Centre Universitaire Belhadj Bouchaib
d'Ain Témouchent

Cours et Exercices

Transformation Intégrale Dans Les Espaces L^p

Kheira Mekhalfi

Année universitaire 2016 - 2017

Avant-propos

Ce polycopié est le support du cours de *Transformation intégrale dans les espaces* L^p enseigné au centre universitaire Belhadj Bouchaib de Ain Témouchent pour les étudiants de troisième année licence de mathématiques fondamentales par Kheira Mekhalfi. Il a été transcrit tout au long de l'année et ne saurait en aucun cas remplacer le cours.

Ce document est très proche du cours enseigné, et excepté quelques infimes modifications, il retranscrit le cours tel qu'il a été donné à tous les étudiants.

Pour toutes remarques, suggestions ou corrections concernant ce document, merci de me contacter pour que je puisse modifier et corriger ce polycopié.

Auteur : K. Mekhalfi

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Les espaces L^p

Un espace L^p est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ des fonctions bornées. Les espaces L^p sont appelés espaces de Lebesgue.
Cet espace constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues. Pour ce faire nous nous basons sur les références suivants [11, 6, 1, 3, 2, 9, 10].

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue $d\mu$. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguité on écrira souvent L^1 au lieu de $L^1(\Omega)$ et $\int f$ au lieu de $\int_\Omega f(x)dx$. Comme d'habitude on identifie deux fonctions de L^1 qui coïncident p.p. = presque partout (= sauf sur un ensemble négligeable).

1.1 Quelques résultats d'intégration

Dans cette section, on rappelle quelques définitions et théorèmes, sans démonstrations, qui seront utiles dans la suite.

Théorème 1.1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi) *Soit* (f_n) *une suite croissante de fonctions de* L^1 *telle que* $\sup_n \int f_n < \infty$.
Alors $f_n(x)$ *converge p.p. sur* Ω *vers une limite finie notée* $f(x)$; *de plus* $f \in L^1$ *et*

$$\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.1.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* L^1. *On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p. sur* Ω.

b) *Il existe une fonction* $g \in L^1$ *telle que pour chaque* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Lemme 1.1.1 (Lemme de Fatou) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* L^1 *telle que*

1. *Pour chaque* n, $f_n(x) \geq 0$ *p.p. sur* Ω
2. $\sup_n \int f_n < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ *on pose* $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$.
Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Notation. On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est-à-dire $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega\backslash K \ \ ou \ \ K \subset \Omega \ \ est \ \ un \ \ compact\}$.

Théorème 1.1.3 (Théorème de densité) *L'espace* $C_c(\Omega)$ *est dense dans* $L^1(\Omega)$; *c'est-à-dire*

$$\forall f \in L^1(\Omega) \ \ et \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists f_1 \in C_c(\Omega) \ \ tel \ que \ \ \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Ensuite, nous présentons deux théorèmes qui sont utilisés dans la suite.
Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Théorème 1.1.4 (Tonelli) *On suppose que*

$$\int_{\Omega_1} |F(x,y)|dy < \infty \ \ pour \ \ presque \ \ tout \ x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty.$$

Alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 1.1.5 (Fubini) *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

1.2 Les espaces L^p : définitions et propriétés

Dans cette section, nous allons présenter quelques définitions et propriétés des espaces L^p.

Définition 1.2.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \ f \ \ mesurable \ \ et \ \ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}$$

Définition 1.2.2 *L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est défini par*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega.\}$$

Pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C \ ;\ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Remarque 1.2.1 *Si $f \in L^\infty$ on a*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p. sur } \Omega.$$

En effet il existe une suite C_n telle que $C_n \to \|f\|_{L^\infty}$ et pour chaque n, $|f(x)| \leq C_n$ p.p. sur Ω. Donc $|f(x)| \leq C_n$ pour tout $x \in \Omega\backslash E_n$ avec E_n négligeable. On pose $E = \bigcup_n E_n$ de sorte que E est négligeable et l'on a $|f(x)| \leq C_n$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega\backslash E$. Par conséquent $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ pour tout $x \in \Omega\backslash E$.

Notation. Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder) . *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^p$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \tag{1.1}$$

Preuve. La conclusion est évidente si $p = 1$ et si $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Rappelons l'**inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0 \tag{1.2}$$

la démonstration de (1.2) est évidente, par concavité de la fonction log sur $]0, \infty[$, nous avons pour a et b strictement positifs

$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab$$

et donc

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q, \quad p.p. \ \ x \in \Omega$$

II en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q \tag{1.3}$$

En remplaçant dans (1.3) f par λf où $\lambda > 0$, il vient

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q \tag{1.4}$$

et si on choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{q/p}$ (de manière à minimiser le membre de droite dans (1.4)). On obtient alors (1.1). ■

Théorème 1.2.2 L^P *est un espace vectoriel et* $\|.\|_{L^p}$ *est une norme pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidents suite à la remarque 1.2.1. Supposons que $1 < p < \infty$ et soient $f, g \in L^p$. Nous avons

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x) + g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

Par conséquent $f + g \in L^p$. D'autre part on a

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^q$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|g\|_{L^p}$$

i.e

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}$$

■

Théorème 1.2.3 (Fischer-Riesz) *L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve.

1. Traitons d'abord le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Étant donné un entier $k \geq 1$ il existe N_k tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} < \frac{1}{k} \qquad pour \qquad m, n \geq N_k$$

Ceci implique qu'il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash E_k \qquad \forall m, n \geq N_k \tag{1.5}$$

Enfin, posons $E = \bigcup_k E_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in \Omega \backslash E$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $f_n(x) \to f(x)$ pour $x \in \Omega \backslash E$. En passant à la limite dans (1.5) quand $m \to \infty$ on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash E \qquad \forall n \geq N_k$$

par suite $f \in L^\infty$ et $\|f - f_n\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}$ $\forall n \geq N_k$, et par conséquent $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$

2. Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p. On extrait une sous-suite (f_n) telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1$$

[on procède comme suit : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$ pour $m, n \geq n_1$; on prend ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$ pour $m, n \geq n_2$, etc...]. On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p. Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, de sorte que l'on a

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1 \tag{1.6}$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

il vient

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1$$

Du théorème de la convergence monotone on en déduit que $g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p$. D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| \leq ... \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Il en résulte que p.p. sur Ω, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a p.p. sur Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \qquad pour \quad n \geq 2 \tag{1.7}$$

Il en résulte que $f \in L^p$. Enfin $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$; en effet on a $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ p.p. et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue.
■

1.3 Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p

Dans cette section nous présentons des résultats très importants concernant la réflexivité, la séparabilité et la dualité des espaces L^p, pour cela nous allons distinguer l'étude des trois cas :

- $1 < p < \infty$
- $p = 1$
- $p = \infty$

1.3.1 Étude de L^p pour $1 < p < \infty$

Il s'agit du cas le plus " favorable" : L^p est réflexif séparable et le dual de L^p s'identifie à L^{p^*}

Théorème 1.3.1 *L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$*

Preuve. Pour la démonstration du théorème nous envisageons trois étapes.

Étape 1 (Première inégalité de Clarkson).

Soit $2 \le p < \infty$; on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \le \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f,g \in L^p \tag{1.8}$$

En effet, il suffit de montrer que

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \le \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

On a

$$\alpha^p + \beta^p \le \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{p/2} \quad \forall \alpha, \beta \ge 0$$

se ramener au cas où $\beta = 1$ et noter que la fonction $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, \infty[$. En prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ il vient

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \le \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} = \left(|\frac{a^2}{2}| + |\frac{b^2}{2}|\right)^{p/2} \le \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p$$

cette dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $x \mapsto |x|^{p/2}$ car $p \ge 2$.

Étape 2. L^p **est uniformément convexe, et donc réflexif pour** $2 \le p < \infty$**.**

En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \le 1, \|g\|_{L^p} \le 1 \qquad et \qquad \|f-g\|_{L^p} > \varepsilon$$

On déduit de (1.8) que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad et\ \ donc \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} < 1 - \delta$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0$$

Par conséquent L^p est uniformément convexe, et donc réflexif.

Étape 3. L^p **est réflexif pour** $1 < p \le 2$**.**

Soit $1 < p \le 2$. On considère l'opérateur $T : L^p \to (L^{p^*})^*$ défini comme suit :

Soit $u \in L^p$ fixé ; l'application $f \in L^{p^*} \to \int uf$ est une forme linéaire et continue sur L^{p^*} notée Tu de sorte que

$$< Tu, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^{p^*}.$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$| < Tu, f > | \leq \|u\|_{L^p} \|f\|_{L^{p^*}}$$

et par suite

$$\|Tu\|_{(L^{p^*})^*} \leq \|u\|_{L^p} \tag{1.9}$$

D'autre part, posons

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \;\; (f_0(x) = 0 \;\; si \;\; u(x) = 0).$$

On a $f_0 \in L^{p^*}$, $\|f_0\|_{L^{p^*}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$ et $< Tu, f_0 >= \|u\|_{L^p}^p$.
Donc

$$\|Tu\|_{(L^{p^*})^*} \geq \frac{< Tu, f_0 >}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p} \tag{1.10}$$

et en comparant (1.9) et (1.10) on obtient $\|Tu\|_{(L^{p^*})^*} = \|u\|_{L^p}$. Il en résulte que T est une isométrie de L^p sur un sous-espace fermé (puisque L^p est complet) de $(L^{p^*})^*$. Or L^{p^*} est réflexif (2ème étape) et donc $(L^{p^*})^*$ est réflexif. Il s'en suit que $T(L^p)$ est réflexif et donc aussi L^p. ■

Théorème 1.3.2 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* $\varphi \in (L^p)^*$. *Alors if existe* $u \in L^{p'}$ *unique tel que*

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^p$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p^*}} = \|\varphi\|_{(L^p)^*}$$

Preuve. On définit l'opérateur $T : L^{p^*} \to (L^p)^*$ par

$$< Tu, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^p$$

et l'on a

$$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_{L^{p^*}} \qquad \forall u \in L^{p^*}$$

pour cela on procédera comme dans la démonstration du théorème 1.3.1, 3ème étape, on doit avoir dans ce cas T surjectif. On pose alors $E = T(L^{p^*})$ Comme E est un sous-espace fermé, il reste à montrer que E est dense dans $(L^p)^*$. Soit $h \in (L^p)^{**}$ [$= L^p$ puisque L^p est réflexif] tel que $< Tu, h >= 0$ pour tout $u \in L^{p^*}$; vérifions que $h = 0$. Nous avons

$$\int uh =< Tu, h >= 0 \qquad \forall u \in L^{p^*}$$

On conclut que $h = 0$ en choisissant $u = |h|^{p-2}h$. ■

Remarque 1.3.1 *Le théorème 1.3.2 est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^p avec $1 < p < \infty$ se représente à l'aide d'une fonction de L^{p^*}. L'application $\varphi \mapsto u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^{p^*}. Dans la suite on fera systématiquement l'identification*

$$(L^p)^* = L^{p^*}.$$

Théorème 1.3.3 (Densité) *L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$*

La définition et le lemme suivants sont essentiels pour la preuve de notre théorème de densité.

Définition 1.3.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbb{I}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.*

Lemme 1.3.1 *Soit $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ tel que*

$$\int fu = 0 \qquad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{1.11}$$

Alors $f = 0$ p.p. sur Ω

Preuve. du lemme : On procède en deux étapes :

1. Supposons que l'on ait, de plus, $f \in L^1(\Omega)$ et $|\Omega| < \infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon$. D'après (1.11) on a

$$\left| \int f_1 u \right| \leq \varepsilon \|u\|_{L^\infty} \qquad \forall u \in C_c(\Omega) \tag{1.12}$$

Soient

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in \Omega, \ \ f_1(x) \geq \varepsilon\} \\ K_2 &= \{x \in \Omega, \ \ f_1(x) \leq -\varepsilon\} \end{aligned}$$

Comme K_1 et K_2 sont des compacts disjoints, on peut construire une fonction $u_0 \in C_c(\Omega)$ telle que

$$u_0(x) = \begin{cases} +1, & si \quad x \in K_1 \\ -1, & si \quad x \in K_2 \end{cases}$$

et

$$|u_0(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \Omega$$

Posons $K = K_1 \cup K_2$ il vient

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega\backslash K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

et donc, grâce à (1.12)

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \leq \varepsilon + \int_{\Omega\backslash K} |f_1 u_0| \leq \varepsilon + \int_{\Omega\backslash K} |f_1|$$

Par conséquent

$$\int_\Omega |f_1| = \int_{\Omega\backslash K} |f_1| + \int_K |f_1| \leq \varepsilon + 2\int_{\Omega\backslash K} |f_1| \leq \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$$

puisque

$$|f_1| \leq \varepsilon \quad sur \quad \Omega\backslash K$$

Donc

$$\|f_1\|_{L^1} \leq \|f - f_1\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} \leq \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$ on conclut que $f = 0$ p.p. sur Ω.

2. Considérons maintenant le cas général. On écrit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ avec Ω_n ouvert, $\overline{\Omega}_n$ compact, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ [Prendre par exemple $\Omega_n = \{x \in \Omega; dist(x, \complement\Omega) > \frac{1}{n}$ et $|x| < n\}$]. En appliquant ce qui précède avec Ω_n et $f_{|\Omega_n}$ on voit que $f = 0$ p.p. sur Ω_n et on conclut que $f = 0$ p.p. sur Ω.

■

Preuve. du théorème 1.3.3 : On sait déjà que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Pour prouver que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ il suffit de vérifier que si $h \in L^{p^*}(\Omega)$ satisfait $\int hu = 0$ pour tout $u \in C_c(\Omega)$, alors $h = 0$. Or $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ puisque $\int |h\mathbb{I}_K| \leq \|h\|_{L^{p^*}} |K|^{1/p} < \infty$ et on peut donc appliquer le lemme 1.3.1 pour conclure que $h = 0$ p.p. ■

Théorème 1.3.4 *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Preuve. On désigne par $(R_i)_{i\in I}$ la famille dénombrable de pavés R de la forme

$$R = \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\ \ avec \ \ a_k, b_k \in \mathbb{Q} \ \ et \ \ R \in \Omega.$$

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions $\mathbb{I}_{R_i}$. (i.e. les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des fonctions $\mathbb{I}_{R_i}$), de sorte que E est dénombrable. Montrons que E est dense dans $L^p(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (théorème 1.3.3). Soit Ω' un ouvert borné tel que $Supp f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$, comme $f_1 \in C_c(\Omega')$, on construit aisément une fonction $f_2 \in E$ telle que $Supp f_2 \subset \Omega'$ et que $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ p.p. sur Ω'. On commence par recouvrir $Supp f_1$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'oscillation de f_1 est inférieure à $\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$. Il en résulte que $\|f_2 - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\|_{L^p} < 2\varepsilon$. ■

1.3.2 Étude de L^1

Théorème 1.3.5 *Soit $\varphi \in (L^1)^*$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que*

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^1$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)^*}$$

Preuve. Commençons par prouver l'existence de u. Pour cela, on fixe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, $w \geq \varepsilon_K > 0$ p.p. sur K. Il est clair qu'une telle fonction existe : prendre par exemple $w(x) = \alpha_n$. Pour $x \in \Omega$, $n \leq |x| < n+1$, et ajuster les constantes $\alpha_n > 0$ pour que $w \in L^2(\Omega)$. L'application $f \in L^2 \mapsto < \varphi, wf >$ est une forme linéaire et continue sur L^2. D'après l'application du théorème 1.3.2 avec $p = 2$, il existe une fonction $v \in L^2$ telle que

$$< \varphi, wf >= \int vf \qquad \forall f \in L^2 \tag{1.13}$$

Posons $u(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$; ce qui a un sens puisque $w(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ et u est mesurable. Montrons que $u \in L^\infty$ et que $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. D'après (1.13) on a

$$|\int vf| \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}\|wf\|_{L^1} \qquad \forall f \in L^2 \tag{1.14}$$

Soit $C > \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Montrons que l'ensemble

$$A = \{x \in \Omega;\ \ |u(x)| > C\}$$

est négligeable, il en résultera que $u \in L^\infty$ et que $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Raisonnons par l'absurde.

Si A n'est pas négligeable il existe $\widetilde{A} \subset A$ mesurable tel que $0 < |\widetilde{A}| < \infty$. On reporte dans (1.14) la fonction

$$f(x) = \begin{cases} +1, & si \quad x \in \widetilde{A} \ \ et \ \ u(x) > 0; \\ -1, & si \quad x \in \widetilde{A} \ \ et \ \ u(x) < 0; \\ 0, & si \quad x \in \Omega \backslash \widetilde{A}. \end{cases}$$

II vient $\int_{\widetilde{A}} |u|w \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \int_{\widetilde{A}} w$, et par conséquent $C \int_{\widetilde{A}} w \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \int_{\widetilde{A}} w$, ce qui est absurde puisque $\int_{\widetilde{A}} w > 0$.

Récapitulons : on a construit $u \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$ tel que

$$< \varphi, wf >= \int uwf \qquad \forall f \in L^2 \tag{1.15}$$

Il en résulte que

$$< \varphi, g >= \int ug \qquad \forall g \in C_c(\Omega) \tag{1.16}$$

En effet si $g \in C_c(\Omega)$, alors $f = \frac{g}{w} \in L^2$ (puisque $w \geq \varepsilon > 0$ sur *Supp* g) et on peut reporter f dans (1.15). comme $C_c(\Omega)$ est dense dans L^1 on déduit de (1.16) que

$$< \varphi, g >= \int ug \qquad \forall g \in L^1$$

Enfin, on a

$$| < \varphi, g > | \leq \int |ug| \leq \|u\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \qquad \forall g \in L^1$$

et donc $\|\varphi\|_{(L^1)^*} \leq \|u\|_{L^\infty}$. Par conséquent $\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. L'unicité de u est une conséquence immédiate du lemme 1.3.1. ∎

Remarque 1.3.2 *Le théorème 1.3.5 affirme que toute forme linéaire et continue sur L^1 se représente à l'aide d'une fonction de L^∞. L'application $\varphi \mapsto u$ est une isométrie surjective qui permet d'identifier $(L^1)^*$ et L^∞. Dans la suite on fera systématiquement I'identification*

$$(L^1)^* = L^\infty.$$

Remarque 1.3.3 *L'espace L^1 n'est pas réflexif. En effet, supposons pour fixer les idées que $0 \in \Omega$. Considérons la suite $f_n = \alpha_n \mathbb{I}_{B(0,\frac{1}{n})}$ avec n assez grand pour que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\alpha_n = \left|B(0, \frac{1}{n})\right|^{-1}$ de sorte que $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Si L^1 était réflexif il existerait une sous-suite extraite (f_{n_k}) et une fonction $f \in L^1$ tels que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Donc*

$$\int f_{n_k} \varphi \to \int f\varphi \qquad \forall \varphi \in L^\infty \tag{1.17}$$

Lorsque $\varphi \in C_c(\Omega\backslash\{0\})$ on voit que $\int f_{n_k}\varphi = 0$ pour k assez grand. Il résulte de (1.17) que

$$\int f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \to C_c(\Omega\backslash\{0\})$$

En appliquant le lemme 1.3.1 en considérant l'ouvert $\Omega\backslash\{0\}$ à la fonction f (restreinte à $\Omega\backslash\{0\}$) on obtient que $f = 0$ p.p. sur $\Omega\backslash\{0\}$. Donc en fait $f = 0$ p.p. sur Ω. Par ailleurs si l'on prend $\varphi \equiv 1$ dans (1.17), il vient $\int f = 1$ ce qui est absurde.

1.3.3 Étude de L^∞

Le théorème 1.3.5 nous montre que $L^\infty = (L^1)^*$ et plus encore $L^1(\Omega)$ est séparable. De ce fait, l'espace L^∞ possède quelques propriétés qui méritent d'être soulignées. Entre autres, on a :

- La boule unité fermée B_{L^∞} est compacte pour la topologie faible $*\sigma(L^\infty, L^1)$
- Si (f_n) est une suite bornée dans L^∞ on peut en extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible $*\sigma(L^\infty, L^1)$

Toutefois remarquons que L^∞ n'est pas réflexif.

Comme $L^\infty = (L^1)^*$, on a $L^1 \subset (L^1)^{**} \subset (L^\infty)^*$ et donc le dual de L^∞ contient L^1. De plus, il est strictement plus grand sinon L^1 serait réflexif. Donc il existe des formes φ linéaires et continues sur L^∞ qui ne sont pas du type

$$< \varphi, f >= \int_\Omega \varphi f \qquad \forall f \in L^\infty$$

pour un certain $u \in L^1$. Fabriquons un exemple explicite. Supposons que $0 \in \Omega$ et soit $\varphi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_0(f) = f(0)$, pour $f \in C_c(\Omega)$. Il est clair que φ_0 est une forme linéaire et continue sur $C_c(\Omega)$ pour la norme infinie. D'après le théorème de Hahn-Banach, φ_0 se prolonge en une forme linéaire et continue sur L^∞, notée φ. On a

$$< \varphi, f >= f(0) \qquad \forall f \in C_c(\Omega). \tag{1.18}$$

Supposons qu'il existe une fonction $u \in L^1$ telle que

$$< \varphi, f >= \int_\Omega \varphi f \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Alors, on a

$$\int_\Omega uf = 0 \qquad \forall f \in C_c(\Omega\backslash\{0\}).$$

Ceci entraîne que $u = 0$ p.p. sur $\Omega\backslash\{0\}$, soit $u = 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent,

$$< \varphi, f >= 0 \qquad \forall f \in L^\infty,$$

ce qui est contraire à (1.18).

Théorème 1.3.6 *L'espace L^∞ n'est pas séparable.*

Lemme 1.3.2 *Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que*

i) *Pour tout $i \in I$, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert non vide de E.*

ii) *$\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$ si $i \neq j$*

iii) *I n'est pas dénombrable.*

Alors E n'est pas séparable.

Preuve. du lemme : Raisonnons par l'absurde et supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite dense dans E. Pour chaque $i \in I$, $\mathcal{O}_i \cap (u_n)_{n\in N} \neq \varnothing$ et on choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i$. L'application $i \mapsto n(i)$ est injective ; en effet si $n(i) = n(j)$ alors $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ et donc $i = j$. Par suite I est dénombrable - ce qui est contraire à (iii). ■

Preuve. du théorème : Montrons maintenant que L^∞ n'est pas séparable. Pour tout $a \in \Omega$ on fixe $r_a < dist(a, \complement\Omega)$; on pose $u_a = \mathbb{I}_{B(a,r_a)}$ et

$$\mathcal{O}_a = \{f \in L^\infty; \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}$$

On vérifie aisément que la famille $(\mathcal{O}_a)_{a\in\Omega}$ satisfait (i), (ii) et (iii).

On conclut donc que L^∞ n'est pas séparable. ■

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p.

	Réflexif	**Séparable**	**Espace dual**
L^p $1 < p < \infty$	OUI	OUI	L^{p^*}
L^1	NON	OUI	L^∞
L^∞	NON	NON	Contient strictement L^1

1.4 Convolution et régularisation sur $\mathbb{R}^n$

En présentant dans cette section le produit de convolution et leur propriété, la régularisation et les supports dans la convolution, on prend dans tout ce paragraphe $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.1 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$. On dit que le produit de convolution de f par g existe au point $x \in \mathbb{R}^n$, et dans ce cas on le note $f \star g(x)$, si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ a un sens. Dans ce cas, on pose :*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Proposition 1.4.1 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \star g(x)$ existe, alors $g \star f(x)$ existe aussi et $f \star g(x) = g \star f(x)$.*

Preuve. Supposons que $f \star g(x)$ existe, alors la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy < \infty$.
On pose $\varphi : u \mapsto x - u = y$ qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors par application du théorème de changement de variable à la fonction h définie sur $\mathbb{R}^n$ par $h(y) = f(x-y)g(y)$ on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(\varphi(u))du = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x-u)du.$$

Donc $f \star g(x) = g \star f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ■

Remarque 1.4.1 *Soient f, g et h trois fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a : $[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x)$.*

Théorème 1.4.1 *Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et $f \star g \in L^p$, de plus on a :*

$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

Preuve.

Pour $p = \infty$:

Soient $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$. Montrons que la fonction mesurable $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons, $f \in L^1$ alors $\|f\|_{L^1} = \int_{R^n} |f|dx < \infty$, $g \in L^\infty$ donc $\exists C > 0$ tel que $|g(x)| \leq C$ p.p. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dy.$$

Comme la mesure de Lebesgue est stable par translation, alors $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dy = \|f\|_{L^1}$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \leq C\|f\|_{L^1} < \infty,$$

ce qui donne $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, par suite $f \star g(x)$ existe presque partout.

Montrons l'inégalité :

On a : $|f \star g(x)| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy$,

et on sait que $|g(y)| \leq \|g\|_{L^\infty}$, on obtient alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\|g\|_{L^\infty} dy \\
&\leq \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dy \\
&\leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1},
\end{aligned}$$

et par suite $|f \star g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}$ p.p. Donc $\|f \star g(x)\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}$ par définition de la norme $\|.\|_{L^\infty}$

Pour $p = 1$:

On pose $F(x, y) = f(x-y)g(y)$, alors F est mesurable et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx = |g(y)|\|f\|_{L^1}$$

Comme $f \in L^1$ alors $\|f\|_{L^1} < \infty$, et $g \in L^1$ donc $\lambda(\{g = +\infty\}) < \infty$ par suite $|g(y)|\|f\|_{L^1} < \infty$ p.p. Donc $\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|dy < \infty$ pour presque tout $y \in L^1$.

D'après le théorèmé de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx \\
&= \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1} < \infty,
\end{aligned}$$

et par application du théorème de Tonelli on voit que $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, et par le théorèmé de Fubini nous obtenons $\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|dy < \infty$; donc $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur

$\mathbb{R}^n$ et :

$$\begin{aligned}
\|f \star g\|_{L^1} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \star g(x)| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)| dy \\
&\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Pour $1 < p < \infty$ **:**

Supposons que $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $|g|^p \in L^1$ et par suite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto |f(x-y)|g(y)|^p$ et intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On a : $|f(x-y)||g(y)|^p \in L^1_y$ donc $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^p_y$.

Soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $f \in L^1$ implique que $|f|^{\frac{1}{q}} \in L^q$ d'où $|f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \in L^q_y$ et donc :

$$\begin{aligned}
|f(x-y)||g(y)| &= |f(x-y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}|g(y)| \\
&= |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)||f(x-y)|^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Par utilisation de l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{q}{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x-y)||g(y)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

alors $|f \star g(x)| \leq \left[\left(|f| \star |g|^p(x)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{q}}$ ce qui donne : $|f \star g(x)|^p \leq (|f| \star |g|^p(x)) \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \in L^p$ ainsi $f \star g \in L^p$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f \star g(x)|^p dx &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} (|f| \star |g|^p(x)) dx \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \||g|^p\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \\
&\leq \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

ce qui donne $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. ∎

1.4.1 Supports dans la convolution

La notion de support d'une fonction continue est bien connue : c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle ou encore c'est l'adhérence de l'ensemble

$\{x; f(x) \neq 0\}$. Quand on travaille avec des fonctions mesurables il faut être plus prudent, puisque ces fonctions sont seulement définies presque partout. La définition appropriée est la suivante :

Proposition 1.4.2 (et définition du support) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i\in I}, \omega_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ p.p. sur ω_i. On pose $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, alors $f = 0$ p.p. sur ω et par définition, $Suppf = \Omega \backslash \omega$.*

Preuve. La famille d'indices I est quelconque, pour se ramener au cas dénombrable on procède de la manière suivante :
Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de compacts tels que $\omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} K_i$, on peut prendre :

$$K_i = \{x \in \omega,\ d(x, \mathbb{R}^n \backslash \omega) \geq \frac{1}{i} \ \ et \ \ \|x\| \leq i\}$$

on a $K_i \subset \omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$ puisque K_i est compact il existe $I_i \subset I$ fini tel que $K_i \subset \bigcup_{j\in I_i} \omega_j$.
Posons $J = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ donc J est dénombrable et comme $K_i \subset \bigcup_{j\in I_i} \omega_j$ alors :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in I_i} \omega_j = \bigcup_{j\in\cup_{i\in\mathbb{N}}} \omega_j$$

donc $\omega \subset \bigcup_{j\in J} \omega_j$ et puisque $J \subset I$, alors :

$$\bigcup_{j\in J} \omega_j \subset \omega$$

Comme $f = 0$ p.p. sur ω_j alors $\exists N_j \subset \omega_j$ tel que N_j est négligeable et $\forall x \in N^c$ $f(x) = 0$ on prend $N = \bigcup_{j\in J} N_j$ et on a :

$$\lambda(N) = \lambda(\bigcup_{j\in J} N_j) \leq \sum_{j\in J} \lambda(N_j) = 0$$

donc N est négligeable, et par suite $\exists N \subset \omega$ tel que $\forall x \in N^c$ $f(x) = 0$ donc $f = 0$ p.p. sur ω. ∎

Remarque 1.4.2

1. *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions telles que $f_1 = f_2$ p.p. sur Ω alors $supp(f_1) = supp(f_2)$, on peut donc parler du support d'une fonction $f \in L^p$.*
2. *Si f est continue sur Ω on vérifie facilement que cette définition coïncide avec la définition usuelle.*

Proposition 1.4.3 *Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$. Alors*

$$supp(f \star g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé tel que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ soit intégrable. On peut écrire :

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{S_x} f(x-y)g(y)dy + \int_{S_x^c} f(x-y)g(y)dy\end{aligned}$$

où

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^n,\ y \in supp(g)\ \ et\ \ x - y \in supp(f)\}.$$

Nous avons alors $\int_{S_x^c} f(x-y)g(y)dy = 0$, ce qui donne,

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{S_x} f(x-y)g(y)dy.$$

Si x n'est pas dans $supp(f) + supp(g)$ alors $(x - supp(f)) \cap supp(g) = \emptyset$; sinon $\exists y$ tel que $y \in (x - supp(f))$ et $y \in supp(g)$ donc $x - y \in supp(f)$ et $y \in supp(g)$ et par suite $x = x - y + y \in supp(f) + supp(g)$, ce qui contredit le fait que x n'est pas dans $supp(f) + supp(g)$ et donc $(f \star g)(x) = 0$ p.p. sur $(supp(f) + supp(g))^c$ en particulier sur $int((supp(f) + supp(g))^c) = \overline{supp(f) + supp(g)}^c$ où $int(B)$ est l'interieur de B, et par conséquent $supp(f \star g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$. ■

Remarque 1.4.3 *Bien entendu si f et g sont tous deux à supports compacts, alors $f \star g$ est à support compact. En général, si l'un des supports seulement est compact, alors $f \star g$ n'est pas à support compact.*

Proposition 1.4.4 *Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$f \star g \in C(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Notons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et donc $(f \star g)(x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $x_n \mapsto x$ et posons

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$$

$$F(y) = f(x-y)g(y)$$

de sorte que $F_n(y) \mapsto F(y)$ p.p. sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, soit K un compact fixe tel que $(x_n - Supp f) \subset K$ pour tout n. Donc $f(x_n - y) = 0$ pour y qui n'est pas dans K et par suite $|F_n(y)| \leq \|f\|_{L^\infty} \mathbb{I}_K(y) g(y)$, majorante intégrable. On déduit du théorème de Lebesgue que

$$(f \star g)(x_n) = \int F_n(y)dy \to \int F(y)dy = (f \star g)(x).$$

■

Notations

$C^k(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \bigcap_k C^k(\Omega) \\ C_c^k(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C_c^\infty(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) \end{aligned}$$

Théorème 1.4.2 *Soient $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $(m \in \mathbb{N})$. Alors*

$$f \star g \in C^m(\mathbb{R}^n) \;\; et \;\; D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g \;\; avec \;\; |\alpha| \leq m \; et.$$

En particulier, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et h la fonction définie sur $\beta(x_0, r) \times K'$ par : $h(x,y) = f(x-y)g(y)$ où $K' = \{a - b/a \in \beta_f(0,\eta) \;\; et \;\; b \in K\}$ avec $K = supp f$ alors K' est un compact car $K' = \tau(\beta_f(0,\eta) \times K)$ où τ est l'application continue définie par $\tau(a,b) = a - b$. Pour tout $x \in \beta(x_0, \eta)$, la fonction $y \mapsto h(x,y)$ est intégrable sur K'. Pour presque tout $y \in K'$, $x \mapsto h(x,y)$ est de classe C^m sur $\beta(x_0,\eta)$ et pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq m$, on a pour tout $(x,y) \in \beta(x_0,\eta) \times (K' \backslash N)$ où N est un ensemble négligeable sur lequel g n'est pas définie, on a :

$$\begin{aligned} |D^\alpha h(x,y)| &= |D^\alpha f(x-y) g(y)| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f(z)||g(y)| \\ &\leq \max_{z \in K} |D^\alpha f(z)||g(y)|. \end{aligned}$$

Comme $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $g_{/K'}$ est intégrable et par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction $x \mapsto \int_{K'} h(x,y)dy = f \star g(x)$ admet des dérivées partielles sur $\beta(x_0,\eta)$ et $D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g$ sur $\beta(x_0,\eta)$ pour tout $|\alpha| \leq m$, ce qui donne que $f \star g$ est de classe C^m sur $\beta(x_0,\eta)$ d'où le résultat puisque x_0 et η sont quelconques. En particulier si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

1.4.2 Suites régularisantes

Définition 1.4.2 *On appelle suite régularisante toute suite* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions telles que :*

1. $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $supp\rho_n \subset \beta(0, \frac{1}{n})$
3. $\int \rho_n = 1$
4. $\rho_n \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}^n$

Remarque 1.4.4 *Dorénavant, on utilisera systématiquement* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *pour désigner une suite régularisante.*

Une application sur la suite régularisante est présenté par l'exemple suivant :

Exemple 1.4.1 *Soit* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$u(x) = \begin{cases} exp\frac{1}{x}, & si \;\; x < 0 \\ 0, & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+), u^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})exp\frac{1}{x}$ *si* $x < 0$ *où* P_k *sont des polynômes définies par récurrence :*

$$P_0(x) = 1$$

$$P_{k+1}(x) = -x^2(P_k'(x) + P_k(x)) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

De plus :

$$\lim_{x\to 0^-} u^{(k)}(x) = 0$$

donc $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ *et* $supp(u) = \mathbb{R}^-$. *Posons :*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & si \;\; \|x\| < 1 \\ 0, & si \;\; \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ *et*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \;\; (norme \;\; euclidienne)$$

Alors :

$$\rho : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2 - 1 \in \mathbb{R} \mapsto \rho(x) \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, supp$(\rho) = \beta(0,1)$, $\rho(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ sur $\beta(0,1)$ donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx > 0.$$

Posons alors $c = (\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx)^{-1}$ et prenons $\rho_k(x) = ck^n\rho(kx)$ $k \in \mathbb{N}$; alors $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

Proposition 1.4.5 *Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$ alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. f étant continue sur $\mathbb{R}^n$ elle est uniformément continue sur K d'après le théorème de Heine. Par suite :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in K :\ \|x - y\| < \eta\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

pour $y \in \beta(0,\eta)$ et $x \in K$, on a

$$\|y\| = \|x - y + y\| < \eta \Longrightarrow |f(x - y) - f(y)| < \varepsilon$$

et donc

$$\begin{aligned} |(\rho_n \star f)(x) - f(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x)\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_n(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho_n(y)dy\Big| \\ &= \int_{\beta(0,\frac{1}{n})} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy \end{aligned}$$

Finalement, pour $\varepsilon > 0$ et pour $E(\frac{1}{\eta})$ on a pour tout $n > \frac{1}{\eta} \geq E(\frac{1}{\eta})$ et pour tout $x \in K$ on ait $|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

Théorème 1.4.3 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < 1$. Alors $\rho_n \star f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $\exists f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après la proposition précédente $\rho_n \star f_\varepsilon$ converge uniformément vers f_ε sur tout compact.

D'autre part on a :

$$supp(\rho_n \star f_\varepsilon) \subset \overline{supp(\rho_n) + supp(f_\varepsilon)}$$

et

$$supp(\rho_n) \subset \beta(0, \frac{1}{n})$$

donc

$$supp(\rho_n \star f_\varepsilon) \subset \overline{\beta(0, \frac{1}{n}) + supp(f_\varepsilon)} \subset K$$

où K est un compact fixé. K étant compact donc borné et mesurable donc $\lambda(K) < \infty$ en plus $\rho_n \star f_\varepsilon$ converge uniformément vers f_ε donc :

$$\|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \;\; tend \;\; vers \;\; 0 \;\; avec \;\; \frac{1}{n}$$

On a :

$$\begin{aligned} (\rho_n \star f)(x) - f(x) &= (\rho_n \star f)(x) - (\rho_n \star f_\varepsilon)(x) + (\rho_n \star f_\varepsilon)(x) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x) - f(x) \\ &= \rho_n \star (f - f_\varepsilon)(x) + (\rho_n \star f_\varepsilon)(x) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x) - f(x). \end{aligned}$$

Alors :

$$\|\rho_n \star f - f\|_p \leq \|\rho_n \star (f - f_\varepsilon)\|_p + \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p - \|f_\varepsilon - f\|_p.$$

Or d'après le théorème 1.4.1, nous avons,

$$\|\rho_n \star (f - f_\varepsilon)\|_p \leq \|\rho_n\|_1 \|f - f_\varepsilon\|_p = \|f - f_\varepsilon\|_p$$

d'où,

$$\begin{aligned} \|\rho_n \star f - f\|_p &\leq \|f - f_\varepsilon\|_p + \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p \\ &\leq 2\|f - f_\varepsilon\|_p + \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{3}\|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a $\|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ par suite $\forall n \geq N_\varepsilon$, on a $\|\rho_n \star f - f\|_p < \varepsilon$ c'est-à-dire :

$$\lim_{n \to +\infty} \|\rho_n \star f - f\|_p = 0.$$

∎

Corollaire 1.4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$*

Preuve. Soit $f \in L^p(\Omega)$, montrons qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Posons

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si \;\; x \in \Omega \\ 0, & si \;\; x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

alors $\overline{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Posons $f_n = \rho_n \star \overline{f}$ avec $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est une suite régularisante. D'après le théorème 1.4.2 nous avons $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall n \geq 1$ et en vertu du théorème 1.4.3 la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\overline{f}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, par suite $f_{n/\Omega}$ converge vers $\overline{f}_{/\Omega} = f$ dans $L^p(\Omega)$. Par conséquent $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. ∎

Chapitre 2

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.
Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre. Pour ce faire nous nous basons sur les références suivants [6, 4, 8].

2.1 Définitions et Exemples

Définition 2.1.1 *Soit une fonction $f(t)$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t)$ et sa dérivée $f'(t)$ sont continues (éventuellement par morceaux) sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de $f(t)$, notée $\mathcal{F}(f(t))$ est définie par :*

$$F(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt.$$

Définition 2.1.2 *La transformée inverse de Fourier, notée $\mathcal{F}^{-1}$, telle que si $F(\alpha) = F(f(t))$, alors $f(t)$ est la transformée inverse de $F(\alpha)$. Autrement dit, on a l'équivalence :*

$$F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)).$$

La transformée inverse est définie par :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i2\pi\alpha t} d\alpha.$$

Remarques 2.1.1 *1. La condition $f(t)$ absolument intégrable est une condition suffisante mais non nécessaire, certaines fonctions non absolument intégrables ont tout de même une transformée de Fourier.*

2. Si la fonction $f(t)$ est discontinue en t_0, la transformée de Fourier est définie en considérant les intégrales à gauche et à droite de $f(t)$, par :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{t_0} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt + \int_{t_0}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt.$$

Dans ce cas, la transformée inverse de $F(\alpha)$ coïncide avec $f(t)$ partout sauf en t_0. En ce point particulier la comparaison n'a pas de sens étant donné que $f(t)$ n'est pas définie.

Exemple 2.1.1 *Soit la fonction porte définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq t \leq T; \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{2.1}$$

La transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{0}^{T} e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-i2\pi\alpha t}}{-i2\pi\alpha}\right]_0^T = \frac{e^{-i2\pi\alpha T} - 1}{-i2\pi\alpha} \\ &= T e^{-i\pi\alpha T} sinc(\pi\alpha T). \end{aligned}$$

Où la fonction sinc (pour sinus cardinal) est définie par $sinc(x) = sin(x)/x$, si $x \neq 0$, et $sinc(0) = 1$.

Exemple 2.1.2 *Soit la fonction $f(t)$ définie par : $f(t) = e^{-|t|}$*

La transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-i2\pi\alpha t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-t}e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{t}e^{-i2\pi\alpha t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i2\pi\alpha)}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i2\pi\alpha)}dt \\ &= \left[\frac{e^{t(1-i2\pi\alpha)}}{1-i2\pi\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-t(1+i2\pi\alpha)}}{-(1+i2\pi\alpha)}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2\alpha^2}. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.3 *Montrer que la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac centrée en t_0, notée $\delta_{t_0}(t) = \delta(t-t_0)$ est $F(\alpha) = 1$, pour $t_0 = 0$. La transformée de l'impulsion de Dirac est donnée par :*

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt = e^{-i2\pi\alpha t_0}.$$

On peut en particulier noter que s'il s'agit de l'impulsion centrée en l'origine, la transformée est $F(\alpha) = 1$.

2.2 Cosinus et Sinus- Transformées de Fourier

Définition 2.2.1 *Si la fonction $f(t)$ est réelle et paire, la transformée de Fourier de $f(t)$ est une fonction réelle et paire. On appelle* ***cosinus-transformée de Fourier*** *de f, la fonction :*

$$F(\alpha) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)dt.$$

En effet, en séparant le domaine d'intégration en $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$, il vient en faisant le changement de variable $u = -t$ dans la seconde intégrale ;

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt - \int_{+\infty}^{0} f(-u)e^{i2\pi\alpha u}du \\ &= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\alpha t}dt \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)dt. \end{aligned}$$

La fonction *cosinus* étant paire, on a bien $F(-\alpha) = F(\alpha)$, et de toute évidence $F(\alpha)$ est réelle.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et paire, alors $F(\alpha)$ sera imaginaire et paire.

Définition 2.2.2 *De la même manière si $f(t)$ est réelle et impaire, alors la transformée de Fourier de $f(t)$ est imaginaire et paire. On appelle* ***sinus-transformée de Fourier*** *de f, la fonction :*

$$F(\alpha) = 2i \int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\alpha t)dt.$$

En effet :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\alpha t}dt \\ &= 2i \int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\alpha t)dt. \end{aligned}$$

La fonction *sinus* étant impaire, on a bien $F(-\alpha) = -F(\alpha)$, et $F(\alpha)$ est visiblement imaginaire.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et impaire, alors $F(\alpha)$ sera réelle et paire.

2.3 Propriétés des transformées de Fourier

Quelques propriétés utiles de la transformée de Fourier seront établies dans cette section. Pour cela on considère une fonction $f(t)$ telle que sa transformée de Fourier $F(\alpha)$ existe, et que la transformée de Fourier inverse de $F(\alpha)$ est $f(t)$. Autrement dit :

$$F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) \;\; et \;\; f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)).$$

2.3.1 Linéarité

La transformée de Fourier (et son inverse) est définie par une intégrale. L'intégrale étant linéaire, la transformée de Fourier (et son inverse) est linéaire. Pour tout couple de scalaires α et β, on a :

$$\mathcal{F}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{F}(f(t)) + \beta\mathcal{F}(g(t)).$$

De même pour la transformée inverse, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha f(t)+\beta g(t)) = \alpha\mathcal{F}^{-1}(f(t)) + \beta\mathcal{F}^{-1}(g(t)).$$

2.3.2 Transformée de Fourier de la translation

La transformée de Fourier d'une fonction translatée de a est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-2i\pi\alpha a}\mathcal{F}(f(t)).$$

Preuve. Avec le changement de variable : $u = t - a$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t-a)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\alpha(u+a)}du \\
&= e^{-i2\pi\alpha a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)(t)e^{-i2\pi\alpha u}du \\
&= e^{-2i\pi\alpha a}\mathcal{F}(f(t)).
\end{aligned}$$

■

2.3.3 Transformée de Fourier de l'homothétie

La transformée de Fourier d'une fonction dont la variable subit une homothétie de rapport $k > 0$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{k}F(\frac{\alpha}{k}).$$

Preuve. Par le changement de variable : $u = kt$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(kt)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\alpha(\frac{u}{k})}\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\frac{\alpha}{k}u}du \\
&= \frac{1}{k}F(\frac{\alpha}{k}).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.1 *Pour un rapport k négatif, nous avons :* $\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{|k|}F(\frac{\alpha}{k})$

2.3.4 Conjugaison

La transformée de Fourier du conjugué d'une fonction $f(t)$ est :

$$\mathcal{F}(\overline{f(t)}) = \overline{F(-\alpha)}.$$

Le conjugué d'un produit étant le produit des conjugués, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\overline{f(t)}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\alpha t} dt} \\ &= \overline{F(-\alpha)}.\end{aligned}$$

2.3.5 Transformée de Fourier d'une fonction modulée

La transformée de Fourier d'un signal $f(t)$ modulé par $e^{2i\pi\alpha_0 t}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi\alpha_0 t} f(t)) = F(\alpha - \alpha_0).$$

Cette propriété se montre en reconnaissant la transformée de Fourier de $f(t)$ où α est remplacé par $\alpha - \alpha_0$.

2.3.6 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

La transformée de Fourier de la dérivée $f'(t)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = 2i\pi\alpha F(\alpha).$$

Preuve. Pour établir ce résultat, il faut intégrer par parties l'intégrale définissant la transformée de Fourier de la dérivée :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = \Big[f(t)e^{-2i\pi\alpha t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi\alpha f(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt. \tag{2.2}$$

La fonction $f(t)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, cela implique que sa limite est nulle pour $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$. De ce fait, le premier terme du membre de droite de (2.2) est nul, et il vient :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = 2i\pi\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt = 2i\pi\alpha F(\alpha).$$

■

Généralisation : Ce résultat se généralise pour les dérivées successives de $f(t)$ à condition qu'elle vérifient les conditions d'existence de la transformée de Fourier. En effet, on démontre facilement par récurrence que :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) = (2i\pi\alpha)^n F(\alpha).$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles. En particulier, si on considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n où $y(t)$ est inconnue et où le terme forcé est $u(t)$:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t).$$

La transformée de Fourier étant linéaire, la transformée de Fourier de cette équation est un polynôme d'ordre n en α :

$$a_n (2i\pi\alpha)^n Y(\alpha) + a_{n-1}(2i\pi\alpha)^{n-1} Y(\alpha) + ... + a_1 2i\pi Y(\alpha) = U(t).$$

Il est alors facile de déduire $Y(\alpha)$ et d'en déduire, à l'aide d'une transformée inverse, la solution $y(t)$ de l'équation différentielle.

2.3.7 Dérivation de la transformée de Fourier

La dérivation de $F(\alpha)$ par rapport à la variable α donne :

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = F(-2i\pi t f(t)).$$

Il suffit de dériver sous le signe d'intégration la transformée de Fourier.
Ce résultat se généralise aux dérivées successives de $F(\alpha)$ par :

$$\frac{d^n F(\alpha)}{d\alpha^n} = F((-2i\pi t)^n f(t)).$$

2.3.8 Convolution

Définition 2.3.1 (Produit de convolution) . *Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions absolument intégrables. Le produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$, noté $f(t) \star g(t)$ est défini par :*

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Il est évident que le produit de convolution est linéaire en $f(t)$ et en $g(t)$, car il est défini par une intégrale.
La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit usuel des transformées de Fourier de chaque fonction :

$$\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t)).$$

Preuve. Ce résultat se prouve par des changements de variable successifs, dans un premier temps on pose $u = t - \tau$, ensuite on fait $v = t - u$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-2i\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)e^{-2i\pi\alpha(t-u+u)}dudt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(u)e^{-2i\pi\alpha(v+u)}dudv \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-2i\pi\alpha v}dv\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-2i\pi\alpha u}du\Big) \\
&= \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t)).
\end{aligned}$$

■

On peut démontrer de manière analogue que la transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions est le produit de convolution des transformées de chaque fonction :

$$\mathcal{F}(f(t)g(t)) = \mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}(g(t)).$$

2.4 Théorème de Parseval-Plancherel

De manière similaire on montre au cas des séries de Fourier, l'énergie d'un signal temporel est égale à l'énergie de sa transformée de Fourier. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de Parseval.

Théorème 2.4.1 *Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie et $F(\alpha)$ sa transformée de Fourier, également à énergie finie. Les fonctions $f(t)$ et $F(\alpha)$ ont la même énergie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Preuve. Pour prouver ce résultat, on peut commencer par remarquer, la valeur particulière de $F(\alpha)$ quand $\alpha = 0$:

$$F(\alpha = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

En considérant la fonction $f(t)\overline{f(t)}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t)}dt = \Big[\mathcal{F}\Big(f(t)\overline{f(t)}\Big)\Big]_{\alpha=0}.$$

On sait que $f(t)\overline{f(t)} = |f(t)|^2$, et on a établi que la transformée d'un produit est le produit de convolution des transformées, et que la transformée du conjugué de $f(t)$ est $\mathcal{F}\Big(\overline{f(t)}\Big) = \overline{F(-\alpha)}$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt &= \Big[\mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}(\overline{f(t)})\Big]_{\alpha=0} \\
&= \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(-(\alpha-\tau))}d\tau\Big]_{\alpha=0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(\tau)}d\tau.
\end{aligned}$$

or $F(\tau)\overline{F(\tau)} = |F(\tau)|^2$, ce qui achève notre preuve. ∎

De façon similaire on peut prouver que pour deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et leurs transformées de Fourier respectives $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$, lorsque les intégrales suivantes sont définies, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha.$$

2.5 Applications

2.5.1 Equations différentielles ordinaires

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la transformant en une équation plus simple. Par exemple, si l'équation du départ est à coéfficients constants, la transformée de Fourier de cette équation est une équation algébrique. La transformation de Fourier est à utiliser lorsque l'équation est posée sur tout $\mathbb{R}$. Si les données de l'équation sont périodiques, on utilise plûtot les séries de Fourier. Si l'équation est posée sur une demi-droite avec conditions initiales pour la solution recherchée, on utilise plûtot la transformation de Laplace.

Pour la résolution des équations différentielles linéaires à coéfficients constants, on utilise les propriétés suivantes de la transformation de Fourier :

Proposition 2.5.1 *Soient* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrables,* $f \longrightarrow^{\mathcal{F}} F$, $g \longrightarrow^{\mathcal{F}} G$ *et* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &\longrightarrow^{\mathcal{F}} (2i\pi\alpha)F(\alpha) \\
\frac{d^2f}{dt^2} &\longrightarrow^{\mathcal{F}} (2i\pi\alpha)^2F(\alpha) = -4\pi^2\alpha^2F(\alpha) \\
\frac{d^3f}{dt^3} &\longrightarrow^{\mathcal{F}} (2i\pi\alpha)^3F(\alpha) = -8i\pi^3\alpha^3F(\alpha) \\
etc...
\end{aligned}$$

Preuve. Utiliser la définition de $\mathcal{F}$ et la formule d'intégration par parties. ■

Lorsque les coéffcients de l'équation différentielle dépendent de t de facon linéaire (voir polynômiale), on utilise également la caractérisation suivante :

Proposition 2.5.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable,* $f \longrightarrow^{\mathcal{F}} F$. *Alors*

$$\begin{aligned}
tf(t) &\longrightarrow^{\mathcal{F}} \frac{i}{2\pi}\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \\
t^2f(t) &\longrightarrow^{\mathcal{F}} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{-1}{(2\pi)^2}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Preuve. Utiliser la définition de $\mathcal{F}$ et la formule $te^{-2i\pi\alpha t} = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{-2i\pi\alpha t})$, et les propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre. ■

Exemple 2.5.1 *Trouver une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$-\frac{d^2f}{dt^2}(t) + f(t) = e^{-t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La transformée de Fourier de l'équation ci-dessus s'écrit

$$4\pi^2\alpha^2F(\alpha) + F(\alpha) = \mathcal{F}(e^{-t^2}),$$

où l'inconnue est $F = \mathcal{F}(f)$. *On en déduit que*

$$F(\alpha) = \frac{1}{1+4\pi^2\alpha^2}\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|})\mathcal{F}(e^{-t^2}),$$

la dernière égalité étant une conséquence de $e^{-|t|} \longrightarrow^{\mathcal{F}} \frac{2}{1+(2\pi\alpha)^2}$ *(voir l'exemple (2.1.2)). Donc*

$$F = \frac{1}{2}\mathcal{F}\Big(e^{-|t|} \star e^{-t^2}\Big) \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\Big(e^{-|t|} \star e^{-t^2}\Big),$$

puisque $\mathcal{F}$ *est injective.*

Exemple 2.5.2 *À l'aide de la transformation de Fourier trouver une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre deux suivante :*

$$(E) \qquad y'' + 2\pi t y' + 4\pi y = 0 \tag{2.3}$$

Supposons que $Y(\alpha)$ *est la transformée de Fourier de* $y(t)$. *Alors La transformée de Fourier de l'équation (2.3) s'écrit*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((E)) = 0 \;&\Leftrightarrow\; (2i\pi\alpha)^2 Y(\alpha) + 4\pi Y(\alpha) + 2\pi\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)\Big[2i\pi\alpha Y(\alpha)\Big]' = 0\\
&\Leftrightarrow\; Y(\alpha)\Big[-4\pi^2\alpha^2 + 2\pi\Big] - 2\pi\alpha Y'(\alpha) = 0\\
&\Leftrightarrow\; -\alpha Y'(\alpha) + (-2\pi\alpha^2 + 1)Y(\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation différentielle est linéaire sans second membre. La solution est

$$Y(\alpha) = k\alpha e^{-\pi\alpha^2} \Longrightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(\alpha)) = k'(e^{-\pi t^2})' = k'' t e^{-\pi t^2}.$$

2.5.2 Equations différentielles aux dérivées partielles

Equation de la chaleur

Transformer par rapport à x l'équation de la chaleur suivante,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\,; \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_0 \in L^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{2.4}$$

En effet :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(t,x))$$

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)(t,x) = (2i\pi\alpha)^2\mathcal{F}(u(t,x)).$$

Alors la transformée de Fourier de l'équation (2.4) s'écrit

$$\partial_t\mathcal{F}(u(t,x)) - (2i\pi\alpha)^2\mathcal{F}(u(t,x)) = 0,$$

est une équation du première ordre en t l'on sait intégrer

$$\partial_t \mathcal{F}(u(t,x)) = (2i\pi\alpha)^2 \mathcal{F}(u(t,x))$$

$$\ln \mathcal{F}(u(t,x)) = (2i\pi\alpha)^2 t + c$$

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = k e^{(2i\pi\alpha)^2 t},$$

on a :

$$\begin{aligned} u(0,x) = u_0(x) &\implies \mathcal{F}(u(0,x)) = \mathcal{F}(u_0(x)) \\ \mathcal{F}(u(0,x)) = k &\implies k = \mathcal{F}(u_0(x)), \end{aligned}$$

par suite,

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = \mathcal{F}(u_0(x)) e^{(2i\pi\alpha)^2 t}.$$

Remarquons que l'on a :

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = \mathcal{F}(u_0(x) \star f(t)) \qquad \textit{avec} \qquad f(t) = e^{(2i\pi\alpha)^2 t},$$

et par injectivité de la transformée de Fourier on obtient,

$$u(t,x) = u_0(x) \star f(t) = u_0(x) \star e^{-4\pi^2\alpha^2 t}.$$

2.6 Transformée de Fourier des fonctions usuelles

Le tableau suivant présente l'expression des transformées de Fourier pour quelques fonctions usuelles.

$f(t)$	$F(\alpha)$	$f(t)$	$F(\alpha)$
$e^{-at^2},\ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{\pi^2\alpha^2}{a})$	$\Lambda_T(t)$	$T(sinc(\alpha T))^2$
$e^{-a\|t\|},\ a>0$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\alpha^2}$	$sinc(t)$	$\Pi_1(\alpha)$
$e^{-at}u(t),\ a>0$	$\frac{1}{a+2i\pi\alpha}$	$\delta(t-t_0)$	$e^{-2i\pi\alpha t_0}$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|\alpha\|}$	$\delta^{(n)}(t)$	$(2i\pi\alpha)^n$
Π_T	$Tsinc(\alpha T)$	$e^{2i\pi\alpha_0 t}$	$\delta(\alpha-\alpha_0)$

La fonction Π_T est la fonction porte : $\Pi_T(t) = u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})$.
La fonction Λ_T est lafonction triangle : $\Lambda_T(t) = (1-\frac{|t|}{T})u(T-|t|)$.
La fonction *sinc* est la fonction *sinus cardinal* :$t \longrightarrow sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$.

Lecture inversee de la table : Si $F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t))$ et $F \in \mathcal{L}^1$, alors : $\mathcal{F}(F(t)) = f(-\alpha)$ et $\mathcal{F}^{-1}(f(\alpha)) = F(-t)$.

Chapitre 3

Transformation de Laplace

L'intérêt de la transformation de Laplace est d'offrir sensiblement les mêmes propriétés que la transformée de Fourier, mais dans un cadre moins restrictif. Ainsi de nombreuses fonctions dont les transformées de Fourier n'existent pas (car l'intégrale sur un support infini de ces fonctions ne sont pas définies) admettent une transformée de Laplace. Comme on le verra, pour obtenir ce résultat, l'intégrale comprend un terme supplémentaire, tendant vers 0 lorsque $t \to \infty$ afin de forcer la convergence de l'intégrale.

La transformée de Laplace est très utile pour résoudre des équations différentielles. En effet, on s'apercevra qu'une équation différentielle linéaire devient un polynôme. De plus les conditions initiales des problèmes différentiels sont très facilement prises en compte lors de la résolution par transformée de Laplace.

3.1 Définition et transformée inverse

La transformée de Laplace est essentiellement utilisée dans un cadre physique, c'est pourquoi on considère uniquement des signaux dits causaux, c'est à dire nuls pour $t < 0$.

Un grand nombre de fonctions usuelles $f(t)$ non intégrables sur $\mathbb{R}$ croissent moins vite que la fonction exponentielle lorsque $t \to \infty$, autrement dit même si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} f(t)dt$ n'existe pas, l'intégrale suivante est bien définie, pour un réel positif $a > 0$ suffisamment grand :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt.$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier du produit $f(t)e^{-\alpha t}$, avec $\alpha \geq a$ existe. La transformée de Fourier de $f(t)e^{-\alpha t}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(t)e^{-\alpha t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-2i\pi\alpha t}dt.$$

Sachant que $f(t)$ est nulle pour $t < 0$, et en notant $p = \alpha + i\omega = \alpha + i2\pi\alpha$, il vient :

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Définition 3.1.1 (Transformée de Laplace) *La transformée de Laplace de la fonction causale $f(t)$, notée $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ est donnée par :*

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, on peut définir une transformation inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)).$$

Cette transformation inverse est définie comme suit.

Définition 3.1.2 (Transformée inverse de Laplace) *La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ est donnée par :*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

On utilise très peu cette définition mathématique pour calculer des transformées inverses. Dans la plupart des applications on parvient à se ramener à des formes répertoriées dans des tables où sont consignées des fonctions usuelles et leurs transformées de Laplace.

3.2 Propriétés des transformées de Laplace

Une fois établies quelques propriétés pratiques de la transformée de Laplace, on étudiera les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation (respectivement, d'intégration) par rapport au temps t, à la multiplication (respectivement, la division) par la variable p.

3.2.1 Linéarité

De par la linéarité de l'intégration, la transformée de Laplace est linéaire, autrement dit, pour tout couple de fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ telles que leurs transformées de Laplace convergent, et pour tout couple de constantes α et β, on vérifie :

$$\mathcal{L}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha\mathcal{L}(f_1(t)) + \beta\mathcal{L}(f_2(t)).$$

Il en est évidemment de même pour la transformée inverse. Pour tout couple de constantes α et β, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)) = \alpha\mathcal{L}(F_1(p)) + \beta\mathcal{L}(F_2(p)).$$

3.2.2 Translation dans l'espace de départ

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ retardée de τ est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}\mathcal{L}(f(t)) = e^{-p\tau}F(p).$$

Preuve. Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = t - \tau$, $du = dt$, dans le calcul de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-\tau)) &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)}du \\
&= e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du \\
&= e^{-p\tau}F(p).
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Dilatation ou contraction dans l'espace de départ

Pour un réel positif k, on a :

$$\mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right).$$

Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = kt$, $du = kdt$, dans le calcul de la transformée de Laplace.

3.2.4 Transformée de Laplace d'une fonction modulée

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, modulée par e^{-at} est donnée par :

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a).$$

Le terme de modulation étant constant par rapport à la variable d'intégration, on peut le déplacer dans l'intégrale et faire apparaître la transformée de Laplace en $(p+a)$ au lieu de p.

3.2.5 Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

Si on note $f(0)$ la valeur initiale de la fonction $f(t)$, la transformée de Laplace de la dérivée $\frac{df(t)}{dt}$ est donnée par la relation :

$$\mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = pF(p) + f(0).$$

Preuve. Cette relation se prouve en intégrant par parties la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ et en se souvenant que $\Re(p) > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) &= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{df(t)}{dt}\Big)e^{-pt}dt \\
&= \Big[f(t)e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t))e^{-pt}dt \\
&= pF(p) + f(0).
\end{aligned}$$

■

3.2.6 Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^t df(u)du\Big) = \frac{1}{p}F(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation, notons $\widetilde{f}(t)$, la primitive de $f(t)$ nulle en l'origine (i.e. $\frac{d\widetilde{f}(t)}{dt} = f(t)$, et $\widetilde{f}(0) = 0$), en intégrant par parties il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\int_0^t df(u)du\Big) &= \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(t)e^{-pt}dt \\
&= \Big[-f(t)\frac{e^{-pt}}{p}\Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t))e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{p}F(p).
\end{aligned}$$

■

3.2.7 Dérivation de la transformée de Laplace

En dérivant la transformée de Laplace dans l'intégrale, on obtient,

$$\frac{d\mathcal{L}(f(t))}{dp} = \mathcal{L}(-tf(t)).$$

Plus généralement, en dérivant n fois, on a :

$$\frac{d^n\mathcal{L}(f(t))}{dp^n} = \mathcal{L}((-t)^n f(t)).$$

3.2.8 Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction à partir de la relation connue sous le nom de théorème de la valeur initiale.

Théorème 3.2.1 (Théorème de la valeur initiale) . *La valeur en $t = 0$ de $f(t)$ est donnée par :*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to \infty$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$. On a :

$$\lim_{p\to\infty} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = \lim_{p\to\infty} \Big(pF(p) - f(0)\Big),$$

et

$$\lim_{p\to\infty} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = \lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = 0,$$

d'où

$$\lim_{p\to\infty} \Big(pF(p) - f(0)\Big) = 0 \Longrightarrow \lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

■

3.2.9 Théorème de la valeur finale

La valeur finale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction en utilisant la relation connue sous l'appellation de théorème de la valeur finale.

Théorème 3.2.2 (Théorème de la valeur finale) . *La limite pour $t \to \infty$ de la fonction $f(t)$ est donnée par :*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to 0$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) &= \lim_{p\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = [f(t)]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),
\end{aligned}$$

et on trouve,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to \infty} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) &= \lim_{p\to 0} \Big(pF(p) - f(0)\Big) \\
&= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0) \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

■

3.2.10 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions causales $f(t)$ et $g(t)$, noté $f(t) \star g(t)$, est défini par :

$$f(t) \star g(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit usuel des transformées de Laplace des fonctions :

$$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)).$$

Preuve. En effet on peut calculer :

$$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\Big) e^{-pt} dt,$$

en posant le changement de variable $v = t - \tau$ (donc : $dv = dt$), et en séparant les variables des deux intégrales, nous aurons,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau) g(v) e^{-p(v+\tau)} d\tau dv \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} g(v) e^{-pv} dv \\
&= \mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)).
\end{aligned}$$

■

3.3 Applications

3.3.1 Transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $\Gamma(t)$, est définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, \quad si \quad \text{t<0}\,; \\ \\ 1, \quad si \quad \text{t>0}. \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Gamma(t)) &= \int_0^{+\infty} \Gamma(t) e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\
&= \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty}.
\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. Finalement ;

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}.$$

3.3.2 Transformée de Laplace de la fonction *sinus*

La fonction *sinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Donc la transformée de Laplace du *sinus* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t-pt} - e^{-i\omega t-pt}dt \\ &= \frac{1}{2i}\Big[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega-p} + \frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega+p}\Big]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{-1}{2i}\Big[\frac{1}{i\omega-p} + \frac{1}{i\omega+p}\Big] \\ &= \frac{\omega}{\omega^2+p^2}.\end{aligned}$$

3.3.3 Transformée de Laplace de la fonction *cosinus*

Comme pour la fonction *sinus*, la fonction *cosinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Donc la transformée de Laplace du *cosinus* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t-pt} + e^{-i\omega t-pt}dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega-p} - \frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega+p}\Big]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. On obtient donc,

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{i\omega-p} + \frac{1}{i\omega+p}\Big] = \frac{p}{\omega^2+p^2}.$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction sinus donne :

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\cos(\omega t).$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il s'ensuit alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{1}{\omega}(p\mathcal{L}(\sin(\omega t)) - \sin(0)) \\ &= \frac{p}{\omega}\frac{\omega}{\omega^2+p^2} = \frac{p}{\omega^2+p^2}.\end{aligned}$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

3.3.4 Transformée de Laplace de l'exponentielle

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{-at}$ se calcule directement par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{-at}) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}. \end{aligned}$$

3.3.5 Résolution d'équation différentielles avec la transformée de Laplace

Exemple 3.3.1 *On cherche la solution $x(t)$ de l'équation différentielle :*

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 2e^{-2t}, \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0 \quad et \quad x'(0) = 1. \tag{3.2}$$

Prenons la transformée de Laplace de chaque membre de l'égalité. Le terme forcé est une exponentielle, dont on a déjà calculé la transformée de Laplace. Donc la transformée du membre de droite est :

$$\mathcal{L}(2e^{-2t}) = \frac{2}{p+2}.$$

Notons $X(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $x(t)$. Par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x''(t) + 4x'(t) + 3x(t)) &= \mathcal{L}(x''(t)) + 4\mathcal{L}(x'(t)) + 3\mathcal{L}(x(t)) \\ &= p\mathcal{L}(x'(t)) - x'(0) + 4(p\mathcal{L}(x(t)) - x(0)) + 3\mathcal{L}(x(t)) \\ &= p^2X(p) - px(0) - x'(0) + 4pX(p) - 4x(0) + 3X(p) \\ &= (p^2 + 4p + 3)X(p) - 1. \end{aligned}$$

En remarquant que $p^2 + 4p + 3 = (p+1)(p+3)$, on obtient l'équation suivante, donnant l'expression de $X(p)$ en fonction de p :

$$(p^2 + 4p + 3)X(p) - 1 = \frac{2}{p+2}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{2}{(p+2)(p+1)(p+3)} + \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

Une décomposition en éléments simples de chaque fraction rationnelle en p donne :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(p+2)(p+1)(p+3)} &= -\frac{2}{p+2}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+3} \\
\frac{1}{(p+1)(p+3)} &= \frac{\frac{1}{2}}{p+1}-\frac{\frac{1}{2}}{p+3}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, il vient :

$$X(p) = -\frac{2}{p+2}+\frac{\frac{3}{2}}{p+1}+\frac{\frac{1}{2}}{p+3}.$$

Reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$x(t) = -2\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+2}\Big)+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\Big)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+3}\Big).$$

On a déjà établi que la transformée de Laplace de e^{-at} est $1/(p+a)$, la solution est finalement donnée par,

$$x(t) = -2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

On vérifie aisément que la solution trouvée satisfait les conditions initiales (3.2), et est solution de l'équation différentielle (3.1).

Etapes de la résolution d'équations différentielles avec la transformée de Laplace

Cet exemple montre comment résoudre un problème différentiel au moyen de la transformée de Laplace. Cette méthode comporte trois étapes :

- Dans un premier temps on applique la transformée de Laplace au problème posé. Une équation différentielle linéaire à coefficients constants devient alors une simple équation polynomiale en p. Les conditions initiales se traduisent aussi par des termes en puissance de p, sans compliquer notablement la forme de l'équation. Le terme forcé fait apparaître un second membre en p.
- Dans un second temps on résout le problème en p, autrement dit on détermine $X(p)$ qui est la transformée de Laplace de la solution.
- Enfin, il suffit d'effectuer la transformée inverse (ou de consulter des tables) pour obtenir la fonction $x(t)$ solution du problème différentiel.

Malgré la succession des étapes il est souvent moins complexe de résoudre ainsi les équations différentielles linéaires, surtout pour un ordre élevé.

Deuxième partie

Séries d'exercices

Séries d'exercices

Dans cette partie, nous exposons une série d'exercices d'application dans le but d'enrichir le cours.

3.4 Espaces L^p

Exercice 3.4.1 ***Inégalités de Young et de Hölder***

1. *Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit que p et q sont conjugués au sens de Young). Montrer l'inégalité de Young :*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + b^q \frac{1}{q}.$$

   Idée : Considérer la fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p} a^p + b^q \frac{1}{q} - ab$.

2. *Soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$*

   a) *En utilisant l'inégalité de Young, montrer que pour tout $\lambda > 0$*

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu.$$

   b) *Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

   c) *Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = \infty$?*

3. *Soient p et p' dans $[1, +\infty[$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$, alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.*

4. *Montrer que si μ est une mesure finie alors*

$$L^\infty \subset \bigcap_{p\geq 1} L^p.$$

et, pour tout f,

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

5. *Montre que si $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $fg \in L^r$ et*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

6. *Soient p et q dans $[1, +\infty[$ avec $q < p$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si $f \in L^p \cap L^q$, alors $f \in L^r$ pour tout $r \in [q, p]$, et on a :*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^\alpha \|f\|_p^{1-\alpha},$$

ou $\alpha \in [0, 1]$ est définit par $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$.

Exercice 3.4.2 ***Différentiabilité des normes*** $\|.\|_p$

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Montrer que la fonction N : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(t) = \int_\Omega |f(x) + t \cdot g(x)|^p d\mu,$$

est différentiable et que sa dérivée en $t = 0$ est donnée par :

$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) d\mu,$$

où par convention $|f(x)|^{p-2} f(x) = 0$ lorsque $f = 0$.

Exercice 3.4.3 ***Inégalité de Hardy***

Soit $p \in]1, +\infty[$, soit $f \in L^p$. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t) \mathbb{I}_{]0,x[} dt.$$

1. *On suppose que $f \in C_c(]0, +\infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0, +\infty[$).*

   a) *Montrer que $F \in C^1(]0, \infty[) \cap L^p$.*

b) *Montrer que* $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ *pour tout* $x > 0$.

2. *On suppose, dans cette question, que* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in]0, \infty[$. *Montrer que*

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx.$$

3. *Montre que*

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Exercice 3.4.4 ***Relations entre les espaces*** L^p

Soient la mesure de Lebesgue est finie ($\mu(\Omega) < +\infty$) *et* $1 \leq p < +\infty$.

Montrer que si $q \leq p$, *alors* $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. *En particulier, pour* $1 < q < 2 < p < \infty$, *on a :*

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

3.5 Transformation de Fourier

Exercice 3.5.1 *Déterminer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :*

1. $t \mapsto \mathbb{I}_{[-T,T]}(t)$
2. $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$
3. $t \mapsto \exp(\frac{-|t|}{T})$
4. $t \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$

Exercice 3.5.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable et* $\widehat{f}$ *sa transformée de Fourier. Pour tout* $T > 0$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on définit*

$$f_T(t) = \int_{-T}^{T}\Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big)e^{2i\pi tx}\widehat{f}(x)dx.$$

1. *Démontrer que*

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi^2 T}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi T s)}{s^2}(f(t+s) + f(t-s))ds.$$

2. *Calculer la valeur de*

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du.$$

3. *Supposons f bornée. Montrer qu'en tout point $t \in \mathbb{R}$ ou $f(t^+)$ et $f(t^-)$ existent, on a :*

$$\lim_{T \to +\infty} f_T(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Exercice 3.5.3 *Soit l'équation intégrale, pour $0 < a < b$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}. \tag{3.3}$$

Exprimer (3.3) sous forme d'une équation de convolution, déterminer $\widehat{f}(\nu)$ et en déduire $f(t)$.

Exercice 3.5.4 *Soit $f(t) = \exp(-\pi x^2)$. Déterminer $(\widehat{f}(\nu))'$. En déduire une équation différentielle en $\widehat{f}$ que l'on résoudra. [On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) dx = 1$].*

Exercice 3.5.5 *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on note $\widehat{f}$ la transfomée de Fourier définie par*

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (y,x)} dx,$$

ou $(.,.)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dx.$
2. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$

Exercice 3.5.6 *On rappelle que la tronsformée de Fourier de la fonction $f(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ est la fonction*

$$\widehat{f}(\alpha) = \pi(1 - \pi|\alpha|)\mathbb{I}_{[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]}(\alpha).$$

On en déduit par l'égalité de Parseval Plancherel la valeur de l'intégral I avec

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

Exercice 3.5.7 *Résoudre l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ ou $y > 0$, avec $\frac{\partial \phi}{\partial x} \to 0$ et $\phi \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$, $\phi(x,0) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\phi(x,0) = 0$ pour $|x| > 1$. (Utiliser la transformée de Fourier par rapport à x).*

3.6 Transformation de Laplace

Exercice 3.6.1 *Calculer les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :*

1. $f_1(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)]$
2. $f_2(t) = te^{-t}\cos t$
3. $f_3(t) = \cosh at$
4. $f_4(t) = \sinh at$
5. $f_5(t) = t^n$, $n > 1$

Exercice 3.6.2 *Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :*

a) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2+5p+6}$

b) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}$

c) $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$

d) $\mathcal{L}(f) = e^{-\pi p}\frac{p}{p^2+4}$

Exercice 3.6.3 *Résoudre les problèmes aux valeurs initiales :*

1. $y' + y = 1$ *avec* $y(0) = 0$
2. $y'' + 2y' + 5y = 0$ *avec* $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$
3. $y'' + 3y = \sin(t)$ *avec* $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
4. $y''' + 5y'' + 6y = 0$ *avec* $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 7$

Exercice 3.6.4 *Résoudre l'équation intégrale*

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau.$$

Exercice 3.6.5 *En utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales, calculer* $s(t \to 0^+)$ *et* $s(t \to \infty)$ *pour les fonctions suivantes :*

1. $S(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p}$
2. $S(p) = \frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^3+4p}$

Troisième partie

Correction des séries d'exercices

Correction des séries d'exercices

3.7 Espaces L^p

Exercice 3.7.1 ***Inégalités de Young et de Hölder***

1. *Soit* $a, b \geq 0$ *et soit* $p, q \in (1, +\infty)$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. La fonction* $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *définie par* $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + b^q\frac{1}{q} - ab$ *est dérivable et :*

$$\theta'(a) = a^{p-1} - b.$$

Cette dérivée s'annule lorsque $a = b^{\frac{1}{p-1}}$ *, et est négative pour* $a < b^{\frac{1}{p-1}}$ *et positive pour* $a > b^{\frac{1}{p-1}}$ *. On a*

$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = 0.$$

Ainsi $\theta(a) \geq 0$*, i.e.*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. **a)** *Soit* $f \in L^p(\mu)$ *et* $g \in L^q(\mu)$*. D'après la question précédente, pour tout* $\lambda > 0$ *et pour* μ*-presque tout* x *:*

$$|fg|(x) = |\lambda f(x).\frac{g(x)}{\lambda}| \leq \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

Ainsi

$$\int_\Omega |fg|d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q d\mu.$$

b) *Posons*

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q d\mu.$$

La fonction Φ est dérivable et :

$$\Phi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\|f\|_p^p - \lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$

Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1 = \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda \leq \lambda_1$ et positive pour $\lambda \geq \lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1) &= \frac{1}{p}\Big(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\Big)^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\Big(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\Big)^{\frac{-q}{p+q}}\|g\|_q^q. \\ &= \frac{1}{p}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \frac{1}{q}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} = \|f\|_p\|g\|_q.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

c) *Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et*

$$\int_\Omega |fg|d\mu \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f|d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty\|f\|_1$.

3. *Soient $p, p' \in [1, +\infty)$. On suppose $p < p'$. Soit $p < r < p'$. On a*

$$|f|^r = |f|^r\mathbb{I}_{|f|>1} + |f|^r\mathbb{I}_{|f|<1} \leq |f|^{p'}\mathbb{I}_{|f|>1} + |f|^p\mathbb{I}_{|f|<1},$$

il en découle,

$$\int_\Omega |f|^r d\mu \leq \int_\Omega |f|^{p'}d\mu + \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty,$$

donc f appartient à $L^r(\mu)$.

4. *Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty,$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1 d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à l'intersection $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\mu)$. De plus, pour tout p, on a :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \geq \int_{|f|>(\|f\|_\infty-\varepsilon)} |f|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)).$$

Ainsi pour tout p, il vient

$$\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon))^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque

$$\lim_{p\to+\infty} \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon))^{\frac{1}{p}} = 1,$$

il en résulte,

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

Donc finalement $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

5. *Posons $f_1 = f^r$ et $g_1 = g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\Omega)$. Notons que l'identité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Hölder on en déduit,*

$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1 d\mu \leq \Big(\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}} d\mu\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int_\Omega g_1^{\frac{q}{r}} d\mu\Big)^{\frac{r}{q}} = \Big(\int_\Omega f^p d\mu\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int_\Omega g^q d\mu\Big)^{\frac{r}{q}}.$$

Finalement,

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

6. *Si $r = q$ (i.e $\alpha = 1$) ou, $r = p$ (i.e $\alpha = 1$), il n'y a rien à montrer.*

Supposons donc que $q < r < p$, on écrit :

$$|f|^r = |f|^{r\alpha}|f|^{r(1-\alpha)},$$

et par application de l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{q}{r\alpha}$ et $\frac{p}{r(1-\alpha)}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f|^r d\mu &\leq \Big(\int_\Omega \Big(|f|^{r\alpha}\Big)^{\frac{q}{r\alpha}} d\mu\Big)^{\frac{r\alpha}{q}} \Big(\int_\Omega \Big(|f|^{r(1-\alpha)}\Big)^{\frac{p}{r(1-\alpha)}} d\mu\Big)^{\frac{r(1-\alpha)}{p}} \\
&\leq \Big(\int_\Omega |f|^q d\mu\Big)^{\frac{r\alpha}{q}} \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu\Big)^{\frac{r(1-\alpha)}{p}} < +\infty \\
\|f\|_r^r &\leq \|f\|_q^{r\alpha} \|f\|_p^{r(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f \in L^r$ *et* $\|f\|_r \leq \|f\|_q^{\alpha}\|f\|_p^{1-\alpha}$.

Exercice 3.7.2 ***Différentiabilité des normes*** $\|.\|_p$

Soient f *et* g *deux fonctions de* $L^p(\mu)$ *avec* $1 < p < +\infty$. *La fonction* $\varphi(t) = |f(x)+tg(x)|^p$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée vaut*

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(x)+tg(x)+hg(x)|^p - |f(x)+tg(x)|^p}{h}\\ &= p|f(x)+tg(x)|^{p-2}(f(x)+tg(x))g(x),\end{aligned}$$

lorsque $f(x)$ *et* $g(x)$ *ont un sens, c'est-à-dire pour presque tout* x. *De plus, d'après le théorème des accroissements finis, on a*

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)+tg(x)|^p - |f(x)|^p}{t} &= \varphi'(t_0)\\ &= p|f(x)+t_0g(x)|^{p-2}(f(x)+t_0g(x))g(x),\end{aligned}$$

pour un certain t_0 *compris entre* 0 *et* t. *Ainsi pour* $|t| \leq 1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{|f(x)+tg(x)|^p - |f(x)|^p}{t}\right| &= p|f(x)+t_0g(x)|^{p-1}|g(x)|\\ &\leq p(|f(x)|+|g(x)|)^p\\ &\leq 2^{p-1}p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire et de la majoration

$$|g(x)| \leq (|f(x)|+|g(x)|),$$

et où la deuxième inégalité provient de la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ *pour* $p > 1$ *impliquant en particulier :*

$$(\frac{u+v}{2})^p \leq \frac{u^p}{2}+\frac{v^p}{2}$$

. *Il en découle que*

$$t \mapsto \frac{|f(x)+tg(x)|^p - |f(x)|^p}{t}$$

est uniformément bornée par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors de dériver sous le signe somme et

$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p\int_{\Omega}|f(x)|^{p-2}f(x)g(x)d\mu.$$

Exercice 3.7.3 ***(Inégalité de Hardy)***

1. **a)** *On pose* $G(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathbb{I}_{]0,x[}dt$ *pour* $x \in]0, \infty[$. *Comme* f *est continue, la fonction* G *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0, \infty[$ *(et* $G' = f$*). On en déduit que* F *est aussi de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0, \infty[$.

   Comme f *est à support compact dans* $]0, \infty[$, *il existe* $a, A \in]0, \infty[$, $a \leq A$, *t.q.* $f(x) = 0$ *si* $x < a$ *ou* $x > A$. *La fonction* f *est bornée (car continue sur le compact* $[a, A]$ *et nulle en dehors de ce compact), on note* $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a, A]\}$. *On a alors* $|F(x)| \leq \frac{M(A-a)}{x}\mathbb{I}_{]a,\infty[}(x)$ *pour tout* $x \in]0, \infty[$. *On en déduit que* $F \in L^p$ *car* $p > 1$ *(et on aussi* $F \in L^\infty$*).*

   b) *Comme* $xF(x) = G(x)$, *on a bien* $xF'(x) + F(x) = G'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in]0, \infty[$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *En intégrant par parties (entre* F^p *et* 1*) sur* $]0, n[$, *on obtient :*

$$\begin{aligned} \int_0^n F^p(x)dx &= -\int_0^n pF^{p-1}F'(x)xdx + F^p(n)n \\ &= \int_0^n pF^p(x)dx - \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx + F^p(n)n, \end{aligned}$$

   et donc :

$$(p-1)\int_0^n F^p(x)dx = \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx - F^p(n)n.$$

   Comme $0 \leq F^p(n)n \leq \frac{1}{n^{p-1}}M(A-a) \to 0$, *quand* $n \to \infty$*(où* a, A, M *sont définis à la question précédente) et que* $F, f \in L^p$, *on en déduit :*

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx.$$

3. *En utilisant l'inégalité de Hölder (entre* $f \in L^p$ *et* $F^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$ *) on déduit de la précédente inégalité :*

$$\int_0^\infty F^p(x)dx \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p\Big(\int_0^\infty F^p(x)dx\Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

   et donc (comme $F \in L^p$*)* $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Exercice 3.7.4 ***Relations entre les espaces*** L^p

Si $q \leq p$, *alors* $L^p \subset L^q$. *En utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués :* $r = \frac{p}{q}$

et $r' = \frac{p}{p-q}$ *telle que* $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. *Soit* $f \in L^p$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q &= \int_\Omega |f|^q d\mu \\
&= \Big(\int_\Omega |f|^{q\frac{p}{q}} d\mu\Big)^{\frac{q}{p}} \Big(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}} d\mu\Big)^{\frac{p-q}{q}} \\
&= \|f\|_p^q (\mu(\Omega))^{\frac{p-q}{q}},
\end{aligned}$$

ce qui implique : $\|f\|_q \leq \|f\|_p (\mu(\Omega))^{\frac{p-q}{pq}}$.

Si $f \in L^\infty$, *alors*

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega),$$

ce qui signifie : $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}} < \infty$, *(i.e* $f \in L^\infty$*). D'où* $L^\infty \subset L^p$.

En conclusion, pour $1 < q < 2 < p < \infty$: $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

3.8 Transformation de Fourier

Exercice 3.8.1 *1.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbb{I}_{[-T,T]}(t))(\alpha) = \int_{-T}^{T} e^{-2i\pi\alpha t} dt &= \left[\frac{e^{-2i\pi\alpha t}}{-2i\pi\alpha}\right]_{-T}^{T} \\
&= \frac{1}{\pi\alpha} \frac{e^{2i\pi T\alpha} - e^{-2i\pi T\alpha}}{2i} = \frac{\sin(2\pi T\alpha)}{\pi\alpha}.
\end{aligned}$$

2. *On sait que* $\mathbb{I}_{[-T,T]}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi T\alpha)}{\alpha\pi} e^{2i\pi t\alpha} d\alpha$.

   En prenant $T = \frac{1}{2\pi}$, *on a donc*

$$\mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{2i\pi t\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)(-t),$$

   donc $\mathcal{F}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)(t) = \pi\mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(-t)$ *et par parité de* $\mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}$, *on aura donc,*

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)(\alpha) = \pi\mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\alpha).$$

3.

$$\begin{aligned}
F(e^{-|t|/T})(\alpha) &= \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{T} - 2i\pi\alpha t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-t}{T} - 2i\pi\alpha t} dt \\
&= \left[\frac{e^{\frac{t}{T} - 2i\pi\alpha t}}{\frac{1}{T} - 2i\pi\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{\frac{-t}{T} - 2i\pi\alpha t}}{\frac{-1}{T} - 2i\pi\alpha}\right]_{0}^{+\infty},
\end{aligned}$$

   en conséquence,

$$F(e^{-|t|/T})(\alpha) = \frac{T}{1 - 2i\pi T\alpha} + \frac{T}{1 + 2i\pi T\alpha} = \frac{2T}{1 + 4\pi^2 T^2 \alpha^2}.$$

4. On sait que $e^{-|t|/T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2T}{1+4\pi^2T^2\alpha^2} e^{2i\pi t\alpha} d\alpha$. *En prenant* $T = \frac{1}{2\pi}$, *on a alors*

$$e^{-2\alpha|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{2i\pi t\alpha} d\alpha = \mathcal{F}\Big(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\Big)(-t),$$

et, comme $t \mapsto e^{-2\alpha|t|}$ *est paire. On a donc*

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\Big)(\alpha) = e^{-2\pi|\alpha|}.$$

Exercice 3.8.2 *1.* $f_T(t) = \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big) e^{2i\pi tx} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tu} f(u) du dx$. *On peut appliquer le théorème de Fubini car*

$$\int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} \Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big) |f(u)| du dx = T \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du,$$

est fini. On a alors, avec $t - u = s$,

$$f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big) e^{2i\pi(t-u)x} dx\Big) f(u) du = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big) e^{2i\pi sx} dx\Big) f(t-s) ds.$$

Puis

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big) e^{2i\pi sx} dx &= \int_{0}^{T} \Big(1 - \frac{x}{T}\Big) e^{2i\pi sx} dx + \int_{-T}^{0} \Big(1 + \frac{x}{T}\Big) e^{2i\pi sx} dx \\
&= \int_{0}^{T} \Big(1 - \frac{x}{T}\Big) e^{2i\pi sx} dx - \int_{T}^{0} \Big(1 - \frac{x}{T}\Big) e^{-2i\pi sx} dx \\
&= 2 \int_{0}^{T} \Big(1 - \frac{x}{T}\Big) \cos(2\pi sx) dx \\
&= \Big[\Big(1 - \frac{x}{T}\Big) \frac{\sin(2\pi sx)}{\pi s}\Big]_0^T + \frac{1}{T\pi s} \int_0^T \sin(2\pi sx) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 T s^2} \Big[- \cos(2\pi sx)\Big]_0^T = \frac{1 - \cos(2\pi sT)}{2\pi^2 T s^2} = \frac{\sin^2(\pi sT)}{\pi^2 T s^2}.
\end{aligned}$$

On parvient ainsi à

$$f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi sT)}{\pi^2 T s^2} f(t-s) ds.$$

Or avec $s \longrightarrow -s$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^2(\pi sT)}{\pi^2 T s^2} f(t-s) ds &= \int_{+\infty}^{0} \frac{\sin^2(\pi sT)}{\pi^2 T s^2} f(t+s) d(-s) \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi sT)}{\pi^2 T s^2} f(t+s) ds
\end{aligned}$$

et

$$f_T(t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi sT)}{\pi^2 T s^2} (f(t+s) + f(t-s)) ds.$$

2.

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin^2 u}{u^2}du = \left[-\frac{\sin^2 u}{u}\right]_\varepsilon^A + 2\int_\varepsilon^A \frac{\sin u\cos u}{u}du \to_{\varepsilon\to 0, A\to+\infty} \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u)}{u}du,$$

et, avec le changement de variable $t = 2u$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u)}{u}du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad donc \quad I = \frac{\pi}{2}.$$

3. D'après 1) et 2), $f_T(t) - \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} g_T(u,t)du$ où

$$g_T(u,t) = \frac{\sin^2 u}{u^2}\left(f\left(t + \frac{u}{\pi T}\right) + f\left(t - \frac{u}{\pi T}\right) - f(t^+) - f(t^-)\right),$$

$$\lim_{T\to+\infty} g_T(u,t) = 0 \ \ et \ \ |g_T(u,t)| \leq 4M\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

où $M = \sup_I |f|$. Ce qui achèvera notre démonstration grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 3.8.3 *Posons $g_c(t) = \frac{1}{t^2+c^2}$. On a alors $f * g_a = g_b$ donc $\widehat{f}.\widehat{g}_a = \widehat{g}_b$. Grâce aux tables de transformées de Fourier, on a*

$$\widehat{\frac{1}{\pi(1+t^2)}}(\alpha) = e^{-2\pi|\alpha|},$$

d'où

$$\widehat{\frac{1}{c^2(1+t^2)}}(\alpha) = \frac{\pi}{c^2}e^{-2\pi|\alpha|} \quad et \quad \widehat{\frac{1}{c^2\left(1+(\frac{t}{c})^2\right)}}(\alpha) = c.\frac{\pi}{c^2}e^{-2\pi|c\alpha|} = \frac{\pi}{c}e^{-2\pi|c\alpha|}.$$

On a alors $\widehat{f} = \frac{\widehat{g}_b}{\widehat{g}_a} = \frac{a}{b}e^{-2\pi(b-a)|\alpha|}$.

On procède par transformées inverses successives :

$$\frac{a}{b}e^{-2\pi(b-a)|\alpha|} \longrightarrow \frac{a}{b}\frac{1}{\pi\left(1+(\frac{t}{b-a})^2\right)} \times \frac{1}{b-a},$$

d'où

$$f(t) = \frac{a(b-a)}{b}\frac{1}{\pi((b-a)^2+t^2)}.$$

Exercice 3.8.4 *$f'(x) = -2\pi x f(x)$ donc $\mathcal{F}(f') = -2\pi\mathcal{F}(tf(t))$ (existe car $t \mapsto tf(t) \in L^1$). Il vient alors*

$$(2i\pi\alpha)\widehat{f}(\alpha) = -2\pi\frac{1}{-2i\pi}(\widehat{f})'(\alpha).$$

Soit $(\widehat{f})'(\alpha) + 2\pi\alpha\widehat{f}(\alpha) = 0$. *La solution générale de cette équation s'écrit*

$$\widehat{f}(\alpha) = Ke^{-\pi\alpha^2}.$$

Sachant que $K = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx = 1$, *on en déduit*

$$\widehat{f}(\alpha) = e^{-\pi\alpha^2}.$$

Exercice 3.8.5 *1.*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i(x,y)}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x,y)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(y)e^{-2\pi i(x,y)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} dye^{-2\pi i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y-z)}e^{-2\pi i(x,z)}f(y-z)g(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)}f(u)du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)}g(z)dz \\ &= \widehat{f}(x)\widehat{g}(x).\end{aligned}$$

Exercice 3.8.6 *L'égalité de Pareseval Plancherel, nous dit que pour une fonction de carré intégrable, ce qui est le cas pour* $(\frac{sinx}{x})^2$, *on a la formule de conservation de l'énergie :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2d\lambda,$$

il suffit donc de calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2d\lambda = \pi^2 \int_{\frac{-1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} (1-\pi|\lambda|)^2.$$

Pour une intégration de ce type, on doit absolument se débarasser de la valeur absolue, soit en séparant en deux cas, $\lambda > 0$ *et* $\lambda < 0$, *soit comme ici, par un argument de parité. En effet, la fonction* $(1-\pi|\lambda|)^2$ *est paire, donc*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2d\lambda &= 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} (1-\pi\lambda)^2d\lambda = 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} (1-2\pi\lambda+\pi^2\lambda^2)d\lambda \\ &= 2\pi^2\Big[\frac{1}{\pi} - 2\pi\frac{1}{2\pi^2} + \pi^2\frac{1}{3\pi^3}\Big] \\ &= 2\pi^2\Big[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{3\pi}\Big] = \frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

Exercice 3.8.7 *Soit* $\widehat{\phi}(\alpha,y)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx$. *Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}e^{-2i\pi\alpha x}dx=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx\Big)=\frac{\partial^2\widehat{\phi}}{\partial y^2}(\alpha,y).$$

D'autre part, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx$ *peut être intégré par parties*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx &= \Big[\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}\Big]_{-\infty}^{+\infty}+2i\pi\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx\\ &= 2i\pi\alpha\Big[\phi(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}\Big]_{-\infty}^{+\infty}-4\pi^2\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx\\ &= -4\pi^2\alpha^2\widehat{\phi}(x,y).\end{aligned}$$

On a utilisé la condition que ϕ *et sa dérivée partielle par rapport à* x *tendent vers* 0 *quand* $x\to\pm\infty$. *Alors si on prend la transformée de Fourier de l'équation de Laplace, on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\Big)(x,y)e^{-2i\pi\alpha x}dx=0.$$

Soit $\frac{\partial^2\widehat{\phi}}{\partial y^2}(x,y)-4\pi^2\alpha^2\widehat{\phi}(x,y)=0$. *Comme* $\widehat{\phi}\to 0$ *pour* y *grand, la solution est*

$$\widehat{\phi}(\alpha,y)=Ce^{-2\pi|\alpha|y}.$$

On applique alors la condition pour $y=0$

$$\widehat{\phi}(\alpha,0)=C=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,0)e^{-2i\pi\alpha x}dx=\int_{-1}^{1}e^{-2i\pi\alpha x}dx=\frac{e^{2i\pi\alpha}-e^{-2i\pi\alpha}}{2i\pi\alpha}=\frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha}$$

et donc

$$C=\frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha}\qquad et\qquad \widehat{\phi}(\alpha,y)=\frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha}e^{-2\pi|\alpha|y}.$$

Or on a $e^{-2\pi|\alpha|y}=\mathcal{F}\Big(\frac{y}{\pi}\frac{1}{t^2+y^2}\Big)(\alpha)$ *et* $\frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha}=\mathcal{F}(\phi(x,0))(\alpha)$.
On sait que $\mathcal{F}(F).\mathcal{F}(G)=\mathcal{F}(F*G)$ *donc*

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{(x-\tau)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\Big(\arctan\Big(\frac{x-1}{y}\Big)+\arctan\Big(\frac{x+1}{y}\Big)\Big).$$

3.9 Transformation de Laplace

Exercice 3.9.1 *1.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_1)(t) &= \mathcal{L}(\cos^2 t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(1+\cos 2t)e^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{2}\frac{-1}{p(p^2+4)}\Big[e^{-pt}\big(p^2\cos 2t + p^2 - 2p\sin 2t + 4\big)\Big]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2}\frac{-1}{p(p^2+4)}\big(p^2+p^2+4\big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}\right).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_2)(t) &= \mathcal{L}(te^{-t}\cos t) = \int_0^{+\infty} te^{-t}\cos te^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{(p^2+2p+2)^2}\Big[e^{-(p+1)t}\big(p^2t+2p(t+1)+2(t+1)\big)\sin t\\ &\quad -p^3t+p^2(3t+1)+p(4t+2)+2t\Big]_0^{+\infty}\\ &= \frac{p^2+2p}{\big(p^2+2p+2\big)^2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_3)(t) &= \mathcal{L}(\cosh at) = \int_0^{+\infty}\cosh ate^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathcal{L}(e^{at})+\mathcal{L}(e^{-at})\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\Big]\\ &= \frac{p}{p^2-a^2}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_4)(t) &= \mathcal{L}(\sinh at) = \int_0^{+\infty}\sinh ate^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathcal{L}(e^{at})-\mathcal{L}(e^{-at})\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\Big]\\ &= \frac{a}{p^2-a^2}.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_5)(t) &= \mathcal{L}(t^n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt \\
&= \frac{1}{p}\Big[t^n e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt = \frac{n}{p}\mathcal{L}(t^{n-1}) \\
&= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\mathcal{L}(t^{n-2}) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{p^3}\mathcal{L}(t^{n-3}) \\
&\vdots \\
&= \frac{n!}{p^n}\mathcal{L}(1) = \frac{n!}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.9.2 a) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2+5p+6}$. *Par fraction simple on a :*

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{2p+1}{(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} \\
&= \frac{5}{p+3} - \frac{3}{p+2}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{5}{p+3}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{3}{p+2}\Big) \\
&= 5e^{-3t} - 3e^{-2t}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)} = e^{-3p}\left[\frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{p-1}\right] \\
&= e^{-3p}\left[\frac{-p-1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right] \\
&= e^{-3p}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}\right) = u(t-3)\big[e^{t-3} - 1 - (t-3)\big] \\
&= u(t-3)\big[e^{t-3} - t + 2\big].
\end{aligned}$$

c) $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$, *puisque* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$, *alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}\right) &= f(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau d\tau \\
&= \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).
\end{aligned}$$

d) $\mathcal{L}(f) = e^{-\pi p}\frac{p}{p^2+4} = F(p)$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(F(p)) &= u(t-\pi)\cos(2(t-\pi)) \\
&= \begin{cases} 0, & si \ \ 0 \le t \le \pi \\ \\ \cos(2(t-\pi)), & si \ \ \pi < t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 3.9.3 *On note* $\mathcal{L}(y) = Y(p)$

1. $y' + y = 1$ *avec* $y(0) = 0$*, on transforme l'équation différentielle :*

$$\begin{aligned}
pY(p) - y(0) + Y(p) = \mathcal{L}(1) \ &\Rightarrow \ (p+1)Y(p) = \frac{1}{p} \\
&\Rightarrow \ Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} \\
&\Rightarrow \ Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1},
\end{aligned}$$

par la transformée inverse de Laplace on obtient :

$$\mathcal{L}(Y)(p) = y(t) = 1 - e^{-t}.$$

2. $y'' + 2y' + 5y = 0$ *avec* $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$*, on transforme l'équation différentielle :*

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2(pY(p) - py(0)) + 5Y(p) = 0 \\
&\Rightarrow \ p^2Y(p) - 2p + 4 + 2pY(p) - 4 + 5Y(p) = 0 \\
&\Rightarrow \ Y(p)(p^2 + 2p + 5) = 2p \\
&\Rightarrow \ Y(p) = \frac{2p}{p^2+2p+5} = \frac{2p}{p^2+2p+4+1} = \frac{2p+2-2}{(p+1)^2+2^2} \\
&\Rightarrow \ Y(p) = \frac{2(p+1)-2}{(p+1)^2+2^2} = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2+2^2} - \frac{2}{(p+1)^2+2^2}.
\end{aligned}$$

On a donc par la transformée inverse :

$$y(t) = 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t.$$

3. *$y'' + 3y = \sin(t)$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, on transforme l'équation différentielle :*

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 3Y(p) = \mathcal{L}(\sin t)\\
&\Rightarrow\ p^2Y(p) - p - 2 + 3Y(p) = \frac{1}{p^2+1}\\
&\Rightarrow\ Y(p)(p^2+3) = p + 2 + \frac{1}{p^2+1}\\
&\Rightarrow\ Y(p) = \frac{p+2}{p^2+3} + \frac{1}{(p^2+3)(p^2+1)} = \frac{p+3/2}{p^2+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}\\
&\Rightarrow\ Y(p) = \frac{p}{p^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{p^2+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

4. *$y''' + 5y'' + 6y = 0$ avec $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 7$, on transforme l'équation différentielle :*

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ p^3Y(p) - 3p^2 + 2p - 7 + 5\Big(p^2Y(p) - 3p + 2\Big) + 6\Big(pY(p) - 3\Big) = 0\\
&\Rightarrow\ Y(p) = \frac{3p^2+13p+15}{p(p^2+5p+6)} = \frac{3p^2+13p+15}{p(p+2)(p+3)}\\
&\Rightarrow\ Y(p) = \frac{5}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$y(t) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t}.$$

Exercice 3.9.4

$$\begin{aligned}
y(t) &= t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau\\
&= t + y * \sin t.
\end{aligned}$$

Donc par la transformée de Laplace on obtient

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{1}{p^2} + Y(p)\frac{1}{p^2+1}\\
&= \frac{p^2+1}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}.
\end{aligned}$$

Enfin

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3.$$

Exercice 3.9.5 *En utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales, calculer $s(t \to 0^+)$ et $s(t \to \infty)$ pour les fonctions suivantes :*

1. $S(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p}$

   - **Calcul de** $s(t \to 0^+)$ **:**

$$\lim_{t \to 0^+} s(t) = \lim_{p \to \infty} pS(p) = \lim_{p \to \infty} p \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 1.$$

   - **Calcul de** $s(t \to \infty)$ **:** *Avant de calculer $s(t \to \infty)$, il faudrait verifier que les conditions necessaires a cela soient valides :*

$$pS(p) = p \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = p \frac{p^2 + 2p + 4}{p(p+1)(p+2)},$$

   $p.S(p)$ a 3 pôles $(0, -1, -2)$ placés dans le demi-plan gauche du plan complexe. Donc aucun pôle sur l'axe imaginaire (à l'exception du pôle à l'origine), et aucun pôle dans le demi-plan droit. Dans ce cas, on peut calculer $s(t \to \infty)$:

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{p \to 0^+} pS(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 2.$$

2. $S(p) = \frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^3+4p}$

   - **Calcul de** $s(t \to 0^+)$ **:**

$$\lim_{t \to 0^+} s(t) = \lim_{p \to \infty} pS(p) = \lim_{p \to \infty} p \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = \infty. \quad (\textit{ cause de l'implusion})$$

   - **Calcul de** $s(t \to \infty)$ **:** *Avant de calculer $s(t \to \infty)$, il faudrait verifier que les conditions necessaires a cela soient valides :*

$$pS(p) = p \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = p \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p(p^2 + 4)} = p + 2 + \frac{2p}{p^2 + 4}$$

$$\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = \delta(t) + 2 + \sin(2t), \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} s(t) = 0 + 2 + ? = ?. \quad (\textit{ cause du sinus qui varie continuellement})$$

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, 1987.

[2] Walter Rudin. *Functional analysis. International* Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[3] G. Lacombe et P. Massat. *Analyse Fonctionnelle, Exercices corrigés* , Dunod, Paris, 1999 .

[4] Y. Leroyer et P. Tesson . *Mathématiques pour l'ingénieur*, Dunod, Paris, 2009.

[5] J. Saint Raymond . *Cours d'Analyse Réelle 4M003*, Université Pierre et Marie Curie, 2014.

[6] T. Gallouët et R. Herbin, *Mesure, Integration, Probabilites*, July 13, 2009.

[7] I. Chalendar et E. Fricain, *Compléments En Analyse Cours et Exercices*, 2010-2011 .

[8] J. Kellendonk et I. Ben Yaacov, *Analyse Réelle, Notes du cours L3 années 2007, 2009, 2010*, Université Claude Bernard Lyon I.

[9] Ayman Moussa, *Functional Analysis*, Royal University of Phnom Penh, Paris 2015-2016 .

[10] E. Di Benedetto, *Real analysis*, Birkhaüser, Boston, 2002.

[11] Thierry Gallay, *Théorie De La Mesure Et De L'Intégration*, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.