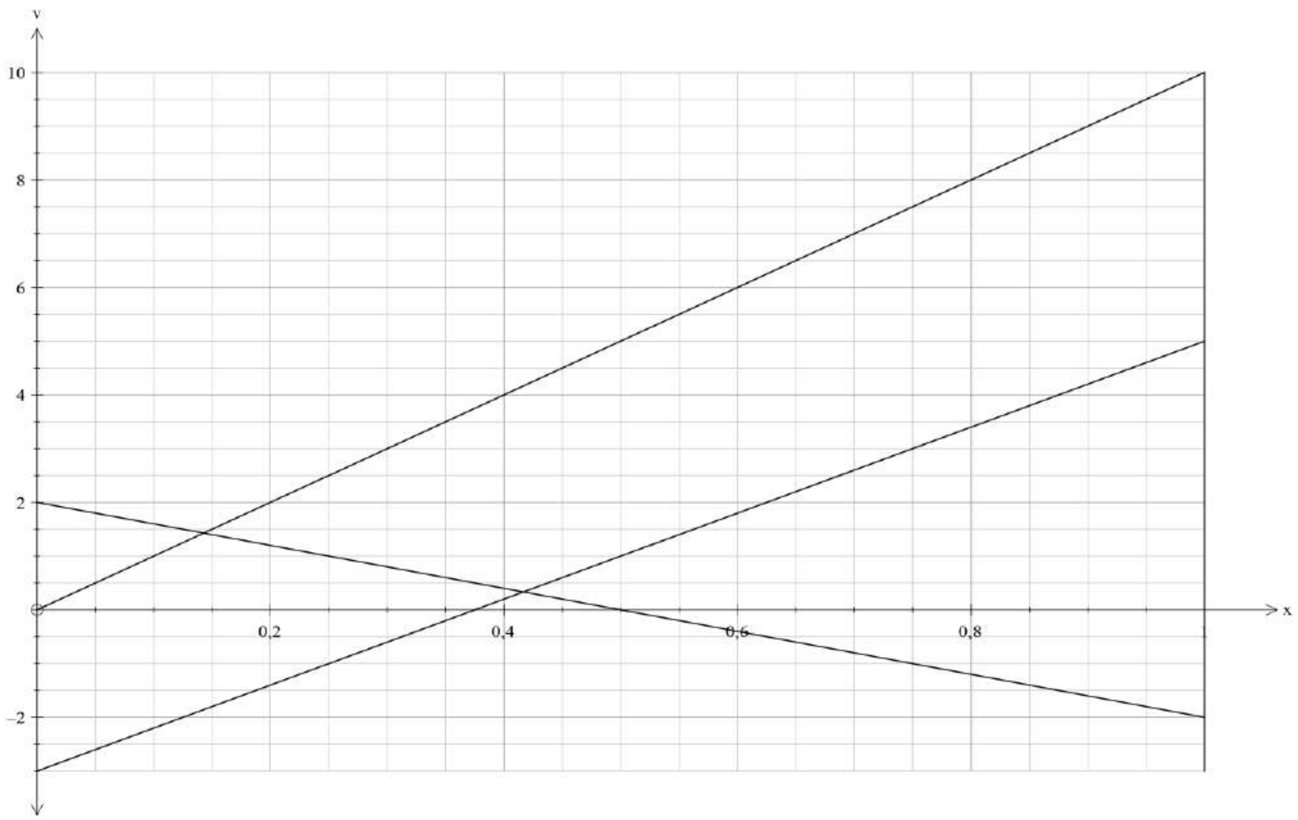
B strategy	A payoff
1	$(-2-2)x_1+2=v$
2	$(5-(-3))x_1+(-3)=v$
3	$(10-0)x_1+0=v$

B strategy	A payoff
1	$-4x_1+2=v$
2	$8x_1+(-3)=v$
3	$10x_1=v$

x_1	0	1
v	2	-2

x_1	0	1
v	-3	5

x_1	0	1
v	0	10



نلاحظ أن الغلاف السفلي يشمل نقطة تقاطع بين المستقيمات وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الأول والثاني:

$$-4X_1 + 2 = 8X_1 - 3$$

$$X_1 = \frac{5}{12}$$

$$X_1 + X_2 = 1 \Rightarrow X_2 = \frac{7}{12}$$

$$v = 8\left(\frac{5}{12}\right) - 3 = \frac{1}{3}$$

ومنه حلول اللعبة: $X_1 = \frac{5}{12}, X_2 = \frac{7}{12}, v = \frac{1}{3}$

حل التمرين رقم 11:

1. ايجاد حل اللعبة:

		B			MaxMin
		B_1	B_2	B_3	
A	A_1	-3	-2	6	-3
	A_2	2	0	4	0
	A_3	5	-2	-4	-4
MinMax		5	0	6	

وبالتالي فإن حل اللعبة هو أن يلعب اللاعب A واللاعب Bالإستراتيجية الثانية وتكون نتيجة المباراة v=0.

حل التمرين رقم 12:

1. ايجاد حل اللعبة:

		اللاعب B					MaxMin
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
اللاعب A	A_1	-4	-2	-2	3	1	-4
	A_2	1	0	1	0	0	0
	A_3	-6	-5	-2	-4	4	-6
	A_4	3	1	-6	0	-8	-8
MinMax		3	1	1	3	4	

وفقا لأسلوب MinMax,MaxMin لا توجد نقطة تعادل لذلك نعتمد على أسلوب الهيمنة ثم نقوم بالحل البياني.

اللاعب A لا يمكن أن يلعب الاستراتيجيات A_3,A_4 لأنها مهيمنة بالاستراتيجيات A_1,A_2 وتصبح مصفوفة اللعبة:

		اللاعب B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
اللاعب A	A_1	-4	-2	-2	3	1
	A_2	1	0	1	0	0

B strategy	A payoff
1	$(-4-1)x_1+1=v$
2	$(-2-0)x_1+0=v$
3	$(-2-1)x_1+1=v$
4	$(3-0)x_1+0=v$
5	$(1-0)x_1+0=v$

B strategy	A payoff
1	$-5x_1+1=v$
2	$-2x_1=v$
3	$-3x_1+1=v$
4	$3x_1=v$
5	$x_1=v$

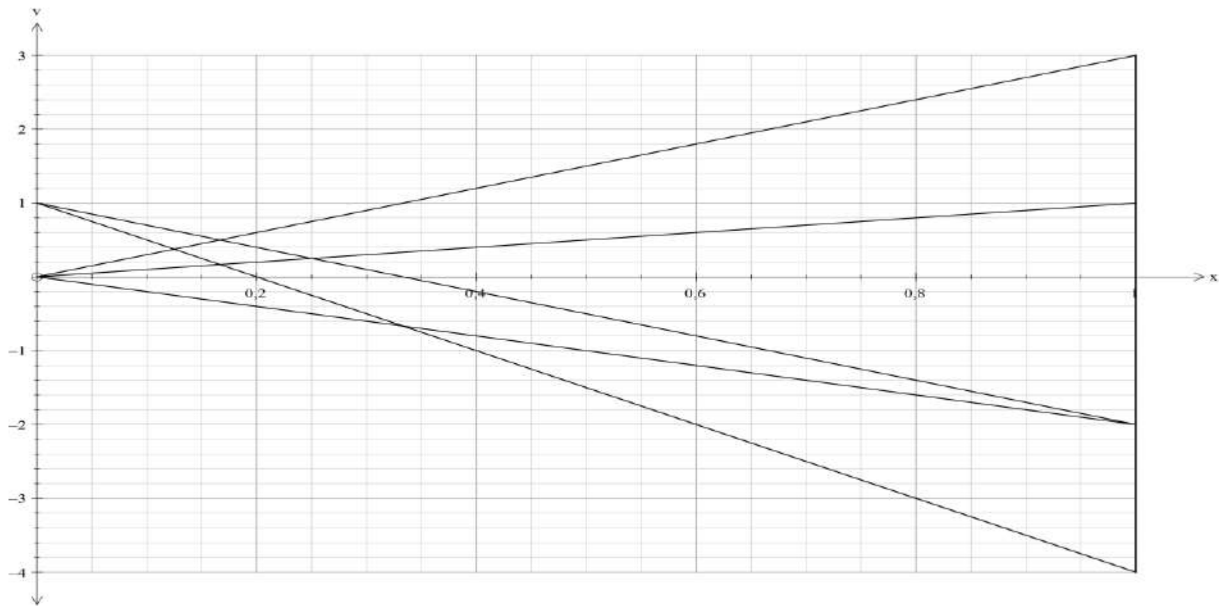
x_1	0	1
v	1	-2

x_1	0	1
v	0	3

x_1	0	1
v	0	1

x_1	0	1
v	1	-4

x_1	0	1
v	0	-2



نلاحظ أن الغلاف السفلي يشمل نقطة تقاطع بين المستقيمات وهي نقطة تقاطع بين المستقيم الأول والثاني:

$$-5X_1 + 1 = -2X_1$$

$$X_1 = \frac{1}{3}$$

$$X_1 + X_2 = 1 \Rightarrow X_2 = \frac{2}{3}$$

$$v = -2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

ومنه حلول اللعبة: $X_1 = \frac{1}{3}, X_2 = \frac{2}{3}, v = -\frac{2}{3}$

حل التمرين رقم 13:

1. إيجاد الحل الأمثل للعبة:

		اللاعب y				MaxMin
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
اللاعب X	X_1	8	2	9	5	2
	X_2	6	5	7	8	5
	X_3	7	3	-4	7	-4
MinMax		8	5	9	8	

ومنه لحل اللعبة هو أن يلعب اللاعب X الاستراتيجية X_2 ويلعب اللاعب Y الاستراتيجية Y_2 وقيمة المباراة V=5.

حل التمرين رقم 14:

1. إيجاد الحل الأمثل للعبة:

A / B	نظافة المطعم	سعر الأطعمة	معاملة الزبون	MaxMin
نظافة المطعم	0	2	5	0
سعر الأطعمة	-5	4	2	-5
معاملة الزبون	2	0	-1	-1
MinMax	2	4	5	

لا توجد نقطة توازن باستعمال أسلوبMaxMin,MinMax وبالتالي نستخدم أسلوب الهيمنة ثم نحل اللعبة بيانيا.

نلاحظ أن استراتيجية معاملة الزبون بالنسبة للاعب B مهيمنة من باقي الاستراتيجيات وتصبح المصفوفة:

A / B	نظافة المطعم	سعر الأطعمة
نظافة المطعم	0	2
سعر الأطعمة	-5	4
معاملة الزبون	2	0

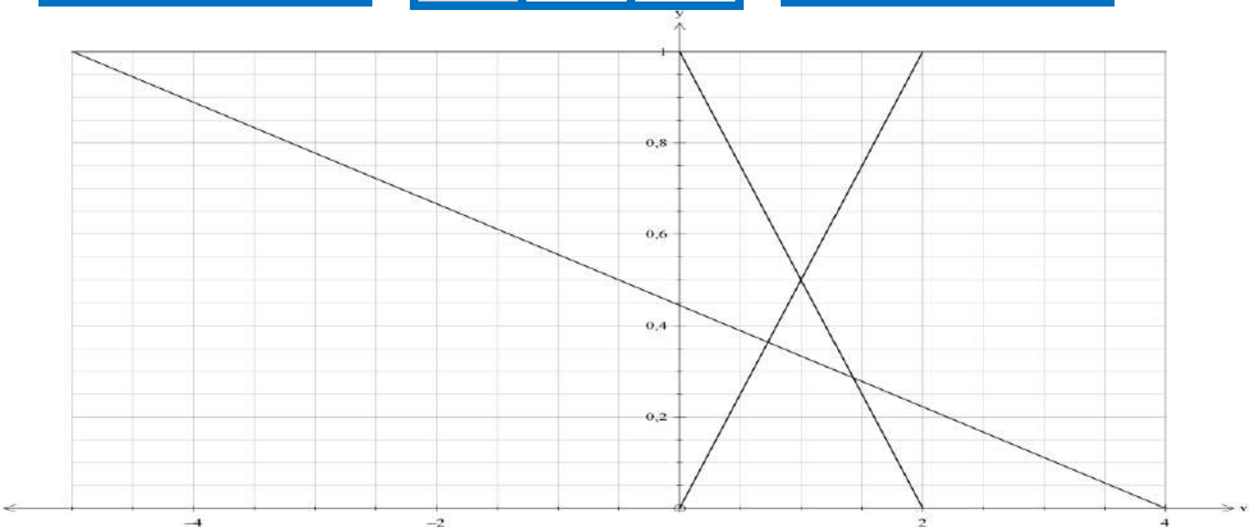
A strategy	B payoff
1	$(0-2)y_1+2=v$
2	$(-5-4)y_1+4=v$
3	$(2-0)y_1+0=v$

A strategy	B payoff
1	$-2y_1+2=v$
2	$-9y_1+4=v$
3	$2y_1=v$

y_1	0	1
v	0	2

y_1	0	1
v	4	-5

y_1	0	1
v	2	0



نلاحظ وجود نقطتين للتقاطع في الغلاف الأيمن لذلك نختار الأقرب لمحور التراتيب وهي ناتجة عن تقاطع المستقيم الأول والثالث.

$$-2Y_1 + 2 = 2Y_1$$

$$Y_1 = \frac{1}{2}$$

$$Y_1 + Y_2 = 1 \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{2}$$

$$v = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

ومنه حلول اللعبة هي: $Y_1 = \frac{1}{2}, Y_2 = \frac{1}{2}, v = 1$

حل التمرين رقم 15:

1. ايجاد الحل الأمثل للعبة:

		استراتيجيات الشركة Y			
		عدم القيام بحملة اعلانية	حملة اعلانية متوسطة	حملة اعلانية كبيرة	MaxMin
استراتيجيات الشركة X	عدم القيام بحملة اعلانية	50	40	28	28
	حملة اعلانية متوسطة	70	50	45	45
	حملة اعلانية كبيرة	75	47,5	50	47,5

MinMax	75	50	50	

نلاحظ عدم وجود نقطة توازن باستعمال أسلوب MaxMin,MinMax ولذلك نقوم باستعمال أسلوب الهيمنة.

نلاحظ أن الإستراتيجية الأولى وهي عدم القيام بحملة بالنسبة للاعب Y مهيمنة من باقي الاستراتيجيات لذلك تصبح مصفوفة اللعبة:

	حملة اعلانية متوسطة	حملة اعلانية كبيرة
عدم القيام بحملة اعلانية	40	28
حملة اعلانية متوسطة	50	45
حملة اعلانية كبيرة	47,5	50

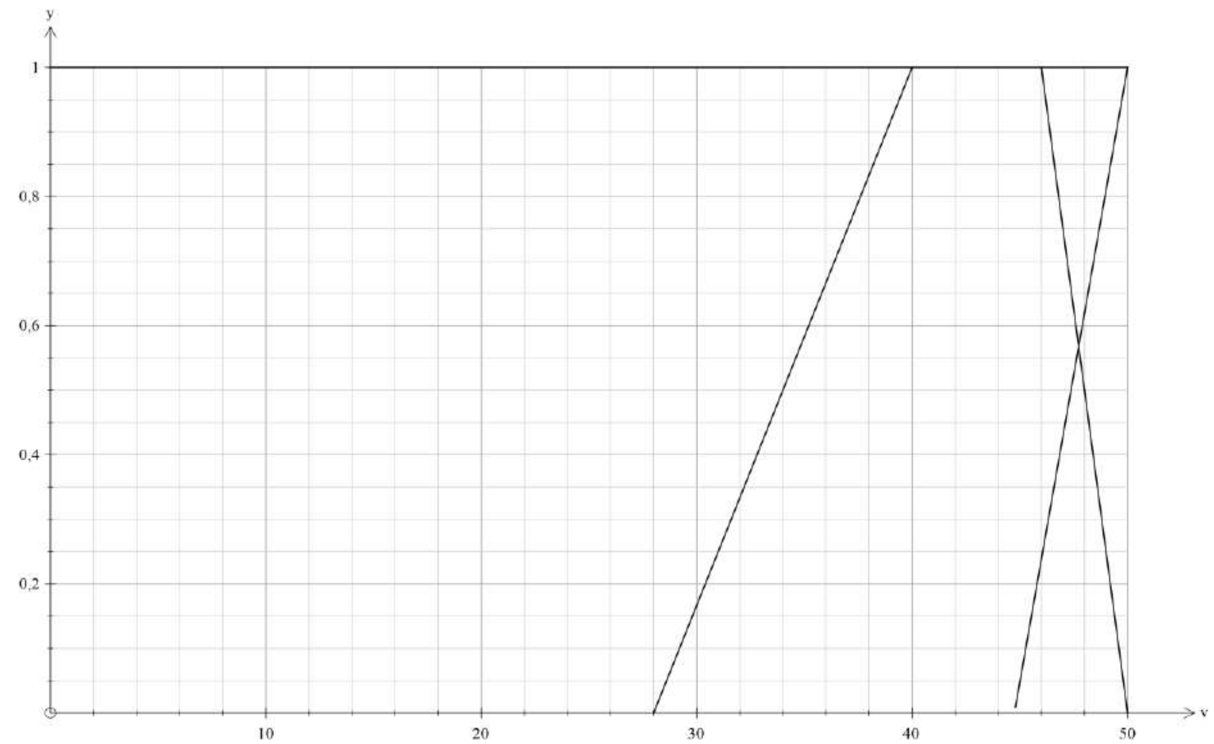
X strategy	Y payoff
1	$(40-28)y_1+28=v$
2	$(50-45)y_1+45=v$
3	$(47{,}5-50)y_1+50=v$

X strategy	Y payoff
1	$12y_1+28=v$
2	$5y_1+45=v$
3	$-2{,}5y_1+50=v$

y_1	0	1
v	28	40

y_1	0	1
v	45	50

y_1	0	1
v	50	47,5



نأخذ الغلاف الايمن الذي يوجد بها تقاطع واحد بين المستقيم الثاني والمستقيم الثالث:

$$5Y_1 + 45 = -2{,}5Y_1 + 50$$

$$Y_1 = \frac{2}{3}$$

$$Y_1 + Y_2 = 1 \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{3}$$

$$v = 5\left(\frac{2}{3}\right) + 45 = \frac{145}{3}$$

ومنه حلول اللعبة هي: $Y_1 = \frac{2}{3}, Y_2 = \frac{1}{3}, v = \frac{145}{3}$

حل التمرين رقم 16:

1. ايجاد الحل الامثل باستعمال طريقة السمبلكس:

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & -2 \\ -6 & 7 & 3 \\ 10 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

نقوم أولا بإضافة ثابت K=9 الى المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 21 & 1 & 7 \\ 3 & 16 & 12 \\ 19 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

Max $y_0=y_1+y_2+y_3$

$21y_1+y_2+7y_3\le 1,$

$3y_1+16y_2+12y_3\le 1,$

$19y_1+3y_2+11y_3\le 1,$

$y_1,y_2,y_3\ge 0$

تحضير البرنامج:

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+0s_1+0s_2+0s_3,$

$21y_1+y_2+7y_3+s_1=1,$

$3y_1+16y_2+12y_3+s_2=1,$

$19y_1+3y_2+11y_3+s_3=1,$

$y_1,y_2,y_3\ge 0$

y_0	y_1 -1	y_2 -1	y_3 -1	s_1 0	s_2 0	s_3 0	RHS
s_1	21	1	7	1	0	0	1
s_2	3	16	12	0	1	0	1
s_3	19	3	11	0	0	1	1
y_0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
s_1	$\frac{77}{4}$	$-\frac{25}{3}$	0	1	$-\frac{7}{12}$	0	$\frac{5}{12}$
y_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
s_3	$\frac{65}{4}$	$-\frac{35}{3}$	0	0	$-\frac{11}{12}$	1	$\frac{1}{12}$
y_0	0	$-\frac{8}{39}$	0	0	$\frac{8}{195}$	$\frac{3}{65}$	$\frac{17}{195}$
s_1	0	$\frac{214}{39}$	0	1	$\frac{98}{195}$	$-\frac{77}{65}$	$\frac{62}{195}$
y_3	0	$\frac{59}{39}$	1	0	$\frac{19}{195}$	$-\frac{1}{65}$	$\frac{16}{195}$
y_1	1	$-\frac{28}{39}$	0	0	$-\frac{11}{195}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{1}{195}$
y_0	0	0	$\frac{8}{59}$	0	$\frac{16}{259}$	$\frac{13}{295}$	$\frac{29}{295}$
s_1	0	0	$-\frac{214}{59}$	1	$\frac{44}{259}$	$-\frac{333}{295}$	$\frac{6}{295}$
y_2	0	1	$\frac{39}{59}$	0	$\frac{19}{259}$	$-\frac{3}{295}$	$\frac{16}{295}$
y_1	1	0	$\frac{28}{59}$	0	$-\frac{3}{259}$	$\frac{16}{295}$	$\frac{13}{295}$

$$v=\frac{1}{y_0}-K=\frac{295}{29}-9=\frac{34}{29}$$

$$y_1=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{13}{295}=\frac{295}{29}\cdot\frac{13}{295}=\frac{13}{29}$$

$$y_2=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{16}{295}=\frac{295}{29}\cdot\frac{16}{295}=\frac{16}{29}$$

$$y_3=0$$

أما اللاعب الثاني:

$$X_1=0$$

$$X_2=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{16}{259}=\frac{295}{29}\cdot\frac{16}{259}=\frac{16}{29}$$

$$X_3=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{13}{259}=\frac{295}{29}\cdot\frac{13}{259}=\frac{13}{29}$$

حل التمرين رقم 17:

1. ايجاد حل اللعبة بطريقة السمبلكس:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-1	1	-1
A_2	0	1	0	0
A_3	0	0	1	1

نضيف ثابت k=2 الى المصفوفة:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	3	1
A_2	2	3	2	2
A_3	2	2	3	3

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+y_4$

$3y_1+y_2+3y_3+y_4\leq 1,$

$2y_1+3y_2+2y_3+2y_4\leq 1,$

$2y_1+2y_2+3y_3+3y_4\leq 1,$

$y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0$

تحضير البرنامج:

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+0\,s_1+0\,s_2+0\,s_3$,

$3y_1+y_2+3y_3+y_4+s_1=1$,

$2y_1+3y_2+2y_3+2y_4+s_2=1$,

$2y_1+2y_2+3y_3+3y_4+s_3=1$,

$y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0$

y_0	y_1 -1	y_2 -1	y_3 -1	y_4 -1	s_1 0	s_2 0	s_3 0	RHS
s_1	3	1	3	1	1	0	0	1
s_2	2	3	2	2	0	1	0	1
s_3	2	2	3	3	0	0	1	1
y_0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
s_1	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
s_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_0	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
s_1	$\frac{11}{5}$	0	2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
y_2	$\frac{2}{5}$	1	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_4	$\frac{2}{5}$	0	1	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_0	0	0	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$
y_1	1	0	$\frac{10}{11}$	0	$\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$
y_2	0	1	$-\frac{4}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$
y_4	0	0	$\frac{7}{11}$	1	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{11}$

$$v=\frac{1}{y_0}-K=\frac{11}{5}-2=\frac{1}{5}$$

$$y_1=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{3}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{11}=\frac{3}{5}$$

$$y_2=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{1}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{5}$$

$$y_3=0$$

$$y_4=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{1}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{5}$$

أما اللاعب الثاني:

$$X_1=0$$

$$X_2=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{1}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{5}$$

$$X_3=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{2}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{2}{11}=\frac{2}{5}$$

$$X_4=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{2}{11}=\frac{11}{5}\cdot\frac{2}{11}=\frac{2}{5}$$

حل التمرين رقم 18:

1. ايجاد الحل بطريقة السمبلكس:

		اللاعب B			
		S_1	S_2	S_3	S_4
اللاعب A	S_1	3	-1	-3	-1,5
	S_2	-3	3	-1	1,5
	S_3	-4	-3	3	0,5
	S_4	-1	0	-3	-1

نحن بحاجة الى اضافة ثابت K=5 الى المصفوفة للتخلص من القيم السالبة وتصبح:

		اللاعب B			
		S_1	S_2	S_3	S_4
اللاعب A	S_1	8	4	2	$\frac{7}{2}$
	S_2	2	8	4	$\frac{13}{2}$
	S_3	1	2	8	$\frac{11}{2}$
	S_4	4	5	2	4

$$\text{Max } y_0=y_1+y_2+y_3+y_4$$

$$8y_1+4y_2+2y_3+\frac{7}{2}y_4\le 1,$$

$$2y_1+8y_2+4y_3+\frac{13}{2}y_4\le 1,$$

$$y_1+2y_2+8y_3+\frac{11}{2}y_4\le 1,$$

$$4y_1+5y_2+2y_3+4y_4\le 1,$$

$$y_1,y_2,y_3,y_4\ge 0$$

تحضير البرنامج:

$$\text{Max } y_0=y_1+y_2+y_3+0s_1+0s_2+0s_3+0s_4,$$

$$8y_1+4y_2+2y_3+\frac{7}{2}y_4+s_1=1,$$
$$2y_1+8y_2+4y_3+\frac{13}{2}y_4+s_2=1,$$
$$y_1+2y_2+8y_3+\frac{11}{2}y_4+s_3=1,$$
$$4y_1+5y_2+2y_3+4y_4+s_4=1,$$
$$y_1,y_2,y_3,y_4\ge 0$$

y_0	y_1 -1	y_2 -1	y_3 -1	y_4 -1	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	RHS
s_1	8	4	2	$\frac{7}{2}$	1	0	0	0	1
s_2	2	8	4	$\frac{13}{2}$	0	1	0	0	1
s_3	1	2	8	$\frac{11}{2}$	0	0	1	0	1
s_4	4	5	2	4	0	0	0	1	1
y_0	$-\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$-\frac{5}{13}$	0	0	$\frac{2}{13}$	0	0	$\frac{2}{13}$
s_1	$\frac{90}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	1	$-\frac{7}{13}$	0	0	$\frac{6}{13}$
y_4	$\frac{4}{13}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{8}{13}$	1	0	$\frac{2}{13}$	0	0	$\frac{2}{13}$
s_3	$-\frac{9}{13}$	$-\frac{62}{13}$	$\frac{60}{13}$	0	0	$-\frac{11}{13}$	1	0	$\frac{2}{13}$
s_4	$\frac{36}{13}$	$\frac{1}{13}$	$-\frac{6}{13}$	0	0	$\frac{8}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$
y_0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{5}$
y_1	1	$-\frac{2}{45}$	$-\frac{1}{45}$	0	$\frac{13}{90}$	$-\frac{7}{90}$	0	0	$\frac{1}{15}$

y4	**0**	$\frac{56}{45}$	$\frac{28}{45}$	**1**	$-\frac{2}{45}$	$\frac{8}{45}$	**0**	**0**	$\frac{2}{15}$
s3	**0**	$-\frac{24}{5}$	$\frac{23}{5}$	**0**	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	**1**	**0**	$\frac{1}{5}$
s4	**0**	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	**0**	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	**0**	**1**	$\frac{1}{5}$
y0	**0**	$-\frac{5}{23}$	**0**	**0**	$\frac{5}{46}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{2}{23}$	**0**	$\frac{5}{23}$
y1	**1**	$-\frac{14}{207}$	**0**	**0**	$\frac{10}{69}$	$-\frac{17}{207}$	$\frac{1}{207}$	**0**	$\frac{14}{207}$
y4	**0**	$\frac{392}{207}$	**0**	**1**	$-\frac{4}{69}$	$\frac{62}{207}$	$-\frac{28}{207}$	**0**	$\frac{22}{207}$
y3	**0**	$-\frac{24}{23}$	**1**	**0**	$\frac{1}{46}$	$-\frac{9}{46}$	$\frac{5}{23}$	**0**	$\frac{1}{23}$
s4	**0**	$-\frac{5}{23}$	**0**	**0**	$-\frac{9}{23}$	$-\frac{11}{23}$	$\frac{2}{23}$	**1**	$\frac{5}{23}$
y0	**0**	**0**	**0**	$\frac{45}{392}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{11}{196}$	$\frac{1}{14}$	**0**	$\frac{45}{196}$
y1	**1**	**0**	**0**	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$	**0**	**0**	$\frac{1}{14}$
y2	**0**	**1**	**0**	$\frac{207}{392}$	$-\frac{3}{98}$	$\frac{31}{196}$	$-\frac{1}{14}$	**0**	$\frac{11}{196}$
y3	**0**	**0**	**1**	$\frac{27}{49}$	$-\frac{1}{98}$	$-\frac{3}{98}$	$\frac{1}{7}$	**0**	$\frac{5}{49}$
s4	**0**	**0**	**0**	$\frac{45}{392}$	$-\frac{39}{98}$	$-\frac{87}{196}$	$\frac{1}{14}$	**1**	$\frac{45}{196}$

$$v = \frac{1}{y_0} - K = \frac{196}{45} - 5 = -\frac{29}{45}$$

$$y_1 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{14} = \frac{196}{45} \cdot \frac{1}{14} = \frac{14}{45}$$

$$y_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{11}{196} = \frac{196}{45} \cdot \frac{11}{196} = \frac{11}{45}$$

$$y_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{5}{49} = \frac{196}{45} \cdot \frac{5}{49} = \frac{20}{45}$$

$$y_4 = 0$$

أما اللاعب الثاني:

$$X_1 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{11} = \frac{196}{45} \cdot \frac{5}{49} = \frac{20}{45}$$

$$X_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{2}{11} = \frac{196}{45} \cdot \frac{11}{196} = \frac{11}{45}$$

$$X_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{2}{11} = \frac{196}{45} \cdot \frac{1}{14} = \frac{14}{45}$$

$$X_4 = 0$$

حل التمرين رقم 19:

1. ايجاد الحل الأمثل للعبة بطريقة السمبلكس:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Max $y_0=y_1+y_2+y_3$

$6y_1+4y_2+2y_3\leq 1,$

$3y_1+2y_2+4y_3\leq 1,$

$4y_1+5y_2+2y_3\leq 1,$

$y_1,y_2,y_3\geq 0$

تحضير البرنامج:

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+0s_1+0s_2+0s_3,$

$6y_1+4y_2+2y_3+s_1=1,$

$3y_1+2y_2+4y_3+s_2=1,$

$4y_1+5y_2+2y_3+s_3=1,$

$y_1,y_2,y_3\geq 0$

y_0	y_1 -1	y_2 -1	y_3 -1	s_1 0	s_2 0	s_3 0	RHS
s_1	6	4	2	1	0	0	1
s_2	3	2	4	0	1	0	1
s_3	4	5	2	0	0	1	1
y_0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
s_1	$\frac{9}{2}$	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y_3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

s3	$\frac{5}{2}$	**4**	**0**	**0**	$-\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$
y0	$\frac{1}{16}$	**0**	**0**	**0**	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$
s1	$\frac{21}{8}$	**0**	**0**	**1**	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
y3	$\frac{7}{16}$	**0**	**1**	**0**	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
y2	$\frac{5}{8}$	**1**	**0**	**0**	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$v = \frac{1}{y_0} - K = \frac{16}{5} - 0 = \frac{16}{5}$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{8} = \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{5}$$

$$y_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{3}{16} = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{5}$$

أما اللاعب الثاني:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{3}{16} = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{5}$$

$$X_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{13}{259} = \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{5}$$

حل التمرين رقم 20:

1. الحل الأمثل للعبة باستعمال طريقة السمبلكس:

		استراتيجيات الطرف B			
		1	2	3	4
استراتيجيات الطرفA	1	5	10	-10	8
	2	6	7	0	7
	3	4	1	8	9

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+ y_4$

$5y_1+10y_2-10y_3+8 y_4\le 1,$

$6y_1+7y_2+7 y_4\le 1,$

$4 y_1+y_2+8y_3+9 y_4\le 1,$

$y_1,y_2,y_3, y_4\ge 0$

تحضير البرنامج: Max $y_0=y_1+y_2+y_3+0\ s_1+0\ s_2+0\ s_3,$

$5y_1+10y_2-10y_3+8 y_4+s_1=1,$

$6y_1+7y_2+7 y_4+s_2=1,$

$4 y_1+y_2+8y_3+9 y_4+s_3=1,$

$y_1,y_2,y_3, y_4\ge 0$

y_0	y_1 -1	y_2 -1	y_3 -1	y_4 -1	s_1 0	s_2 0	s_3 0	RHS
s_1	5	10	-10	8	1	0	0	1
s_2	6	7	0	7	0	1	0	1
s_3	4	1	8	9	0	0	1	1
y_0	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
s_1	$\frac{13}{9}$	$\frac{82}{9}$	$-\frac{154}{9}$	0	1	0	$-\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
s_2	$\frac{26}{9}$	$\frac{56}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	0	1	$-\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$
y_4	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
y_0	$-\frac{17}{41}$	0	$-\frac{73}{41}$	0	$\frac{4}{41}$	0	$\frac{1}{41}$	$\frac{5}{41}$
y_2	$\frac{13}{82}$	1	$-\frac{77}{41}$	0	$\frac{9}{82}$	0	$-\frac{4}{41}$	$\frac{1}{82}$
s_2	$\frac{78}{41}$	0	$\frac{224}{41}$	0	$-\frac{28}{41}$	1	$-\frac{7}{41}$	$\frac{6}{41}$
y_4	$\frac{35}{82}$	0	$\frac{45}{41}$	1	$-\frac{1}{82}$	0	$\frac{5}{41}$	$\frac{9}{82}$
y_0	$\frac{23}{112}$	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{73}{224}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{19}{112}$
y_2	$\frac{13}{16}$	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{5}{32}$	$\frac{1}{16}$
y_3	$\frac{39}{112}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{41}{224}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{112}$

y_4	$\frac{5}{112}$	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{45}{224}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{9}{112}$
y_0	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_2	$\frac{6}{7}$	1	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2147483647}$	$\frac{1}{7}$
y_3	$\frac{11}{28}$	0	1	1	0	$-\frac{1}{56}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{28}$
S_1	$\frac{5}{14}$	0	0	8	1	$-\frac{45}{28}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{14}$

$$v = \frac{1}{y_0} - K = \frac{4}{1} - 0 = 4$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{7} = 4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

$$y_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{3}{28} = 4 \cdot \frac{3}{28} = \frac{3}{7}$$

$$y_4 = 0$$

أما اللاعب الثاني:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

نظريــة الشبكات

NETWORK MODELS

نظرة موجزة حول شبكات الأعمال:

شبكة الأعمال هي مخطط يربط بين جميع النشاطات الجزئية لمشروع ما ويبين طبيعة هذه النشاطات والعلاقة بينها والمدة اللازمة لتنفيذ كل منها ودرجة المرونة المتاحة في ذلك.

1. **مفهوم المشروع:** هو عبارة عن مجموعة من العمليات أو النشاطات تربطها علاقات محددة ومعروفة تنفذ بزمن محدد بغرض تحقيق مجموعة من الأهداف.
2. **تخطيط المشروع:** " التخطيط عملية خلق نوع من النظام من حالة واضحة من الفوضى التي خلقت تعقيدا في البيئة التي تعمل فيها بحيث تواجه تغير دائم وهي نشاط جماعي يشارك فيه الجميع من أجل تحفيز الفريق وتدعيم تماسكه وخلف فريق يبذل قصارى جهده لتنفيذ الخطط الموضوعة، مثل هذا الالتزام ضروري لنجاح المشروع أما اعدادك للخطة بنفسك ثم محاولة الحصول على موافقة الجميع عليها تكون عملية طويلة ولا تخلق إحساسا بالالتزام بين أفراد الفريق إذ أنها تصبح خطتك وليست خطتنا"(يونج 2005).
3. **أدوات التخطيط والرقابة:** تستلزم عملية التخطيط إعداد الجداول وبرامج العمل التفصيلية وكلما كان إعداد هذه الجداول سهل التعلم والاستخدام كلما انخفضت كلفة التخطيط والعكس صحيح ومن أهم أدوات التخطيط والسيطرة التي تستخدم في جدولة أعمال المشروع:
   - مخطط تحليل العمل Work Breakdown Structure
   - مخطط غانت Gantt Chart
   - شبكات الأعمال PERT,CPM
4. **الأحداث:** عبارة عن لحظة من الزمن تدل على انجاز بعض الأنشطة وبداية لأنشطة أخرى فالبداية والنهاية لكل نشاط يعبر عنها بحدثين أحدهما حدث البداية والآخر حدث النهاية وتميز الأحداث بأنها لحظة من الزمن وليس مدة منه تمثل بدائرة أو مربع أو مثلث أو مستطيل.
5. **النشاطات:** هي إحدى عناصر المشروع التي يجب انجازها وتقع بين حدثين الأول يعرف باسم الحدث السابق والثاني بالحدث اللاحق فهي حصيلة مجموعة من أحداث لا يمكن البدء بها إلا إذا أنجزت النشاطات السابقة لها بالكامل ، تحتاج إلى وقت وموارد مالية تمثل في الرسم بسهم واتجاه السهم يبين تتابع حدوث الأحداث أما طول السهم فلا يمثل أي شيء، وقت الانجاز يمكن كتابته أسفل أو أعلى السهم وكل سهم يمثل نشاطا مستقلا.
6. **قواعد رسم شبكات الأعمال:**

   أ. يجب أن تتوفر في المشروع:

   - ✓ إمكانية تقسيم المشروع إلى وحدات وأجزاء مستقلة أو مرتبطة ;
   - ✓ لكل مشروع بداية ونهاية بينها مجموعة من الأنشطة ;
   - ✓ الجزء الأساسي للمشروع هو النشاط الذي يعبر عن الجهد المبذول.

ب. يتم التعبير عن أجزاء ووحدات المشروع أو مكوناته من خلال أشكال هندسية معينة:

- ✓ الأحداث ;
- ✓ الأنشطة أو الفعاليات.

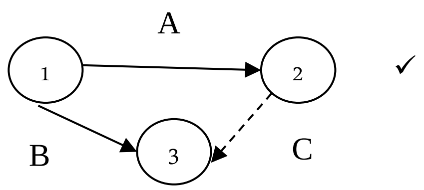
أنشطة حقيقية يعبر عنها بخط متصل

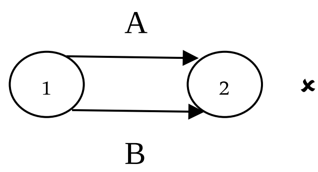
أنشطة وهمية يعبر عنها بخط متقطع

قد تكون الأنشطة اعتيادية يعبر عنها بخط واحد أو حرجة يعبر عنها بخط مزدوج

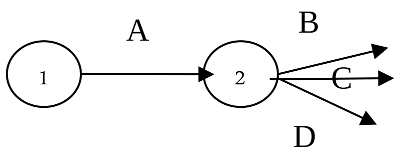
ج. لكل نشاط حدث بداية وحدث نهاية.

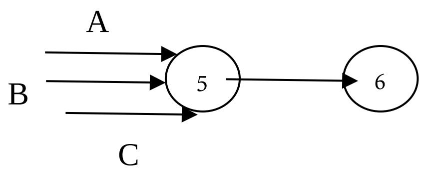
د. لا يمكن أن يبدأ أكثر من نشاط واحد من حدث واحد وينتهي في حدث واحد ويعالج هذا بادخال حدث وهمي.





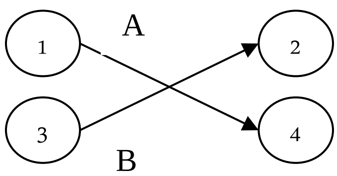
هـ. يمكن أن يكون حدث النهاية لأحد الأنشطة هو بمثابة حدث بداية لأنشطة أخرى.



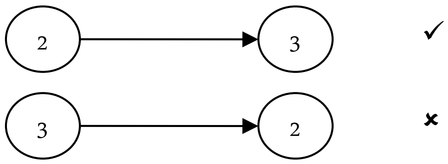


و. إن تقاطع الأنشطة غير مرغوب فيه في شبكات العمل إلا في بعض الحالات الضرورية لإنجاز العمل.

من المفروض انجاز A قبل B

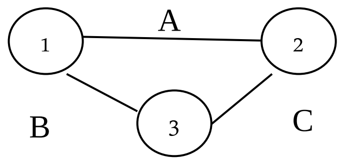


ز. اتجاه الرسم يكون على أساس قاعدة البدء من الحدث الصغير لغاية الحدث الكبير وليس العكس ولا يجوز العودة الى أحاث سابقة.



ح. تبدأ عادة شبكات العمل من حدث بداية واحد وتنتهي بحدث نهاية واحد أيضا، يطلق على خطوط تصل نقاط تقاطع بنفسها تكرار.

خطوط غير موجهة



الحدث يعبر عنه على شكل زوج مرتب (ij) حيث يمثل (i) نقطة بداية الحدث وتمثل (j) نقطة نهاية ذلك الخط.

7. مصفوفة المصادر: (Work Breakdown Structure)

تعتبر الأداة الأساسية في بناء الجدولة وذلك كأداة لتحليل بنية المشروع إلى أصغر وحدة نشاط يمكن جدولتها ومن ثم قياسها والرقابة عليها ومثال ذلك تحليل عملية بناء عمارة الى أنشطة (انشائية،كهربائية،مياه وصرف صحي) ثم يتم تحليل كل مجموعة الى وحدات عمل يمكن جدولتها واطلاقها كأوامر عمل للتنفيذ.

- المصادر البشرية والمادية يوجد عدد كبير من الأدوات للتخطيط والسيطرة.
- مصفوفة المصادر تعمل على ربط المصادر البشرية والمادية الى مهام المشروع وأنشطته.

المصادر / المهام	اختصاصين بالمناهج	مقيمين	اختصاصين بالعلوم	اختصاصين بالرياضيات	طباعة	حاسوب
حدد الحاجات	P					
ثبت المتطلبات	P					
صمم منهاجا مبدئيا	P		S	S		
قيم التصميم	S	P				
طور منهاج العلوم	S		P			
اختبر المنهاج المدمج	S	P		P		S
اطبع ووزع النتائج	S				P	

P: مسؤولية رئيسية S: مسؤولية ثانوية

8. **مخطط غانت**: (Gantt Chart)

مصفوفة المصادر تبين فقط توزيع المصادر على المهام ولا تظهر توزيعها على الزمن وهذه المهمة يتم التعبير عنها من خلال مخطط غانت للمصادر حيث يظهر توزيع كل واحد من المصادر أثناء مراحل حياة المشروع كما يمكننا من متابعة توزيع المصادر فعليا مقارنة مع المخطط لها ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:

علماء المناهج																					
حدد الحاجات																					
صمم المنهاج																					
قيم التصميم																					
اختر المنهاج																					
اختصاصين بالمناهج																					
حدد الحاجات																					
المتطلبات																					
صمم المنهاج																					
طور منهاج علوم																					
طورمنهاج الرياضيات																					
اختر المنهاج																					
اطبع/وزع																					
مقيمون																					
مقيم التصميم																					
اختبر المنهاج																					
اختصاصين بالعلوم والرياضيات																					
صمم المنهاج																					
طور منهاج علوم/رياضيات																					
تسهيلات الطباعة																					
اطبع/وزع																					
حاسوب كبير																					
اختبر المنهاج																					
الزمن	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

9. **أسلوب المسار الحرج**: (Critical Path Methods) ظهر هذ الأسلوب سنة 1957 ويستخدم لأغراض التخطيط والجدولة والرقابة على المشاريع المتوسطة والكبيرة ومن أجل معرفة الموعد النهائي للإنجاز.

ويتم عبر الخطوات التالية:

أ. رسم شبكة أسلوب المسار الحرج المتضمنة للنشاطات المكونة للمشروع ;
ب. تحليل المسارات وتحديد المسار الحرج الذي يمثل أطول مسار في الشبكة وتحديد الزمن المتوقع لإنجاز المشروع ;
ج. حساب البداية المبكرة لكل نشاط ET_i ;
د. حساب النهاية المبكرة لكل نشاط ET_j ;
هـ. حساب البداية المتأخرة LT_i والنهاية المتأخرة LT_j لكل نشاط ;
و. حساب الزمن الفائض لكل نشاط ;

$i \longrightarrow$ رقم لحدث البداية

$j \longrightarrow$ رقم لحدث النهاية

$t_{ij} \longrightarrow$ وقت اتغراق النشاط الواقع بين i و j

ET: الوقت المبكر

LT: الوقت المتأخر

ET_i: الوقت المبكر لوقوع حدث البداية i

LT_i: الوقت المتأخر لوقوع حدث البداية i

ET_j: الوقت المبكر لوقوع حدث النهاية j

LT_j: الوقت المتأخر لوقوع حدث النهاية j

- **الحسابات الأمامية:**

$Et_i=Lt_i=0$

اذا ارتبط بالحدث i نشاط واحد $Et_j=Et_i+t_{ij}$

اذا ارتبط بالحدث i أكثر من نشاط $Et_j = Max\begin{vmatrix} Et_i + t_{ij} \\ Et_i + t_{ij} \end{vmatrix}$

- **الحسابات الخلفية:**

$Et_j=Lt_j$

إذا ارتبط نشاط بالحدث i ($Lti=Ltj+t_{ij}$)

إذا ارتبط أكثر من نشاط بالحدث i $Lt_i = Min \begin{vmatrix} Lt_j + t_{ij} \\ Lt_j + t_{ij} \end{vmatrix}$

في الحسابات الأمامية ولغرض تحديد عدد الأنشطة المرتبطة بالحدث j يؤخذ بعين الاعتبار رأس السهم أما في الحسابات الخلفية لتحديد عدد الأنشطة المرتبطة بالحدث i يؤخذ بعين الاعتبار قاعدة السهم.

يمكن أن يظهر أكثر من مسار حرج إلا أنه يؤخذ أطول المسارات أو بعبارة أخرى يؤخذ المسار الحرج الذي يكون فيه الوقت مساويا لما هو موجود في الحدث الأخير في المخطط الشبكي من أزمنة.

- **أسلوب الجدولة:**

- ✓ استخراج زمن الابتداء المبكر Et_i التي تمثل في العمود الأول بموجب قواعد الحسابات الأمامية من أول حدث من الشبكة الى الحدث الأخير في نهاية الشبكة علما بأن زمن البدء المبكر للحدث الاول هو 0 وكذلك زمن البدء المتأخر يساوي0 ;
- ✓ يتم استخراج زمن الانتهاء المبكر Et_j لكل نشاط من خلال جمع قيم عمود زمني الابتداء المبكر لكل نشاط مع زمن انجاز النشاط نفسه ; t_{ij}
- ✓ استخراج من زمن الانتهاء المتأخر Lt_j وذلك بتحديد الانتهاء المتأخر لأخر حدث في الشبكة ويكون مساويا لأكبر قيمة انتهاء مبكر في العمود الثاني (عمود زمن الانتهاء المبكر)
- ✓ استخدام قواعد الحسابات الخلفية ويتم استخراج بقية القيم للشبكة ;
- ✓ استخراج قيم الابتداء المتأخر Ltjوذلك بطرح زمن انجاز كل نشاط من عمود القيمة الخاصة بزمن الانتهاء المتأخر وحسب كل نشاط ;
- ✓ يتم استخراج الأزمنة الفائضة ST وذلك بطرح قيم الانتهاء المبكر من زمن الانتهاء المتأخر أو بطرح قيم الابتداء المبكر من قيم الابتداء المتأخر وعلى أساس النتائج تحدد الأنشطة الحرجة حيث يكون الزمن الفائض لها يساوي الصفر.

10. **أسلوب تقييم ومراجعة تنفيذ البرامج:** Program Evaluation and Review Technique

إن البرامج والمشاريع المهيئة لتطبيق شبكات العمل تمر بثلاث مراحل وهي التخطيط،الجدولة،المراجعة أو الرقابة وفي كل هذه المراحل تؤخذ بعين الاعتبار الازمنة الاحتمالية نظرا لوجود نوعين من المؤثرات الداخلية والخارجية في عملية تنفيذ أنشطة المشروع.

يعود ظهور الاسلوب للمشاكل التي واجهت البحرية الامريكية عند تطوير مشروع الصواريخ العابرة للقارات وقد تم تطويره ويأخذ ثلاث تقديرات للوقت لكل نشاط:

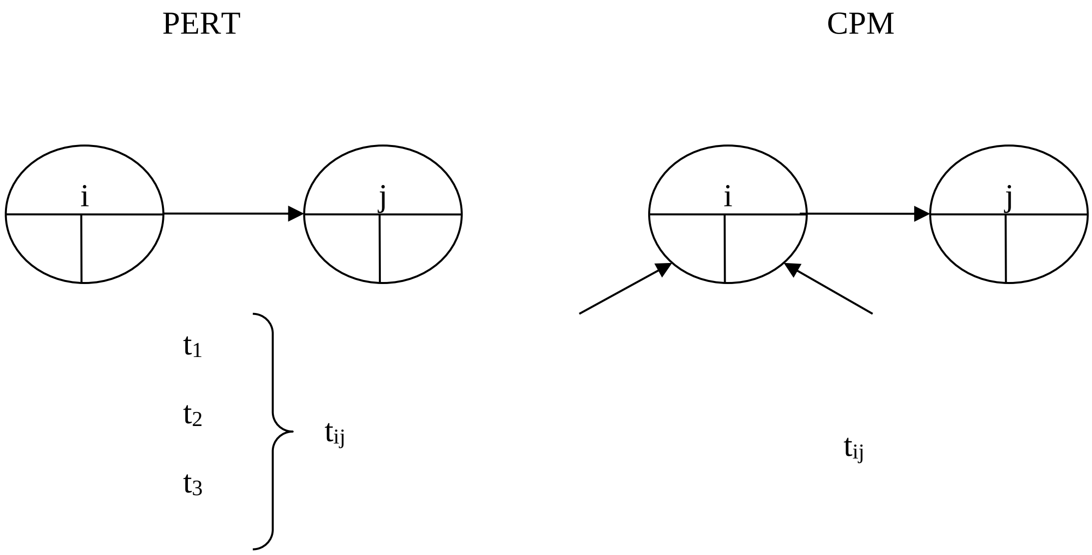
أ. **الوقت التفاؤلي**: t_1 وهو أقصر وقت يتطلبه النشاط إذا كانت جميع المؤثرات الواردة أعلاه تسير في مصلحة تنفيذ المشروع ويحسب لذلك نسبة احتمالية التحقق قليلة.

ب. **الوقت التشاؤمي**:t_3 وهو أطول وقت يتطلبه النشاط إذا كانت جميع المؤثرات الداخلية والخارجية ليست في مصلحة المشروع واحتمالية حدوثه قليلة أيضا.

ج. **الوقت المحتمل جدا**:t_2 الوقت الاعتيادي الذي يستغرقه النشاط في ظل المؤثرات الاعتيادية الخارجية منها والداخلية لذلك تكون إحتمالية تحققه عالية.

الوقت المتوقع=المتوسط الحسابي المرجح بالأوزان لتقديرات الأوقات الثلاثة

أي أن:



من أجل معالجة هذه المشكلة وتحديد وقت واحد لغرض إجراء الحسابات الأمامية والخلفية وبالتالي تحديد المسار الحرج يتم اللجوء الى أسلوب الأوزان أي تقدير وزن معين لكل واحد من الأزمنة الثلاثة t_3,t_2,t_1 كما يلي:

نوع الوقت	إحتمالات الحدوث أو الوزن
(t_3) الزمن المتشائم (b)	1 وزن
(t_2) الزمن الاكثر إحتمالا (m)	4 وزن
(t_1) الزمن التفاؤلي (a)	1 وزن

مجموع الأوزان	6
تصبح المعادلة: $te = \frac{t_1+4t_2+t_3}{6}$	
الانحراف المعياري $\sigma = \frac{t_3-t_1}{6}$	
التباين $(\sigma^2) = \left(\frac{t_3-t_1}{6}\right)^2$	

ويبين التباين الدلالة على مدى تباعد التقدير التفاؤلي عن التقدير التشاؤمي كما يعكس درجة عدم التأكد في تقدير الوقت اللازم لأي نشاط وكلما إرتفع تباين النشاط الحرج كلما قل احتمال الانجاز لهذا النشاط ضمن الوقت المتوقع لإنجازه.

يستفاد من التباين في معرفة درجة عدم التأكد لإنجاز أي نشاط من أنشطة PERT فكلما زاد التباين زادت درجة عدم التأكد.

في أسلوب PERT الوقت المتوقع هو الذي سيتم تثبيته على النشاطات فلو كان الزمن التفاؤلي يساوي ثلاثة ايام والزمن التشاؤمي هو خمسة عشر يوم والوقت المحتمل جدا للنشاط يساوي عشرة أيام فإن الزمن المتوقع للنشاط هو 9,7 يوم ويستخرج: $M = \frac{3+(4\times10)+15}{6}$

إن استخدام أسلوب PERT يساعد إدارة المشروع على الوصول الى الوقت المتوقع للإنجاز النهائي للمشروع وذلك عن طريق المسار الحرج، بعدها يمكن مقارنة هذا الزمن مع الزمن المتعاقد عليه في العقد للوصول إلى احتمالية إنجاز هذا المشروع ضمن الزمن المتعاقد عليه بحساب قيمةZ: $Z = \frac{X-M}{S_r}$

حيث:

M: الوقت المتوقع لإنجاز المشروع

X: الوقت المقترح لإنجاز المشروع

Z: عدد الانحرافات المعيارية لـ X عن الوقت المتوقع M وتعبر عن قوة الاحتمال

ومن ثم فإن قيمة Z تستخدم لإستخراج نسبة الاحتمال المقابل لها من جدول التوزيع الطبيعي والذي يمثل نسبة احتمالية انجاز المشروع ضمن المدة المتعاقد عليها أو أقل من ذلك.

أما بالنسبة لـ S_R فتمثل الجذر التربيعي لمجموع تباينات الأنشطة الواقعة على المسار الحرج أي:

$$r=1,2,\ldots,n \quad S_r = \sqrt{\sum(\sigma^2)}$$

تمارين محلولة حول شبكات الأعمال

التمرين رقم 01:

الجدول أدناه يبين تتابع الأنشطة لمشروع ما والمدة اللازمة لإنجاز كل نشاط:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	المدة (أسبوع)
A	الحفر	-	2
B	ارساء الاساس	A	4
C	وضع الجدار الخشن	B	10
D	وضع السقف	C	6
E	تركيب السباكة الخارجية	C	4
F	تركيب السباكة الداخلية	E	5
G	وضع الجانب الخارجي	D	7
H	التزيين الخارجي	E,G	9
I	اشغال الكهرباء	C	7
J	وضع أوراق الحائط	F,I	8
K	تركيب الارضيات	J	4
L	التزيين الداخلي	J	5
M	تركيب التجهيزات الخارجية	H	2
N	تركيب التجهيزات الداخلية	K,L	6

المطلوب:

أرسم شبكة الأعمال ومخطط غانت للمشروع؟

التمرين رقم 02:

تسعى مؤسسة لإنجاز مبنى صناعي جديد والجدول التالي يظهر تتابع الانشطة والوقت اللازم:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	المدة (يوم)
A	تعريف المشكلة	-	3
B	دراسة اولية للتكاليف والقيود	A	3
C	تحليل مشاكل المبنى القديم	A	3
D	دمج المتطلبات الجديدة في المبنى	C	5
E	الرسومات التفصيلية للمبنى الجديد	B,C	6
F	بناء نموذج أولي	D,E	9
G	تحليل التكاليف	E	5
H	الهندسة ومراقبة الجدوى	G	3
I	رأي المقاول	G,F	5
J	تفتيش المبنى	I,H	6
K	تخطيط المصنع النهائي	J	4

المطلوب:

أرسم مخطط غانت وما الوقت اللازم لاتمام مخطط المصنع؟

التمرين رقم 03:

منتج سينمائي يرغب في انتاج فيلم ويخطط لمعرفة الوقت اللازم لانجاز الفيلم فقسم المشروع الى انشطة والمدة اللازمة لكل نشاط حسب الجدول التالي:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	المدة (شهر)
A	كتابة السيناريو	-	4
B	اختيار وتوظيف الممثلين	A	2
C	اختيار مكان التصوير	A	1
D	التقسيم التقني	A,C	1
E	تحضير الديكور	C,D	1
F	التصوير الخارجي	A,B,C,D	1
G	التصوير الداخلي	D,E,F	2
H	مزامنة	F,G	1
I	التركيب	H	2
J	هندسة الصوت	I	1
K	الميكساج	I,J	1
L	اخراج النسخة صفر	K	1

المطلوب:

باستعمال مخطط غانت أوجد الوقت اللازم لاتمام الفيلم؟

التمرين رقم 04:

يوضح الجدول التالي العلاقة بين الأنشطة المختلفة في مثال لمشروع للمسح الصناعي حيث تمت جدولة المشروع على المراحل التالية:

- تحليل المشروع إلى أنشطة ؛
- تتابع الأنشطة ؛
- إنشاء شبكة الأعمال ؛
- تقدير الأزمنة والفائض لكل نشاط.

جدول النشاط لمشروع مسح للمصانع

النشاط		المدة	النشاط السابق
رمز	الوصف		
A	خطة المسح	3	-
B	اختيار الباحثين	5	A
C	صياغة الاستبيان	10	A
D	اختيار المصانع	4	C
E	إجراء المسح	13	D,G,H
F	تحليل النتائج	3	E
G	طباعة الاستبيان	5	C
H	تدريب الباحثين	7	B,C

المطلوب:

أرسم شبكة الاعمال وأوجد المسار الحرج؟

التمرين رقم 05:

دار نشر عقدت اتفاقية مع مؤلف لنشر كتاب ورقي والأنشطة المتعلقة بتأليف الكتاب مبينة في الجدول وقد قام المؤلف بإرسال نسخة ورقية والكترونية لدار النشر.

رمز النشاط	النشاط	المدة(أسبوع)	النشاط السابق
A	تدقيق المخطوطات بواسطة المحرر	3	-
B	إعداد نموذج الصفحات	2	-
C	تصميم غلاف الكتاب	4	-
D	تحضير العمل الفني	3	-
E	موافقة المؤلف على المخطوطة ونموذج الصفحات	2	A,B
F	تنسيق الكتاب	4	E
G	مراجعة المؤلف لتنسيق الكتاب	2	F
H	مراجعة المؤلف للعمل الفني	1	D
I	إنتاج ألواح الطباعة	2	G,H
J	إنتاج الكتاب وتجليده	4	C,I

المطلوب:

أوجد شبكة الأعمال للمشروع والمسار الحرج؟

التمرين رقم 06:

تقوم شركة ببناء ثلاثة أبراج من خلال جدول الأعمال التالي:

رمز النشاط	وصف النشاط	المدة (شهر)	النشاط السابق
A	تنظيف الموقع وحفر الأساس	9	-
B	صب الأساس	6	A
C	وضع الأعمدة وصب الأدوار	8	B
D	البناء	2	B
E	التشطيبات النهائية	3	C,D

المطلوب:

أرسم شبكة الأعمال للمشروع وحدد المسار الحرج؟

التمرين رقم 07:

تسعى مؤسسة لإنتاج سلعة جديدة والجدول التالي يبين تتابع الأنشطة والمدة اللازمة لإنجازها:

رمز النشاط	النشاط	الزمن	النشاط السابق
A	التبؤ بحجم المبيعات	10	-
B	دراسة تنافسية السوق	7	-
C	تصميم المنتج	5	A
D	تحضير جدول الانتاج	3	C
E	تقدير تكلفة الانتاج	2	D
F	تحديد سعر البيع	1	B,E
G	تحضير الميزانية	14	E,F

المطلوب:

أرسم شبكة الاعمال للمشروع واوجد المسار الحرج؟

التمرين رقم 08:

شركة تنجز مشروعا مقسما الى عدة أنشطة كما يوضح الجدول التالي:

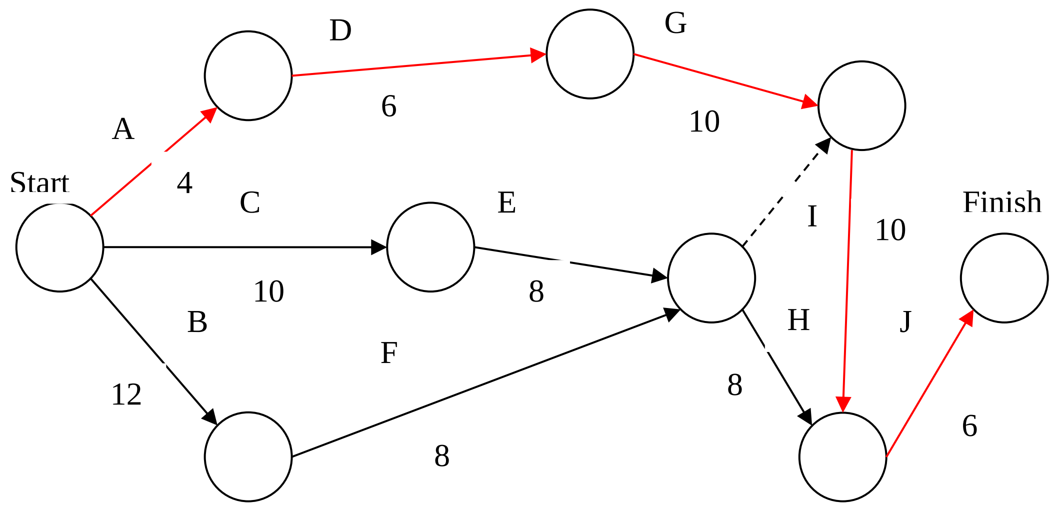
رمز النشاط	المدة الزمنية (يوم)	النشاط السابق
A	3	-
B	4	-
C	5	A
D	6	A
E	7	C
F	8	D
G	9	B
H	3	E,F,G

المطلوب:

أرسم شبكة الاعمال للمشروع واوجد المسار الحرج؟

التمرين رقم 09:

اليك شبكة الاعمال التالية:

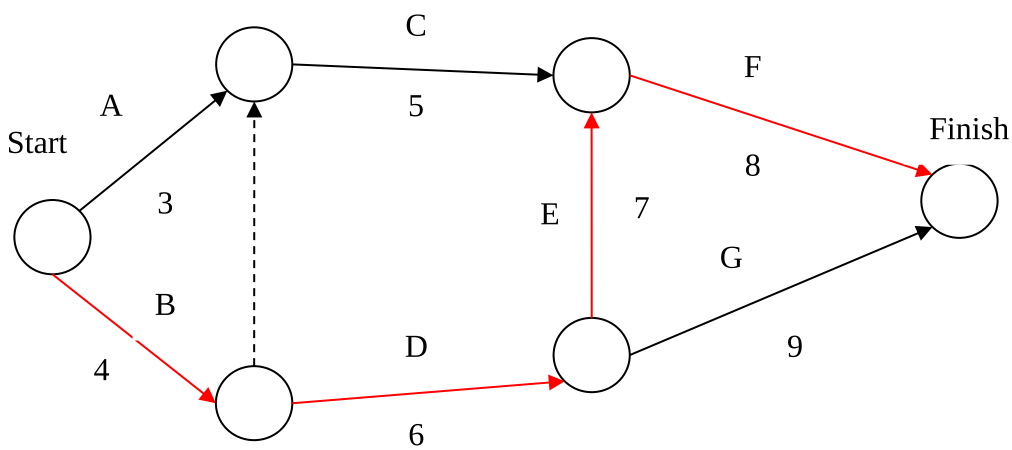


المطلوب:

أوجد المسار الحرج للمشروع؟

التمرين رقم 10:

اليك شبكة الأعمال لمشروع ما:



المطلوب:

أوجد المسار الحرج للمشروع؟

التمرين رقم 11:

مقاول يشرف على إنجاز مشروع سكني وقد تم تقسيم الأنشطة كما يلي:

رمز النشاط	النشاط	المدة (شهر)	النشاط السابق
A	اختيار الموقع	5	-
B	تصميم الرسومات	7	-
C	تصاميم تنفيذية	4	-
D	حفر الأرض	2	A
E	بناء الأساس	8	C
F	صب الخرسانة على الأرضية	3	B,D,E
G	بناء الأعمدة	2	F
H	بناء الجدران	5	F
I	تركيب شبكة الكهرباء	6	F
J	تركيب قوالب السقف	4	G
K	تركيب الحديد	3	H
L	صب الخرسانة على السقف	1	I

المطلوب:

أرسم شبكة المشروع وأوجد المسار الحرج؟

التمرين رقم 12:

تقوم مقاولة بانجاز مشروع مقسم الى:

رمز النشاط	المدة	النشاط السابق
A	2	-
B	10	A
C	2	-
D	5	C
E	3	B,D
F	1	E
G	5	E
H	6	F
I	5	G

المطلوب:

أرسم شبكة الأعمال للمشروع وأوجد المسار الحرج؟

التمرين رقم 13:

لاستغلال منجم تسعى شركة عمومية لانجاز الأنشطة المبينة في الجدول التالي:

رمز النشاط	وصف النشاط	المدة	النشاط السابق
A	الحصول على رخصة استغلال	5	-
B	انشاء مسلك يربط الموقع بالطريق	6	-
C	تركيب آلتين للتنقيب	4	A
D	اقامة ثكنة مؤقتة	3	A
E	وضع الاسفلت على المسلك	1	A
F	امدادات الما	4	E
G	فريق التنقيب	14	F,D
H	تركيب عتاد الاستغلال	12	B,C
I	بناء شقة للمستخدمين	2	H,G

المطلوب:

أرسم شبكة الاعمال للمشروع وأوجد المسار الحرج؟

التمرين رقم 14:

مشروع يتكون من خمسة أنشطة، النشاطات السابقة والمدة الزمنية المقدرة للأنشطة موضحة في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق	الأزمنة المقدرة		
		a	m	b
A	-	1	2	3
B	-	1	3	5
C	A,B	3	4	5
D	A,C	2	2	2
E	C,D	1	2	12

المطلوب:

1. أرسم شبكة الأعمال للمشروع بالاعتماد على متوسط الأزمنة؟
2. أحسب الأزمنة المتأخرة والمبكرة والفائض؟
3. أحسب التباين والانحراف المعياري للمسار الحرج؟
4. أحسب احتمال انهاء المشروع بين 11 و 15 يوم؟

التمرين رقم 15:

الجدول رقم 1 يبين الأنشطة اللازمة لإنجاز مشروع:

الجدول رقم 1

النشاط	المدة	النشاط السابق
A	4	-
B	7	A
C	8	A
D	6	A
E	15	B,C
F	9	C
G	12	D,F
H	8	E,G

ويبين الجدول رقم 2 الوقت المحتمل جدا والوقت التفاؤلي والوقت التشاؤمي للمشروع:

الجدول رقم 2

النشاط	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التفاؤلي a	الوقت التشاؤمي b
A	4	2	6
B	7	4	10
C	7	6	14
D	6	3	9
E	14	12	22
F	10	2	12
G	9	6	12
H	7	5	15

المطلوب:

1. أوجد المسار الحرج؟
2. أحسب متوسط الأزمنة للأنشطة والتباين والانحراف المعياري؟
3. هل من الممكن أن ينجز المشروع بين 45 يوم بمجال الثقة 95%؟

التمرين رقم 16:

الجدول التالي يبين تتابع الأنشطة لمشروع ما والأوقات المقدرة:

النشاط	النشاط السابق	الوقت التفاؤلي *a*	الوقت المحتمل جدا *m*	الوقت التشاؤمي *b*
A	-	1	2	3
B	A	1	1	1
C	B	1	2	3
D	C	1	2	3
E	D	3	5	7
F	D	1	2	3
G	F	2	3	5
H	E	1	1	1
I	G,H	2	3	4
J	I	2	3	4
K	I	1	2	3
L	J,K	2	3	5
M	L	1	1	1

المطلوب:

أوجد المسار الحرج وأحسب التباين والانحراف المعياري؟

التمرين رقم 17:

ليكن الجدول التالي يبين الأزمنة لأنشطة مشروع :

النشاط	الوقت التفاؤلي a	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التشاؤمي b
A	1	3	5
B	3	4	5
C	4	5	6
D	3	5	7
E	5	6	13
F	4	7	10
G	6	8	10

المطلوب:

1. أحسب وقت الانتهاء المتوقع والتباين للمشروع؟
2. ما هو احتمال انتهاء المشروع بين 20-25 يوم؟

التمرين رقم 18:

الجدول أدناه يبين تتابع أنشطة لإنجاز مشروع والأزمنة المقدرة بالأسابيع لهاته الأنشطة:

النشاط	النشاط السابق	الوقت التفاؤلي a	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التشاؤمي b
A	-	7	16	28
B	A	4	19	25
C	A	10	16	37
D	B	7	13	37
E	B,C	13	19	33
F	B	19	22	33
G	D,E	4	7	19
H	F,G	13	19	49
E	B,C	13	25	37
J	I,H	7	13	19

المطلوب:

أوجد المسار الحرج واحتمال انجاز المشروع في 104 أسبوع؟

التمرين رقم 19:

مسير مطعم للوجبات التقليدية يريد معرفة الوقت الذي يستغرقه بالدقائق تقديم الوجبات للزبائن والأنشطة اللازمة تظهر في الجدول التالي:

رمز النشاط	النشاط	النشاط السابق	الوقت التفاؤلي a	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التشاؤمي b
A	شراء المستلزمات	-	60	90	120
B	تحضير العجائن	A	74	85	150
C	تحضير الحساء	A	48	60	90
D	تنظيف المطبخ	-	120	150	180
E	تشغيل آلات الطهي	D	24	30	60
F	طهو الوجبات	E,C	90	120	180
G	تحضير الأواني التقليدية	F,B	20	30	46
H	وضع وتزيين الوجبة	E,C	12	20	40
I	تقديم الوجبة	G,H	10	20	30

المطلوب:

أوجد المسار الحرج وأحسب تباين وانحراف المشروع؟ما احتمال انجاز المشروع خلال 300 دقيقة؟

التمرين رقم 20:

الجدول التالي يبين تتابع أنشطة مشروع والمدة اللازمة(أسبوع):

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	الوقت التفاؤلي a	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التشاؤمي b
A	طلب واستلام الكوابل	-	1,5	3	4,5
B	تركيب الكوابل	A,I	2	4	6
C	تفتيش الكوابل	B	0,5	1	1,5
D	طلب واستلام عتاد السمكرة	-	2	4	6
E	اشغال السمكرة الخارجية	D,H	1	2	3
F	أشغال السمكرة الداخلية	E,I	3	5	7
G	أشغال الأرض	-	0,5	1	1,5
H	الأساس	G	2	3	4
I	بناء الاطار	H	3	5	7
J	طلب واستلام القوالب الرملية	-	4	6	8
K	بناء القوالب	J,I	2	3	4
L	طلب واستلام البلاط	-	10	14	18
M	بناء هيكل السقف	I	0,5	2	1,5
N	وضع الغلاف	M,L	1	2	3
O	التلبيس الداخلي	M,F,C	2	3	4
P	التهيئة الداخلية	O,N	1	3	5
Q	التفتيش العام	P	1	2	3
R	التنظيف الخارجي	N,K,O	0,5	1	1,5
S	التهيئة الخارجية	R	2	3	4

المطلوب:

أوجد المسار الحرج واحتمال انجاز المشروع في 20 أسبوع؟

التمرين رقم 21:

مؤسسة تعمل على مشروع مستشفى وقد قامت بتقسيم المشروع الى مجموعة من الانشطة وقد قدرت الازمنة اللازمة لإنهائها كما يوضح الجدول التالي:

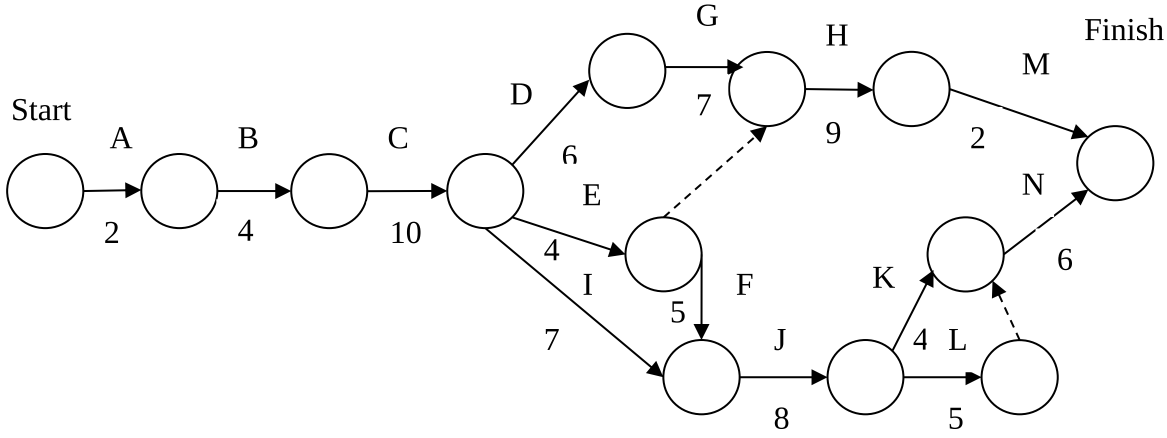
رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	الوقت التفاؤلي a	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التشاؤمي b	$\frac{a+4m+b}{6}$
A	اختيار الطاقم الاداري والطبي	-	9	12	15	12
B	تحديد الموقع واجراء مسح له	-	5	9	13	9
C	اختيار التجهيزات	A	8	10	12	10
D	تحضير المخطط النهائي	B	7	9	17	10
E	جلب العتاد الى الموقع	B	18	23	34	24
F	اجراء مقابلة للمرضين وموظفي الدعم	A	9	9	15	10
G	شراء واستلام المعدات	C	30	35	40	35
H	بناء المستشفى	D	35	39	49	40
I	تطوير نظام المعلومات	A	12	15	18	15
J	تركيب التجهيزات	E,G,H	3	3	9	4
K	تدريب الممرضين وطاقم الدعم	F,I,J	7	9	11	9

المطلوب:

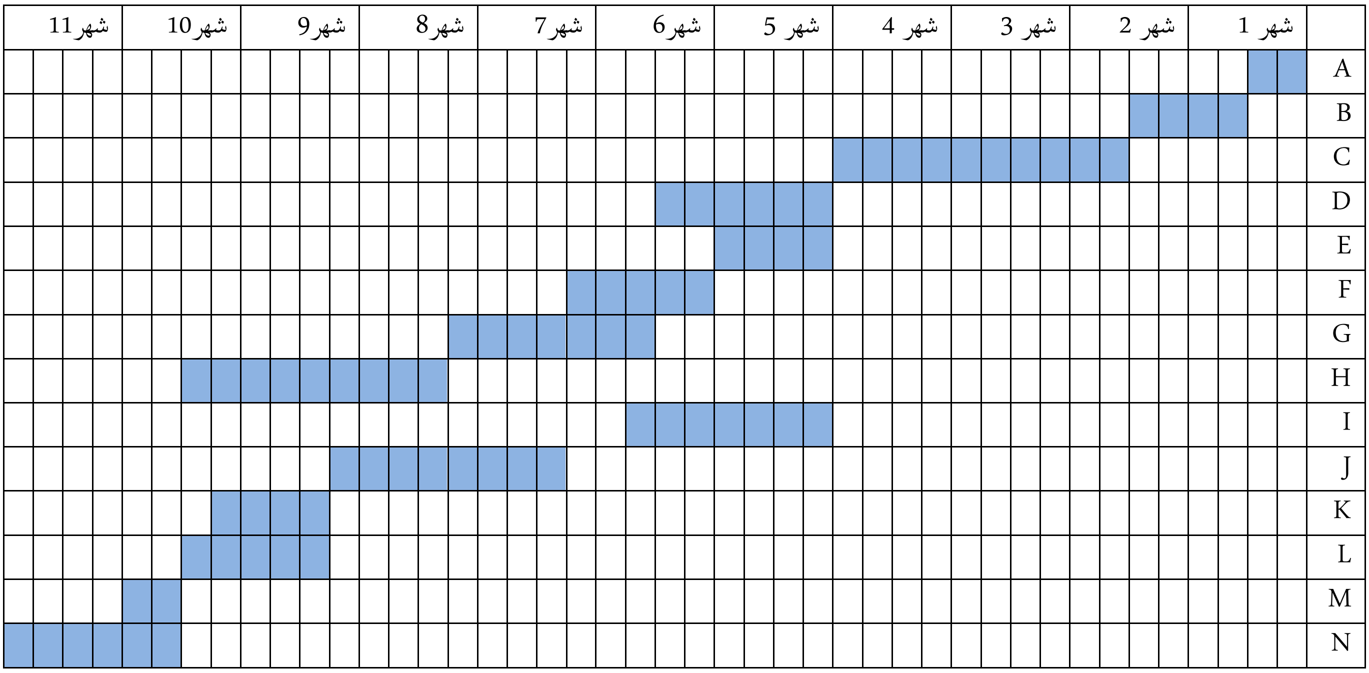
اوجد المسار الحرج؟ وما احتمال انجاز المشروع في مدة 75 أسبوع؟

حلول التمارين

حل التمرين رقم 01:



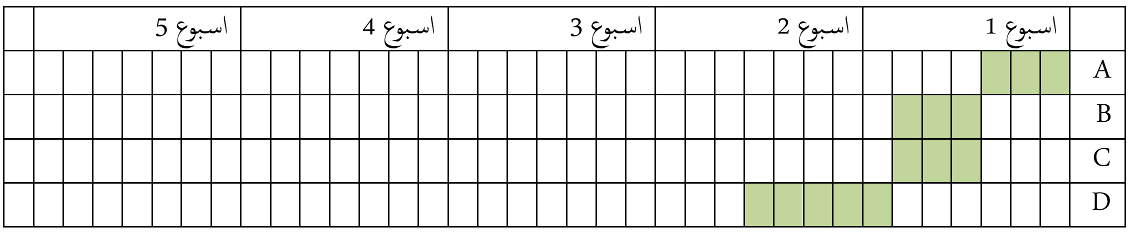
مخطط غانت:

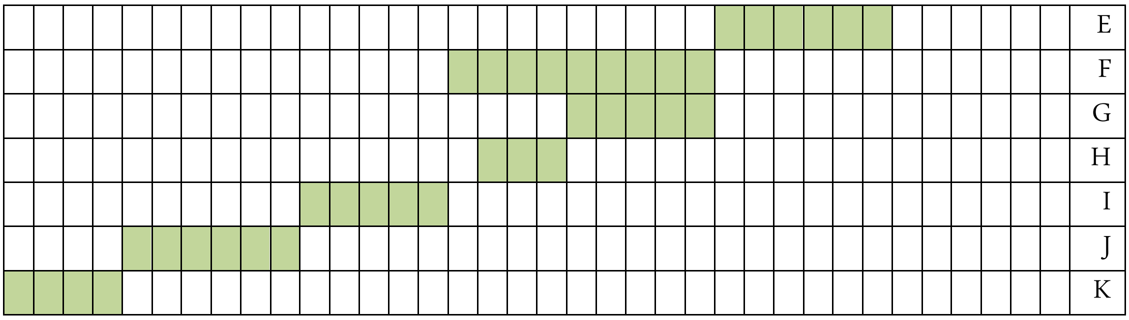


ينجز المشروع في غضون 44 أسبوع.

حل التمرين رقم 02:

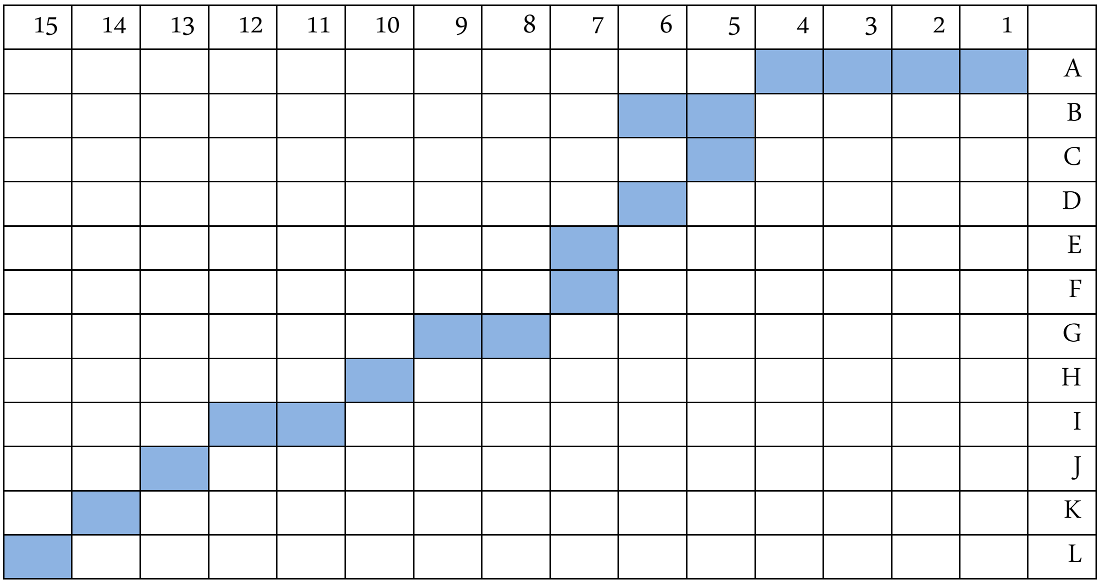
مخطط غانت:





الوقت اللازم لإنجاز المخطط النهائي هو 36 يوم.

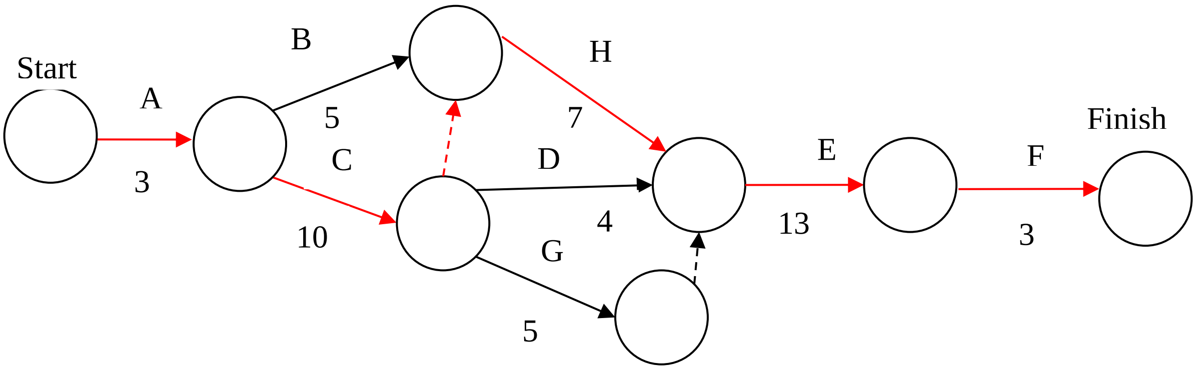
حل التمرين رقم 03:



المدة اللازمة لانجاز الفيلم هي 15 شهر.

حل التمرين رقم 04:

الاعمال للمشروع وأوجد المسار الحرج؟

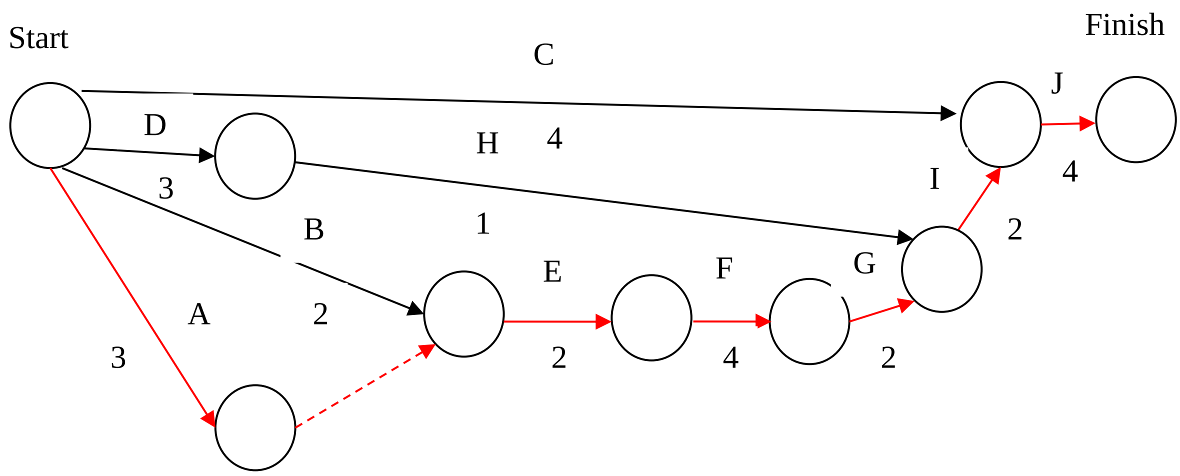


النشاط		المدة	النشاط السابق	المبكر		المتأخر		الفائض
رمز	الوصف			بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	خطة المسح	3	-	0	3	0	3	0
B	اختيار الباحثين	5	A	3	8	8	13	5
C	صياغة الاستبيان	10	A	3	13	3	13	0
D	اختيار المصانع	4	C	13	17	16	20	3
E	إجراء المسح	13	D,G,H	20	33	20	33	0
F	تحليل النتائج	3	E	33	36	33	36	0
G	طباعة الاستبيان	5	C	13	18	15	20	2
H	تدريب الباحثين	7	B,C	13	20	13	20	0

ومنه المسار الحرج هو: $A \longrightarrow C \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow F$

3+10+7+13+3=36

حل التمرين رقم 05:



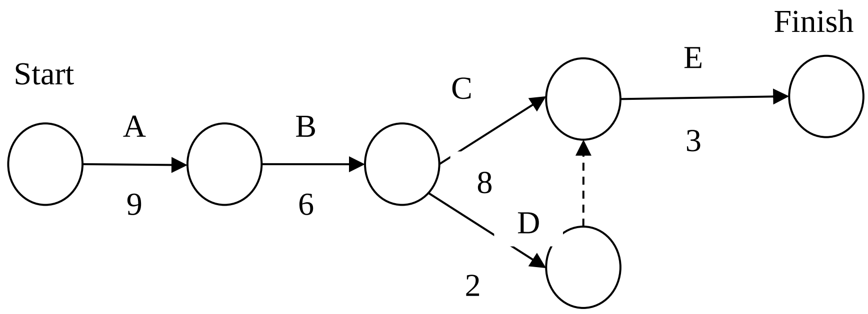
رمز النشاط	النشاط	المدة (أسبوع)	النشاط السابق	المبكر		المتأخر		الفائض
				بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	تدقيق المخطوطات بواسطة المحرر	3	-	0	3	0	3	0
B	إعداد نموذج الصفحات	2	-	0	2	1	3	1
C	تصميم غلاف الكتاب	4	-	0	4	9	13	9
D	تحضير العمل الفني	3	-	0	3	4	7	4

E	موافقة المؤلف على المخطوطة ونموذج الصفحات	2	A,B	3	5	3	5	0
F	تنسيق الكتاب	4	E	5	9	5	9	0
G	مراجعة المؤلف لتنسيق الكتاب	2	F	9	11	9	11	0
H	مراجعة المؤلف للعمل الفني	1	D	3	4	10	11	7
I	إنتاج ألواح الطباعة	2	G,H	11	13	11	13	0
J	إنتاج الكتاب وتجليده	4	C,I	13	17	13	17	0

A ⟶ E ⟶ F ⟶ G ⟶ I ⟶ J

3+2+4+2+2+4=17

حل التمرين رقم 06:

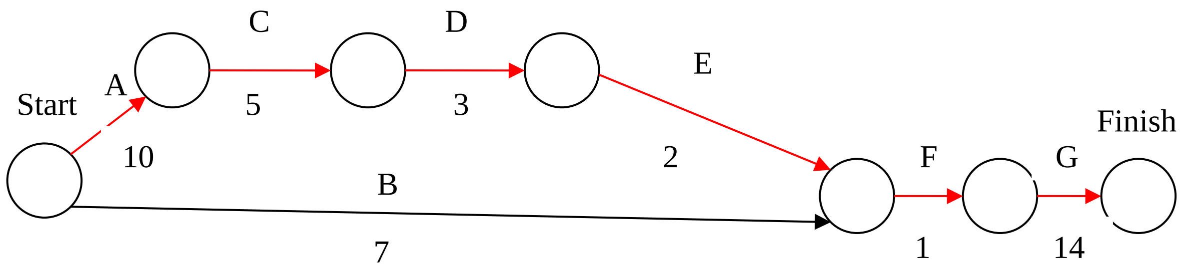


رمز النشاط	المدة (شهر)	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	9	0	9	0	9	0
B	6	9	15	9	15	0
C	8	15	23	15	23	0
D	2	15	17	21	23	6
E	3	23	26	23	26	0

المسار الحرج هو: A ⟶ B ⟶ C ⟶ E

9+6+8+3=26

حل التمرين رقم 07:

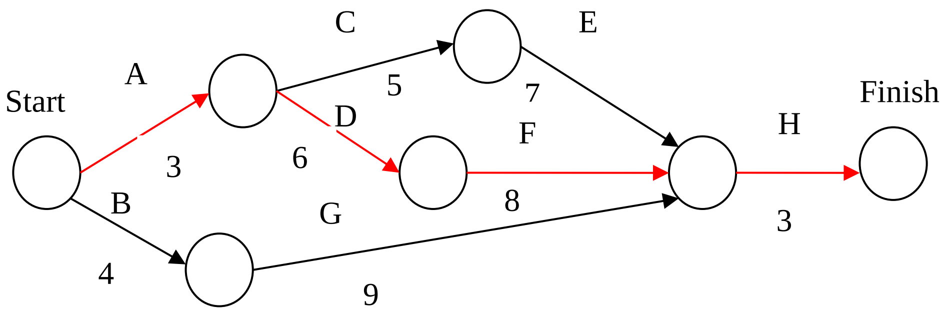


رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	10	0	10	0	10	0
B	7	0	7	13	20	13
C	5	10	15	10	15	0
D	3	15	18	15	18	0
E	2	18	20	18	20	0
F	1	20	21	20	21	0
G	14	21	35	21	35	0

المسار الحرج هو: A ⟶ C ⟶ D ⟶ E ⟶ F ⟶ G

10+7+3+2+1+14=37

حل التمرين رقم 08:



رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	3	0	3	0	3	0
B	4	0	4	4	8	4
C	5	3	8	5	10	2
D	6	3	9	3	9	0
E	7	8	15	10	17	2
F	8	9	17	9	17	0
G	9	4	13	8	17	4
H	3	17	20	17	20	0

المسار الحرج هو: A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ F $\rightarrow$ H

3+6+8+3=20

حل التمرين رقم 09:

الحل:

رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	4	0	4	0	4	0
B	12	0	12	2	14	2
C	10	0	10	4	14	4
D	6	4	10	4	10	0
E	8	10	18	14	22	4
F	8	12	20	14	22	2
G	10	10	20	10	20	0
H	8	20	28	22	30	2
I	10	20	30	20	30	0
J	6	30	36	30	36	0

المسار الحرج هو: A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ G $\rightarrow$ I $\rightarrow$ J

4+6+10+10+6=36

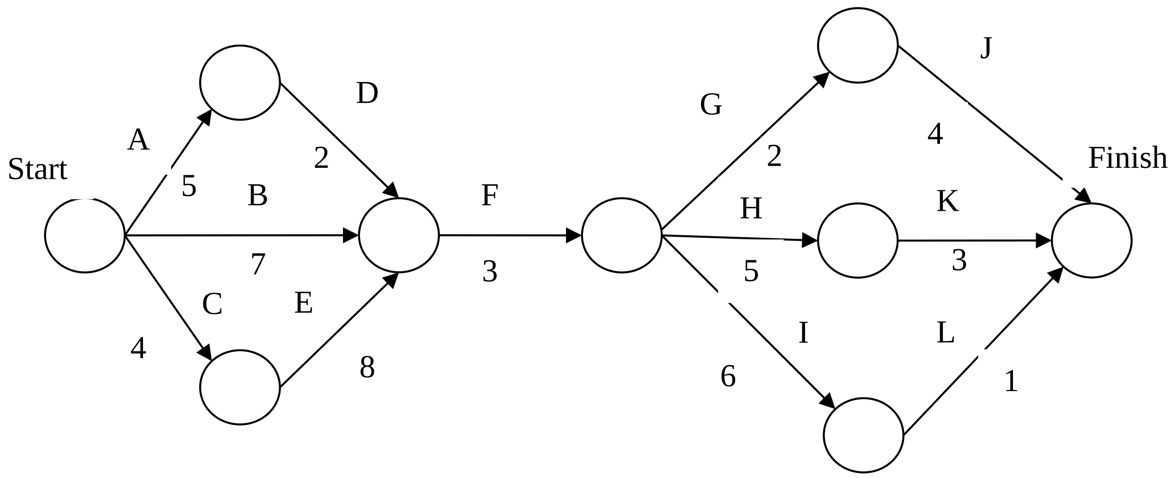
حل التمرين رقم 10:

رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	3	0	3	9	12	9
B	4	0	4	0	4	0
C	5	4	9	12	17	8
D	6	4	10	4	10	0
E	7	10	17	10	17	0
F	8	17	25	17	25	0
G	9	10	19	16	25	6

المسار الحرج هو: B → D → E → F

4+6+7+8=25

حل التمرين رقم 11:



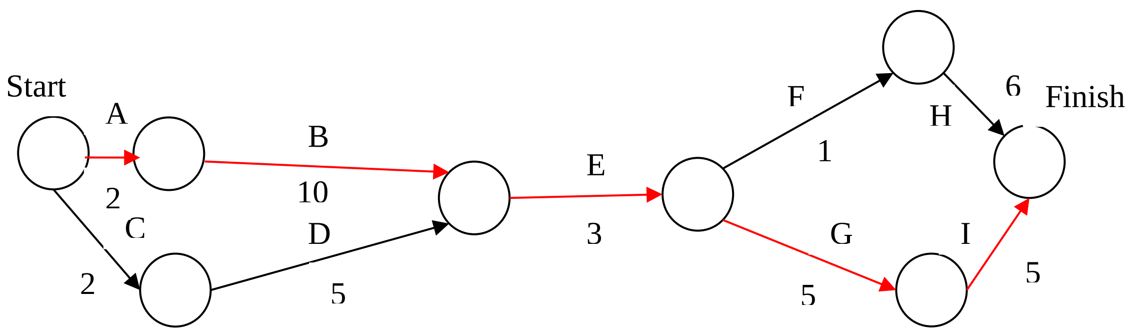
رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	5	0	5	0	10	5
B	7	0	7	5	12	5
C	4	0	4	0	4	0
D	2	5	7	10	12	5

E	8	4	12	4	12	0
F	3	12	15	12	15	0
G	2	15	17	17	19	2
H	5	15	20	15	20	0
I	6	15	21	16	22	1
J	4	17	21	19	23	2
K	3	20	23	20	23	0
L	1	21	22	22	23	1

C → E → F → H → K

4+8+3+5+3=23

حل التمرين رقم 12:

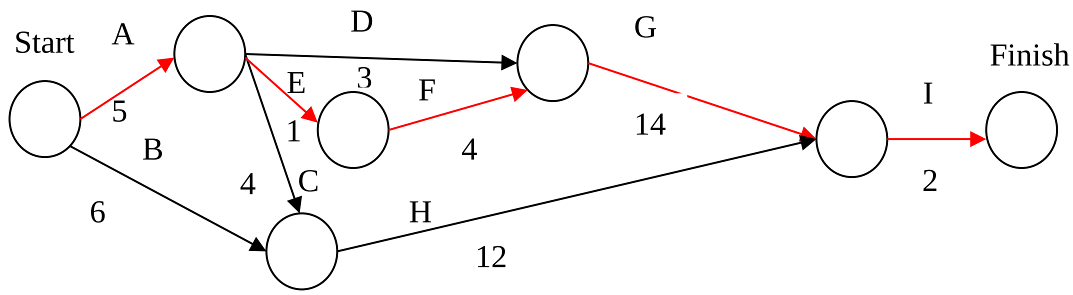


رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	2	0	2	0	2	0
B	10	2	12	2	12	0
C	2	0	2	5	7	5
D	5	2	7	7	12	5
E	3	12	15	12	15	0
F	1	15	16	18	19	3
G	5	15	20	15	20	0
H	6	16	22	19	25	3
I	5	20	25	20	25	0

المسار الحرج هو: A → B → E → G → I

2+10+3+5+5=25

حل التمرين رقم 13:



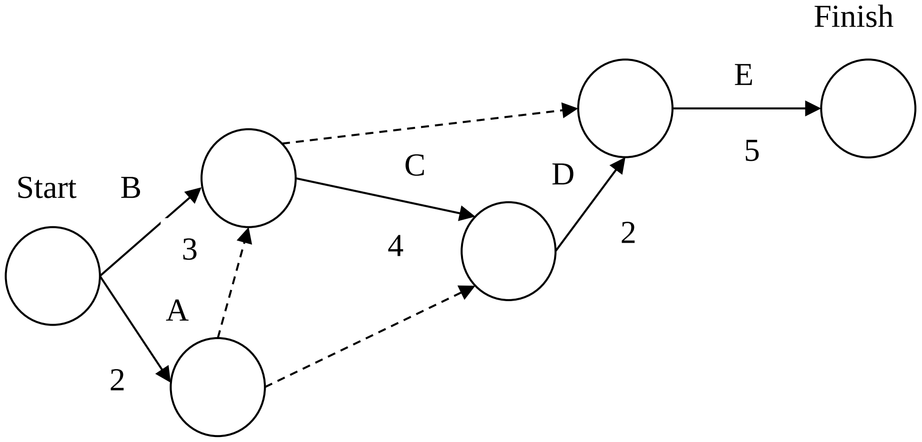
الفائض	المتأخر		المبكر		المدة	رمز النشاط
	نهاية	بداية	نهاية	بداية		
0	5	0	5	0	5	A
6	12	6	6	0	6	B
3	12	8	9	5	4	C
2	10	7	8	5	3	D
0	6	5	6	5	1	E
0	10	6	10	6	4	F
0	24	10	24	10	14	G
3	24	12	21	9	12	H
0	26	24	26	24	2	I

المسار الحرج هو: A → E → F → G → I

5+1+4+14+2=26

حل التمرين رقم 14:

1. رسم شبكة الاعمال:



2. حساب الأزمنة:

رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	2	0	2	1	3	1
B	3	0	3	0	3	0
C	4	3	7	3	7	0
D	2	7	9	7	9	0
E	5	9	14	9	14	0

المسار الحرج هو: $B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$

3+4+2+5=14

3. حساب التباين والانحراف المعياري:

$$(\sigma^2) = \left(\frac{t_3 - t_1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5-3}{6}\right)^2 + \left(\frac{2-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{12-1}{6}\right)^2$$

$$(\sigma^2) = \left(\frac{16+4+0+121}{36}\right) = 3{,}92$$

$$\sigma = 1{,}98$$

4. حساب احتمال انهاء المشروع بين 11-15 يوم:

$$Z = \frac{X - M}{S_r}$$

$$Z = \frac{11 - 14}{1{,}98} = -1{,}55$$

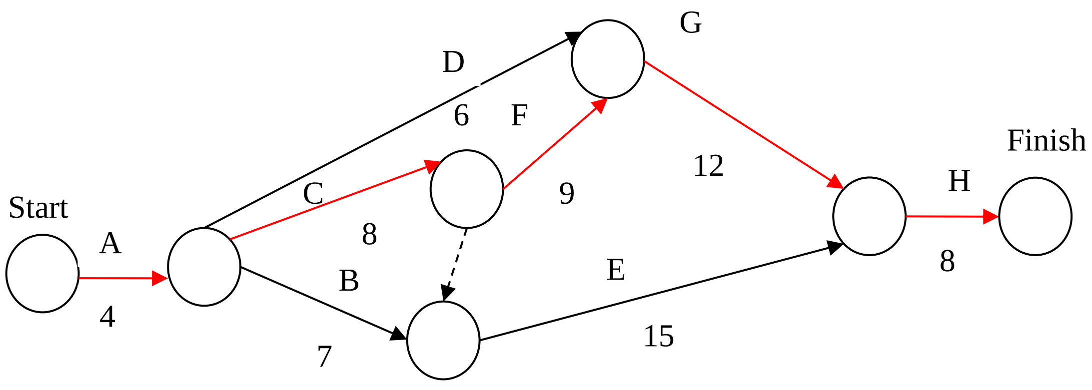
من جدول الاحتمالات نجد أن الاحتمال المقابل للاحصائية Z=-1,55 هو 0,0668 أي ما يقارب 7%.

$$Z = \frac{15 - 14}{1{,}98} = 0{,}5050$$

من جدول الاحتمالات نجد أن الاحتمال المقابل للاحصائية Z=0,5050 هو 0, 6915 أي ما يقارب 70%.

حل التمرين رقم 15:

1. يجاد المسار الحرج:



رمز النشاط	المدة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	4	0	4	0	4	0
B	7	4	11	11	18	7
C	8	4	12	4	12	0
D	6	4	10	15	21	11
E	15	12	27	18	33	5
F	9	12	21	12	21	0
G	12	21	33	21	33	0
H	8	33	41	33	41	0

المسار الحرج هو: $A \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H$

4+8+9+12+8=41

حل التمرين رقم 16:

1. حساب التباين والانحراف المعياري:

$$(\sigma^2) = \left(\frac{t_3 - t_1}{6}\right)^2 = \left(\frac{6-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{14-6}{6}\right)^2 + \left(\frac{12-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{12-6}{6}\right)^2 + \left(\frac{15-5}{6}\right)^2$$

$$(\sigma^2) = \left(\frac{16+64+100+36+100}{36}\right) = 8{,}77$$

$$\sigma = 2{,}96$$

2. حساب احتمال انهاء المشروع بين 45 يوم:

$$Z = \frac{X - M}{S_r}$$

$$Z = \frac{45 - 41}{2,96} = 1,35$$

من جدول الاحتمالات نجد أن الاحتمال المقابل للإحصائية Z=1,35 هو 0, 9032 أي ما يعادل 90%.

النشاط	الوقت المحتمل جدا m	الوقت التفاؤلي a	الوقت التشاؤمي b	التباين σ^2
A	4	2	6	0,444
B	7	4	10	1
C	7	6	14	1,778
D	6	3	9	1
E	14	12	22	2,778
F	10	2	12	2,778
G	9	6	12	1
H	7	5	15	2,778

$$\sum t_{ij} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \leq t \leq \sum t_{ij} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

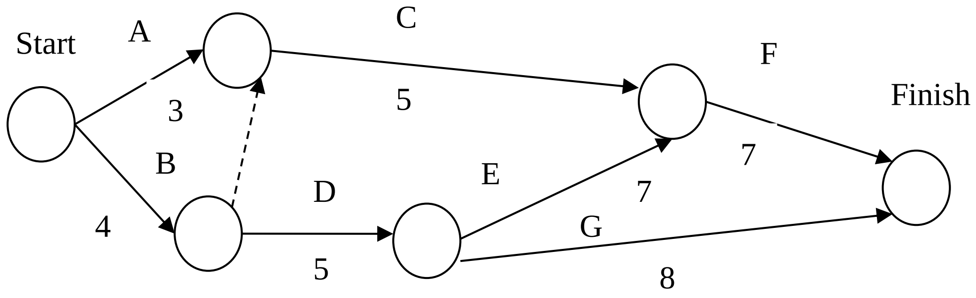
$$41 - (1,96)(3,682) \leq t \leq 41 + (1,96)(3,682)$$

$$33,783 \leq t \leq 48,216$$

حل التمرين رقم 17:

1. حساب وقت الانتهاء المتوقع والتباين:

النشاط	الوقت المتوقع $\frac{a+4m+b}{6}$	التباين $\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	3	0,44
B	4	0,11
C	5	0,11
D	5	0,44
E	7	1,77
F	7	1
G	8	0,44



الفائض	المتأخر		المبكر		المدة	رمز النشاط
	نهاية	بداية	نهاية	بداية		
8	11	8	3	0	3	A
0	4	0	4	0	4	B
8	16	11	8	3	5	C
0	9	4	9	4	5	D
0	16	9	16	9	7	E
0	23	16	23	16	7	F
6	23	15	17	9	8	G

المسار الحرج هو: $B \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow F$

4+5+7+7=23

$$\sigma^2 = 0{,}11 + 0{,}44 + 1{,}77 + 1 = 3{,}32$$

$$\sigma = 1{,}82$$

2. احتمال الانجاز في الفترة بين 20-25 يوم:

$$Z = \frac{X - M}{S_r} = \frac{20 - 23}{1{,}82} = -1{,}64$$

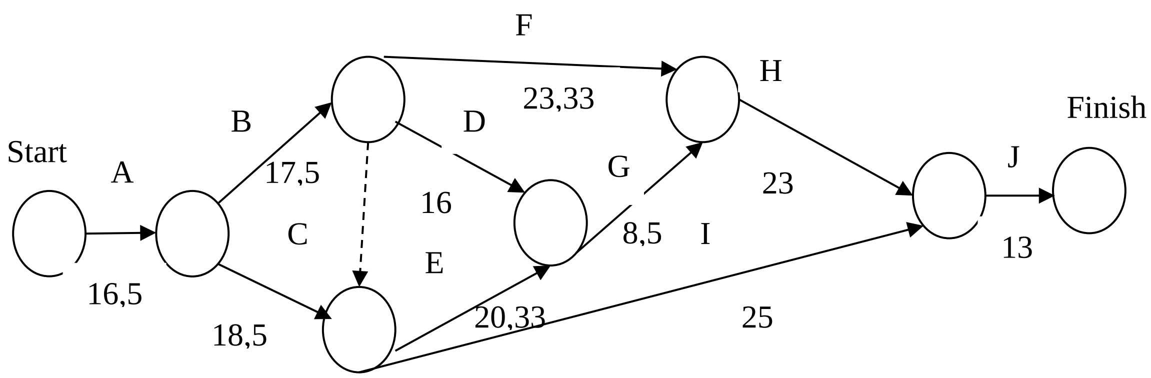
قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي تقابلها قيمة الاحتمال 0,0505 إذن فاحتمال الانجاز في المدة هو 5%.

$$Z = \frac{X - M}{S_r} = \frac{25 - 23}{1{,}82} = 1{,}09$$

قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي تقابلها قيمة الاحتمال 0,8621 إذن فاحتمال الانجاز في المدة يقارب 87%.

حل التمرين رقم 18:

$\sigma^2 = \left(\frac{a-b}{6}\right)^2$	$\frac{a+4m+b}{6}$	النشاط
12,25	16,5	A
12,25	17,5	B
20,25	18,5	C
25	16	D
11,11	20,33	E
5,44	23,33	F
6,25	8,5	G
36	23	H
16	25	I
4	13	J



الفائض	المتأخر		المبكر		المدة المقدرة	رمز النشاط
	نهاية	بداية	نهاية	بداية		
0	16,5	0	16,5	0	16,5	A
6,5	40,5	23	34	16,5	17,5	B
0	35	16,5	35	16,5	18,5	C
5,33	55,33	39,33	50	34	16	D
0	55,33	35	55,33	35	20,33	E
6,5	63,83	40,5	57,33	34	23,33	F
0	63,83	55,33	63,83	55,33	8,5	G
0	86,83	63,83	86,83	63,83	23	H
26,83	86,83	61,83	60	35	25	I
0	99,83	86,83	99,83	86,83	13	J

المسار الحرج هو: $A \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow HJ \longrightarrow$

16,5+18,5+20,33+8,5+23+13=99,83

تباين المشروع: $\sigma^2 = 12,25 + 20,25 + 11,11 + 6,25 + 36 + 4 = 89,96$

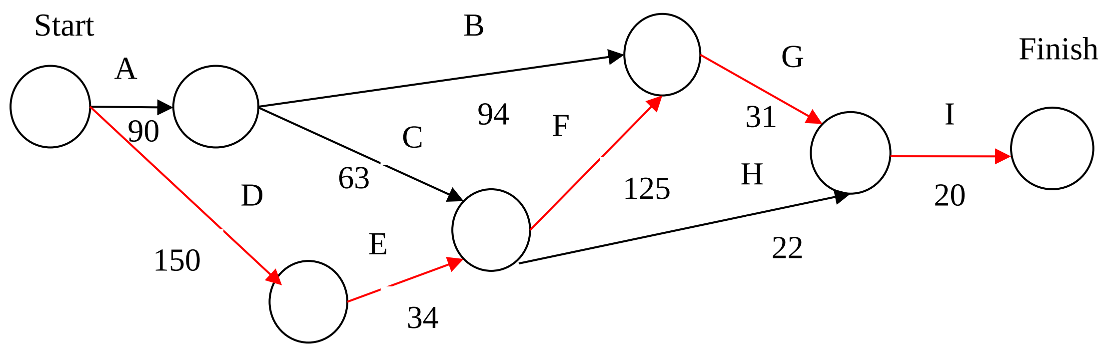
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{89,96} = 9,48$

$$Z = \frac{X - M}{S_r} = \frac{101 - 99,23}{9,48} = 0,123$$

قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي تقابلها قيمة الاحتمال 0,123 إذن فاحتمال الانجاز في المدة يقارب 54%.

حل التمرين رقم 19:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma^2 = \left(\frac{a-b}{6}\right)^2$	$\frac{a+4m+b}{6}$	النشاط
10	100	90	A
12,66	160,44	94	B
7	49	63	C
10	100	150	D
6	36	34	E
15	225	125	F
4,33	18,77	31	G
4,66	21,77	22	H
3,33	11,11	20	I



رمز النشاط	المدة المقدرة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	90	0	90	31	121	31
B	94	90	184	215	309	125
C	63	90	153	121	184	31
D	150	0	150	0	150	0
E	34	150	184	150	184	0
F	125	184	309	184	309	0
G	31	309	340	309	340	0
H	22	184	206	318	340	134
I	20	340	360	340	360	0

المسار الحرج $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow I$

هو: 150+34+125+31+20=360

$$\sigma^2 = 10 + 6 + 15 + 4{,}33 + 3{,}33 = 38{,}66$$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{38{,}66} = 6{,}22$

$$Z = \frac{X - M}{S_r} = \frac{350 - 360}{6{,}22} = -1{,}60$$

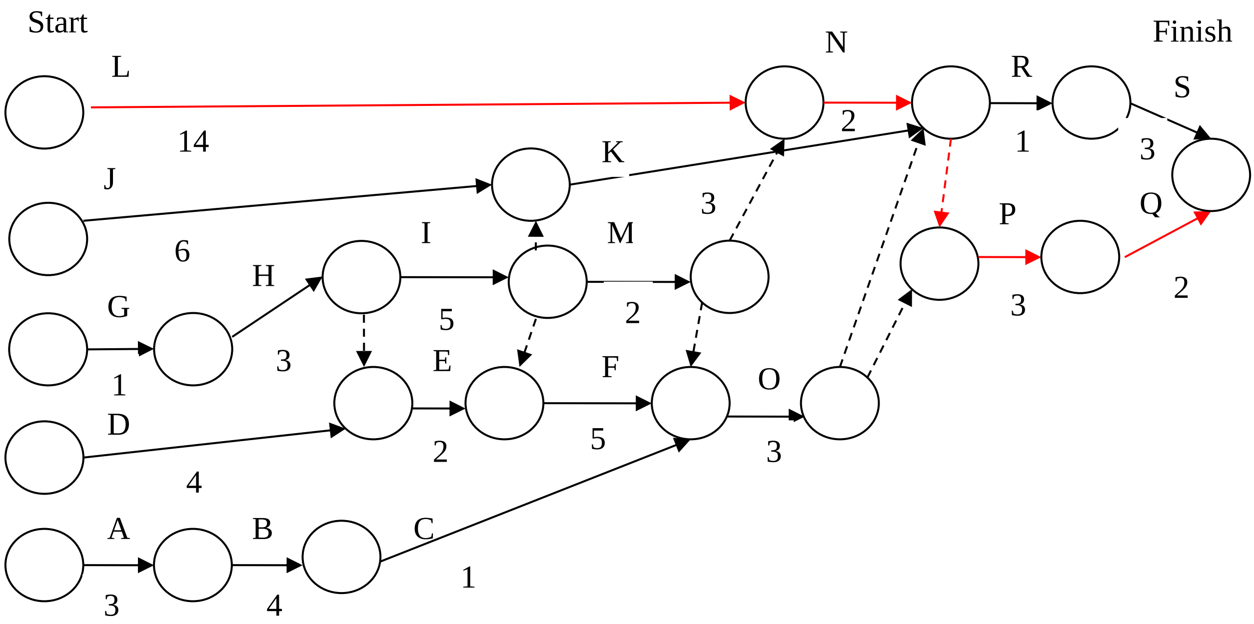
قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي تقابلها قيمة 1,60- إذن فاحتمال الانجاز في المدة يقارب 6%.

حل التمرين رقم 20:

ايجاد المدة المقدرة والتباين والانحراف المعياري:

رمز النشاط	$\frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{a-b}{6}\right)^2$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
A	3	0,25	0,5
B	4	0,44	0,67
C	1	0,027	0,16
D	4	0,44	0,67
E	2	0,11	0,33
F	5	0,44	0,67
G	1	0,027	0,16
H	3	0,11	0,33
I	5	0,44	0,67
J	6	0,44	0,67

K	3	0,11	0,33
L	14	1,77	1,33
M	2	0,027	0,16
N	2	0,11	0,33
O	3	0,11	0,33
P	3	0,44	0,67
Q	2	0,11	0,33
R	1	0,027	0,16
S	3	0,11	0,33



رمز النشاط	المدة المقدرة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	3	0	3	5	8	5
B	4	3	7	8	12	5
C	1	7	8	12	13	5
D	4	0	4	2	6	2
E	2	4	6	6	8	2
F	5	6	11	8	13	2
G	1	0	1	2	3	2
H	3	1	4	3	6	2

I	5	4	9	6	11	2
J	6	0	6	8	14	8
K	3	9	12	14	17	5
L	14	0	14	0	14	0
M	2	9	11	11	13	2
N	2	14	16	14	16	0
O	3	11	14	13	16	2
P	3	16	19	16	19	0
Q	2	19	21	19	21	0
R	1	16	17	17	18	1
S	3	17	20	18	21	1

المسار الحرج هو: $L \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow Q$

14+2+3+2=21

$$\sigma^2 = 1{,}77 + 0{,}11 + 0{,}44 + 0{,}11 = 2{,}43$$

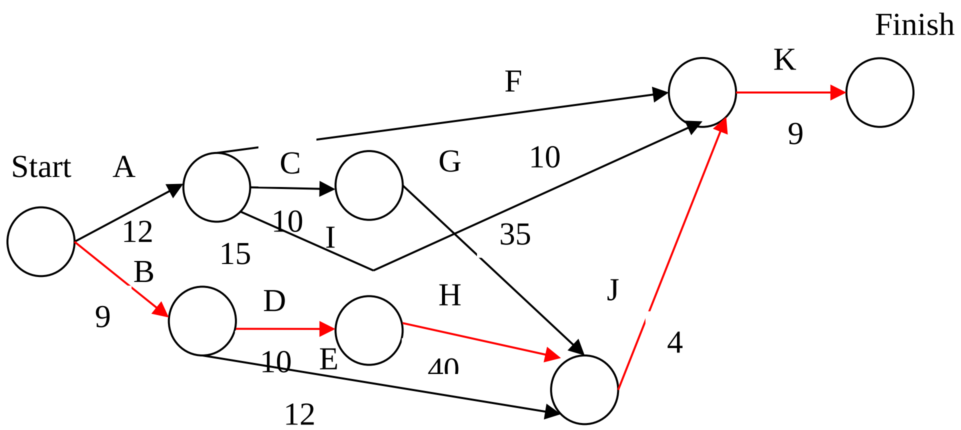
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{2{,}43} = 1{,}56$

$$Z = \frac{X - M}{S_r} = \frac{20 - 21}{1{,}56} = -0{,}64$$

قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي تقابلها قيمة 0,64- إذن فاحتمال الانجاز في المدة يقارب 28%.

حل التمرين رقم 21:

النشاط	$\sigma^2 = \left(\frac{a-b}{6}\right)^2$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
A	1	1
B	1,77	1,33
C	0,44	0,67
D	2,78	1,67
E	7,11	2,67
F	1	1
G	2,78	1,67
H	5,44	2,33
I	1	1
J	1	1
K	0,44	0,67



رمز النشاط	المدة المقدرة	المبكر		المتأخر		الفائض
		بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A	12	0	12	2	14	2
B	9	0	9	0	9	0
C	10	12	22	14	24	2
D	10	9	19	9	19	0
E	24	9	33	35	59	26
F	10	12	22	53	63	41
G	35	22	57	24	59	2
H	40	19	59	19	59	0
I	15	12	27	48	63	36
J	4	59	63	59	63	0
K	9	63	72	63	72	0

المسار الحرج هو: B → D → H → J → K

9+10+40+4+9=72

$$\sigma^2 = 1,33 + 1,67 + 2,33 + 1 + 0,67 = 7$$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{7} = 2,64$

$$Z = \frac{X - M}{S_r} = \frac{75 - 72}{2,64} = 1,13$$

قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي تقابلها قيمة 1,13 إذن فاحتمال الانجاز في المدة يقارب 87%.

نظرية صفوف الانتظار

WAITING LINES THEORY

نظرة شاملة حول مشكلة صفوف الانتظار:

كثيرا ما نجد العديد من المشاكل اليومية سواء للمواطنين أو للمنتجات تأخذ طوابير وصفوف انتظار لقضاء مهامها، الامر الذي يجعل ذلك مؤثرا على نفســـية المواطنين طالبي الخدمة من جهة ومؤدي الخدمة من جهة أخرى أو من ناحية المنتجات مثلا في تصـنيعها مما قد تتأخر في إكمالها، وهذا كله قد يكون له تابعات أخرى، ولكن مع تطور نظم القرار على رأسها بحوث العمليات جاء أسلوب نظرية صفوف الانتظار للمساعدة على حل تلك المشاكل بشكل قد يخلق لي صناع القرار سهولة وارتياح في تأدية مهامهم بالشكل المطلوب، وهذا ما نتناوله في هذا الجزء من خلال استعراض جانب نظري يتضـمن ملخص حول هذا الاسـلوب بشـكل غير ممل مختصرـ على أهم النقاط الرئيسـية التي ينبغي على الطالب فهمها وضبطها للتمكن من حل التمارين التطبيقية، وجانب تطبيقي يستعرض فيه مجموعة من التمارين مرفقة بالحل.

الجانب النظري: نقدم في هذا الجزء أهم المعلومات الأسـاسـية بشـكل مختصرـ حول صـفوف الانتظار وذلك في النقاط التالية:

1- **مفهوم شـامل لنظرية صـفوف الانتظار:** (WAITING THEORY) هي مجموعة من الاسـاليب الرياضـية جاءت نتيجة للتطور الذي عرفته بحوث العمليات عبر الزمن مع أدوات رياضـــية تعمل على تحليل وحل مشـــكلة صـــفوف الانتظار التي قد نجدها في مراكز تقديم الخدمات على مسـتوى العديد من المؤسـسـات سـواء اقتصـادية أو إدارية أو خدماتية ...الخ.

2- **مجالات استخدام نظرية صفوف الانتظار:** تستخدم في العديد من المجالات والتي من بينها:

- الانتظار أمام المتاجر؛
- الانتظار في العيادات الطبية؛
- الانتظار في محطات الوقود؛
- الانتظار في المطارات؛
- الانتظار في تصنيع المنتجات؛

3- **الحاجة إلى دراسة صفوف الانتظار:** هنالك أسباب تجعل متخذي القرارات الاستعانة بنظرية صفوف الانتظار على رأسها نجد ما يلي:

- خلق جو مناسب وملائم للعملاء؛
- احتمال فقدان عدد معين من العملاء؛
- احتمال انخفاض رضا العملاء؛
- انخفاض مستوى أداء الخدمات؛
- الاكتظاظ المتواجد في العديد من المؤســـســـات مثل المطارات، البنوك، مراكز البريد، الطلب على سلعة ما في المؤسسات الصناعية...الخ.

4- **تعريف شامل لصفوف الانتظار :** قد يسميها البعض بطوابير الانتظار أي الصف هو الطابور والمعنى لذلك هو الوحدات المنتظمة بشكل صف أو طابور مثل : المكالمات، السيارات، أفراد، ملفات، منتجات. تكون بصدد طلب خدمتها أو قضاء مهامها. حيث يكون ذلك في شكل نظام متكامل يشمل العناصر التالية:

- الوحدات: وهي العملاء أو المنتجات المقبلة على الخدمة؛
- المعالجة: وهي الخدمة المقدمة للوحدات (العملاء أو المنتجات)؛
- المخرج : وهي الطريقة التي تقدم بها الخدمة.

5- المصطلحات الاساسية في نظرية صفوف الانتظار : قد نسميها بمكونات صفوف الانتظار وهي:

- وصول العملاء: وهنا قد يكون الامر متعلق بوقت وصول العملاء أو عددهم وقد يكون محدد يعني ثابت ومنتظم أو عشوائي عموما يخظع للتوزيع الاحتمالي بواسوني؛
- أداء الخدمة: وهنا الامر متعلق بوقت تقديم الخدمة قد يكون محدد ومنتظم أو عشوائي يتبع عموما التوزيع الاحتمالي الاسي؛
- مراكز تقديم الخدمة: وهنا الأمر يتعلق بعدد مراكز تقديم وتأدية الخدمة للوحدات قد يكون مركز واحد يعني فردي (Single) أو متعدد (Multi)؛
- نظام تقديم الخدمة: هنا الأمر يتعلق بالطريقة أو النمط الذي تتبعه المؤسسة أو النظام في تقديم الخدمة وغالبا ما نجد الانماط التالية:
  - ✓ الداخل (الذي يصل ARRIVAL) في الأول تقدم له الخدمة في الأول (FIFS)؛
  - ✓ الداخل (الذي يصل ARRIVAL) في الأخير تقدم له الخدمة في الأول (LIFS)؛
  - ✓ تقديم الخدمة عشوائيا (RS)؛
  - ✓ تقديم الخدمة بالأولوية (PS).

حيث :

FIFS : FIRST INPUT FIRST SERVED

LIFS : LAST INPUT FIRST SERVED

RS : RANDOM SERVED

PS: PRIORITY SYSTEM

والمقصود بـINPUT في صفوف الانتظار الوصول والدخول إلى النظام.

- مصدر طلب الخدمة: هنا الامر يتعلق بالمجتمع الذي يطلب الخدمة قد يكون محدد أو غير محدد؛
- عدد الوحدات: وهنا الامر يتعلق بعدد الوحدات المسموح لهم الدخول الى النظام للانتظار فممكن أن يكون عددهم محدد أو غير محدد؛
- السلوك البشري: وهنا الامر يتعلق بالسلوك الذي يتصف بيه العميل خلال الانتظار أي دراسة نفسية العميل فممكن أن نجد الشخصيات التالية:

- ✓ عميل صبور: هو العميل الذي لديه قدرة على الصبر في الانتظار في النظام حتى يحصل على الخدمة؛
- ✓ عميل ممتنع: هو العميل الذي لا يلتحق بصف الانتظار؛
- ✓ عميل متردد: هو العميل الذي يلتحق بالنظام ولكن لا يستطيع إكمال الانتظار بسبب القلق والملل؛
- ✓ عميل مناور: هو العميل الذي يلتحق بالنظام ويحصل على خدمته ولكن بتخطي صف الانتظار إما بالوساطة أو بالعنف.

6- **أنواع صفوف الانتظار :** قد نجد في الواقع العملي أنواع عديدة من أشكال صفوف الانتظار ويرجع ذلك على أساس معايير نختصرها على النحو التالي:

1- على أساس مراكز تقديم الخدمة : وهنا الأمر يرجع إلى عدد مراكز تقديم الخدمة ومراحلها فغالبا ما نجد ما يلي:

- صفوف انتظار تعتمد على مركز تقديم الخدمة واحد وبمرحلة واحدة؛
- صفوف انتظار تعتمد على مراكز تقديم الخدمة عديدة وبمرحلة واحدة؛
- صفوف انتظار تعتمد على مركز تقديم الخدمة واحد وبمراحل متعددة؛
- صفوف انتظار تعتمد على مراكز تقديم الخدمة متعددة وبمراحل متتالية؛
- صفوف انتظار تعتمد على مراكز الخدمة متعددة وصفوف متعددة.

2- **على أساس كيفية تقديم الخدمة:** وهنا الأمر يتعلق بالنمط المتبع في النظام لتقديم الخدمة حيث نجد ما يلي:

- صفوف انتظار تعتمد على الداخل (الذي يصل ARRIVAL) في الأول تقدم له الخدمة في الأول (FIFS)؛
- صفوف انتظار تعتمد الداخل (الذي يصل ARRIVAL) في الأخير تقدم له الخدمة في الأول (LIFS)؛
- صفوف انتظار تعتمد على تقديم الخدمة عشوائيا (RS)؛
- صفوف انتظار تعتمد على تقديم الخدمة بالأولوية (PS).

3- على أساس عشوائية وتنظيم وصول الوحدات وتقديم الخدمة: وهنا يُنظر إلى صفوف الانتظار من جانب وقت الوصول ووقت أداء الخدمة فهل يكون منتظم أم غير منتظم؟ وهنا قد نجد ما يلي:

- صفوف انتظار تعتمد على وصول الوحدات منتظم وتقديم الخدمة لهم بشكل منتظم؛
- صفوف انتظار تعتمد على وصول الوحدات غير منتظم (عشوائي) وتقديم الخدمة لهم بشكل منتظم؛
- صفوف انتظار تعتمد على وصول الوحدات منتظم وتقديم الخدمة لهم بشكل غير منتظم (عشوائي) ؛

- صفوف انتظار تعتمد على وصول الوحدات غير منتظم (عشوائي) وتقديم الخدمة لهم بشكل غير منتظم (عشوائي) ؛

4- **على أساس عدد الوحدات :** وهنا يُنظر إلى صفوف الانتظار من حيث عدد طالبي الخدمة ونجد ما يلي:

- صفوف انتظار تعتمد على مجتمع محدود أي عدد معين من الوحدات (طالبي الخدمة)؛
- صفوف انتظار تعتمد على مجتمع غير محدود أي عدد غير معين من الوحدات (طالبي الخدمة)؛

وإضافة إلى ما سبق يمكن تبسيط ووصف أنواع صفوف الانتظار وفق تصنيف الباحث Kandall (1953) والذي جعل رموزا خاصة تعبر عن المعايير السالفة الذكر وذلك كما يلي:

الوصف العام للرموز كلها هو: (A/B/X/Y/Z) حيث لكل رمز معنى ولتوضيحها نجعل الجدول التالي:

جدول رقم 01: يوضح شرح رموز Kandall

الرمز	المعنى (الدلالة)	النوع
A	وصول الوحدات إلى النظام	M : توزيع عشوائي عموما يخضع إلى التوزيع بواسني
		D: غير عشوائي أي ثابت ومحدد
B	تقديم أو أداء الخدمة في النظام	M : توزيع عشوائي عموما يخضع إلى التوزيع الاسي
		D: غير عشوائي أي ثابت ومحدد
X	عدد مراكز تقديم الخدمة في النظام	S: مركز واحد يعني فردي (Single)
		K: متعدد المراكز(Multi)
Y	كيفية تقديم الخدمة (نمط العمل في النظام)	(FIFS) ، (LIFS) ، (RS) ، (PS)
Z	عدد الوحدات	N: محدود
		∞: غير محدود

7- المؤشرات المتعلقة بصفوف الانتظار :

في غالب الحالات عند دراسة صفوف الانتظار يطلب تحديد ما يلي:

- معدل وصول الوحدات (عملاء، منتجات، سلع...) ويقاس بـ (عدد / زمن) ويرمز اليه بـ λ؛
- معدل خدمة الوحدات (عملاء، منتجات، سلع...) ويقاس بـ (عدد / زمن) ويرمز اليه بـ μ؛
- نسبة معدل وصول الوحدات مقارنة مع معدل تقديم الخدمة ويقاس ذلك بـ (نسبة) ويرمز اليه بـ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ؛
- الوقت المتوقع لتقديم الخدمة ويقاس بـ (زمن / عدد) ويرمز اليه بـ WA ؛
- عدد الوحدات المتوقع في النظام (مركز الخدمة+ صف الانتظار) ويقاس بـ (عدد) ويرمز اليه بـ L_S ؛
- عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار فقط ويقاس بـ (عدد) ويرمز اليه بـ L_q؛
- زمن الانتظار في النظام (مركز الخدمة+ صف الانتظار) ويقاس بـ (الزمن) ويرمز اليه بـ W_S ؛
- زمن الانتظار في صف الانتظار فقط ويقاس بـ (الزمن) ويرمز اليه بـ W_q ؛

- احتمال عدم وجود أي وحدة (عملاء، منتجات، سلع...) في صف الانتظار ويقاس بـ (نسبة) ويرمز اليه بـــP_0 ؛
- احتمال وجود عددn من الوحدات (عملاء، منتجات، سلع...) في صف الانتظار ويقاس بـ (نسبة) ويرمز اليه بـــ P_n.
- عدد العملاء أو الوحدات الوفدين الى النظام ويرمز له بــ N
- نسبة حالات الوصول الضائعة ويرمز لها بــ P_L

8- القياسات و الحسابات في كل نوع منأنواع نماذج صفوف الانتظار :

يُلاحظ من السابق أن أنواع نماذج صفوف الانتظار تختلف باختلاف المعايير التي ينتسب إليها ولتبسيطها جاء الباحث كاندال Kandall (1953) ليعبر عنها برموز تم توضيحها في الجدول رقم 01، لكن القياسات والحسابات المتعلقة بالمؤشرات المذكورة سالفا والتي ينبغي حسابها والانتفاع منها من طرف متخذ القرار بتطبيق نظرية صفوف الانتظار قد تختلف من نموذج إلى نموذج أخر وهذا ما نوضحه من خلال هذا الجزء.

1- **النموذج الأول من النوع:M/M/1/∞/FIFS :**

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

1 : مركز واحد يعني فردي (Single)؛

∞: عدد الوحدات غير محدود؛

FIFS: الداخل الأول هو من تقدم له الخدمة في الأول.

أما كيفية حساب المؤشرات السابقة الذكر فهي كالتالي:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\mathrm{WA} = \frac{1}{\mu}$$

$$L_{\mathrm{S}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\right)$$

$$W_{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$W_{\mathrm{q}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$P_n = \rho^n(1-\rho)$$

أما λ و μ فهي تحسب أو تستخرج مباشرة من المعطيات.

2- النموذج الثاني من النوع:M/M/K/∞/FIFS:

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

K: متعدد المراكز(Multi)؛

∞: عدد الوحدات غير محدود؛

FIFS: الداخل الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول.

أما كيفية حساب المؤشرات السابقة الذكر فهي كالتالي:

$$\rho = \frac{\lambda}{K * \mu}$$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \frac{\rho * (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)^2} * P_0$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = P_k * \frac{1}{k * \mu * (1-\rho)^2}$$

$$P_k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{k^k}{k!} * \left(\frac{\rho^k}{1-\rho}\right)\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{ , if } n = 0,1,2,\dots\dots\dots\dots\dots k-1 \\ \frac{1}{k!} * \frac{1}{k^{n-k}} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{, if } n = K, k+1, k+2 \dots \end{cases}$$

3- النموذج الثالث من النوع : M/M/1/N/FIFS :

(نموذج دو مكان الانتظار المحدود (سعة الانتظار محدودة، طول الطابور محدود)

Limited Waiting Capacity (Finite - Queue)

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

1: مركز واحد يعني فردي (Single)؛

N: عدد الوحدات المتواجدة في صف الانتظار محدودة**(Finite - Queue)** ؛

FIFS: الداخل الأول هو من تقدم له الخدمة في الأول.

أما كيفية حساب المؤشرات السابقة الذكر فهي كالتالي:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$WA = \frac{1}{\mu}$$

حيث أن L هي سعة النظام أو الحد الأقصى (يعني $L = N + 1$ والتي تمثل عدد العملاء الموجدين في مكان الانتظار وفي مكان أداء الخدمة)

$$L_S = \frac{L * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L+2} - (L+1) * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L+1} * \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L+1}\right) * (1 - \frac{\lambda}{\mu})}$$

$$L_q = L_S - \frac{\lambda * (1 - P_L)}{\mu}$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda * (1 - P_L)}$$

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{L+1}}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0$$

أما نسبة حالات الوصول الضائعة (P_N) جراء عدم القدرة على الدخول في خط الانتظار رغم أنها وصلت إلى النظام، فتكون:

$$P_L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^L * P_0$$

4- النموذج الرابع من النوع : M/M/1/N/FIFS : (نموذج دو مجتمع الطلب محدود (محدودية في عدد الوحدات التي تطلب الخدمة)

Finite Input Source

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

1: مركز واحد يعني فردي (Single)؛

N: عدد الوحدات التي تطلب الخدمة معروفا ومحددا مسبقا (**Finite Input Source**) ؛

FIFS: الداخل الأول هو من تقدم له الخدمة في الأول.

أما كيفية حساب المؤشرات السابقة الذكر فهي كالتالي:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \frac{N!}{(N-n)!}}$$

$$P_{\mathrm{n}} = \frac{N!}{(N-n)!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} * P_0$$

$$L_{\mathrm{q}} = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} * (1 - P_0)$$

$$L_{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{q}} + (1 - P_0)$$

$$W_{\mathrm{q}} = \frac{L_{\mathrm{q}}}{\lambda * (N - L_{\mathrm{s}})}$$

$$W_{\mathrm{s}} = W_{\mathrm{q}} + \frac{1}{\mu}$$

5- **النموذج الخامس من النوع : M/M/K/N/FIFS** :

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

K: متعدد المراكز (Multi)؛

N: عدد الوحدات محدود؛

FIFS: الداخل الأول هو من تقدم له الخدمة في الأول.

أما كيفية حساب المؤشرات السابقة الذكر فهي كالتالي:

$$\rho = \frac{\lambda}{K * \mu}$$

$$\mathrm{r} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\frac{r^K}{K!}\left(\frac{1-\rho^{N-K+1}}{1-\rho}\right) + \sum_{n=0}^{K-1} \frac{r^n}{n!}\right]^{-1} (\rho \neq 1), \\ \left[\frac{r^K}{K!}(N-K+1) + \sum_{n=0}^{K-1} \frac{r^n}{n!}\right]^{-1} (\rho = 1), \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0 (0 \leq n \leq K), \\ \frac{\lambda^n}{k^{n-k} k!\,\mu^n} p_0 (k \leq n \leq N), \end{cases}$$

$$L_q = \frac{p_0 * r^K * \rho}{K!\,(1-\rho)^2}[1 - \rho^{N-K+1} - (1-\rho)(N-K+1)\rho^{N-K}]$$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L_q + \frac{\lambda(1-p_N)}{\mu} = L_q + r * (1-p_N)$$

$$\lambda_{eff} = \lambda(1-p_N)$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda_{eff}} = L/\lambda(1-p_N)$$

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} = L_q/\lambda_{eff}$$

تمارين محلولة حول نماذج صفوف الانتظار

التمرين رقم 01: لديك نماذج صفوف الانتظار التالية:

أ- M/M/K/∞/FIFS

ب- M/D/1/∞/FIFS

ت- 10/RSM/D/1/

ث- ∞/LIFSD/M/3/

ج- 5/LIFSM/D/2/

المطلوب:

1- قم بتفسير النماذج المذكورة أعلاه وفق رموز كاندال Kandall (1953) ؛

2- اقترح مثال واقعي عن كل نموذج.

التمرين رقم 2: عند تحليل صفوف الانتظار نجد متغيري وقت وصول العملاء ووقت أداء الخدمة يعتمدا على قانونين احتماليين مهمين ومشهورين، فالمطلوب هو:

1- تحديد نوع القانون الاحتمالي الملائم لدراسة كل متغير؛

2- تحديد الصياغة الرياضية العامة لكل قانون احتمالي.

التمرين رقم 3: لدينا متجر دو مركز خدمة وحيد وكان معدل وصول العملاء اليه هو 45 عميل في الساعة ومعدل تقديم الخدمة هو 60 زبون في الساعة.

المطلوب: بعد تحديد نوع النموذج في هذه الحالة قم بحساب المؤشرات التالية:

1- عدد العملاء في صف الانتظار؛

2- احتمال عدم وجود عملاء في صف الانتظار؛

3- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار؛

4- متوسط عدد العملاء في النظام؛

5- وقت الانتظار في صف الانتظار؛

6- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام؛

التمرين رقم 04: إذا اعتبرنا نفس التمرين الثالث إلا أن صاحب المتجر يريد تحسين نظام صفوف الانتظار من خلال زيادة معدل خدمة العملاء عن طريق زيادة موظف آخر مع إبقاء الأمور الأخرى على حالها، فعند ذلك يصبح معدل تقديم الخدمة هو 80 زبون في الساعة، فالمطلوب هو إعادة حساب نفس المؤشرات السابقة.

التمرين رقم 05: إذا كان لدينا في شركة صناعية ما ثلاث مراكز للشحن، وكان أوقات وصول الشاحنات إلى الشركة موزعة حسب توزيع بواسن بمعدل خمس شاحنات في الساعة، وكان أوقات تقديم الخدمة (التفريغ والتحميل في المراكز) يتبع التوزيع الأسي بمعدل شاحنتين في الساعة، ونظام العمل هو من النوع القادم في الأول هو من يُخدم أولاً.

المطلوب هو:

1- تحديد نوع نموذج الانتظار؛

2- تحديد كل المؤشرات المتعلقة بنظام صفوف الانتظار.

التمرين رقم 06: يتوافد عشوائيا على أحد البنوك التجارية بمتوسط 10 عميل في الساعة ويتم تقديم عشواءي للخدمة بمعدل 5 دقائق لكل عميل، ولدى البنك مركز واحد لتقديم الخدمة.

المطلوب:

1- حساب احتمالات التوازن للنظام في البنك؛

2- حساب متوسط عدد العملاء في النظام وفي صف الانتظار؛

3- حساب متوسط الوقت الدي يستغرقه العميل في النظام وصف الانتظار.

التمرين رقم 07: إذا كان على مستوى مكتب ما للبريد والموصلات وصول العملاء عشوائي بمعدل 15 شخص في الساعة، ووقت تقديم الخدمة هو كذلك عشوائي بمعدل 12 دقيقة للشخص الواحد، وهنالك أربع شبابيك لتقديم الخدمة.

المطلوب:

1- حساب احتمالات التوازن للنظام في البنك؛

2- حساب متوسط عدد العملاء في النظام وفي صف الانتظار؛

3- حساب متوسط الوقت الدي يستغرقه العميل في النظام وصف الانتظار.

التمرين رقم 08: نفترض أن بنك من البنوك له أربعة عملاء لهم حالة خاصة لتقديم الخدمات، وأن كل عميل يطلب الخدمة الخاصة به ستة مرات في الشهر، ويحتاج الشخص الذي يقدم الخدمة للعميل الخاص ليوم واحد لإنهاء خدمة العميل، ويتبع كل من معدل الوصول، ووقت تقديم الخدمة التوزيع الاسي للاحتمالات.

المطلوب: تحديد جميع خصائص صفوف الانتظار.

التمرين رقم 09: على مستوى إحدى الورشات المختصة في تصليح السيارات يوجد مكان (مرأب) مخصص للانتظار ذو سعة محدودة تصل إلى 6 سيارات فقط في اليوم، أما معدل وصول السيارات بما فيها حتى التي ترجع التي لا يمكن خدمتها نظرا للمساحة المحدودة فهو15سيارة في اليوم، وفي مقابل ذلك نجد معدل تقديم الخدمة يصل إلى 20 سيارة في اليوم.

وكان صاحب الورشةيُقدر أن كل سيارة لا تدخل الورشة (كل زبون ضائع) تُكلف 3000دج (الفرصة الضائعة) لهذا فإنها تدرس استخدام عامل ثاني بأجر يومي مقداره 2000دج.

المطلوب: جد ما يلي:

1- احتمال عدم وجود زبون في الورشة؛

2- متوسط عدد الزبائن في الورشة؛

3- العدد المتوسط للزبائن في خط الانتظار؛

4- نسبة الزبائن الراجعين؛

5- الوقت المتوسط المنفق فيه؛

6- هل من الأفضل تشغيل العامل الثاني أم لا ؟

التمرين رقم 10: لدى أحد البنوك 2 أمناء الصندوق ويصل إلى النظام بمعدل 20 عميل في الساعة، ووقت تقديم الخدمة كان بمعدل 5 دقائق لكل عميل، **فالمطلوب** تحديد خصائص نظام صفوف الانتظار في هذا البنك.

التمرين رقم 11: إذا كان معدل وصول السيارات إلى محطة الغسيل هو 4 سيارات في الساعة بتوزيع احتمالي من النوع بواسون، ومتوسط غسيل السيارة الواحدة هو 10 دقائق بانحراف معياري قدره 6، **فالمطلوب** تحديد جميع خصائص صفوف الانتظار في هذه المحطة.

التمرين رقم 12: إذا كان لديك المعطيات التالية:

- النموذج المتبع في صفوف الانتظار هو من النوع: **M/M/1/∞/FIFS**
- معدل الوصول ومعدل تقديم الخدمة هما على التوالي: $\lambda = 8$ و $\mu = 9$

المطلوب: حساب المؤشرات التالية: ρ ، P_0 ، L_S ، L_q ، W_S ، W_q .

التمرين رقم 13: إذا كان لديك المعطيات التالية:

- النموذج المتبع في صفوف الانتظار هو من النوع: **M/M/1/N/FIFS**
- معدل الوصول ومعدل تقديم الخدمة وعدد طالبي الخدمة على التوالي: $\lambda = 8$ و $\mu = 9$ و $N = 10$

المطلوب: حساب المؤشرات التالية: ρ ، P_0 ، L_S ، L_q ، W_S ، W_q .

التمرين رقم 14: إذا كان لديك المعطيات التالية:

- النموذج المتبع في صفوف الانتظار هو من النوع: **M/M/K/∞/FIFS**
- معدل الوصول ومعدل تقديم الخدمة وعدد مراكز تقديم الخدمة هي على التوالي: $\lambda = 10$ و $\mu = 6$ و $K = 2$.

المطلوب: حساب المؤشرات التالية: ρ ، P_0 ، L_S ، L_q ، W_S ، W_q .

التمرين رقم 15: إذا كان لديك المعطيات التالية:

- النموذج المتبع في صفوف الانتظار هو من النوع: **M/M/K/N/FIFS**
- معدل الوصول ومعدل تقديم الخدمة و عدد مراكز تقديم وطالبي الخدمة على التوالي: $\lambda = 10$ و $\mu = 6$ و $K = 2$ ، $N = 7$

المطلوب: حساب المؤشرات التالية: ρ ، P_0 ، L_S ، L_q ، W_S ، W_q .

التمرين رقم 16: حلاق يستغرق 15 دقيقة لقص شعر أي زبون، يصل الزبائن إلى الدكان الحلاقة على توزيع بواسوني بمتوسط نسبة الواصلين 2 في الساعة، فإذا فرضنا أن لك موعد بعد وصولك دكان الحلاقة بعد زمن قدره 30 دقيقة، وأن بعد مكان الموعد التي بعد الحلاقة يستغرق 3 دقائق مشياً، وأن زمن قص الشعر يخضع لتوزيع Erlang dist حيث k=3، هل تتوقع أنك تصل موعدك في الوقت المناسب؟

التمرين رقم 17: على مستوى مؤسسة ما مختصة في كراء السيارت وُجد أن عدد السيارات العاطلة يوميا خارج الخدمة 4 سيارات في المتوسط، حيث كل سيارة تكلف المؤسسة 100 ون يوميا، وللعلم أن للمؤسسة مستودع تابع إليها خاص

بالتصليح الميكانيكي يكلفها حوالي 300 ون في اليوم ويمكن تصليح 5 سيارات في اليوم. في مقابل ذلك اقترحت المؤسسة غلق ذلك المستودع والتعاقد مع ميكانيكي خارجي ودلك بتكلفة قدرت بـ 400 ون في اليوم ويمكن أن يقوم هذا الميكانيكي بتصليح 6 سيارات في اليوم.

المطلوب: هل من الأفضل للمؤسسة الاعتماد على الميكانيكي التابع لها أم تتعاقد مع ميكانيكي خارجي؟

التمرين رقم 18: إذا كان عدد العمال في إحدى المؤسسات المختصة في نقل وتوزيع المنتجات الغذائية 150 عاملا وأجر العامل الواحد هو 5 ون ويستطيع هؤلاء العمال تفريغ حمولة ثلاث شاحنات ذات الحجم الكبير يوميا. لوحظ أن وصول الشاحنات إلى المؤسسة يتبع التوزيع بواسني بمعدل شاحنتين يوميا، وعندما تصل الشاحنة ولا يتم تفريغها بسبب انقضاء يوم العمل تتعرض إدارة المؤسسة الى خسارة 500 ون في اليوم.

المطلوب:

تحديد أفضل حجم للعمالة بهذه الشركة إذا علمت أن مدير الشركة أمام الاقتراحات التالية:

- الاقتراح الأول هو أن يبقي حجم العمالة على ما هو عليه أي 150 عامل؛
- الاقتراح الثاني هو أن يزيد من حجم العمالة ليصبح 200 عاملا؛
- الاقتراح الثالث هو أن يزد من حجم العمالة ليصبح 250 عاملا؛
- الاقتراح الرابع هو أن يزيد من حجم العمالة ليصبح 300 عاملا.

التمرين رقم 19: يقوم مصنع مختص في إنتاج منتجات غذائية بتوزيع منتجاته بواسطة شاحنات ذات حجم كبير ومشكلتها هي أن الشاحنات تضطر أحيانا إلى الوقوف في طوابير ومن ثم الشركة تتعرض إلى خسائر (مصاريف السائقين، مصاريف الاطعام، مصاريف تشغيل الشاحانات...الخ) وعليه طُلب من مدير الشركة إنشاء أو انجاز مستودع ثاني لتخفيف الأعباء علما أن متوسط الخدمة هو 4 شاحنة في الساعة الواحدة ومعدل الوصول هو 3 شاحنات في الساعة كما قامت الشركة بتوريد 40% من إجمالي عدد الشاحنات.

المطلوب: حساب كل من:

1- وقت انتظار الشاحنة؛
2- الوقت الإجمالي للانتظار المتوقع الشاحنات الشركة.

التمرين رقم 20: لدينا معلومات حول عيادة ما مختصة في طب العيون متمثلة فيما يلي:

- هناك ثلاث أطباء في الخدمة؛
- مدة الفحص من الطبيب هي 20 دقيقة في المتوسط لكل مريض؛
- معدل وصول المرضى هو 6 في الساعة.

المطلوب: حساب ما يلي:

1. متوسط عدد المرضى المنتظرين؛
2. متوسط الوقت الذي يقضيه المريض في العيادة؛
3. متوسط ونسبة انقطاع الطبيب عن العمل(عدم التشغيل).

حلول التمارين

حل التمرين رقم 01:

1- التفسير وفق رموز كاندال Kandall (1953) يكون كما يلي:

أ- M/M/K/∞/FIFS

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

K: متعدد المراكز لتقديم الخدمة (Multi)؛

∞: عدد الوحدات غير محدود؛

FIFS: الداخل الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول.

ب - M/D/1/∞FIFS/

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوقت وصول الوحدات؛

D **:** وقت تقديم غير عشوائي ثابت ومحدد؛

1: مركز واحد لتقديم الخدمة يعني فردي (Single)

∞: عدد الوحدات غير محدود؛

FIFS: الداخل الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول.

ت - 200/RSM/D/1/

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

D **:** غير عشوائي ثابت ومحدد؛

1: مركز واحد لتقديم الخدمة يعني فردي (Single)؛

200: عدد طالبي الخدمة محدد وهو100عملاء (سعة النظام أو قدرة النظام) ؛

RS: صفوف الانتظار تعتمد على تقديم الخدمة عشوائيا.

ث - 100/PSD/M/3/

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

D: وقت وصول الوحدات غير عشوائي ثابت ومحدد؛

M: توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

3: عدد مركز تقديم الخدمة ثلاثة (3)؛

100: عدد الوحدات محدود؛

PS: تقدم الخدمة بنظام الاولوية.

ج - /5000/LIFSM/D/2

المقصود بهذا النموذج هو أن صفوف الانتظار في هذه الحالة هي من النوع التالي:

M: توزيع عشوائي لوقت وصول الوحدات؛

D: تقديم الخدمة غير عشوائي ثابت ومحدد؛

2: عدد مركز تقديم الخدمة إثنان (2)؛

5000: عدد الوحدات محدود؛

LIFS: الأخير هو من تُقدم له الخدمة في الأول.

2- ضرب أمثلة عن كل نموذج:

بالنسبة للنموذج - أ- بإمكان أن نقترح مثال عن مراكز البريد فقد يكون فيها وصول العملاء عشوائي وتقديم الخدمة عشوائي وعدد الشبابيك(مراكز تقديم الخدمة) متعدد وعدد العملاء (الوحدات) غير محدود طوال اليوم من الثامنة صباحا إلى الخامسة مساءا مثلا، وتقديم الخدمة يكون من النوع **FIFS**(الداخل الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول).

بالنسبة للنموذج - ب - بإمكان اقتراح مثال عن الصراف الآلي كذلك فيكون عند وصول العملاء عشوائي وتقديم الخدمة ثابت مع مركز تقديم الخدمة فردي واحد وعدد طالبي الخدمة غير محدود، أما فيما يخص تقديم الخدمة يكون من النوع **FIFS**(الداخل الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول).

بالنسبة للنموذج – ت - بإمكان اقتراح مثال عن الصراف الالي كذلك فيكون عند وصول العملاء عشوائي وتقديم الخدمة ثابت مع مركز تقديم الخدمة فردي واحد وعدد طالبي الخدمة هو 200 شخص، أما فيما يخص تقديم الخدمة يكون من النوع **RS**(تقديم الخدمة عشوائي).

بالنسبة للنموذج - ث - بإمكان اقتراح مثال عن إحدى السفارات مثل سفارة فرنسا فنجد فيها مصلحة مخصصة للتقديم التأشيرة لأصحاب الأولوية، فوقت وصول الوحدات إليها يكون عموما غير عشوائي ثابت وذلك حسب التوقيت المعطى عند التسجيل في الموقع، ونجد وقت تقديم الخدمة عشوائي قد يختلف من شخص إلى شخص آخر ، ونجد عدد الشبابيك التي تقدم الخدمة مثلا 3 مراكز تستقبل في اليوم الواحد من الثامنة صباحا إلى الرابعة أو الخامسة مساءا 100 شخص فقط يعني العدد محدود، وأما فيما يخص نظام تقديم الخدمة في هذه الحالة يكون من النوع PS (تقديم الخدمة بالأولوية).

بالنسبة للنموذج -ج - بإمكان اقتراح مثال عن إحدى المؤسسات الصناعية مختصة في مجال تصنيع منتج ما فتكون المادة الأولية في شكلها الخام أين تذهب بشكل عشوائي إلى الالة التي تقوم بتحويلها وجعلها في الشكل النهائي وهنا الأمر متعلق بوقت وصول المادة إلى الآلة الذي يكون عشوائي، وأما المدة التي تستغرقها في انتاج وحدة واحدة فقد تكون ثابتة وهنا الأمر متعلق بوقت تقديم الخدمة، ويلاحظ كذلك أن النموذج يحتوي على مركزين لتقديم الخدمة وهنا قد يكون لدى الشركة آلتين مثلا للتحويل، وقد يكون عدد الوحدات من المنتج الممكن تصنيعه من الشركة محدود بحوالي 5000 وحدة، أما نوع النظام المعتمد عليه في تقديم الخدمة هو من النوع **LIFS** (الأخير هو من تُقدم له الخدمة في الأول).

ملاحظة: كل الرموز هي موضحة ومشروحة في الجانب النظري.

حل التمرين رقم 02:

1- تحديد نوع القانون الاحتمالي الملائم لدراسة كل متغير:

- بالنسبة لمتغير وقت وصول العملاء أي وقت الوصول إلى موقع الخدمة فالقانون الاحتمالي الملائم عند ذلك في الغالب هو التوزيع بواسوني (**Poisson Distribution**).
- بالنسبة لوقت تقديم الخدمة في صفوف الانتظار فالقانون الاحتمالي الملائم لذلك عموما نجد التوزيع الأسي (**Exponential Distribution**).

2- تحديد الصياغة الرياضية العامة لكل قانون احتمالي:

بالنسبة للتوزيع بواسوني فصياغته العامة هي:

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^n}{n}$$

بالنسبة للتوزيع الأسي فصياغته هي:

$$P(n) = 1 - e^{-\lambda t}$$

حل التمرين رقم 03:

النموذج المصادف في هذه الحالة هو من النوع: **M/M/1/∞/FIFS**

يعني أن هذا المتجر يتبع نموذج صفوف الانتظار من النوع الدي نجد فيه عشوائية في وقت وصول العملاء، وعشوائية في وقت أداء الخدمة، وشباك وحيد لتقديم الخدمة، وعدد لانهائي من الزبائن، وذو نظام معتمد على الداخل في الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول (**FIFS**).

ولإجابة على الأسئلة المطلوبة في هذا التمرين ينبغي حساب معدل وصول العملاء إلى المتجر ومعدل تقديم الخدمة ولكن في الدقيقة الواحدة، ويتم حساب ذلك كما يلي:

$\lambda = \frac{45}{60} = 0.75$ دقيقة / عميل معدل الوصول العملاء في الدقيقة

$\mu = \frac{60}{60} = 1$ دقيقة / عميل معدل تقديم الخدمة في الدقيقة

وبالتالي يمكن حساب ما هو مطلوب كالآتي:

1- وقت تقديم الخدمة:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{1} = 1 \text{ دقيقة للعميل}$$

ملاحظه: هناك فرق بين معدل وقت تقديم الخدمة ووقت تقديم الخدمة، حيث الأول يحدد من خلاله عدد العملاء الممكن تقديم لهم الخدمة في الدقيقة الواحدة، أما الثاني فيحدد منه كم من الوقت ينبغي قضاءه لتقديم الخدمة للعميل الواحد، يعني رياضيا وقت تقديم الخدمة هو مقلوب معدل تقديم الخدمة والذي يحسب بالعلاقة.

2- حساب عدد العملاء في صف الانتظار:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1} = 0.75$$

3- احتمال عدم وجود عملاء في صف الانتظار:

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 1 - 0.75 = 0.25$$

4- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\right) = \frac{0.75^2}{1(1-0.75)} = 2.25 \text{ عميل}$$

5- متوسط عدد العملاء في النظام:

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 2.25 + 0.75 = 3 \text{عميل}$$

6- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{0.75} = 3 \text{ دقيقة}$$

7- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \left[W_q + \frac{1}{\mu}\right] = 3 + 1 = 4 \text{دقيقة}$$

حل التمرين رقم 04:

حل هذا التمرين هو نفس حل التمرين الثالث فقط الاختلاف في النتائج نتيجة لتغير معدل تقديم الخدمة الذي تغير من 60 عميل إلى 80 عميل في الساعة، وعليه يكون الحل كما يلي:

النموذج المصادف في هذه الحالة هو من النوع: **M/M/1/∞/FIFS**

يعني أن هذا المتجر يتبع نموذج صفوف الانتظار من النوع الدي نجد فيه عشوائية في وقت وصول العملاء، وعشوائية في وقت أداء الخدمة، وشباك وحيد لتقديم الخدمة، وعدد لانهائي من الزبائن، وذو نظام معتمد على الداخل في الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول (**FIFS**).

ولإجابة على الأسئلة المطلوبة في هذا التمرين ينبغي حساب معدل وصول العملاء إلى المتجر ومعدل تقديم الخدمة ولكن في الدقيقة الواحدة، ويتم حساب ذلك كما يلي:

$$\lambda = \frac{45}{60} = 0.75 \text{ دقيقة/ عميل معدل الوصول العملاء في الدقيقة}$$

$$\mu = \frac{80}{60} = 1.33 \text{ دقيقة/ عميل معدل تقديم الخدمة في الدقيقة}$$

ملاحظة: يبقى معدل وصول العملاء نفسه 0.75 عميل في الدقيقة.

وبالتالي يمكن حساب ما هو مطلوب كالآتي:

1- وقت تقديم الخدمة:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{1.33} = 0.75 \text{ دقيقة للعميل}$$

2- حساب عدد العملاء في صف الانتظار:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1.33} = 0.56$$

3- احتمال عدم وجود عملاء في صف الانتظار:

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{0.75}{1.33}\right) = 0.43$$

4- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\right) = \frac{0.75^2}{1.33(1.33-0.75)} = 0.72 \text{ عميل}$$

5- متوسط عدد العملاء في النظام:

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.72 + 0.56 = 1.28 \text{ عميل}$$

6- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.72}{0.75} = 0.96 \text{ دقيقة}$$

7- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \left[W_q + \frac{1}{\mu}\right] = 0.96 + 0.75 = 1.71 \text{ دقيقة}$$

يلاحظ من خلال توظيف عامل جديد قد تحسن نظام صفوف الانتظار في المتجر.

حل التمرين رقم 05:

يلاحظ تغير عدد مراكز تقديم الخدمة من 1 إلى K مركز مقارنة بالتمارين السابقة، وعندئذ يصبح النموذج المصادف في هذه الحالة هو من النوع: **M/M/K/∞/FIFS .**

يعني أن نموذج صفوف الانتظار في هذه الحالة من النوع الذي نجد فيه عشوائية في وقت وصول العملاء، وعشوائية في وقت أداء الخدمة، وK مركز لتقديم الخدمة، وعدد لانهائي من الزبائن، وذو نظام معتمد على الداخل في الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول (**FIFS**).

ولإجابة على الأسئلة المطلوبة في هذا التمرين ينبغي حساب معدل وصول العملاء إلى الشركة ومعدل تقديم الخدمة في الساعة الواحدة، ويتم ذلك كما يلي:

العملاء في الساعةمعدل الوصولشاحنة/ الساعة$\lambda = 5$

معدل تقديم الخدمة في الساعة شاحنة/ الساعة$\mu = 2$

عدد مراكز تقديم الخدمة هو k=3

وبالتالي يمكن حساب مؤشرات نظام صفوف الانتظار كالآتي:

1- وقت تقديم الخدمة:

$$\mathrm{WA} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} = 0.5$$

يعني نصف ساعة لخدمة شاحنة واحدة

2- حساب عدد العملاء في صف الانتظار:

$$\rho = \frac{\lambda}{k * \mu} = \frac{5}{3 * 2} = \frac{5}{6} = 0.833$$

يعني نسبة وصول العملاء أي الشاحنات مقارنة بتقديم الخدمة هي في حدود83.33% .

3- احتمال عدم وجود عملاء في صف الانتظار:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{k^k}{k!} * \left(\frac{\rho^k}{1-\rho}\right)\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{3-1} \frac{\left(3 * \frac{5}{6}\right)^n}{n!} + \frac{3^3}{3!} * \left(\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\left[\frac{\left(3*\frac{5}{6}\right)^0}{0!} + \frac{\left(3*\frac{5}{6}\right)^1}{1!} + \frac{\left(3*\frac{5}{6}\right)^2}{2!}\right] + \frac{3^3}{3!} * \left(\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{6}\right)}\right)\right]^{-1} \simeq 0.044$$

يعني احتمال أن يكون صف الانتظار فارغ لا يوجد فيه أي شاحنة هو 4.40%.

4- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

$$L_{\mathrm{q}}=\frac{\rho*(k\rho)^{k}}{k!\,(1-\rho)^{2}}*P_{0}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)*\left(3*\left(\frac{5}{6}\right)\right)^{3}}{3!\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)\right)^{2}}*0.044\simeq 3.72$$

يعني عدد الشاحنات المتواجدة في صفوف الانتظار هو 3 بالتقريب 4.

5- متوسط عدد العملاء في النظام:

$$L_{\mathrm{S}}=L_{q}+\frac{\lambda}{\mu}=3.72+\left(\frac{5}{2}\right)=6.22$$

يعني عدد الشاحنات المتواجدة في الانتظار في النظام كله (صف الانتظار + مراكز تقديم الخدمة) هو بالتقريب 6.

6- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_{\mathrm{q}}=\frac{L_{\mathrm{q}}}{\lambda}=P_{k}*\frac{1}{k*\mu*(1-\rho)^{2}}=\frac{3.72}{5}=0.744$$

يعني وقت الانتظار في الصف هو في حدود 44 دقيقة و 38 ثانية بالتقريب.

7- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام:

$$W_{\mathrm{S}}=\frac{L_{\mathrm{S}}}{\lambda}=W_{\mathrm{q}}+\frac{1}{\mu}=\frac{6.22}{5}=1.244$$

يعني وقت الانتظار في نظام كله هو ساعة و14 دقيقة و 38 ثانية بالتقريب أي ما يعادل 75 دقيقة بالتقريب.

8- احتمال وجود شاحنات في صف الانتظار حسب تغير عدد مراكز تقديم الخدمة:

$$P_{\mathrm{n}}=\begin{cases}\frac{1}{n!}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}*P_{0}\text{, if } \mathrm{n}=0,1,2,\dots\dots\dots\dots\dots \mathrm{k}-1\dots\dots 1\\ \frac{1}{k!}*\frac{1}{k^{n-k}}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}*P_{0}\text{, if } \mathrm{n}=\mathrm{K},\mathrm{k}+1,\mathrm{k}+2\dots\dots..2\end{cases}$$

الحالة الأولى: n<k يتم الحساب بالعلاقة رقم 1 كما يلي:

$$P_{\mathrm{n}}=\frac{1}{n!}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}*P_{0}\text{ , if } \mathrm{n}=0,1,2$$

$$=\frac{1}{0!}*\left(\frac{5}{2}\right)^{0}*0.044=0.044P_{0}$$
$$=\frac{1}{1!}*\left(\frac{5}{2}\right)^{1}*0.044=0.110P_{1}$$
$$=\frac{1}{2!}*\left(\frac{5}{2}\right)^{2}*0.044=0.1375P_{2}$$

الحالة الثانية: n>=k يتم الحساب بالعلاقة رقم 2 كما يلي:

$$P_{\mathrm{n}}=\frac{1}{k!}*\frac{1}{k^{n-k}}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}*P_{0}\text{, if } \mathrm{n}=3,3+1,3+2$$

$$P_3 = \frac{1}{3!} * \frac{1}{3^{3-3}} * \left(\frac{5}{2}\right)^3 * .044 = 0.110$$
$$P_4 = \frac{1}{3!} * \frac{1}{3^{4-3}} * \left(\frac{5}{2}\right)^4 * .044 = 0.0.0908$$
$$P_5 = \frac{1}{3!} * \frac{1}{3^{5-3}} * \left(\frac{5}{2}\right)^5 * .044 = 0.0763$$

حل التمرين رقم 06:

النموذج المصادف في هذه الحالة هو من النوع: **M/M/1/∞/FIFS**

يعني أن هذا البنك يتبع نموذج صفوف الانتظار من النوع الدي نجد فيه عشوائية في وقت وصول العملاء، وعشوائية في وقت أداء الخدمة، وشباك وحيد لتقديم الخدمة، وعدد لانهائي من العملاء، وذو نظام معتمد على الداخل في الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول (**FIFS**).

ولإجابة على الأسئلة المطلوبة في هذا التمرين ينبغي حساب معدل وصول العملاء إلى البنك ومعدل تقديم الخدمة ولكن في هذه الحالة في الساعة الواحدة، ويتم حساب ذلك ب كما يلي:

$\lambda = 10$ العملاء في الدقيقةمعدل الوصولعميل/ ساعة

$\mu = \frac{60}{5} = 12$ معدل تقديم الخدمة في الدقيقة عميل/ ساعة

وللإشارة تم في هذه الحالة أخد معدلي الوصول وتقديم الخدمة بالساعة، يعني معدل وصول العملاء عُبر عليه بـــ 10 عملاء في الساعة الواحدة، ومعدل تقديم الخدمة عُبر عليه بـ 12 عميل يمكن تقديم لهم الخدمة في الساعة الواحدة.

وعليه يمكن حساب ما هو مطلوب كالآتي:

9- وقت تقديم الخدمة:

$$WA = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{12} = 0.083 \text{ دقيقة للعميل}$$

10- حساب عدد العملاء في صف الانتظار:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = 0.83 = 83.33\%$$

يعني احتمال أن يكون البنك مشغولا بنسبة83.33%.

11- احتمالات التوازن للنظام في البنك:

- إحتمال عدم وجود عملاء في البنك:

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 1 - 0.83 = 0.17$$

يعني احتمال أن يكون البنك غير مشغول (البنك خالي من العملاء) بنسبة 17%.

- احتمال وجود عميل واحد في البنك:

$$P_1 = \rho^1(1-\rho) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 * P_0 = (0.83)^1 * 0.17 = 0.1411 = 14.11\%$$

- احتمال وجود عملين اثنين في البنك:

$$P_2 = \rho^2(1-\rho) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 * P_0 = (0.83)^2 * 0.17 = 0.1171 = 11.71\%$$

- احتمال وجود ثلاث عملاء في البنك:

$$P_3 = \rho^3(1-\rho) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 * P_0 = (0.83)^3 * 0.17 = 0.0972 = 9.72\%$$

12- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\right) = \frac{10^2}{12(12-10)} = 4.16 \simeq 4 \text{ عميل}$$

13- متوسط عدد العملاء في النظام:

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 4.16 + 0.83 \simeq 5 \text{عميل}$$

14- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4}{10} = 0.4 \text{ ساعة} = 24 \text{دقيقة}$$

15- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \left[W_q + \frac{1}{\mu}\right] = 0.4 + 1/12 = 0.483 \text{ساعة}$$

حل التمرين رقم 07:

النموذج المصادف في هذه الحالة هو من النوع: **M/M/4/∞/FIFS**

يعني أن هذا المكتب للبريد يتبع نموذج صفوف الانتظار من النوع الذي نجد فيه عشوائية في وقت وصول العملاء، وعشوائية في وقت أداء الخدمة، و4 شبابيك (أربع مراكز) لتقديم الخدمة، وعدد لانهائي من العملاء، وذو نظام معتمد على الداخل في الأول هو من تُقدم له الخدمة في الأول (**FIFS**).

ولإجابة على الأسئلة المطلوبة في هذا التمرين ينبغي حساب معدل وصول العملاء إلى مكتب البريد ومعدل تقديم الخدمة ولكن في هذه الحالة في الساعة الواحدة، ويتم حساب ذلك كما يلي:

$$\lambda = 15 \text{ ساعة} / \text{عميل}$$ معدل الوصول العملاء في الدقيقة

$$\mu = \frac{60}{12} = 5 \text{ ساعة} / \text{عميل}$$ معدل تقديم الخدمة في الدقيقة

وللإشارة تم في هذه الحالة أخد معدلي الوصول وتقديم الخدمة بالساعة، يعني معدل وصول العملاء عُبر عليه بـــــ 15 عميل في الساعة الواحدة، ومعدل تقديم الخدمة عُبر عليه بـ 5 عملاء يمكن تقديم لهم الخدمة في الساعة الواحدة.

وعليه يمكن حساب ما هو مطلوب كالآتي:

16- احتمال أن يكون مكتب البريد مشغولا:

$$\rho = \frac{\lambda}{K * \mu} = \frac{15}{4 * 5} = 0.75 = 75\%$$

يعني احتمال ان يكون مكتب البريد مشغولا هو بنسبة 75%.

17- احتمالات التوازن للنظام في البنك:

- إحتمال عدم وجود عملاء في البنك:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{k^k}{k!} * \left(\frac{\rho^k}{1-\rho}\right)\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{4-1} \frac{(4 * 0.75)^n}{n!} + \frac{4^4}{4!} * \left(\frac{0.75^4}{1-0.75}\right)\right]^{-1} = 0.0377 = 3.77\%$$

- احتمال وجود شاحنات في صف الانتظار حسب تغير عدد مراكز تقديم الخدمة:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{ , if } n = 0,1,2, \dots \dots \dots \dots \dots k-1 \dots \dots 1 \\ \frac{1}{k!} * \frac{1}{k^{n-k}} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{, if } n = K, k+1, k+2 \dots \dots ..2 \end{cases}$$

الحالة الأولى: n<k يتم الحساب بالعلاقة رقم 1 كما يلي:

$$P_n = \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{ , if } n = 0,1,2$$

$$= \frac{1}{0!} * \left(\frac{15}{5}\right)^0 * 0.0377 = 0.0377 P_0$$

$$= \frac{1}{1!} * \left(\frac{15}{5}\right)^1 * 0.0377 = 0.113 P_1$$

$$=\frac{1}{2!}*\left(\frac{15}{5}\right)^2*0.0377=0.169P_2$$

$$=\frac{1}{3!}*\left(\frac{15}{5}\right)^3*0.0377=0.169P_3$$

الحالة الثانية: n>=k يتم الحساب بالعلاقة رقم 2 كما يلي:

$$P_{\mathrm{n}}=\frac{1}{k!}*\frac{1}{k^{n-k}}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n*P_0,\mathrm{if\ \ n}=3{,}3+1{,}3+2$$

$$P_4=\frac{1}{4!}*\frac{1}{3^{4-4}}*\left(\frac{15}{5}\right)^4*0.0377=0.127$$

$$P_5=\frac{1}{5!}*\frac{1}{3^{5-4}}*\left(\frac{15}{5}\right)^5*0.0377=0.019$$

$$P_6=\frac{1}{6!}*\frac{1}{3^{6-4}}*(15/5)^6*0.0377=0.038$$

18- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

$$L_{\mathrm{q}}=\frac{\rho*(k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)^2}*P_0=\frac{(0.75)*\left(4*(0.75)\right)^4}{4!\,(1-(0.75)^2}*0.0377\simeq 1.52_{\text{عميل}}$$

يعني عدد العملاء المتواجدين في صف الانتظار هو بالتقريب 2.

19- متوسط عدد العملاء في النظام:

$$L_{\mathrm{S}}=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=1.52+(\frac{15}{5})=4.52$$

يعني عدد العملاء المتواجدين في الانتظار في النظام كله (صف الانتظار + مراكز تقديم الخدمة) هو بالتقريب 5.

20- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_{\mathrm{q}}=\frac{L_{\mathrm{q}}}{\lambda}=P_k*\frac{1}{k*\mu*(1-\rho)^2}=\frac{1.52}{15}=0.1013$$

يعني وقت الانتظار في الصف هو في حدود 6 دقيقة.

21- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام:

$$W_{\mathrm{S}}=\frac{L_{\mathrm{S}}}{\lambda}=W_{\mathrm{q}}+\frac{1}{\mu}=4.52/15=0.3013$$

يعني وقت الانتظار في النظام كله هو 18 دقيقة بالتقريب.

حل التمرين رقم 08:

من المعطيات يتضح أن نوع النموذج المصادف في هذا التمرين هو من النوع **Finite Input Source** (نموذج دو مجتمع الطلب محدود (محدودية في عدد الوحدات التي تطلب الخدمة)

M **:** توزيع عشوائي لوصول الوحدات؛

M **:** توزيع عشوائي لتقديم الخدمة؛

1: مركز واحد يعني فردي (Single)؛

N: عدد الوحدات التي تطلب الخدمة معروفا ومحددا مسبقا (**Finite Input Source**) ؛

FIFS: الداخل الأول هو من تقدم له الخدمة في الأول.

6 و عميل /الشهر$30 = \mu$ و$\rho = \frac{6}{30} = 0.2$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{6}{30}\right)^n + \frac{4!}{(4-n)!}} = 0.398$$

$$P_{\mathrm{n}} = \frac{N!}{(N-n)!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0$$

$$L_{\mathrm{q}} = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} * (1 - P_0) = 4 - \frac{6 + 30}{6} * (1 - 0.398) = 0.388$$

$$L_{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{q}} + (1 - P_0) = 0.388 + (1 - 0.388) = 0.990$$

$$W_{\mathrm{q}} = \frac{L_{\mathrm{q}}}{\lambda * (N - L_{\mathrm{s}})} = \frac{0.388}{6 * (4 - 0.990)} = 0.0216$$

$$W_{\mathrm{s}} = W_{\mathrm{q}} + \frac{1}{\mu} = 0.0216 + \frac{1}{30} = 0.0549$$

حل التمرين رقم 09:

يلاحظ أن نموذج صفوف الانتظار في هذه الحالة انه يتميز بمحدودية سعة الانتظار يعني من النوع:
(نموذج ذو مكان الانتظار المحدود (سعة الانتظار محدودة، طول الطابور محدود)

Limited Waiting Capacity (Finite - Queue)

حيث لدينا المعطيات التالية:

$\lambda = 15$ و $\mu = 20$ و$L = 6 + 1 = 7$(السيارات الموجودة في مكان الانتظار وفي مركز الخدمة)

$\rho = \frac{15}{20} = 0.75$

حيث أن L هي سعة النظام أو الحد الأقصى (يعني $L = N + 1$ والتي تمثل عدد العملاء الموجدين في مكان الانتظار وفي مكان أداء الخدمة)

وعند ذلك بإمكاننا حساب ما طلب كما يلي:

1- احتمال عدم وجود زبون في الورشة:

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} = \frac{1 - 0.75}{1 - 0.75^{7+1}} = 0.27$$

2- متوسط عدد الزبائن في الورشة:

$$L_{\mathrm{S}} = \frac{L * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L+2} - (L+1) * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L+1} * \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L+1}\right) * (1 - \frac{\lambda}{\mu})} = \frac{7 * \left(\frac{15}{20}\right)^{7+2} - (7+1) * \left(\frac{15}{20}\right)^{7+1} * \frac{15}{20}}{\left(1 - \left(\frac{15}{20}\right)^{7+1}\right) * (1 - \frac{15}{20})} = 2.11$$

3- العدد المتوسط للزبائن في خط الانتظار:

$$L_q = L_{\mathrm{S}} - \frac{\lambda * (1 - P_{\mathrm{L}})}{\mu} = L_{\mathrm{S}} - \frac{15 * (1 - 0.036)}{20} = 1.38$$

حيث :

$$P_{L}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L}*P_{0}=\left(\frac{15}{20}\right)^{7}*P_{0}=0.036$$

4- نسبة الزبائن الراجعين:

$$P_{L}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{L}*P_{0}=\left(\frac{15}{20}\right)^{7}*0.27=0.036$$

5- الوقت المتوسط المنفق للسيارة في النظام وفي خط الانتظار:

$$W_{S}=\frac{L_{S}}{\lambda*(1-P_{L})}=\frac{2{,}11}{15*(1-0{,}036)}=0.14$$

$$W_{q}=W_{S}-\frac{1}{\mu}=W_{S}-\frac{1}{\mu}=0.0961$$

6- هل من الأفضل تشغيل العامل الثاني أملا ؟

لتحديد القرار الأفضل نبحث عن الربح الضائع من جراء رجوع الزبون أي عدم دخوله الى الورشة (النظام) وذلك كما يلي:

أولا: نسبة الزبائن الراجعين وعدم خدمتهم هو 0.036* 15= 0.54 سيارة

ثانيا: عند مستوى الربح الممكن 3000 دج لكل سيارة فهذا يعني أن الربح الضائع هو في اليوم يكون: 3000* (0.54)= 1620دج في اليوم.

إذن يلاحظ أن تكلفة الربح الضائعة أقل من تكلفة تشغيل عامل ثاني البالغة 2000 دج في اليوم، ومنه من الأفضل إبقاء الورشة على حالها وعدم إضافة العامل الثاني.

حل التمرين رقم 10:

النموذج المصادف في هذه الحالة هو من النوع: **M/M/K/∞/FIFS .**

$\lambda=20$ عميل/ الساعة معدل الوصول العملاء في الساعة

$\mu=\frac{1}{5}=\frac{60}{5}=12$ عميل/ الساعة معدل تقديم الخدمة في الساعة

عدد مراكز تقديم الخدمة هو k=2

وبالتالي يمكن حساب مؤشرات نظام صفوف الانتظار كالآتي:

22-وقت تقديم الخدمة:

$$WA=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{12}=0.0833$$

يعني 5 دقائق لخدمة عميل واحد.

23-حساب عدد العملاء في صف الانتظار:

$$\rho=\frac{\lambda}{k*\mu}=\frac{20}{2*12}=\frac{20}{24}=0.833$$

يعني نسبة وصول العملاء أي الشاحنات مقارنة بتقديم الخدمة هي في حدود83.33% .

24- احتمال عدم وجود عملاء في صف الانتظار:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{k^k}{k!} * \left(\frac{\rho^k}{1-\rho}\right)\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{2-1} \frac{\left(2*\frac{20}{24}\right)^n}{n!} + \frac{2^2}{2!} * \left(\frac{\left(\frac{20}{24}\right)^2}{1-\left(\frac{20}{24}\right)}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\left[\frac{\left(2*\frac{20}{24}\right)^0}{0!} + \frac{\left(2*\left(\frac{20}{24}\right)\right)^1}{1!}\right] + \frac{2^2}{2!} * \left(\frac{(20/24)^2}{1-(20/24)}\right)\right]^{-1} \simeq 0.044$$

يعني احتمال أن يكون صف الانتظار فارغ لا يوجد فيه أي شاحنة هو 4.40%.

25- متوسط عدد العملاء اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\rho * (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)^2} * P_0 = \frac{\left(\frac{5}{6}\right) * \left(3 * \left(\frac{5}{6}\right)\right)^3}{3!\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)\right)^2} * 0.044 \simeq 3.72$$

يعني عدد الشاحنات المتواجدة في صفوف الانتظار هو 3 بالتقريب 4.

26- متوسط عدد العملاء في النظام:

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 3.72 + \left(\frac{5}{2}\right) = 6.22$$

يعني عدد الشاحنات المتواجدة في الانتظار في النظام كله (صف الانتظار + مراكز تقديم الخدمة) هو بالتقريب 6.

27- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = P_k * \frac{1}{k * \mu * (1-\rho)^2} = \frac{3.72}{5} = 0.744$$

يعني وقت الانتظار في الصف هو في حدود 44 دقيقة و 38 ثانية بالتقريب.

28- متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{6.22}{5} = 1.244$$

يعني وقت الانتظار في نظام كله هو ساعة و14 دقيقة و 38 ثانية بالتقريب أي ما يعادل 75 دقيقة بالتقريب.

29-احتمال وجود شاحنات في صف الانتظار حسب تغير عدد مراكز تقديم الخدمة:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{ , if } n = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k-1 \ldots\ldots 1 \\ \frac{1}{k!} * \frac{1}{k^{n-k}} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{, if } n = K, k+1, k+2 \ldots\ldots..2 \end{cases}$$

الحالة الأولى: n<k يتم الحساب بالعلاقة رقم 1 كما يلي:

$$P_n=\frac{1}{n!}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n*P_0 \text{ , if } n=0,1,2$$

$$=\frac{1}{0!}*\left(\frac{5}{2}\right)^0*0.044=0.044P_0$$
$$=\frac{1}{1!}*\left(\frac{5}{2}\right)^1*0.044=0.110P_1$$
$$=\frac{1}{2!}*\left(\frac{5}{2}\right)^2*0.044=0.1375P_2$$

الحالة الثانية: n>=k يتم الحساب بالعلاقة رقم 2 كما يلي:

$$P_n=\frac{1}{k!}*\frac{1}{k^{n-k}}*\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n*P_0, \text{if } n=3,3+1,3+2$$
$$P_3=\frac{1}{3!}*\frac{1}{3^{3-3}}*\left(\frac{5}{2}\right)^3*.044=0.110$$
$$P_4=\frac{1}{3!}*\frac{1}{3^{4-3}}*\left(\frac{5}{2}\right)^4*.044=0.0.0908$$
$$P_5=\frac{1}{3!}*\frac{1}{3^{5-3}}*\left(\frac{5}{2}\right)^5*.044=0.0763$$

حل التمرين رقم 11:

النموذج الموافق لهذه الحالة هو من النوع : **M/G/1/∞/FIFS**

$\lambda=\frac{4}{60}=0.0667$ السيارات في الدقيقةمعدل الوصولسيارة/ دقيقة

$\mu=\frac{1}{10}=0.1$ معدل تقديم الخدمة في الدقيقة سيارة/ دقيقة

وبالتالي يمكن حساب ما هو مطلوب كالآتي:

8- وقت تقديم الخدمة:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{0.1}=10 \text{ دقيقة للسيارة}$$

9- حساب عدد السيارات في صف الانتظار:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0.0667}{0.1}=0.667$$

10- احتمال عدم وجود سيارات في صف الانتظار:

$$P_0=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)=(1-0.667)=0.333$$

11- متوسط عدد السيارات اللذين ينتظرون في صف الانتظار:

في هذه الحالة لا يمكن حساب عدد السيارات اللذين ينتظرون في صف الانتظار بالعلاقة $L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}$ نظرا لعدم اتباع تقديم الخدمة لأي توزيع احتمالي، وعليه سندخل الانحراف المعياري في الحساب وفق العلاقة الرياضية التالية:

$$L_q = \frac{\lambda^2 * \delta^2 + \rho^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{0.0667^2 * 6^2 + 0.667^2}{2(1-0.667)} = 0.90 \text{ سيارة}$$

يعني عدد السيارات الموجودة في صف الانتظار هو 0.99 تقريبا سيارة واحدة.

12- متوسط عدد السيارات في النظام:

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.90 + 0.667 = 1.56 \text{ سيارة}$$

يعني عدد السيارات المتواجد في النظام هو 1.56 تقريبا 2 سيارة.

13- وقت الانتظار في صف الانتظار:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.90}{0.0667} = 13.5 \text{ دقيقة}$$

يعني وقت الانتظار في صف الانتظار هو 13.5 دقيقة تقريبا 14 دقيقة.

14- متوسط الوقت الذي تقضيه السيارة في النظام:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \left[W_q + \frac{1}{\mu}\right] = 13.5 + 10 = 23.5 \text{دقيقة}$$

يعني الوقت الذي تستغرقه السيارة في النظام كله هو 23.5 تقريبا 24 دقيقة.

حل التمرين رقم 12:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 9/8 = 0.888$$

$$WA = \frac{1}{\mu} = 9/1 = 0.111$$

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 8$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \left(\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\right) = 7.111$$

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = 1$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 0.888$$

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.111$$

حل التمرين رقم 13:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{9} = 0.8889$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = 0.153$$

$$L_S = \sum_{n=0}^{N} n * P_n = \sum_{n=0}^{N} n * \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) * \rho^n = L_S$$

$$= \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) * \sum_{n=0}^{N} n * \rho^n = P_0 * \sum_{n=0}^{N} n * \rho^n$$

نختار الصيغة الأخيرة هي الأفضل للحساب نظرا لسهولة استعمالها وذلك كما يلي:

$$L_S = P_0 * \sum_{n=0}^{N} n * \rho^n = 3.8541$$

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = 3.007$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = 0.5056$$

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} = 0.3945$$

حل التمرين رقم 14:

$$\rho = \frac{\lambda}{k * \mu} = \frac{10}{2 * 6} = 0.833$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{k^k}{k!} * \left(\frac{\rho^k}{1-\rho}\right)\right]^{-1} = 0.0909$$

$$L_q = \frac{\rho * (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)^2} * P_0 =\simeq 3.7879$$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 5.4545$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = P_k * \frac{1}{k * \mu * (1-\rho)^2} = 0.3788$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.5455$$

حل التمرين رقم 15:

$$\rho = \frac{\lambda}{K*\mu} = \frac{10}{2*6} = \frac{10}{12} = 0.833$$

$$r = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{6} = 1.66$$

$$\rho \neq 1 \Rightarrow \frac{10}{12} \neq 1$$

$$P_0 = \left[\frac{r^K}{K!}\left(\frac{1-\rho^{N-K+1}}{1-\rho}\right) + \sum_{n=0}^{K-1}\frac{r^n}{n!}\right]^{-1} = \left[\frac{\left(\frac{10}{6}\right)^2}{2!}\left(\frac{1-\left(\frac{10}{12}\right)^{7-2+1}}{1-\left(\frac{10}{12}\right)}\right) + \sum_{n=0}^{2-1}\frac{\left(\left(\frac{10}{6}\right)\right)^n}{n!}\right]^{-1} \approx 0.14$$

$$L_q = \frac{p_0 * r^K * \rho}{K!\,(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{N-K+1}-(1-\rho)(N-K+1)\rho^{N-K}\right]$$

$$\Rightarrow L_q\text{=}1.520\frac{0.14*1.66^2*0.833}{2!(1-0.833)^2}\left[1-0.833^{7-2+1}-(1-0.833)(7-2+1)0.833^{7-2}\right] \approx$$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

نحسب λ_{eff} كما يلي:

$$\lambda_{eff} = \lambda(1-p_N)$$

ونحسب p_N كما يلي:

$$P_N = \frac{\lambda^N}{k^{N-k}k!\,\mu^N}p_0 \Rightarrow P_7 = \frac{10^7}{2^{7-5}2!\,(6)^7}0.14 \approx 0.078$$

بالتعويض نجد :

$$\lambda_{eff} = \lambda(1-p_N) = 10*(1-0.078) = 9.22$$

إذن :

$$L_S = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = 1.52 + \frac{9.22}{6} = 3.0567$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda_{eff}} = \frac{L_S}{\lambda(1-p_N)} = \frac{3.0567}{9.22} = 0.33$$

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} = 0.33 - \frac{1}{6} = 0.1633$$

حل التمرين رقم 16:

لدينا المعلومات التالية:

$$\mu = 4 \text{ و } \lambda = 2$$

لمعرفة الوصول في الوقت المناسب أم لا ينبغي حساب الزمن المتوقع الذي يقضيه الزبون في النظام وذلك كما يلي:

$$W_S = \frac{k+1}{2k} * \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + 1/\mu$$

بالتعويض نجد:

$$W_S = \frac{3+1}{2*3} * \frac{2}{4(4-2)} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ساعة}$$

يعني زمن الانتظار في النظام هو في حدود 25 دقيقة ومدة المشي إلى الدكان هي 3 دقائق بمعنى أن الزبون بإمكانه الوصول في الموعد المناسب ويبقى له فائض 2 دقيقة.

حل التمرين رقم 17:

لاختيار الاقتراح المناسب نعتمد على تحديد التكلفة المتوقعة لكل اقتراح وذلك كما يلي:

بالنسبة للاقتراح الأول:

- عدد السيارات المتوقعة في النظام (بانتظار الإصلاح والتي تحت الإصلاح) هو:

لدينا:

$$\mu = 5 \text{ و } \lambda = 4$$

$$\rho = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{0.2} = 4 \text{ سيارة}$$

إذن عدد السيارت هو 4.

وبالتالي التكلفة الخاصة بالاقتراح الأول هي:

$$C1 = 4 * 100 = 400$$

يعني 400 ون يوميا

أما التكلفة الكلية فهي 400 مضاف اليها تكلفة تشغيل المستودع التابع للمؤسسة أي 400+300= 700 ون في اليوم.

- بالنسبة للاقتراح الثاني:
- عدد السيارات المتوقعة في النظام (بانتظار الإصلاح والتي تحت الإصلاح) هو:

لدينا :

$$\mu = 6 \text{ و } \lambda = 4$$

$$\rho = \frac{4}{6} = 0.66$$

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.66}{0.33} = 2 \text{ سيارة}$$

إذن عدد السيارت هو 2.

وبالتالي التكلفة الخاصة بالاقتراح الأول هي:

$$C2 = 2 * 100 = 200$$

يعني 200 ون يوميا

أما التكلفة الكلية فهي 200 مضاف اليها تكلفة تشغيل المستودع التابع للمؤسسة أي 200+400= 600 ون في اليوم.

القرار: اختيار الاقتراح الثاني أي التعاقد مع الميكانيكي الخارجي أفضل.

حل التمرين رقم 18:

في هذا التمرين نلاحظ أن معدل الوصول العملاء أي الشاحنات هو$\lambda = 2$ ومعدل أداء الخدمة أي تفريغ الشاحنات هو $\mu = 3$شاحنات في اليوم لكن هذا في حالة وجود 150 عامل أي أن كل شاحنة تحتاج إلى 50 عاملا.

وعلى أساس ذلك نرى أن معدل أداء الخدمة قد يتغير من اقتراح إلى اقتراح آخر يعني حسب حجم العمالة.

وللاختيار أفضل اقتراح نتبع ما يلي:

- **بالنسبة للاقتراح الأول:**

لديناعدد العمال هو 150 عامل و$\lambda = 2$ و $\mu = 3$ و $\rho = \frac{2}{3} = 0.66$

إذن تكلفة الخدمة = 150 * 5 = 750 ون .

الزمن المتوقع انتظاره في المؤسسة هو:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{3(1-0.66)} = 0.9804 \approx 1 \text{ يوم}$$

يعني أن وقت الانتظار هو 1 يوم

وعند ذلك تكون التكلفة الكلية = تكلفة الخدمة + تكلفة الانتظار= 750+(1يومX 500 ون)= 1250 ون

- **بالنسبة للاقتراح الثاني:**

لديناعدد العمال هو 200 عامل و$\lambda = 2$ و $\mu = \frac{200}{500} = 4$ و $\rho = \frac{2}{4} = 0.5$

إذن تكلفة الخدمة = 200 * 5 = 1000 ون .

الزمن المتوقع انتظاره في المؤسسة هو:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{4(1-0.5)} = 0.5 \text{ يوم}$$

يعني أن وقت الانتظار هو نصف يوم

وعند ذلك تكون التكلفة الكلية = تكلفة الخدمة + تكلفة الانتظار= 1000+(0.5يومX 500 ون)= 1250 ون

- **بالنسبة للاقتراح الثالث:**

لدينا عدد العمال هو 250 عامل و $\lambda = 2$ و $\mu = \frac{250}{50} = 5$ و $\rho = \frac{2}{5} = 0.40$

إذن تكلفة الخدمة = 250 * 5 = 1250ون.

الزمن المتوقع انتظاره في المؤسسة هو:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{5(1-0.4)} = 1/3 = 0.333 \text{ يوم}$$

يعني أن وقت الانتظار هو 1 يوم

وعند ذلك تكون التكلفة الكلية = تكلفة الخدمة + تكلفة الانتظار= 1250+(0.333يومX 500 ون)= 1416.65 ون

- **بالنسبة للاقتراح الرابع:**

لدينا عدد العمال هو 300 عامل و $\lambda = 2$ و $\mu = \frac{300}{50} = 6$ و $\rho = \frac{2}{6} = 0.333$

إذن تكلفة الخدمة = 300 * 5 = 1500 ون .

الزمن المتوقع انتظاره في المؤسسة هو:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{6(1-0.33)} = 1/4 = 0.25 \text{ يوم}$$

يعني أن وقت الانتظار هو 0.25 يوم

وعند ذلك تكون التكلفة الكلية = تكلفة الخدمة + تكلفة الانتظار= 1500+(0.25يومX 500 ون)= 1625 ون

القرار:

من النتائج السابقة يتضح أن الاقتراح الأفضل هو الأول أو الثاني لكونهما الأقل في التكلفة ويبقى الاختيار بينهما حسب رؤية مدير المؤسسة.

حل التمرين رقم 19:

لدينا ما يلي:

$\lambda = 3$ و $\mu = 4$ و $\rho = 3/4 = 0.75$

إذن احتمال أن يكون النظام مشغول هو 75%.

1- وقت انتظار الشاحنة هو:

$$W_S = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{4(1-0.75)} = 1 \text{ ساعة}$$

2- إجمالي وقت الانتظار المتوقع هو:

إجمالي وقت الانتظار في هذه الحالة = عدد الشاحنات في اليوم **X** نسبة التوريد **X** وقت الانتظار المتوقع لكل شاحنة في الصف ($W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$)

لنرمز للإجمالي وقت الانتظار بـ GW_Sوعندئذ يتم حسابه كما يلي:

$$GW_S = 3 * 8 * (0.4) * \frac{0.75}{4(1-.75)} = 7.2 \quad \text{ساعة في يوم}$$

حل التمرين رقم 20:

من نص التمرين لدينا المعلومات التالية:

$$k = 3 \qquad \text{و} \quad \mu = \frac{1}{20} = 3 \quad \text{و} \quad \lambda = 6$$

للإشارة $\mu = \frac{1}{20} = 3$ تعني أنه واحد مريض في كل عشرين دقيقة يعني ثلاثة مرضى في الساعة.

$$r = 6/3 = 2$$

أما ρ فهي :

$$\rho = \frac{6}{3*3} = \frac{2}{3} = 0.666$$

1. متوسط عدد المرضى المنتظرين؛

$$L_q = \frac{\rho * (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)^2} * P_0$$

نحسب أولا P_0كما يلي:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^n}{n!} + \frac{k^k}{k!} * \left(\frac{\rho^k}{1-\rho}\right)\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{3-1} \frac{\left(3 * \frac{2}{3}\right)^n}{n!} + \frac{3^3}{3!} * \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1-\frac{2}{3}}\right)\right]^{-1}$$

$$\Longrightarrow P_0 = \frac{1}{9} = 0.111$$

إذن L_q تحسب كما يلي:

$$L_q = \frac{\rho * (k\rho)^k}{k!\,(1-\rho)^2} * P_0 = \frac{\frac{2}{3} * \left(3 * \frac{2}{3}\right)^3}{3!\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} * \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0.888$$

2. متوسط الوقت الذي يقضيه المريض في العيادة؛

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

لحساب ذلك نحسب أولا L_S كما يلي:

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{9} + \frac{6}{3} = \frac{26}{9} = 2.888$$

إذن W_Sتحسب كما يلي:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{2.888}{6} = 0.481 \text{ساعة} \simeq 28.90 \text{ دقيقة}$$

3. متوسط ونسبة انقطاع الطبيب عن العمل (عدم التشغيل).

من خلال حسابنا لــρيتضح أن طبيب من ثلاثة لا يشتغل أي بسنبة 0.333 أي 33.33% وهي نسبة الانقطاع عن العمل أو الشغل وبالتالي سيكون 66.66% العيادة مشغولة يعني طبيبين (2 طبيب) مشغولين في جميع الأحوال.

ويمكن حساب نسبة الخمول للطبيب في العيادة بحساب العلاقة $p_0 + p_1 + p_2$

ولحساب ذلك نعتمد على العلاقة التالية:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{ , if } n = 0,1,2, \dots\dots\dots\dots\dots k-1 \\ \frac{1}{k!} * \frac{1}{k^{n-k}} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 \text{, if } n = K, k+1, k+2 \dots \end{cases}$$

حيث:

$$n = 0,1,2, \dots\dots\dots\dots\dots k-1$$

$$n = 0,1,2, \dots\dots\dots\dots\dots 3-1$$

$$n = 0,1,2$$

$$P_1 = \frac{1}{9} = 0.111$$

$$P_1 = \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 = \frac{1}{1!} * \left(\frac{6}{3}\right)^1 * \frac{1}{9} = 0.222$$

$$P_2 = \frac{1}{n!} * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0 = \frac{1}{2!} * \left(\frac{6}{3}\right)^2 * \frac{1}{9} = 0.222$$

إذن

$$p_0 + p_1 + p_2 = 0.111 + 0.222 + 0.222 = 0.5555$$

قائمة المراجع المعتمد عليها في إعداد الكتاب

المراجع باللغة العربية:

1. أكرم محمد عرفان المهتدي، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية،الطبعة الأولى، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن،2010.
2. حامد سعد نور الشمرتي،علي خليل الزبيدي، مدخل الى بحوث العمليات،الطبعةالأولى،دار مجدلاوي للنشر والتوزيع،عمان، الأردن،2007.
3. حسن علي مشرقي،زياد عبد الكريم القاضي،بحوث العمليات،الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع،عمان، الأردن،1999.
4. دلال صادق الجواد،حميد ناصر الفتال،بحوثالعمليات،دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن،2008.
5. رند عمران مصطفى الأسطل،بحوث العمليات والاساليب الكمية في صناعة القرارات الادارية،الطبعة السادسة،جامعة فلسطين،فلسطين،2016.
6. سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية بنغازي، ليبيا، الطبعة الأولى، 2002.
7. سهيلة عبد الله سعيد،الجديد في الاساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى،دار الحامد للنشر والتوزيع،عمان، الأردن،2007.
8. شفيق العتوم، بحوث العمليات، دار المناهج للنشر والتوزيع،عمان، الأردن، 2016.
9. صالح مهدي محسن العامري،عواطف ابراهيم الحداد،تطبيقات بحوث العمليات في الادارة،الطبعة الأولى،اثراء للنشر والتوزيع،عمان، الأردن، 2009.
10. صالح مهدي محسن،عواطف ابراهيم الحداد،تطبيقات بحوث العمليات في الادارة، الطبعة الأولى،مكتبة الجامعة،الشارقة،الامارات العربية المتحدة،2009.
11. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي،المدخل الى بحوث العمليات،الطبعةالثالثة،دار وائل للنشر والتوزيع،عمان،الأردن،2009.
12. فريد عبد الفتاح زين الدين، بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشكلات واتخاذ القرارات، الجزء الأول، البرامج الخطية، الزقازيق، مكتبة التكامل،1997.
13. لحسن عبد الله باشيوة، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن، 2011.
14. محمد راتول، بحوث العمليات،الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2006.
15. محمود العبيدي،مؤيد عبد الحسين الفضل، بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال، الطبعة الأولى،دار الوراق للنشر والتوزيع، الأردن، 2004.
16. محمود الفياض،عيسىقدادة،بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع،عمان، الأردن،2007.
17. نجم عبود نجم، مدخل غلى الأساليب الكمية (النامدج الاحتمالية مع التطبيقات باستخدام Microsoft Exel)، الطبعة الأولى، دار الوراق للنشر والتوزيع، 2013.
18. سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، 2007.
19. أبو القاسم مسعود الشيخ ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر القاهرة مصر، الطبعة الثانية،2009 .
20. عبد اللطيف عبد الفتاح أبو علا، إبراهيم محمد مهدي، سلطان محمد عبد الحميد، ياسر محمد العدل، الإحصاء التطبيقي وبحوث العمليات، الجزء الثاني المخصص لبحوث العمليات، مكتبة الجلاء الجديدة المنصورة، 2004.

المراجع باللغة الأجنبية:

1. Aouni. B,Le Modèle De Programmation Mathematique avec Buts Dans Un Environnement Imprécis: Sa Formulation, Sa Résolution Et Une Application,Thèse Présentée à LA faculté Des Etudes Supérieures De L'Université Laval Canda Pour L'obtention Du Grade De Philosophie Doctor (Ph.D), 1998.
2. August, A goal programming Approch for Multi-objective Function in a Production Company, University of Nigeria Research Publications, UGW danty kamaka Cynthia. Pg/M.S/04/358940,2007.

3. B .B,Pal and B .N .Moitre, A Goal programming Procedure For Solving Problems With Multi Fuzzy Goals Using Dynamic Programming, European Journal of operational Research,Vol Issue,3,2003.
4. D. Jones, M. Tamis, Practical Goal Programming, International Series in Operations Research & Management Science, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

5. D.R. Anderson, D.J.Sweemey, and T.A.Williams, An Introduction to management science: Quantitative Approaches to Decision Making, New Yourk, Sorth Westem College Publishing, 2000.
6. Frederick S.Hiller,Gerald J.Lieberman,Introduction To Operations Research, Mcgraw-Hill,New York ,United States,2005.

7. H. L. Li, and S. Yu, (2000), "Solving Multiple Objective Quasi – Convex Goal Programming Problems by Linear Programming", International Transactions in Operational Research, No.7.
8. H.A.Eiselt, C.L.Sandblom, Operations Research, Springer, Heidelberg, Germany, 2010.
9. Hamdy.A. Taha, Operations Research : An introduction, PEARSON EDITION, New Jersey, USA, 2007.
10. Ijiri y. , Management Goals and Accounting for Control», North Holland, 1965Amsterdam
11. John F. Shortle, James M. Thompson, Donald Gross, Carl M.Harris, Fundamentals Of Queueing Theory, Fifth Edion,111 River Street, Hoboken, Nj 07030, Usa, 2018.(https://lccn.loc.gov/2017031755).

12. Lin ,J.,Cheong , B. and Yao ,X. , Universal Multi-Objective Function For optimising Superplastic –Damage Constitutive Equations Journal of Materials Processing Technology Vol. (125) ,2002.
13. M .A. Budri, Didavels, and, Avis, A Comprehensive 0-1 Goal Programming Model For Project Selection, International Journal of Project Management, Vol, 19. Issue 4, 2001.
14. Marc J, Schniederjans Departement Of Management University Of Nebraska- Usa? Goal Programmingm: Methodology And Applications, Springer Science, 1995.
15. Rama Murthy, Operations Research, New AGE INTERNATIONAL PUBLISHERS, Second Edition, New Delhi, india, 2007.
16. Rama. m, operation research, scond Edition,Published by New Age International (P) Ltd.,2007.
17. Richard Bronson, Govindasami Naadimuthu, Operations Research,Second Edition, Schaum's Otlines ,USA.1997.
18. Robert Faure, Exercices Et Problemes Resolus De Recherche Opérationnelle, Dunod, Paris, France,2000.