Centre Universitaire Belhadj Bouchaib
Ain Témouchent

Introduction à la topologie

Cours et exercices corrigés

L2 Mathématiques

AMIN BENAISSA CHERIF

Institut des Sciences

Départements Mathématiques et Informatiques

E-mail : amine.banche@gmail.com

Année Universitaire 2016-2017

Avant-propos

Ce polycopié représente le cours de topologie dispensé en L_2 mathématiques fondamentales au premier semestre, au centre universitaire de ain temouchent (Belhadj Bouchaib).

Toutes les remarques et commentaires sont les bienvenus, ces remarques et commentaires nous permettront certainement d'améliorer le contenu ainsi que la présentation de la version finale.

Auteur : A. Benaissa Cherif

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Topologie de la droite réelle

1.1 Les ensembles ouverts

Définition 1.1.1. *Soit A un ensemble de nombres réels. On dit que A est ouvert, si*

$$\text{pour tout } x \in A, \text{ il existe } \varepsilon > 0, \text{ tel que } I(x, \varepsilon) \subset A,$$

où $I(x, \varepsilon)$ est un intervalle ouvert de centre x et de rayon ε.

Exemple 1.1.1. *Un intervalle ouvert $A =]a, b[$ est un ensemble ouvert, car pour tout $x \in]a, b[$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{2} \min(x - a, b - x)$, on a $I(x, \varepsilon) \subset A$.*

Exemple 1.1.2. *Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts.*

Remarque. *Un ensemble A n'est pas ouvert si il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $I(a, \varepsilon) \nsubseteq A$.*

Exemple 1.1.3. *L'ensemble $[a, b[$ n'est pas ouvert, car pour tout $\varepsilon > 0$, $I(a, \varepsilon) \nsubseteq [a, b[$.*

Proposition 1.1.1. *La réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert.*

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors il existe $j \in I$, tel que $x \in A_j$, il existe $\varepsilon_j > 0$, tel que $I(x, \varepsilon_j) \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, d'où $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. $\square$

Proposition 1.1.2. *L'intersection de toute famille finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. Soient $A_1, A_2, .., A_n$ des ensembles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$, alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tel que $x \in A_i$, il existe $\varepsilon_i > 0$, tel que $I(x, \varepsilon_i) \subset A_i$, pour $\varepsilon = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i$, on a

$$I(x, \varepsilon) \subset I(x, \varepsilon_i) \subset A_i, \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., n\},$$

donc $I(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$, d'où $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. □

Remarque. *Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouverte et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermée. Pour s'en convaincre, on retiendra les deux exemples suivants*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[= \{0\} \qquad \textit{et} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] \frac{1}{n+1}, 1 \right[=]0, 1].$$

1.2 Les ensembles fermés

Définition 1.2.1. *Soit A un ensemble de nombres réels. On dit que A est fermé si A^c est un ouvert.*

Exemple 1.2.1. *Un intervalle fermé $[a, b]$ est un ensemble fermé puisque $[a, b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert comme réunion de deux ensembles ouverts.*

Exemple 1.2.2. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé puisque $\mathbb{Z}^c = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ est un ouvert comme réunion infinie d'ensembles ouverts.*

Exemple 1.2.3. *Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont fermés puisque leur complémentaires, respectivement $\emptyset$ et $\mathbb{R}$, sont ouverts.*

Corollaire 1.2.1. *L'intersection de toute famille quelconque de fermés est un fermé.*

Démonstration. Elle se déduit par passage au complémentaire. □

Corollaire 1.2.2. *La réunion de toute famille finie de fermés est un fermée.*

Démonstration. Elle se déduit par passage au complémentaire. □

Chapitre 2

Espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous allons définir le concept de topologie en général, et passer en revue plusieurs moyens de se donner une topologie sur un ensemble X quelconque. Nous introduisons dans ce chapitre les notions importants d'espaces topologiques, l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'un ensemble, ou les applications continues

2.1 Concepts de base en topologie

2.1.1 Définitions d'un topologie et ouvert

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 2.1.1. *Soient X un ensemble non vide et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une topologie définie sur X si les axiomes suivants vérifies :*

(τ_1) *X et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{T}$.*

(τ_2) *toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.*

(τ_3) *toute intersection nie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.*

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie. Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé un espace topologique.

Exemple 2.1.1. *La famille de parties d'un ensemble X, donnée par $\mathcal{T}_g = \{X, \emptyset\}$, est une topologie sur X appelée topologie grossière.*

Exemple 2.1.2. *La famille $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une topologie sur X appelée la topologie discrète.*

Exemple 2.1.3. *Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\emptyset$, $\mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a,b[$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$. Sauf mention contraire, $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette topologie $\mathcal{T}_u$ appelée topologie usuelle.*

Exemple 2.1.4. *Considérons les familles suivantes de parties de $X = \{a, b, c, d, e\}$.*

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

$\mathcal{T}_1$ est une topologie sur X.

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\},$$

$\mathcal{T}_2$ n'est pas une topologie sur X, car $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\} \in \mathcal{T}_2$, mais

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \mathcal{T}_2.$$

Exemple 2.1.5. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, tel que, pour tout $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T})$ est un topologie discrète.*

2.1.2 Voisinage, Fermé

Définition 2.1.2 (Fermé)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle fermé, toute partie de X dont le complémentaire est ouvert.*

Exemple 2.1.6. *Considérons la topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ sur $X = \{a, b, c, d, e\}$. Les fermés de X sont les ensembles*

$$X, \emptyset, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}.$$

Proposition 2.1.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La famille des fermés de X vérifie les propriétés suivantes :*

(F_1) $X, \emptyset$ sont fermés.

(F_2) L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.

(F_3) L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration. Elle se déduit par passage au complémentaire à partir de (τ_1), (τ_2) et (τ_3). □

Définition 2.1.3 (Voisinage)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de X est un voisinage de x si elle contient un ouvert qui contient x.*

Exemple 2.1.7. *Par exemple, dans* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle et* $x \in \mathbb{R}$, $]x-2, x+1]$ *est un voisinage de* x.

Proposition 2.1.2. *Pour qu'une partie d'un espace topologique soit un ouverte, il faut et il suffit qu'il soit voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration.

- Soit $\mathcal{U}$ un ouverte, c'est un voisinage de chacun de ses points.
- Réciproquement, si $\mathcal{U}$ est voisinage de chacun de ses points, alors, pour chaque $x \in \mathcal{U}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ tel que $x \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$. On a donc

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}.$$

  Ce qui montre que $\mathcal{U}$ est ouvert.

□

Notation. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. On note* $\mathcal{V}(x)$ *la famille des voisinages de* x.

Proposition 2.1.3. *Pour tout* $x \in X$, *les familles* $\mathcal{V}(x)$ *de voisinages de* x *vérifient les propriétés suivantes :*

(a) *Pour tout* $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$, *et pour tout* $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)$, *on a* $x \in \mathcal{V}$.

(b) *Pour tout* $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)$ *et tout* $\mathcal{U} \subset X$, *si* $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ *alors* $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(x)$.

(c) *Toute intersection finie de voisinages de* x *est un voisinage de* x.

(d) *Pour tout* $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)$, *il existe* $\mathcal{W} \in \mathcal{V}(x)$ *tel que pour tout* $y \in \mathcal{W}$, *on ait* $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(y)$.

Démonstration.

- On a (a) et (b) sont évidentes.
- Si $(\mathcal{V}_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des voisinages de a alors il existe des ouverts $(\mathcal{U}_i)_{1\leq i\leq n}$ tel que

$$x \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_i, \qquad \text{pour tout } i \in \{1, 2, .., n\}.$$

  On en déduit que $\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{U}_i$ est un ouvert contenant x et contenu dans $\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{V}_i$, d'où $\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{V}_i$ est un voisinage de x .
- Soit $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe un ouvert $\mathcal{U}$ tel que $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, on pose $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, alors $\mathcal{W} \in \mathcal{V}(x)$ et pour tout $y \in \mathcal{W}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(y)$.

□

2.1.3 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

Définition 2.1.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* A *une partie de* X.

1. *L'intérieur de* A *et on note* $\overset{\circ}{A}$ *le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclu dans* A. *Un point* x *est dit intérieur à* A *lorsque* $\in \overset{\circ}{A}$.
2. *L'adhérence de* A *et on note* $\overline{A}$ *le plus petit fermé contenant* A. *Un point* x *est dit adhérent à* A *lorsque* $x \in \overline{A}$.
3. *La frontière de* A *est le complémentaire de l'intérieur de* A *dans l'adhérence de* A, *on la note* $\mathcal{F}r\,(A) = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$. *Un point* x *est dit frontière pour* A *lorsque* $x \in \mathcal{F}r\,(A)$.

Proposition 2.1.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* A *une partie de* X. *On a*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\mathcal{U} \subset A,\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}} \mathcal{U} \qquad et \qquad \overline{A} = \bigcap_{A \subset F,\ F\ \textit{fermé}} F.$$

Exemple 2.1.8. *Considérons la topologie* $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ *sur* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *où les fermés de* X *sont*

$$X,\ \emptyset,\ \{b, c, d, e\},\ \{a, b, e\},\ \{b, e\},\ \{a\}.$$

Par conséquent

$$\overline{\{b\}} = \{b, e\},\ \overline{\{a, c\}} = X,\ \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}.$$

et

$$\{b\}^\circ = \emptyset,\ \{a, c\}^\circ = \{a\},\ \overline{\{b, d\}} = \emptyset.$$

Exemple 2.1.9. *Si* $X = \mathbb{R}$ *est muni de la topologie usuelle et si* $A = [0, 1[$, *alors*

$$A^\circ =]0, 1[, \qquad \overline{A} = [0, 1] \qquad et \qquad \mathcal{F}r\,(A) = \{0, 1\},$$

et nous avons

$$\mathbb{Z}^\circ = \emptyset, \qquad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \qquad et \qquad \mathcal{F}r\,(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Remarque. *Par définition, on a immédiatement les équivalences suivantes*

(i) A *ouvert de* $X \Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = A$.

(ii) A *fermé de* $X \Leftrightarrow \overline{A} = A$.

2.1.4 Point isolé, point d'accumulation

Voici d'autres notions habituellement définies au moyen de voisinages.

Définition 2.1.5. *Soit A une partie de X.*

1. *Un point x de A est dit isolé dans A s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans X tel que*
$$\mathcal{V} \backslash \{x\} \cap A = \emptyset.$$
2. *Un point x de X est dit point d'accumulation de A si tout voisinage de x dans X rencontre A en un point autre que x, c'est-à-dire*
$$\text{pour tout } \mathcal{V} \in \mathcal{V}(x), \qquad \mathcal{V} \backslash \{x\} \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple 2.1.10. *Dans $\mathbb{R}$ on considère l'ensemble $A = \left\{ \dfrac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.*

(i) Le point 1 est un point isolé de A, mais n'est pas point d'accumulation.

(ii) Le point 0 n'appartient pas à A mais il est point d'accumulation de A.

2.1.5 Bases d'ouverts, Bases de voisinages

Les ouverts d'un espace topologique ne sont parfois pas facilement identifiables et il est souvent plus simple de décrire des ensembles particuliers qui vont générer la topologie par union quelconque.

Définition 2.1.6. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts. On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.*

Remarque. *En général, il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.*

Exemple 2.1.11. *Si $\mathbb{R}$ muni de la topologie par $\mathcal{T}_u$. Soit $\mathcal{B} = \{]a, b[\,, a, b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble d'intervalles ouverts, alors $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, par exemple, pour $a \in \mathbb{R},]a, +\infty[\, \in \mathcal{T}_u$ et*
$$]a, +\infty[\, = \bigcup_{m \in \mathbb{N}}]a + m, a + m + 1[\,, \qquad]a + m, a + m + 1[\, \in \mathcal{B}.$$

Proposition 2.1.5. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ une famille d'ouverts. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.*

2. *Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ et tout $x \in \mathcal{U}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset \mathcal{U}$.*

Démonstration.

- Montrons d'abord l'implication ($1 \Rightarrow 2$). Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, alors tout ouvert $\mathcal{U}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I,\ B_i \in \mathcal{B}} B_i.$$

Donc quelque soit $x \in \mathcal{U}$, il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i \subset \mathcal{U}$.

- Montrons maintenant la réciproque ($2 \Rightarrow 1$). Soit $\mathcal{U}$ un ouvert. Alors pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe un ouvert $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathcal{U}$. On a alors,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B_x \subset \mathcal{U}.$$

□

Définition 2.1.7. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, il existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}(x)$ tel que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.*

Exemple 2.1.12. *Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles de la forme*

$$\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[, \qquad n \in \mathbb{N},$$

constitue une base de voisinages du point x.

Proposition 2.1.6. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.*
2. *Pour tout $x \in X$, la famille $\{\mathcal{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{U}\}$ est une base de voisinages de x.*

Démonstration.

- Montrons d'abord l'implication ($1 \Rightarrow 2$). On suppose que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. Soit $x \in X$, et $\mathcal{V}$ un voisinage de x. Alors $\mathcal{V}$ contient un ouvert $\mathcal{U}$ qui contient x. On peut alors écrire $\mathcal{U}$ comme l'union d'éléments de $\mathcal{B}$. Il existe une famille B_i, $i \in I$, d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Mais alors, il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$. Donc,

$$x \in \mathcal{B}_i \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{V}.$$

Donc pour tout $x \in X$, la famille $\{\mathcal{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{U}\}$ est une base de voisinages de x.

- Montrons maintenant l'implication $(2 \Rightarrow 1)$. Supposons que pour tout $x \in X$, la famille $\{\mathcal{U} \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{U}\}$ soit une base de voisinages de x. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X, alors $\mathcal{U}$ est un voisinage de chacun de ses points, donc pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathcal{U}$. Alors,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B_x \subset \mathcal{U}.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

□

2.2 Quelques constructions topologiques

2.2.1 Espaces séparés

La notion d'espace séparé que l'on va définir est très importante dans la suite, car elle assure notamment l'unicité de la limite d'une fonction lorsqu'elle existe.

Définition 2.2.1. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit séparé lorsque, pour tous points distincts x et y de X, il existe des voisinages disjoints $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_y$ de x et y respectivement.*

Exemple 2.2.1. *Sur $X = \{0, 1\}$, la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$ est non séparée puisque le seul ouvert contenant 1 est X et que $0 \in X$.*

Exemple 2.2.2. *Un espace discret est toujours séparé, un espace grossier à au moins deux éléments n'est jamais séparé.*

2.2.2 Topologie plus ou moins fine

Il est naturel de comparer deux topologies données sur un même ensemble.

Définition 2.2.2. *Soient X un ensemble, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur X. La topologie $\mathcal{T}$ est dite plus fine que $\mathcal{T}'$ lorsque $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ et moins fine que $\mathcal{T}'$ lorsque $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.*

Exemple 2.2.3. *La topologie discrète est la topologie la plus fine que l'on peut définir sur un ensemble ; la topologie grossière est la topologie la moins fine.*

2.2.3 Topologie induite

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X.

Définition 2.2.3. *On appelle topologie induite sur A par $\mathcal{T}$ la topologie $\mathcal{T}_A$ définie par*

$$\mathcal{T}_A = \{w \cap A : w \in \mathcal{T}\}.$$

Exemple 2.2.4. *la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie discrète car*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \{n\} =]n-1, n+1[\cap \mathbb{Z}.$$

Comme $]n-1, n+1[$ ouvert dans $\mathbb{R}$, alors $\{n\}$ ouvert de la topologie induite sur $\mathbb{Z}$. Les singletons sont des ouverts de la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ donc celle-ci est bien la topologie discrète sur $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.2.5. *Considérons la topologie*

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ et le sous ensemble $A = \{a, d, e\}$ de X, alors la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A est

$$\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}.$$

Remarque. *D'après la définition, les ouverts de A pour la topologie induite sont les traces sur (intersections avec) A des ouverts de X. Mais les ouverts de A ne sont pas des ouverts dans X en général.*

Notation. *$(A, \mathcal{T}_A)$ est parfois appelé sous-espace topologique de $(X, \mathcal{T})$.*

Proposition 2.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X, on a*

1. *$(F \cap A)_{F \in \mathcal{F}}$ (où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés de X) est la famille des fermés de A pour la topologie induite par celle de X.*
2. *Soit $a \in A$, alors $(V \cap A)_{V \in \mathcal{V}(a)}$ est la famille des voisinages de a dans A pour la topologie induite (où $\mathcal{V}(a)$ est la famille des voisinages de a dans X).*

3. *Si $\mathcal{V}'$ est un base de voisinages de a dans X alors $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}'\}$ est une base de voisinages de a dans A pour la topologie induite.*

Démonstration.

1. F_1 est un fermé de A pour la topologie induite si et seulement si $(F_1)_A^c$ est un ouvert de A pour la topologie induite, i.e. si et seulement si il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tel que $(F_1)_A^c = A \cap \mathcal{U}$. Donc F_1 est un fermé de A pour la topologie induite si et seulement si il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tel que
$$F_1 = A\backslash (A\backslash F_1) = A\backslash (A \cap \mathcal{U}) = A \cap (E\backslash \mathcal{U}).$$
i.e. si et seulement si il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F_1 = F \cap A$.

2. Si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tel que $a \in \mathcal{U} \subset V$. Alors $a \in \mathcal{U} \cap A \subset V \cap A$, et donc $V \cap A$ est un voisinage de a dans A pour la topologie induite. Réciproquement, si V_1 est un voisinage de a dans A pour la topologie induite, alors il existe un ouvert $\mathcal{U} \cap A$ de A (i.e. $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$) tel que $a \in \mathcal{U} \cap A \subset V_1$. Alors $V = \mathcal{U} \cup V_1$ vérifie $a \in \mathcal{U} \subset V$, donc V est un voisinage de a dans X et on a
$$V \cap A = (\mathcal{U} \cup V_1) \cap A = (\mathcal{U} \cap A) \cup (V_1 \cap A) = (\mathcal{U} \cap A) \cup V_1 = V_1.$$

3. Soit $V_1 = V \cap A$ un voisinage de a dans A pour la topologie induite, avec V voisinage de a dans X. Si $\mathcal{V}_1$ est un base de voisinages de a dans X alors il existe $W \in \mathcal{V}_1$ tel que $W \subset V_1$ et donc $W \cap A \subset V_1$. On en déduit que $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}_1\}$ est un base de voisinages de a dans A pour la topologie induite.

□

Proposition 2.2.2. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \in \mathcal{T}$, alors*
$$\mathcal{U} \in \mathcal{T} \quad et \quad \mathcal{U} \subset A \Leftrightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{T}_A.$$

Exemple 2.2.6. *L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert de $[0,2]$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$, car*
$$[0,1[=]-1,1[\cap [0,2] \qquad et \qquad]-1,1[\in \mathcal{T}_u.$$
Noter que $[0,1[$ est aussi un fermé de $[-1,1[$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$ car
$$[0,1[= [0,4] \cap [-1,1[, \qquad avec\ [0,4]\ fermé\ de\ (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u).$$
En revanche, $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Définition 2.2.4 (Partie discrète)**.** *Une partie A de X est dite discrète lorsque la topologie induite sur A est la topologie discrète, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{T}_A = \mathcal{P}(A)$.*

2.3 Continuité dans un espace topologie

Une notion essentielle que l'on définit au moyen d'ouverts est celle de continuité d'une application d'un espace topologique dans un autre.

2.3.1 Continuité en un point

Définition 2.3.1. *Soient X ,Y deux espaces topologiques, $a \in X$ et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue en a si pour tout voisinage W de $f(a)$ dans Y, il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V) \subset W$. Cela s'écrit*

$$\forall W \in \mathcal{T}_Y, \quad f(a) \in W, \quad \exists U \in \mathcal{T}_X, \quad a \in U, \quad f(U) \subset W.$$

De manière équivalente, f est continue en a si pour tout voisinage W de $f(a)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a dans X. Cela s'écrit

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(a)), \qquad f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a).$$

Proposition 2.3.1. *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications. Soit $a \in X$. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Soit W un voisinage de $g(f(a))$ dans Z. Par définition de la continuité de g en $f(a)$, $g^{-1}(W)$ un voisinage de $f(a)$ et par définition de la continuité de f en a, $f^{-1}(g^{-1}(W))$ un voisinage de $g(f(a))$ un voisinage de a, comme $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$, donc $g \circ f$ est continue en a. □

2.3.2 Continuité globale

Définition 2.3.2. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue sur X si elle est continue en chaque point de X.*

Proposition 2.3.2. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de Y, $f^{-1}(\mathcal{U})$*

est un ouvert de X. C'est-à-dire,

$$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y, \qquad f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_X.$$

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Puisque $\mathcal{U}$ est un ouvert de Y, alors $\mathcal{U}$ est voisinage de chacun de ses points. Donc pour tout $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ est voisinage de $f(x)$, donc par définition de la continuité, $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un voisinage de x. Donc $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de X.

($\Longleftarrow$) Soit $x \in X$ et soit $\mathcal{W}$ un voisinage de $f(x)$. Alors $\mathcal{W}$ contient un ouvert $\mathcal{U}$ qui contient $f(x)$. Alors $f^{-1}(\mathcal{W})$ contient $f^{-1}(\mathcal{U})$ qui est un ouvert qui contient x. Donc $f^{-1}(\mathcal{W}))$ est un voisinage de x.

□

Exemple 2.3.1. *Si X est un espace topologie discret, tous les applications de X dans un espace topologique Y sont continues.*

Exemple 2.3.2. *Si $\mathbb{N}$ muni de la toplogie discrète i.e. $\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Alors tous les applications de $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ sont continues.*

Exemple 2.3.3. *Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ est un espace toplogie, tel que*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \emptyset \cup \{A \subset \mathbb{N} : A^c \text{ est fini}\}.$$

Soit $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ une application donnée par $f(x) = \exp(x)$, on a $]1,4[\in \mathcal{T}_u$, mais $f^{-1}(]1,4[) = \{1\} \notin \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{N}$.

Proposition 2.3.3. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et f une application de X dans Y. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. *L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X.*
3. *Pour toute partie A de X, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.*

Démonstration.

- Montrons que l'assertion 1 entraîne l'assertion 3. Soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de Y contenant $f(a)$. $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de X qui contient $a \in \overline{A}$, donc il existe $x \in f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \overline{A}$ et donc $f(x) \in \mathcal{U} \cap f\left(\overline{A}\right)$. Ainsi $\mathcal{U} \cap f\left(\overline{A}\right) \neq \emptyset$, donc $f(a) \in \overline{f(A)}$ et finalement $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

- On montre que l'assertion 3 implique l'assertion 2. Soient B un fermé de F et $A = f^{-1}(B)$. Comme $f(A) \subset B$, on a $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$ et donc $\overline{A} = f^{-1}(B) = A$ et A est fermé.
- On a immédiatement que l'assertion 2 implique l'assertion 1, car

$$\text{pour tout } B \subset F, \qquad \left(f^{-1}(B)\right)_X^C = f^{-1}\left(B_Y^c\right),$$

ce qui termine la preuve. □

2.4 Notion de Connexité

2.4.1 Espaces topologiques connexes

Définition 2.4.1. *On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$.*

Exemple 2.4.1. *Considérons la topologie suivantes sur $X = \{a, b, c, d\}$,*

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e\}\},$$

l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ n'est pas connexe, car l'ensemble $\{e\}$ est ouvert complémentaire l'ensemble $\{c, d, e\}$ est ouvert, alors l'ensemble $\{e\}$ est ouverte et fermée.

Proposition 2.4.1. *Un espace topologique X est connexe si et seulement si X n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.*

Démonstration.

- Si X est connexe, supposons qu'il existe $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux ouverts disjoints de $(X, \mathcal{T})$, tels que $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, alors

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2^c \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2^c,$$

donc $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont des ensembles fermés dans $(X, \mathcal{T})$, contradiction.
- Réciproquement, si X n'est pas connexe, alors il existe deux ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^c$ sont ouverts et fermés, donc X est la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

□

Corollaire 2.4.1. *Un espace topologique X est connexe si et seulement si X n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.*

2.4.2 Ensembles connexes

Définition 2.4.2. *On dit qu'une partie A de X est connexe si $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe ($\mathcal{T}_A$ topologie induite).*

Proposition 2.4.2. *Une partie A de X est connexe si et seulement si l'existence de deux ouverts disjoints $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_1$ de $(X, \mathcal{T})$ tels que $A \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ entraine $A \subset \mathcal{U}_1$ ou $A \subset \mathcal{U}_2$.*

Démonstration. L'existence de $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, ouverts disjoints de $(X, \mathcal{T})$ tels que $A \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, revient à dire que $(A, \mathcal{T}_A)$ admet la partition d'ouverts $\mathcal{U}_1 \cap A, \mathcal{U}_2 \cap A$ (définition de la topologie induite). La partie A est connexe si et seulement si $A = \mathcal{U}_1 \cap A$ ou $A = \mathcal{U}_2 \cap A$. □

Exemple 2.4.2. *Considérons la topologie suivantes sur $X = \{a, b, c, d, e\}$,*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

l'ensemble $A = \{a, c, d\}$ n'est pas connexe, car

$$\{a, c, d\} = \{a\} \cup \{c, d\}.$$

Les ensembles $\{a\}$, $\{c, d\}$ sont des ouverts disjoints et $\{a\} \neq A$, $\{c, d\} \neq A$.

2.4.3 Quelques des propriétés

Théorème 2.4.1. *Soit X un espace topologique. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X. Si pour $i, j \in I$, avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de X tels que

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \qquad \text{et} \qquad \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset.$$

Alors

$$\text{pour tout } i \in I, \qquad A_i \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}.$$

Puisque A_i est connexe, on a

$$A_i \subset \mathcal{U} \qquad \text{ou} \qquad A_i \subset \mathcal{V}, \qquad \text{pour tout } i \in I.$$

Puisque $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, en déduit que

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{U} \qquad \text{ou} \qquad \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{V},$$

c'est à dire

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cap \mathcal{U} = \emptyset \qquad \text{ou} \qquad \bigcup_{i\in I} A_i \cap \mathcal{V} = \emptyset,$$

c'est à dire que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe. □

Corollaire 2.4.2. *Soit X un espace topologique. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X. Si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Corollaire 2.4.3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties connexes de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est connexe.*

Proposition 2.4.3. *Soient X espace topologique et $A \subset X$. Si A est connexe alors $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de X tels que

$$\overline{A} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \qquad \text{et} \qquad \overline{A} \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset.$$

Alors,

$$A \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \qquad \text{et} \qquad A \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset.$$

Supposons que $\overline{A} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Soit $x \in \overline{A} \cap \mathcal{U}$. Alors $\mathcal{U}$ est un voisinage de x et donc $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. De même, si $\overline{A} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, alors $A \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Ce qui contredit le fait que A est connexe. □

Proposition 2.4.4. *Soit A une partie d'un espace topologique X. Si B est une partie connexe de X telle que $A \cap B \neq \emptyset$ et $A^c \cap B \neq \emptyset$ alors $\mathcal{F}_r(A) \cap B \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si

$$\mathcal{F}_r(A) \cap B = B \cap \overline{A} \cap \overline{A^c} = \emptyset,$$

alors $\overline{A}$ et $\overline{A^c}$ sont deux fermés dont l'union contient B et donc l'intersection avec B est vide. Ceci contredit le fait que B est connexe. □

Corollaire 2.4.4. *Soient X un espace topologique connexe et A une partie de X telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$ alors $\mathcal{F}_r(A) \neq \emptyset$.*

Démonstration. C'est la proposition précédente avec $B = X$. □

Théorème 2.4.2 (Connexité sur $\mathbb{R}$). *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes son équivalentes.*

1. *A est connexe.*

2. *A est un intervalle.*

Théorème 2.4.3 (Continuité et connexité)**.** *Soient X,Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que $f(X)$ ne soit pas connexe. Alors il existe $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ ouverts de Y tels que

$$f(X) \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}, \qquad f(X) \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset, \qquad f(X) \subset \mathcal{U} \qquad \text{et} \qquad f(X) \subset \mathcal{V}.$$

Alors, $f^{-1}(\mathcal{U})$ et $f^{-1}(\mathcal{V})$ forment une partition d'ouverts disjoints non vides de X. Ce qui est une contradiction, car X est connexe. □

Corollaire 2.4.5 (Théorème de la valeur intermédiaire)**.** *Soient X un espace topologique connexe et f une application continue de X dans $\mathbb{R}$ alors $f(X)$ est un intervalle.*

2.5 Notion de Compacité

2.5.1 Notions de base

Notation. *I désignera un ensemble quelconque (fini, dénombrable ou indénombrable).*

Définition 2.5.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dira que $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X si pour tout $i \in I, \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$ et que*

$$X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i.$$

Remarque. *On parlera de recouvrement fini (resp. dénombrable, quelconque...) si I est fini (resp. dénombrable, quelconque...).*

2.5.2 Espaces topologiques compacts

Définition 2.5.2 (Borel-Lebesgue)**.** *On dira que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact, si il est vérifier les conditions suivantes*

1. *$(X, \mathcal{T})$ est séparé.*
2. *De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini, c'est-à-dire, si*

$$X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i, \qquad \text{pour tout } i \in I,\ \mathcal{U}_i \in \mathcal{T},$$

alors il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini tel que

$$X = \bigcup_{i \in I_0} \mathcal{U}_i.$$

Par passage au complémentaire on a une définition équivalente avec les fermés que nous donnons ici comme propriété.

Proposition 2.5.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, si il est vérifier les conditions suivantes*

1. *$(X, \mathcal{T})$ est séparé.*
2. *De tout famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermé vérifiant*

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset.$$

on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide, c'est-à-dire, que l'on peut trouver $I_0 \subset I$ de cardinal fini, tel que

$$\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset.$$

Alors $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact.

Démonstration. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une suite de fermé d'intersection vide. Alors, on a

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c = X.$$

$(F_i^c)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X. On peut alors en extraire un recouvrement fini. Soit donc $I_0 \subset I$ de cardinal fini tel que

$$\bigcup_{i \in I_0} F_i^c = X.$$

En repassant au complémentaire, on trouve

$$\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset.$$

□

Exemple 2.5.1. *L'ensemble réel $\mathbb{R}$ muni la topologie usuelle de n'est pas compacte, remarquons que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+2[$, alors $\{]n, n+2[: n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, mais ne contient pas de sous-recouvrement fini.*

Proposition 2.5.2. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute suite décroissante de fermés non vides, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_{n+1} \subset F_n$, $F_n \neq \emptyset$ à une intersection non vide.*

Démonstration. Par contraposée, si $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, il existe $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tels que $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots \cap Fn_k = \emptyset$. Dans ce cas

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots \cap Fn_k = F_{\max\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}} = \emptyset,$$

contredit l'hypothèse. □

2.5.3 Ensemble compacts

Définition 2.5.3. *Une partie A d'un espace topologique sépare $(X, \mathcal{T})$ est dite compacte si $(A, \mathcal{T}_A)$ avec la topologie induite est compact.*

Remarque. *La propriété de Borel-Lebesgue dans $(A, \mathcal{T}_A)$ s'écrit alors avec les ouverts de $(X, \mathcal{T})$,*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \qquad \textit{implique} \qquad \exists J \subset I,\ J \textit{ fini},\ A \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i,$$

et la définition avec les fermés de $(X, \mathcal{T})$,

$$A \cap \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \emptyset \qquad \textit{implique} \qquad \exists J \subset I,\ J \textit{ fini},\ A \cap \left(\bigcap_{i\in J} F_i\right) = \emptyset.$$

Exemple 2.5.2. *L'ensemble vide $\emptyset$ est compact.*

Exemple 2.5.3. *Soit A une partie finie quelconque d'un espace topologique sépare X, c'est-à-dire $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, alors A est compact, car si $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A, alors pour tout a_k, il existe $\mathcal{U}_{i_k}$ tel que $a_k \in \mathcal{U}_{i_k}$. Par conséquent $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{k=n} \mathcal{U}_{i_k}$.*

2.5.4 Quelques des propriétés

Théorème 2.5.1 (Compacts et fermés)**.** *Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.*

Démonstration. Si X est compact, X est en particulier séparé, et toute partie $A \subset X$ est séparée. Il suffit donc de montrer que A satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si A est fermé.

Supposons donc qu'il existe un recouvrement $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de A par des ouverts $\mathcal{U}_i$ de X. Nous déduisons de cela un recouvrement de X

$$X = A_X^c \cup A = A_X^c \cup \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right),$$

qui est un recouvrement de X par des ouverts, car A est fermé. Puisque X est compact, nous pouvons en extraire un recouvrement fini

$$X = A_X^c \cup \mathcal{U}_{i_1} \cup \mathcal{U}_{i_2}, \ldots, \mathcal{U}_{i_n}.$$

Par conséquent,

$$A \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \mathcal{U}_{i_2}, \ldots, \mathcal{U}_{i_n},$$

donc, A vérifie donc la propriété de Borel-Lebesgue. □

Théorème 2.5.2 (Heine, compacité sur $\mathbb{R}$)**.** *Tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Si $b = a$, alors $[a, b]$ est compact.
Supposons $b > a$. Soit $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $[a, b]$.
Soit E l'ensemble des $x \in [a, b]$ pour lesquels il existe $J \subset I$ fini tel que

$$[a, x] \subset \mathcal{U}_i, \qquad i \in J.$$

Soit $c = \sup E$. On va montrer que $c \in E$ et que $c = b$.
Soit $i_c \in I$, tel que $c \in \mathcal{U}_{i_c}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$c \in \,]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\, \subset \mathcal{U}_{i_c}.$$

Par définition de la borne supérieure il existe $x \in \,]c - \varepsilon, c] \cap E$. Donc il existe $J \subset I$ fini tel que

$$[a, x] \subset \mathcal{U}_i, \qquad i \in J.$$

Alors

$$[a, c] \subset \mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_{i_c}, \qquad i \in J.$$

Donc $c \in E$. On montre maintenant que $c = b$. Supposons que $c < b$, soit $d \in \,]c, c + \varepsilon[\, \cap [a, b]$. Alors

$$[a, d] \subset \mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_{i_c}, \qquad i \in J.$$

Ce qui montre que $d \in E$, ce qui est une contradiction. □

Corollaire 2.5.1. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les ensembles fermés et bornés.*

Théorème 2.5.3 (Continuité et compacité)**.** *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

Démonstration. Soient K un compact de $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espace topologique et $f : X \to Y$ une application continue de X dans Y. Soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$ (pour la topologie induite sur $f(K)$). On a donc

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Rappelons que si A et B désignent deux ensembles quelconques de Y alors

$$f^{-}(A \cup B) \subset f^{-}(A) \cup f^{-}(B).$$

Alors

$$K \subset f^{-}(f(k)) \subset f^{-}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-}(\mathcal{U}_i)$$

Mais f étant continue, chaque $i \in I$, $f^{-}(\mathcal{U}_i) \cap K$ est un ouvert de K (pour la topologie induite de X sur K). Comme K est compact, on peut extraire de la famille $(f^{-}(\mathcal{U}_i) \cap K)_{i \in I}$ recouvrement fini de $(f^{-}(\mathcal{U}_i) \cap K)_{i \in I_0}$ (où I_0 est une sous partie finie de I). Comme,

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

alors,

$$\begin{aligned} f(K) &\subset f^{-}\left(\bigcup_{i \in I_0} f(\mathcal{U}_i) \cap K\right) \\ &\subset \bigcup_{i \in I_0} f^{-}(f(\mathcal{U}_i) \cap K) \\ &\subset \bigcup_{i \in I_0} f^{-}(f(\mathcal{U}_i)) \\ &\subset \bigcup_{i \in I_0} f(\mathcal{U}_i). \end{aligned}$$

Et donc, du recouvrement initial de $f(K)$, on a extrait un recouvrement fini, ce qui prouve que $f(K)$ est compact. □

Chapitre 3

Espaces métriques

3.1 Quelques généralités

3.1.1 Définitions, Exemples

La définition suivante généralise la notion de distance dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1 (Espace métrique)**.** *Une espace métrique (X, d) est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes :*

(d_1) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.

(d_2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$, *(symétrie).*

(d_3) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *(inégalité triangulaire).*

Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.

Exemple 3.1.1. *L'application d définir par $d_u(x, y) = |x - y|$, où $x, y \in \mathbb{R}$ est une distance et est appelée la distance usuelle de $\mathbb{R}$.*

Exemple 3.1.2. *L'application δ définir par $\delta(x, y) = |x^3 - y^3|$, $x, y \in \mathbb{R}$, où $x, y \in \mathbb{R}$ est une distance sur $\mathbb{R}$*

Exemple 3.1.3 (Distance discrète)**.** *Soit E un ensemble quelconque. L'application d définie sur $E \times E$ par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq y, \\ 0 & si\ x = y, \end{cases}$$

est une distance appelée distance discrète sur E.

Exemple 3.1.4. *Sur* $\mathbb{R}^n$ *on définit les distances*

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|, \\ d_1(x,y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|^2}, \end{aligned}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$*,* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*.*

Exemple 3.1.5. *Soit* $\mathcal{C}([a,b])$ *l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé* $[a,b]$*. On définit une distance sur l'ensemble* $\mathcal{C}([a,b])$ *de la maniérer suivantes*

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Exemple 3.1.6. *On définit une autre distance sur l'ensemble* $\mathcal{C}([a,b])$ *de la maniérer suivantes*

$$d_1(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

3.1.2 Propriétés de la distance

Proposition 3.1.1. *Pour tous* x, y, z *des points d'un espace métrique* (X,d)*, on a*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

Démonstration. La condition (d_2) que vérifie la distance d nous donne

$$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

En utilisant la symétrie, on obtient

$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) = d(y,z).$$

De ces deux inéquations, on en déduit que

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(,z),$$

ce qui termine la preuve. □

3.1.3 Boule ouverte, Boule fermée

Considérons un espace métrique (X,d).

Définition 3.1.2. *Soient* $a \in X$ *et* $r \in \mathbb{R}^+$*.*

1. *La Boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *est*

$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}.$$

2. *La Boule fermée de centre* a *et de rayon* r *est*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}.$$

3. *La Sphère de centre* a *et de rayon* r *est*

$$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\}.$$

Exemple 3.1.7. *Soit* d *la distance usuelle définit sur* $\mathbb{R}$*, alors pour* $a \in \mathbb{R}$*,* $r \in]0,+\infty[$*, on a*

$$B(a,r) =]a-r, a+r[\qquad \textit{et} \qquad \overline{B}(a,r) = [a-r, a+r].$$

Exemple 3.1.8. *Soit* d *la distance discret définit sur un ensemble* X*, alors pour* $x \in E$*,* $r \in]0,+\infty[$*, on a*

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & si\ r < 1, \\ E & si\ r \geq 1. \end{cases}$$

3.1.4 Parties bornées, fonctions bornées

Dans toute la suite on suppose que (X,d) est un espace métrique.

Définition 3.1.3. *Soit* (X,d) *un espace métrique. On dit qu'une partie* A *de* X *est bornée s'il existe une boule fermée* $\overline{B}(x_0,r)$ *telle que* $A \subset \overline{B}(x_0,r)$*, i.e.*

$$\textit{pour tout } x \in A, \qquad d(x_0,x) \leq r.$$

Définition 3.1.4. *Soit* X *un ensemble et* (Y,d) *un espace métrique. Si* X *est un ensemble on dit qu'une fonction* $f : X \to Y$ *est bornée si son image* $f(X)$ *est bornée.*

3.1.5 Distance entre deux parties, diamètre

Définition 3.1.5. *Soit* (X,d) *un espace métrique. Soit* A *et* B *deux parties de* X *on appelle distance entre* A *et* B *la quantité*

$$d(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}.$$

Exemple 3.1.9. *Soit* d *la distance usuelle définit sur* $\mathbb{R}$*, si on prend* $A = \{0\}$ *et* $B = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$*, alors* $d(A, B) = 0$.

Exemple 3.1.10. *Soit* d *la distance discret définit sur un ensemble* X*, alors pour* $A, B \subset X$*,*

$$d(A, B) = \begin{cases} 1, & si\ A \cap B = \emptyset, \\ 0 & si\ A \cap B \neq \emptyset. \end{cases}$$

Définition 3.1.6. *On appelle diamètre d'une partie* A *de* X *et on note* $\delta(A)$ *la quantité*

$$\delta(A) := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Remarque. *On vérifie immédiatement qu'une partie* A *de* X *est bornée si et seulement si son diamètre est fini.*

Exemple 3.1.11. *Soit* d *la distance usuelle définit sur* $\mathbb{R}$*, pour* $a, b \in \mathbb{R}$*, tel que* $b > a$*, on a*

$$\delta([a, b]) = b - a.$$

3.2 Topologie associée à une distance

Définition 3.2.1. *On appelle ouvert de* (X, d) *toute partie* $\mathcal{U}$ *de* X *qui est vide ou qui vérifie*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \qquad B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}.$$

Remarque. *On vérifie facilement les axiomes* (τ_1) (τ_2) *et* (τ_3)*. Ainsi une distance définit une topologie.*

Proposition 3.2.1. *Une boule ouverte est un ouvert.*

Démonstration. Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de (X, d). Soit $x \in B(x_0, r_0)$. On a $d(x, x_0) < r_0$ et on pose $\rho = \frac{1}{2}(r_0 - d(x, x_0))$. Alors la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans $B(x_0, r_0)$. En effet pour $y \in B(x, \rho)$ on a

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x) + d(x, y) \\ &< d(x_0, x) + \frac{r_0 - d(x, x_0)}{2} \\ &= \frac{r_0 + d(x, x_0)}{2} < r_0. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.1. *Un ouvert de (X,d) est une union quelconque de boules ouvertes.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de (X,d). Pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{U}$, alors

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B(x, r_x) \subset \mathcal{U}.$$

□

Proposition 3.2.2. *Dans un espace métrique (X,d), toute boule fermée est un fermé.*

Démonstration. Soit $\overline{B}(x_0, r_0)$ une boule fermée de (X,d). Il s'agit de montrer que $\left[\overline{B}(x_0, r_0)\right]_X^C$ est un ouvert. Soit $x \notin \overline{B}(x_0, r_0)$. On a $d(x, x_0) > r_0$ et on pose $\rho = \frac{1}{2}(d(x, x_0) - r_0) > 0$. Alors la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans $\left(\overline{B}(x_0, r_0)\right)_X^c$.
En effet pour $y \in B(x, \rho)$, on a

$$\begin{aligned} d(x_0, x) - d(x_0, y) &\leq |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \\ &\leq d(x, y) < \rho, \end{aligned}$$

d'ou l'on tire

$$\begin{aligned} r_0 &< \frac{d(x, x_0) + r_0}{2} \\ &= d(x, x_0) - \frac{d(x, x_0) - r_0}{2} \\ &< d(x_0, y). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité dit explicitement $y \in \left(\overline{B}(x_0, r_0)\right)_X^C$. □

Proposition 3.2.3. *Soient (X,d) un espace m etrique et A une partie de E. On a*

1. $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A.$
2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$

Démonstration.

1. $(\Rightarrow)$ Si $x \in A^\circ$ (qui est un ouvert), il existe un $r > 0$, tel que $B(x, r) \subset A^\circ \subset A$.
   $(\Leftarrow)$ $B(x, r)$ est un ouvert contenu dans A, et donc $B(x, r) \subset A^\circ$. Comme $x \in B(x, r)$, on a $x \in A^\circ$.
2. On a, d'après (1),

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow x \notin \left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \subset A^c \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.4. *Si (X,d) est un espace métrique alors on a*

(i) Tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages

$$\mathcal{V}(x) = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(ii) l'espace métrique (X,d) admet une base d'ouverts donné par

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}, x \in X \right\}.$$

Définition 3.2.2 (Sous-espace métrique)**.** *Si (X,d) est un espace métrique et si $A \subset X$. On dit que le couple (A, d_A) est un sous-espace métrique de (X,d) si $d_A = d_{|A\times A}$ (i.e. pour tout $x, y \in A$ on a $d_A(x,y) = d(x,y)$).*

Il est clair que la restriction d_A de d à $A \times A$ définit une distance sur A. Le lien avec la notion topologique est donnée par

Proposition 3.2.5. *Un sous-espace métrique est un sous-espace topologique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les ouverts de (A, d_A) sont les traces des ouverts de (X,d) et même il suffit de le faire avec les bases d'ouverts que sont les ensembles de boules ouvertes. En fait il est clair que pour $x \in A$ et $r > 0$, on a

$$B_{d_A}(x,r) = B_d(x,r) \cap A.$$

□

3.3 Les suites dans un espace métrique

3.3.1 Suite convergente

Définition 3.3.1 (Suites convergentes)**.** *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X converge dans X s'il existe $x \in X$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$$

c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \quad \textit{implique} \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $x_n \to x$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si elle ne converge pas.

Exemple 3.3.1. *Soit d la distance discret définit sur $\mathbb{R}$.*
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(\mathbb{R}, d)$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n = x.$$

Par exemple, la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans l'espace métrique discrète, mais $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans l'espace métrique usuelle.

Proposition 3.3.1. *La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Démonstration.
Si $x_n \to x_1$ et $x_n \to x_2$, on a

$$0 \leq d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_2).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $d(x_1, x_2) = 0$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$. □

Proposition 3.3.2 (Caractérisation des ensembles à l'aide des suites)**.** *Soient (X, d) un espace m etrique et F une partie de E. On a*

$$\overline{F} = \left\{ x \in E : \exists (x_n)_n \in F \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} x_n = x \right\}.$$

Démonstration.

($\supset$) On considère un x appartenant à l'ensemble de droite. Soit $r > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, x) < r, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

En particulier, $x_{n_0} \in B(x, r) \cap F$, donc $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$, d'où $x \in \overline{F}$.

($\subset$) Soit $x \in \overline{F}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère un $x_n \in F \cap B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$, Alors $(x_n)_n \in F$,

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

□

Corollaire 3.3.1. *Soient (X, d) un espace m etrique et F une partie de E. On a F est un fermé, pour toute suite convergente $(x_n)_n \in F$ on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si x est tel qu'il existe une suite $(x_n)_n \in F$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors $x \in \overline{F} = F$.

($\Leftarrow$) Si $x \in \overline{F}$, il existe une suite $(x_n)_n \in F$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Par conséquent, $x \in F$, et donc $F \subset \overline{F}$. Comme on a toujours $\overline{F} \subset F$, on trouve $\overline{F} = F$, et donc F est fermé.

□

3.3.2 Suites de Cauchy

Définition 3.3.2 (Suites de Cauchy)**.** *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$m, n \geq n_0 \quad \textit{implique} \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.3.3. *Dans un espace métrique (X, d).*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est une suite bornée.*

Exemple 3.3.2. *Soit $X =]0, 1[$ muni de la distance usuelle d_u, alors $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ est une suite de X qui est de Cauchy mais ne converge pas dans X.*

3.4 Notion de densité dans un espace métrique

Définition 3.4.1. *Une partie D d'un espace métrique X est dite dense dans X si $\overline{D} = X$.*

Proposition 3.4.1. *Soit D une partie d'un espace métrique X. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *D est dense dans X.*
2. *Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_n$ dans D qui converge vers x.*
3. *Pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}$ de X, on a $\mathcal{U} \cap D \neq \emptyset$.*

Exemple 3.4.1. *Soit d la distance usuelle définit sur $\mathbb{R}$, alors l'ensemble $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 3.4.2. *On considère pour* $x, y \in \mathbb{R}^m$, $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{i=m} |x_i - y_i|$, *alors l'ensemble* $\mathbb{Q}^m$ *est denses dans* $\mathbb{R}^m$. *En effet, soit* $x \in \mathbb{R}^m$, *comme* $\mathbb{Q}$ *est denses dans* $\mathbb{R}$, *alors, pour tout* $i \in \{1, 2, ..., m\}$, *il existe une suite* $(x_i^n)_n$ *dans* $\mathbb{Q}$ *qui converge vers* x_i *dans* $\mathbb{R}$, *pour* $(x_n)_n = ((x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n))_n \in \mathbb{Q}^m$ *et converge vers* x *dans* $(\mathbb{R}^m, d_1)$.

3.5 Notion de complétude dans un espace métrique

Définition 3.5.1. *Un espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy* X *converge dans* X.

Proposition 3.5.1. *L'espace* $(\mathbb{R}, d_u)$ *est un espace métrique complet.*

Exemple 3.5.1. *Soit* δ *la distance définit sur* $\mathbb{R}$ *par* $\delta(x,y) = |x^3 - y^3|$, *où* $x, y \in \mathbb{R}$.
L'espace $(\mathbb{R}, \delta)$ *est un espace métrique complet.*
En effet, soit $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy pour* δ, *alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_\varepsilon : \delta(x_p, x_q) = \left|x_p^3 - y_p^3\right| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite $(x_n^3)_n$ *est une suite de Cauchy l'espace métrique usuelle qu'est complet, alors, il existe* $y \in \mathbb{R}$, *tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, y) = \lim_{n \to +\infty} \left|x_n^3 - y\right| = 0.$$

Notons $x = \sqrt[3]{y}$, *nous avons*

$$\lim_{n \to +\infty} \delta(x_n, x) = \lim_{n \to +\infty} \delta(x_n, \sqrt[3]{y}) = \lim_{n \to +\infty} \left|x_n^3 - y\right| = 0.$$

donc $(x_n)_n$ *converge vers* x *pour la distance* δ. *Donc* $\mathbb{R}$ *est complet pour* δ.

3.6 Continuité dans un espace métrique

3.6.1 Application continue

Théorème 3.6.1. *Si* (X, d) *et* (Y, δ) *sont des espaces métriques, soient* $a \in X$ *et* $f : X \to Y$, *alors* f *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\alpha > 0$, *pour* $x \in X$,

$$d(x, a) < \alpha \qquad \text{implique} \qquad \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, on a $f(a) \in B_\delta(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}(f(a))$, alors

$$f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon)) = \{x \in X : f(x) \in B_\delta(f(a), \varepsilon)\} \in \mathcal{V}(a),$$

Comme $\mathcal{B}_d(a) = \{B_d(a, r) : r > 0\}$ une base de voisinages de a, alors il existe $\alpha > 0$, tel que

$$B_d(a, \alpha) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon)),$$

donc, si $x \in B_d(a, \alpha)$ implique $f(x) \in B_\delta(f(a), \varepsilon)$, c'est-à-dire

$$d(x, a) < \alpha \qquad \text{implique} \qquad \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(f(a))$, comme $\mathcal{B}_\delta(f(a)) = \{B_\delta(f(a), r) : r > 0\}$ une base de voisinages de $f(a)$, alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B_\delta(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, par l'hypothèse, en déduire qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$B_d(a, \alpha) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon)),$$

alors

$$B_d(a, \alpha) \subset f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{V}(a),$$

d'où f est continue au point a.

$\square$

3.6.2 Application uniformément continue

Définition 3.6.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite uniformément continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x et $y \in X$,*

$$d(x, y) \leq \alpha \qquad \textit{implique} \qquad \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.6.1. *Toute application uniformément continue est continue.*

3.6.3 Application Lipschitzienne

Définition 3.6.2. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et k un réel positif. On dit que $f : X \to Y$ est $k-$lipschitzienne si, pour tout x et tout y de X,*

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Lorsque $k < 1$, on dira que f est contractante.

Proposition 3.6.2. *Une application k-lipschitzienne est uniformément continue.*

Exemple 3.6.1. *Soit δ la distance définit sur $\mathbb{R}$ par $\delta(x,y) = |x^3 - y^3|$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $f : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, d_u)$, $x \to f(x) = x^3$, où d_u la distance usuelle, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$d_u(f(x), f(y)) = \delta(x,y).$$

Alors f est Lpschitzienne.
Pour $k > 0$, on choisit $x_k = k$, $y_k = k+1$, on a

$$d_u(f(x_k), f(y_k)) = 3k^2 + 3k + 1 \qquad \textit{et} \qquad d_u(x_k, y_k) = 1,$$

Remarquons que

$$d_u(f(x_k), f(y_k)) > k d_u(x_k, y_k).$$

Si $f : (\mathbb{R}, d_u) \to (\mathbb{R}, d_u)$, alors f n'est pas Lipschitzienne.

3.7 Théorème du point fixe

Théorème 3.7.1 (Picard)**.** *Soit (X,d) un espace métrique complet. Si l'application $f : X \to X$ est une application contractante*

$$\forall x, y \in X \qquad d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y), \qquad \alpha < 1,$$

lors elle admet un unique point $x \in X$, tel que $f(x) = x$.
De plus toute suite récurrente donnée par

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \textit{et} \qquad x_0 \in X,$$

est converge vers x et nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(x_n, x) \leq \alpha^n d(x_0, x).$$

Démonstration.

1. Unicités : Supposons que x_1, $x_2 \in X$ soient deux points fixes de f. On a alors

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2).$$

L'inégalité $(1-\alpha) d(x_1, x_2) \leq 0$ avec $\alpha < 1$ entraine $x_1 = x_2$.

2. Existence : On va construire x par une méthode d'approximation successive. On considère une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in X$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a en supposant $n > m$,
$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{k=n-1} d(x_{k+1}, x_k).$$
La propriété de contraction avec $\alpha < 1$ donne
$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(f(x_k), f(x_{k-1})) \\ &\leq \alpha d(x_k, x_{k-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{k-1}), x_{k-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{k-2}, x_{k-3}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^k d(x_1, x_0). \end{aligned}$$
Puis
$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=m}^{k=n-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$
Pour $\varepsilon > 0$, on prend $N_\varepsilon > \dfrac{\varepsilon \ln(1-\alpha)}{d(x_1, x_0) \ln \alpha}$, alors
$$\text{pour tout } m, n \geq N_\varepsilon, \qquad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). Elle admet une limite $x \in X$ qui doit vérifier puisque f est continue $f(x) = x$.
3. Convergence : Pour une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ on a
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad d(x_n, x) = d(f(x_{n-1}), f(x)) \leq \alpha^n d(x_0, x),$$
et la convergence vers x.

□

Exemple 3.7.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tel que $k := \sup\left\{\left|f'(x)\right| : x \in \mathbb{R}\right\} < 1$. D'après le théorème des accroissements finis implique*
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \qquad \textit{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$
Comme $(\mathbb{R}, d_u)$ est un espace métrique complet, par le théorème du point fixe implique que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 4

Introduction à l'espace vectoriel normé

Un exemple important d'espace métrique sur lequel nous reviendrons plus loin est le cas des espaces vectoriels normés. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Définitions et exemples

4.1.1 Norme

Définition 4.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur E tout application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(N_1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(N_2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$

(N_3) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Une norme est généralement notée $\|.\|$ et la couple $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé.

Exemple 4.1.1. *Sur $\mathbb{R}^n$ on définit les normes*

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} \{|x_i|\}, \\ \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2}, \end{aligned}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 4.1.2. *On définit une norme sur l'espace vectoriel* $\mathcal{C}([a,b])$ *de la maniérer suivantes*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Définition 4.1.2 (Distance associée à une norme)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. L'application*

$$\begin{aligned} d: \quad & E \times E \to \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) \to d(x,y) = \|x-y\|. \end{aligned}$$

est appelée distance associée à la norme $\|.\|$.

Remarque. *Il est immédiat de vérifier que la distance ainsi définie vérifie bien les propriétés d'une distance.*

Remarque. *Toutes les propriétés des distances données plus haut ont une traduction en termes de norme dans les espaces vectoriels normés.*

4.1.2 Normes équivalentes

Définition 4.1.3 (Normes équivalentes)**.** *Deux normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sur un espace vectoriel* E *sont équivalentes s'il existe des constantes* $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *telles que*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \qquad \text{pour tout } x \in E$$

Exemple 4.1.3. *Sur* $\mathbb{R}^n$, *les normes* $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ *et* $\|x\|_2$ *sont équivalentes. Plus précisément, on a*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

4.1.3 Espaces de Banach

Définition 4.1.4 (Espaces de Banach)**.** *Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est appelé espace de Banach si* E, *muni de la distance canonique associée à* $\|.\|$ *est un espace métrique complet.*

Proposition 4.1.1. *Soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur un espace vectoriel* E *sont équivalentes, alors* $(E, \|.\|_1)$ *est un espace de Banach si et seulement si* $(E, \|.\|_2)$ *est un espace de Banach.*

4.2 Applications linéaires continues

Théorème 4.2.1. *Soient* $(E_1, \|.\|_1)$ *et* $(E_2, \|.\|_2)$ *deux espaces vectoriels normés et* $A : E_1 \to E_2$ *une application linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *A est continue.*

(ii) *A est continue en* 0.

(iii) *Il existe un constante C telle que*

$$\|Ax\|_2 \leq C\,\|x\|_1\,, \qquad \textit{pour tout } x \in E_1.$$

Démonstration.

(i) L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente.

(ii) Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$. Par continuité de A en 0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$A\,(B\,(0,\delta)) \subset B\,(0,1)\,.$$

Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Posons $y = \dfrac{x}{2\delta\,\|x\|_1}$, alors $y \in B\,(0,\delta)$ et par conséquent $Ay \in B\,(0,1)$. Ceci signifie que

$$\|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\delta}\,\|x\|_1\,,$$

Cette inégalité étant également vraie pour $x = 0$, (ii) est vérifié avec $C = \dfrac{2}{\delta}$.

(iii) Supposons que (ii) est vérifié. Alors, pour tous $x, y \in E_1$, on a

$$\begin{aligned}\|A\,(x) - A\,(y)\|_2 &= \|A\,(x-y)\|_2 \\ &\leq C\,\|x-y\|_1\,,\end{aligned}$$

Donc A est lipschitzienne et par conséquent continue. Ceci montre que $(iii) \Rightarrow (i)$.

□

Exemple 4.2.1. *On note* $E = \mathcal{C}\,([0,1]\,,\mathbb{R})$ *muni du norme* $\|.\|_\infty$. *On considère l'application* $A : E \to E$ *donnée par*

$$Af\,(t) = \int_0^t f\,(t)\,dt, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1]\,.$$

L'application A est clairement linéaire, puisque

$$|Af\,(t)| \leq \int_0^1 |f\,(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty\,, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1]\,.$$

Alors $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, *d'où l'application A est continue.*

Deuxième partie

Exercices

A-Énoncés

A.1 Espaces topologiques

Soit X un espace topologique, A, B des sous-ensembles de X, on notera $A^c = X \backslash A$ son complémentaire.

Exercice 1. *Soit l'ensemble $X = \{a, b, c\}$, muni d'une topologie. Montrer que si les singletons $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ sont ouverts dans X, la topologie X est discrète.*

Exercice 2. *Soit X un ensemble non vide. On pose $\mathcal{T} = \{\emptyset, A \subset X \text{ tel que } A^c \text{ est fini}\}$.*

1. *$\mathcal{T}$ est-elle une topologie sur X.*
2. *Si X est fini, quels sont les ensembles fermés pour cette topologie.*

Exercice 3. *Montrer les propriétés suivantes :*

1. *Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. $\overline{A^c} = (A^\circ)^c$, $\quad \left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$, $\quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $\quad A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

Exercice 4. *On dit qu'un point $x \in A$ est intérieur à A si il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ contenant x et inclus dans A. on dit qu'un point $x \in X$ est adhérent à A si tout ouvert $\mathcal{U}$ contenant x rencontre A (c'est à dire $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ pour tout ouvert $\mathcal{U}$ contenant x).*

1. *Montrer que $\overset{\circ}{A} = \{x \in A : x \text{ est intérieur à } A\}$.*
2. *Montrer que $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ est adhérent à } A\}$.*

Exercice 5. *On rappelle que la frontière de A dans X est $\mathcal{F}r\,(A) = \overline{A} \backslash A^\circ$.*

1. *Montrer que $\mathcal{F}r\,(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.*
2. *Montrer que $x \in \mathcal{F}r\,(A) \iff$ pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, $\mathcal{V} \cap A \neq \emptyset$ et $\mathcal{V} \cap A^c \neq \emptyset$.*

3. *Montrer que* $\mathcal{F}r\,(A^{\circ}) \subset \mathcal{F}r\,(A)$ *et* $\mathcal{F}r\,(A) \subset \mathcal{F}r\left(\overline{A}\right)$.
4. *Montrer que* $\mathcal{F}r\,(A \cup B) \subset \mathcal{F}r\,(A) \cup \mathcal{F}r\,(B)$.

Exercice 6. *On note* $u\,(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$ *et* $v\,(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

1. *Calculer* $u\,(A)$ *et* $v\,(A)$ *pour* $X = \mathbb{R}$ *(avec la topologie usuelle)et* $A = \left]0,1\right] \cup \{2\} \cup \left]3,5\right[$.
2. *Comparer* $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $u\,(A)$ *et* $v\,(A)$.
3. *Montrer que* $u^2 = u$ *et* $v^2 = v$.

Exercice 7. *Montrer que si* A *est un ouvert de l'espace topologique* X *et* $A \cap B = \emptyset$, *alors* $A \cap \overline{B} = \emptyset$. *Mais que* $\overline{A} \cap \overline{B}$ *n'est pas nécessairement vide.*

Exercice 8. *Soient* A *et* B *deux partie d'un espace topologique* X. *Montrer les propriétés suivantes :*

1. $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \mathcal{F}r\,(A)$.
2. *Si* $x \notin \overline{A}$, *alors* $\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{V}\,(x)$ *tel que* $A \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$.
3. *Si* $x \notin \overline{A \cap B}$, *alors* $\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{V}\,(x)$ *tel que* $\overset{\circ}{A} \cap \overline{B} \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$.
4. *Si* $\mathcal{F}r\,(A) \cap \mathcal{F}r\,(B) = \emptyset$, *alors* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Exercice 9. *Soit* A *une partie d'un espace topologique* X.

1. *Montrer que* $\overset{\circ}{A} \cap \mathcal{F}r\,(A) = \emptyset$.
2. *Montrer que* $\mathcal{F}r\,(A) = \mathcal{F}r\,(A^c)$.
3. *Montrer que si* A *est ouverte ou fermé,* $\overset{\circ}{\overbrace{\mathcal{F}r\,(A)}} = \emptyset$.

Exercice 10. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur un espace topologique* X *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que l'ensemble* $A = \{x \in X : 1 < f\,(x) < 2\}$ *est ouvert.*
2. *Montrer que l'ensemble* $B = \{x \in X : f\,(x) \leq g\,(x)\}$ *est fermé.*

Exercice 11. *Soit* $f : X \to Y$ *une application. On suppose que* Y *est un espace topologique.*

1. *Montrer que* $\{f^{-1}\,(B) : B \in \mathcal{T}_Y\}$ *est une topologie.*
2. *Montrer que l'application* f *est continue.*

Exercice 12. *Soit X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$. Établir les propositions suivantes :*

1. *Pour toute partie A de X : $A \subset f^{-1}(f(A))$.*
2. *Pour toute partie B de Y : $f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

Exercice 13. *Soit $f : X \to Y$, X et Y étant deux espaces topologiques. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :*

(a) f^{-1} *(ouvert) =ouvert.*

(b) f^{-1} *(fermé) =fermé.*

(c) *Pour toute partie B de Y : $f^{-1}(B^{\circ}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$.*

(d) *Pour toute partie B de Y : $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

(e) *Pour toute partie A de X : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(f) *Pour toute partie B de Y : $\mathcal{F}r(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathcal{F}r(B))$.*

Exercice 14. *Soit $\chi_A : X \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de $A \subset X$:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète.

1. *Montrer que χ_A est continue en x si et seulement si $x \notin \mathcal{F}_r(A)$.*
2. *Donner une condition pour que χ_A soit continue sur X.*
3. *Donner un exemple que la fonction χ_A n'est continue en aucun point de X.*

Exercice 15. *Soit X un espace topologique séparé et soit $x \in X$. Montrer que*

$$\bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)} \mathcal{V} = \{x\}.$$

Exercice 16. *Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique séparé Y. Vérifier que l'ensemble*

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\},$$

est un fermé de X.

Exercice 17. *Soit X un espace topologique, Y un sous-espace de X muni de la topologie induite et $A \subset Y$.*

1. *On note* $\overline{A}$ *l'adhérence de* A *dans* X *et* $\overline{A}^Y$ *l'adhérence de* A *dans* Y. *Montrer que* $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.
2. *On note aussi* A°, $\overset{\circ}{A}^Y$ *les intérieurs de* A *dans* X *et* Y *respectivement. Montrer que* $A^\circ \subset \overset{\circ}{A}^Y$.

Exercice 18. *Soient* X, Y *deux espaces topologiques et* f *une application de* X *dans* Y. *Supposons que* $X = A \cup B$.

1. *Montrer que si* f *est continue, alors* $f_{|A}$ *et* $f_{|B}$ *sont continues (*A *et* B *sont munis de la topologie induite).*
2. *Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.*
3. *Montrer que si* A *et* B *sont ouverts (ou fermés) alors la réciproque est vraie, i.e. si* $f_{|A}$ *et* $f_{|B}$ *sont continues alors* f *est continue.*

Exercice 19. *Soit* X *un espace topologique, Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

1. X *est dit connexe*
2. *Toute fonction continue de* X *vers* $\{0, 1\}$ *muni de la topologie discrète est constante.*

Exercice 20. *Soit* X *un espace topologique. Soient* A *et* Y *deux parties de* X *telles que* $A \subset Y$.

- *Montrer que si* A *est connexe dans* Y *alors* A *est connexe dans* X.

Exercice 21. *Soit* X *un espace topologique séparé.*

1. *Montrer que, si* $K_1, K_2, ..., K_n$ *sont des parties compactes de* X, *alors* $\bigcup_{m=1}^{m=n} K_m$ *est compacte.*
2. *Montrer que, si* $(K_i)_{i\in I}$ *est une famille de parties compactes de* X, *alors* $\bigcap_{i\in I} K_i$ *est compacte.*

A.2 Espaces métriques

Exercice 22. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une application strictement croissante vérifiant :*

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

1. *Montrer que* $\varphi \circ d$ *est une distance sur* X.
2. *Montrer que* $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$ *et* $d_2 = \ln(1+d)$ *sont des distances sur* X.

Exercice 23. *Soit* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *l'ensemble des suites réelles,* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n : (x_n)_n$ *une suite réelles*$\}$. *Pour* $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *on pose*

$$d(x,y) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1}.$$

1. *Montrer que* d *est une distance sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. *Montrer que* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ *est borné.*

Exercice 24. *Soyient* d_1 *et* d_2 *deux métriques sur* X. *Supposons que pour tout* B_{d_1} *boule ouverte, il existe une autre boule ouverte* B_{d_2} *telle que* $B_{d_2} \subset B_{d_1}$ *et* B_{d_1} *et* B_{d_2} *ont le même centre. Alors* $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

Exercice 25. *Soit* $X =]0, +\infty[$. *Pour* x *et* y *dans* X, *on pose*

$$\delta(x,y) = |\ln x - \ln y|.$$

1. *Vérifier que* δ *est une distance sur* X.
2. *Soit* d *la distance usuelle sur* X. *Montrer que* d *et* δ *sont deux distances topologiquement équivalentes* $(\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\delta)$.
3. *Montrer que* (X,d) *n'est pas complet.*
4. *La suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, *est-elle convergente dans l'espace métrique* (X,δ). *Est-elle de une suite de Cauchy dans* (X,δ).
5. *Montrer que l'espace métrique* (X,δ) *est complet.*

Exercice 26. *Soit* (X,d) *un espace métrique et soit* A *une partie dans* X. *Montrer que* A *est bornée si et seulement si, pour tout* $a \in X$, *il existe* $r > 0$, *tel que* $A \subset B(a,r)$.

Exercice 27. *On considère l'espace métrique* $(\mathbb{R}, |.|)$. *On pose*

$$\mathbb{D} = \left\{ p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. *Montrer que* $\mathbb{D}$ *est stable par addition et multiplication.*
2. *Posons* $u = \sqrt{2} - 1$. *Montrer que :* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists m \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$0 < u^n < b - a \qquad \text{et} \qquad a < mu^n < b.$$

3. Déduire que $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$.

Exercice 28. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_n$ *une suite d'éléments de* X *qui converge vers une limite* x.
Montrer que l'ensemble $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{x\}$ *est compact.*

A.3 Espaces vectoriels normés

Exercice 29. *Pour tout* $x = (x_1, x_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$, *on pose*

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}.$$

Montrer que N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 30. *Soit* n *un entier naturel et* $a_0, a_1, \ldots, a_k$ *des réels deux à deux distincts. On considère l'application* $\|\|_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\|p\|_k = \sum_{i=0}^{i=k} |p(a_i)|.$$

A quelle condition cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 31. *On considère sur* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *les deux normes définies par*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 32. *Pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on pose*

$$N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|).$$

(i) *Montrer que* N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

(ii) *Dessiner la boule fermé de centre* $(0, 0)$ *et de rayon* 1.

Exercice 33. *Soit* (E, d) *un espace vectoriel muni d'une distance vérifiant*

(i) *Pour tous* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$.

(ii) *Pour tous* $x, y, z \in E$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Montrer que d *provient d'une norme, c'est-à-dire qu'il existe une norme* N *sur* E *telle que pour tous* $x, y \in E$, $d(x, y) = N(x - y)$.

B-Correction des Exercices

B.1 Espaces topologiques

Solution 1.

Il faut montrer que tout sous-ensemble de X est ouvert. Or un tel sous-ensemble A est réunion de ses singletons. Comme une réunion d'ouvert est ouvert, A est ouvert. Par exemple $A = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$.

Solution 2.

1. *On vérifie les conditions (τ_1), (τ_2), (τ_3).*

   (τ_1) *Il est clair que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.*

   (τ_2) *Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, alors $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c$ sont finis, donc $\bigcap\limits_{i=1}^{i=n} A_i \in \mathcal{T}$, car*

   $$\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i^c \qquad \text{et} \qquad card \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i^c \leq \sum_{i=1}^{i=n} card A_i^c < \infty.$$

   (τ_3) *Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$, alors, pour tout $i \in I$, A_i^c est fini, donc $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$, car*

   $$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \qquad \text{et pour tout } i_0 \in I, \qquad card \bigcap_{i \in I} A_i^c \leq card A_{i_0}^c < \infty.$$

   Ainsi, $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologie.

2. *Si X est fini, tout partie A dans X est ouvert, car A^c est fini, donc la topologie X est discrète.*

Solution 3.

1. *Comme $B \subset \overline{B}$, l'inclusion $A \subset B$, implique $A \subset \overline{B}$, donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
   De même on a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $\overset{\circ}{A} \subset B$, d'où $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

2. *Comme* $\overline{A}$ *est un fermé, alors* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

   On a $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$, *alors* $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ *et* $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, *donc est un fermé* $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. *On a aussi* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ *qui est un fermé, donc* $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, *d'où* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   De même on a $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$, *alors* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ *et* $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, *donc* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, *d'où l'égalité cherchée.*

3. *Les inclusions* $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ *donnent, en passant complémentaire* $\left(\overline{A}\right)^c \subset A^c \subset (A^\circ)^c$, *comme* $\left(\overline{A}\right)^c$ *est ouvert et* $(A^\circ)^c$ *est fermé, on a*

$$\left(\overline{A}\right)^c \subset (A^c)^\circ \subset A^c \subset \overline{A^c} \subset (A^\circ)^c.$$

   On a donc aussi en passant complémentaire

$$\mathring{A} \subset \left(\overline{A^c}\right)^c \subset A \subset ((A^c)^\circ)^c \subset \overline{A}. \qquad (*)$$

   En remplaçant dans $(*)$ A *par* A^c,

$$(A^c)^\circ \subset \left(\overline{A}\right)^c \subset A^c \subset (A^\circ)^c \subset \overline{A^c}.$$

   On a donc

$$(A^\circ)^c \subset \overline{A^c} \subset (A^\circ)^c \qquad et \qquad \left(\overline{A}\right)^c \subset (A^c)^\circ \subset \left(\overline{A}\right)^c.$$

   Il en résulte les deux égalités cherchées

$$(A^\circ)^c = \overline{A^c} \qquad et \qquad \left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ.$$

   On a $\overline{A^c \cup B^c} = \overline{A^c} \cup \overline{B^c}$, *en passant complémentaire*

$$\left(\overline{A^c \cup B^c}\right)^c = \left(\overline{A^c}\right)^c \cap \left(\overline{B^c}\right)^c.$$

   On a aussi

$$\left(\overline{A^c}\right)^c = A^\circ, \left(\overline{B^c}\right)^c = B^\circ \qquad et \qquad \left(\overline{A^c \cup B^c}\right)^c = (A \cap B)^\circ,$$

   donc $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, *d'où l'égalité cherchée.*

   De même on a $\overline{A^c \cap B^c} \subset \overline{A^c} \cap \overline{B^c}$, *en passant complémentaire*

$$\left(\overline{A^c}\right)^c \cup \left(\overline{B^c}\right)^c \subset \left(\overline{A^c \cap B^c}\right)^c,$$

   donc

$$A^\circ \cup B^\circ = \left(\overline{A^c}\right)^c \cup \left(\overline{B^c}\right)^c \subset \left(\overline{A^c \cap B^c}\right)^c = (A \cup B)^\circ,$$

   d'où l'égalité cherchée.

Solution 4.

1. *Par définition, si x est intérieur, il existe un ouvert $x \in \mathcal{U}_x \subset A$, et comme $\mathcal{U}_x \subset A^\circ$, alors $x \in A^\circ$. D'autre part, si $x \in A^\circ$, on peut choisit $\mathcal{U}_x = A^\circ \subset A$, donx x est intérieur à A.*

2. *D'après* 1, *par passage au complémentaire, il suit de montrer que l'on a*

$$\{x \in X : \ x \text{ est adhérent à } A\}^c = (A^c)^\circ .$$

Or

$$\begin{aligned}
\{x \in X : x \text{ est adhérent à } A\}^c &= \{x \in X : \forall \mathcal{U}_x \in \mathcal{T},\ A \cap \mathcal{U}_x \neq \emptyset\}^c \\
&= \{x \in X : \exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{T},\ A \cap \mathcal{U}_x = \emptyset\} \\
&= \{x \in X : \exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{T},\ \mathcal{U}_x \subset A^c\} \\
&= \{x \in A^c : x \text{ est intérieur à } A^c\} \\
&= (A^c)^\circ .
\end{aligned}$$

Solution 5.

1. *Par définition, $\mathcal{F}r\,(A) = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$, d'après l'exercice* 5, *on a $\mathcal{F}r\,(A) = \overline{A} \cap (A^\circ)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.*

2. *Soit $x \in \mathcal{F}r\,(A) \iff x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{A^c} \iff x$ est adhérent à A et $A^c \iff \forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}\,(x)$, $\mathcal{V} \cap A \neq \emptyset$ et $\mathcal{V} \cap A^c \neq \emptyset$.*

3. *Par définition, $\mathcal{F}r\,(A^\circ) = \overline{A^\circ} \cap \overline{(A^\circ)^c}$, on a $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ et $\overline{A^\circ} \subset \overline{A}$, donc*

$$\mathcal{F}r\,(A^\circ) = \overline{A^\circ} \cap \overline{A^c} \subset \overline{A} \cap \overline{A^c} = \mathcal{F}r\,(A) .$$

De même $\mathcal{F}r\,(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\left(\overline{A}\right)^c} = \overline{A} \cap \overline{\left(\overline{A}\right)^c}$, on a $\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ \subset A^c$, alors $\overline{\left(\overline{A}\right)^c} \subset \overline{A^c}$, donc

$$\mathcal{F}r\,(\overline{A}) \subset \overline{A} \cap \overline{A^c} = \mathcal{F}r\,(A) .$$

4. *Par définition,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}r\,(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} = \overline{A \cup B} \cap \overline{A^c \cap B^c} \subset \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right) \\
&\subset \left(\overline{A} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right) = \left(\mathcal{F}r\,(A) \cap \overline{B^c}\right) \cup \left(\mathcal{F}r\,(B) \cap \overline{A^c}\right) \\
&\subset \mathcal{F}r\,(A) \cup \mathcal{F}r\,(B) .
\end{aligned}$$

Solution 6.

1. *On a* $u(A) = [0,1] \cup \{2\} \cup [3,5]$ *et* $v(A) = [0,1] \cup [3,5]$.
2. *On* $A \subset \overline{A}$*, alors* $A^\circ \subset \left(\overline{A}\right)^\circ$ *et comme* $\left(\overline{A}\right)^\circ$ *est un ouvert dans* $\overline{A}$*, donc* $A^\circ \subset u(A) \subset \overline{A}$.

   De même on a $A^\circ \subset A$*, alors* $\overline{A^\circ} \subset \overline{A}$ *et on a* $A^\circ \subset \overline{A^\circ}$*, donc* $A^\circ \subset v(A) \subset \overline{A}$.
3. *On a* $u(A) \subset \overline{A}$*, alors* $\left(\overline{u(A)}\right)^\circ \subset u(A)$*, donc* $u^2(A) \subset u(A)$*. Comme* $v(A)$ *est fermé, il suit que*
$$v^2(A) = \overline{(v(A))^\circ} \subset v(A).$$
   Or
$$u(A^c) = \left(\overline{A^c}\right)^\circ = ((A^\circ)^c)^\circ = \left(\overline{A^\circ}\right)^c = (v(A))^c.$$
   Dons aussi $u^2(A^c) \subset u(A^c)$, $u^2(A^c) = u((v(A))^c) = (v^2(A))^c$*, alors* $(v^2(A))^c \subset (v(A))^c$*, donc* $v(A) \subset v^2(A)$*, d'où* $v(A) = v^2(A)$ *et* $u(A) = u^2(A)$ *en passant au complémentaire*

Solution 7.

Supposons l'inverse, $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ *c'est-à-dire, il existe* $x \in A$ *et* $x \in \overline{B}$*, comme* A *est un ouvert, alors* $A \in \mathcal{V}(x)$*, puis* x *est point adhérent à* B*, par définition, on a* $A \cap B \neq \emptyset$*, d'où la contradiction.*

Solution 8.

1. *On a, par définition de la frontière,* $\mathcal{F}r(A) = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$*, alors*
$$\begin{aligned}\mathcal{F}r(A) \cup A^\circ &= \left(\overline{A} \cap (A^\circ)^c\right) \cup A^\circ \\ &= \left(\overline{A} \cap A^\circ\right) \cup ((A^\circ)^c \cap A^\circ) \\ &= \left(\overline{A} \cap A^\circ\right) \cup \emptyset = \overline{A} \cap A^\circ = \overline{A}.\end{aligned}$$
2. *Si* $x \notin \overline{A}$*, donc* $x \in \left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$*, c'est-à-dire* x *est point intérieur à* A^c*. par définition* $\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $A \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$.
3. *Si* $x \notin \overline{A \cap B}$*, par* (2)*,* $\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $A \cap B \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$*, donc* $A \cap \mathcal{U}_x \subset B^c$*, d'où* $A^\circ \cap \mathcal{U}_x \subset (B^c)^\circ = \left(\overline{B}\right)^c$*. Si bien que* $A^\circ \cap \mathcal{U}_x \cap \overline{B} = \emptyset$.
4. *On a sait déjà que* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$*. Montrons que* $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$*, en effet, soit* $x \notin \overline{A \cap B}$*, alors* $\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $A^\circ \cap \mathcal{U}_x \cap \overline{B} = \emptyset$ *et* $B^\circ \cap \mathcal{U}_x \cap \overline{A} = \emptyset$*, comme* $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \mathcal{F}r(A)$*, donc*
$$\begin{aligned}\mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap \overline{A} &= \left(\mathcal{U}_x \cap \overline{B}\right) \cap (A^\circ \cup \mathcal{F}r(A)) \\ &= \left(\mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap A^\circ\right) \cup \left(\mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap \mathcal{F}r(A)\right) \\ &= \mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap \mathcal{F}r(A).\end{aligned}$$

De même,

$$\mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap \overline{A} = \mathcal{U}_x \cap \overline{A} \cap \mathcal{F}r\,(B)\,.$$

Comme $\mathcal{F}r\,(A) \cap \mathcal{F}r\,(B) = \emptyset$*, alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap \overline{A} &= \left(\mathcal{U}_x \cap \overline{A} \cap \mathcal{F}r\,(B)\right) \cap \mathcal{U}_x \cap \overline{B} \cap \mathcal{F}r\,(A) \\
&= \left(\mathcal{U}_x \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\mathcal{F}r\,(A) \cap \mathcal{F}r\,(B)\right) \\
&= \left(\mathcal{U}_x \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \emptyset = \emptyset.
\end{aligned}$$

Donc $x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$*, d'où* $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Solution 9.

1. *Par définition de la frontière, on a,*

$$\mathcal{F}r\,(A) \cap A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c \cap A^\circ = \overline{A} \cap \emptyset = \emptyset.$$

2. *On a*

$$\mathcal{F}r\,(A^c) = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c} = \overline{A^c} \cap \overline{A^c} = \mathcal{F}r\,(A)\,.$$

3. *Si* A *est un fermé, alors*

$$\left(\mathcal{F}r\,(A)\right)^\circ = \left(\overline{A} \cap (A^\circ)^c\right)^\circ = \left(A \cap (A^\circ)^c\right)^\circ = A^\circ \cap \left((A^\circ)^c\right)^\circ \subset A^\circ \cap (A^\circ)^c = \emptyset.$$

Si A *est un ouverte,* A^c *est un fermé, et* $\mathcal{F}r\,(A) = \mathcal{F}r\,(A^c)$*, donne la conclusion cherchée.*

Solution 10.

1. *Comme* f *est continue et que l'intervalle* $]1,2[$ *est ouvert, il suit que* $A = f^{-1}\,(]1,2[)$ *est ouvert.*
2. *On a clairement* $B = \{x \in X : f\,(x) - g\,(x) \in \,]-\infty,0]\} = (f-g)^{-1}\,(]-\infty,0])$*. Or* f*,* g *continues implique que* $f-g$ *est continue. Comme* $]-\infty,0]$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$*, il suit que* B *est fermé dans* X*.*

Solution 11.

1. *Posons* $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}\,(B) : B \in \mathcal{T}_Y\}$*, on vérifie les conditions* (τ_1)*,* (τ_2)*,* (τ_3)*.*

   (τ_1) *Il est clair que* $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$*.*

(τ_2) *Soit* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}_X$, *alors il existe* $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{T}_Y$, *tels que* $A_i = f^{-1}(B_I)$, *pour* $1 \leq i \leq n$, *donc*

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i = \bigcap_{i=1}^{i=n} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} B_i\right) \in \mathcal{T}_X, \text{ car } \bigcap_{i=1}^{i=n} B_i \in \mathcal{T}_Y.$$

(τ_3) *Soit* $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_X$, *alors il existe,* $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_Y$, *tels que* $A_i = f^{-1}(B_i)$, *pour tout* $i \in I$, *donc*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \in \mathcal{T}_X, \text{ car } \bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{T}_Y.$$

Ainsi, $(X, \mathcal{T})$ *est un espace topologie.*

2. *Il est clair que l'application* f *est continue.*

Solution 12.

1. *Si* $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, *ce qui signifie que* $x \in f^{-1}(f(A))$, *d'où* $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. *On pose* $A = f^{-1}(B)$, *alors* $y \in f(A)$ *signifie qu'il existe* $x \in A$ *tel que* $y = f(x)$, *et comme* $A = f^{-1}(B)$, *on a* $y \in B$, *d'où* $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Solution 13.

- *Les propriétés* (a) *et* (b) *sont évidemment équivalentes par passage au complémentaire.*
- *Montrons que* $(b) \Rightarrow (c)$, *on a* $B^\circ \subset B$, *alors* $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)$, *comme* $f^{-1}(B^\circ)$ *est un ouvert, car* B° *est ouvert, donc* $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$, *d'où* (c).
- *La propriété* (d) *est équivalente* (c) *par passage au complémentaire.*
- *Montrons que* $(c) \Rightarrow (e)$, *soit* A *une partie de* X *et* $B = f(A)$, *on a* $A \subset f^{-1}(B)$, *donc* $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$, *d'où*

$$f\left(\overline{A}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{B}\right)\right) \subset \overline{B} = \overline{f(A)},$$

ce qui la propriété (e).

- *Montrons que* $(e) \Rightarrow (f)$, *soit* B *une partie de* Y *et* $A = f^{-1}(B)$. *On a donc* $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$ *et de même* $f\left(\overline{A^c}\right) \subset \overline{f(A^c)} \subset \overline{B^c}$, *alors*

$$f(\mathcal{F}r(A)) = f\left(\overline{A} \cap \overline{A^c}\right) \subset f\left(\overline{A}\right) \cap f\left(\overline{A^c}\right) = \overline{B} \cap \overline{B^c} = \mathcal{F}r(B),$$

donc

$$\mathcal{F}r(A) \subset f^{-1}(f(\mathcal{F}r(A))) = f^{-1}(\mathcal{F}r(B)),$$

d'où

$$\mathcal{F}r\left(f^{-1}(B)\right) \subset f^{-1}(\mathcal{F}r(B)).$$

- *Montrons que* $(f) \Rightarrow (e)$, *si* B *est un fermé de* Y, *on sait que* $\mathcal{F}r(B) \subset \overline{B} = B$, *donc* $f^{-1}(\mathcal{F}r(B)) \subset f^{-1}(B)$, *par* (f) *donne* $\mathcal{F}r(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(B)$, *d'où* $f^{-1}(B)$ *fermé.*

Solution 14.

1. *Tout d'abord, pour la topologie discrète de* $\{0,1\}$,$\{0\}$ *et* $\{1\}$ *sont des voisinages de* 0 *et* 1 *respectivement. Donc si* $f : X \to \{0,1\}$ *est continue en* x, *il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* x *tel que* $f(\mathcal{U}) \subset \{f(x)\}$, *i.e. que* f *est constante sur* $\mathcal{U}$. *La réciproque est bien sûr vraie. Par conséquent,* f *n'est pas continue en* x *si et seulement si quel que soit le voisinage* $\mathcal{U}$ *de* x, *il existe* y *et* z *dans* $\mathcal{U}$ *tels que* $f(y) = 1$ *et* $f(z) = 0$. *Si* f *est la fonction caractéristique de* A, *cela revient à dire que tout voisinage de* x *rencontre* A *et son complémentaire, donc* $x \in \mathcal{F}_r(A)$.
2. *Si* A *est à la fois ouvert et fermé dans* X, *alors la frontière de* A *est vide, par conséquent* χ_A *est continue.*
3. *Si* $X = \mathbb{R}$ *et* $A = \mathbb{Q}$ *l'ensemble des nombres rationnels, alors* χ_A *n'est continue, car* $\mathcal{F}_r(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Solution 15.

Supposons l'inverse, c'est-à-dire $\bigcap_{\mathcal{V}\in\mathcal{V}(x)} \mathcal{V} \neq \{x\}$, *alors, il existe* $y \neq x$, *tel que* $y \in \bigcap_{\mathcal{V}\in\mathcal{V}(x)} \mathcal{V}$. *Comme* X *un espace topologique séparé, il existe* $\mathcal{V}_x \in \mathcal{V}(x)$ *et* $\mathcal{V}_y \in \mathcal{V}(y)$, *tel que* $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$, *donc* $y \notin \mathcal{V}_x$, *d'où la contradiction.*

Solution 16.

Montrons que le complémentaire de

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\},$$

est ouvert. Si $a \in A^c$, *alors* $a \notin A$, *donc* $f(a) \neq g(a)$. *Comme* Y *est séparé, il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $f(a)$ *et un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* $g(a)$ *tels que* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. *La continuité de* f *et* g *implique que*

$$\mathcal{W} := f^{-1}(\mathcal{U}) \cap g^{-1}(\mathcal{V}),$$

est un voisinage ouvert de a. *Si* $y \in \mathcal{W}$, *on a* $f(y) \in \mathcal{U}$ *et* $g(y) \in \mathcal{V}$. *Comme* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont disjoints,* $f(y) \neq g(y)$, *donc* $\mathcal{W} \cap A = \emptyset$. *Donc le complémentaire de* A *est ouvert.*

Solution 17.

1. *L'ensemble* $\overline{A} \cap Y$ *est fermé dans* Y *en tant que trace d'un fermé de* X. *Il faut montrer que c'est le plus petit fermé de* Y *contenant* A. *Soit* G *un fermé du sous-espace* Y *contenant* A. *Par définition de la topologie de* Y, G *est de la forme* $Y \cap F$ *où* F *est fermé dans* X. *Comme* $A \subset G$, *il vient* $A \subset F$, *alors* $\overline{A} \subset F$. *Par conséquent*
$$\overline{A} \cap Y \subset F \cap Y \subset G.$$
2. *On a* $A^\circ \subset A \subset Y$ *ouvert, donc* $A^\circ = A^\circ \cap Y$ *est ouvert dans* Y *et il suit que* $A^\circ \subset A^{\circ Y}$.
Prenons $Y = [0,1[\cup [2,3]$, $A = [0,1[$ *et* $X = \mathbb{R}$. *Alors* $A^\circ =]0,1[$ *mais,* $A = Y \cap]-1,1[$ *est ouvert dans* Y, *donc* $A^{\circ Y} = A$.

Solution 18.

1. *Pour tout ouvert* $\mathcal{U}$ *de* Y, *puisque* f *est continue,* $f^{-1}(\mathcal{U})$ *est un ouvert de* X, *alors* $f_{|A}^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap A$ *est un ouvert de* A, *donc* $f_{|A}$ *est continue sur* A. *De même pour* $f_{|B}$.
2. *Si* $A = [0,1[$ *et* $B = [1,2]$, *la fonction caractéristique* f *de* A *est évidement continue sur* A, *ainsi que sur* B, *mais n'est pas continue sur* $X = [0,2]$.
3. *Si* A *et* B *sont fermés, pour tout fermé* F *de* Y, $f_{|A}^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap A$ *est un fermé de* A, *puisque* A *est un fermé de* X, *alors* $f_{|A}^{-1}(F)$ *est un fermé de* X. *De même pour* $f_{|B}^{-1}(F)$. *Comme* $f^{-1}(F) = f_{|A}^{-1}(F) \cup f_{|B}^{-1}(F)$, *alors* $f^{-1}(F) = f_{|A}^{-1}(F) \cup f_{|B}^{-1}(F)$ *est un fermé de* X, *donc* f *est continue. De même si* A *et* B *sont ouverts.*

Solution 19.

$(1 \Rightarrow 2)$ *Soit* $f : X \to \{0,1\}$ *est continue avec* $\{0,1\}$ *muni de la topologie discrète. Par conséquent,* $\{0\}$ *est à la fois ouvert et fermée dans* $\{0,1\}$. *Par continuité,* $f^{-1}(\{0\})$ *est à la fois ouvert et fermé dans* X. *Par conséquent* $f^{-1}(\{0\})$ *est égal à* X *ou bien* $\emptyset$.
Dans le premier cas, f *est constante égale à* 0 *et dans le second cas* f *est constante égale à* 1.

$(2 \Rightarrow 1)$ *Montrons que X est connexe X, supposons l'inverse, alors il existe deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont disjoints de X tels que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une fonction donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in \mathcal{U}, \\ 1, & si\ x \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Alors f est une fonction continue (avec $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète). Par hypothèse, f est constante ce qui montre que $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{V}$ est égal à X ou encore que $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{V}$ est vide, contradiction.

Solution 20.

Soit A est connexe dans Y et A muni de la topologie induite par Y. Montrons que A est connexe dans X, supposons l'inverse, c'est-à-dire il existe deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de A pour la topologie induite par X, tels que

$$A = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}, \qquad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset,$$

Par définition de la topologie induite, il existe deux ouverts $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}_1$ de X tels que

$$\mathcal{U} = A \cap \mathcal{U}_1 \qquad et \qquad \mathcal{V} = A \cap \mathcal{V}_1.$$

Comme $A \subset Y$, alors $A = A \cap Y$. Par conséquent,

$$\mathcal{U} = A \cap (Y \cap \mathcal{U}_1) \qquad et \qquad \mathcal{V} = A \cap (Y \cap \mathcal{V}_1).$$

Comme $Y \cap \mathcal{U}_1$ et $Y \cap \mathcal{V}_1$ sont des ouverts dans Y, alors A est la réunion de deux ouverts pour la topologie induite par Y qui sont disjoints, contradiction.

Solution 21.

1. *L'intersection de compacts est fermée. Donc compacte, car incluse dans un compact.*
2. *Soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $\bigcup\limits_{m=1}^{m=n} K_m$. Alors pour $m \in \{1, 2, ..., n\}$, $K_m \subset \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}$. Donc, il existe J_m tel que $K_m \subset \bigcup\limits_{i \in j_m} \mathcal{U}_i$.. Alors*

$$\bigcup_{m=1}^{m=n} K_m \subset \bigcup_{m=1}^{m=n} \left(\bigcup_{i \in j_m} \mathcal{U}_i \right).$$

B.2 Espaces métriques

Solution 22.

Posons $\delta = \varphi \circ d$.

1. *On a*
   - $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(d(x,y)) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
   - $\delta(x,y) = \varphi(d(x,y)) = \varphi(d(y,x)) = \delta(x,y)$.
   - *Puisque* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$, *on en déduit facilement que*

   $$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(x,y).$$

   Ainsi, δ *est une distance sur* X.

2. $d_1 = \varphi_1 \circ d$, *avec* $\varphi_1(t) = \dfrac{t}{1+t}$. *On vérifie facilement que*

   $$\varphi_1(a+b) \leq \varphi_1(a) + \varphi_1(b).$$

   De plus, φ_1 *est strictement croissante. La question* 1 *montre alors que* d_1 *est une distance.*

   De même, $d_2 = \varphi_2 \circ d$, *avec* $\varphi_2(t) = \ln(1+t)$. *On vérifie facilement que* φ_2 *est strictement croissante et que*

   $$\varphi_2(a+b) \leq \varphi_2(a) + \varphi_2(b).$$

   D'après la première question, d_2 *est aussi une distance sur* X.

Solution 23.

1. *Soit* $x, y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *posons* $u_n = \dfrac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $0 \leq u_n \leq 1$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

   $$d(x,y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} u_n \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty,$$

   donc, l'application $d : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+$ *est bien définir.*

   Il est clair que $d(x,y) = d(y,x)$ *et* $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.

   Posons $\varphi(t) = \dfrac{t}{t+1}$, *pour tout* $t \in [0, \infty[$, *on vérifie facilement que* φ *est strictement croissante et que*

   $$\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \qquad \text{pour tout } t, s \in [0, \infty[,$$

alors

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\varphi(|x_n - y_n|) \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\varphi(|x_n - z_n| + |x_n - z_n|) \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\varphi(|x_n - z_n|) + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\varphi(|x_n - z_n|) \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

donc, d est aussi une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a*

$$d(x,0) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\frac{|x_n|}{|x_n|+1} \leq 2,$$

alors $x \in \overline{B}_d(0,1)$, d'où $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d\right)$ est borné.

Solution 24. *Soit A ouvert par rapport $\mathcal{T}_{d_1}$, alors pour chaque $x \in A$ il existe $B_{d_1}(x,r)$ boule ouverte telle que $B_{d_1}(x,r_1) \subset A$. Par hypothèse, il existe une boule ouverte $B_{d_2}(x,r_2)$ tel que $B_{d_2}(x,r_2) \subset B_{d_1}(x,r_1) \subset A$. Donc A est un ouvert par rapport $\mathcal{T}_{d_2}$.*

Solution 25.

1. *Il est facile de voir que δ est une distance.*
2. *Par continuité de la fonction $x \to \ln x$ sur $]0,+\infty[$, montre que, pout tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\text{pour tout } x \in \left]0,+\infty\right[, \qquad |x - x_0| < \alpha \quad \text{implique} \quad |\ln x - \ln x_0| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$B_d(x_0,\alpha) \subset B_\delta(x_0,\varepsilon),$$

donc $\mathcal{T}_\delta \subset \mathcal{T}_d$.

Inversement, par continuité de la fonction $x \to \exp(x)$ sur $]0,+\infty[$montre que, pout tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \left]0,+\infty\right[, \qquad |\ln x - \ln x_0| < \alpha \quad \text{implique} \quad |x - x_0| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$B_\delta(x_0,\alpha) \subset B_d(x_0,\varepsilon),$$

donc $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_\delta$, d'où $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\delta$.

3. *La suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy dans* (X,d) *mais ne converge pas dans* (X,d)*, donc* (X,d) *n'est pas complet.*

4. *Supposons que la suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *converge dans* (X,δ)*. Il existerait* $l\in X$ *tel que*

$$\left|\ln\frac{1}{n}-\ln l\right| = |\ln n+\ln l| \to 0, \text{ lorsque } n\to+\infty.$$

Ce qui est impossible. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *diverge donc dans* (X,δ)*. Supposons que* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *soit une suite de Cauchy dans* (X,δ)*, il vient*

$$\left|\ln\frac{1}{n}-\ln\frac{1}{m}\right| = |\ln n-\ln m| \to 0, \text{ lorsque } n,m\to+\infty.$$

Cela veut dire que la suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *et donc converge, ce qui est absurde.*

5. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy de* (X,δ)*. On a*

$$|\ln x_n-\ln x_m| \to 0, \text{ lorsque } n,m\to+\infty.$$

Cela montre que la suite $(\ln x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *; si* l *est sa limie,*

$$|\ln x_n - l| \to 0, \text{ lorsque } n\to+\infty.$$

c'est-à-dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* e^l *dans* (X,δ)*.*

Solution 26.

Tout d'abord, il est clair que si, pour tout $a\in X$*, il existe* $r>0$ *tel que* $A\subset B(a,r)$*, alors* A *est bornée.*

Réciproquement, soit A *une partie bornée. Par définition, il existe* $x\in X$ *et* $r>0$*, tel que* $A\subset B(x,r)$*.*

Soit $a\in X$*. Montrons que, si* $R=r+d(a,x)$*, alors* $A\subset B(a,R)$*.*

En effet, si $y\in A$*, on a* $y\in B(x,r)$ *et donc* $d(y,x)<r$*. En particulier,*

$$\begin{aligned} d(a,y) &\leq d(a,x)+d(x,y) \\ &< d(a,x)+r=R, \end{aligned}$$

et donc $y\in B(a,R)$*. On a bien prouvé que* $A\subset B(a,R)$*.*

Solution 27.

1. *Soient* $d_1=p_1+q_1\sqrt{2}$ *et* $d_2=p_2+q_2\sqrt{2}$ *deux éléments de* $\mathbb{D}$*. Alors* $d_1+d_2=(p_1+p_2)+(q_1+q_2)\sqrt{2}$ *est un élément de* $\mathbb{D}$ *et* $d_1.d_2=(p_1p_2+2p_1p_2)+(p_2q_1+q_2p_2)\sqrt{2}$ *aussi.*

2. *On a* $u < 1$ *donc* u^k *tend vers* 0 *quand* k *tend vers* $+\infty$. *Donc pour* $\varepsilon = b - a$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que si* $k \geq n$ *on a*

$$u^k < b - a.$$

Posons $m = \left[\dfrac{a}{u^n}\right] + 1$. *Alors*

$$m - 1 \leq \frac{a}{u^n} < m.$$

L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. *L'inégalité de gauche s'écrit aussi* $mu^n - u^n \leq a$, *ce qui implique*

$$mu^n \leq u^n + a \leq b - a + a$$

d'où

$$a < mu^n < b.$$

3. *Déduisons que* $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$, *on a* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists m, n \in \mathbb{N}$ *tels que* $mu^n \in [a, b]$ *et* $mu^n \in \mathbb{D}$, *car* $u \in \mathbb{D}$ *et par* (1) *en déduire que* $u^n \in \mathbb{D}$.

Solution 28.

Soit $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* A *par une famille quelconque d'ouverts*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i.$$

On veut montrer qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Comme $x \in A$, *il existe un indice* $i_0 \in I$ *tel que* $x \in \mathcal{U}_{i_0}$. *Par ailleurs, comme* $\mathcal{U}_{i_0}$ *est un ouvert, nous pouvons trouver* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_0}.$$

Par définition de la convergence de la suite $(x_n)_n$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0, \qquad d(x_n, x) < \varepsilon,$$

ce qui implique,

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_n \in B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_0}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \{1, .., n_0 - 1\}$, *il existe* $i_n \in I$, *tel que* $x_n \in \mathcal{U}_{i_n}$.
Au final nous avons bien montré

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{k=n_0-1} \mathcal{U}_{i_k}.$$

B.3 Espaces vectoriels normés

Solution 29.

Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, on a*

$$N(x) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2} = \|(x_1 + x_2, 2x_2)\|_2 .$$

Il est facile de voir que N *est une norme.*

Solution 30.

Il est clair que, pour tout p *et* q *dans* $\mathbb{R}_n[X]$ *et tout* α *dans* $\mathbb{R}$*,*

$$\|\alpha p\|_k = |\alpha| \, \|p\|_k , \qquad \|p + q\|_k \leq \|p\|_k + \|q\|_k .$$

On vérifie que $\|p\|_k = 0$ *si et seulement si* $p(a_i) = 0$ *pour* $0 \leq i \leq k$*, par suite :*

- *Si* $k \geq n$*, cela implique* $p = 0$ *car un polynôme non nul de* $\mathbb{R}_n[X]$ *ne peut avoir plus de* n *racines distinctes.*
- *Si* $k < n$*,* $\|.\|_k$ *n'est pas une norme dans* $\mathbb{R}_n[X]$ *car le polynôme donné par* $p(x) = (x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_k)$ *est non nul et* $\|p\|_k = 0$*.*

Ainsi, $\|.\|_k$ *est une norme dans* $\mathbb{R}_n[X]$ *si et seulement si* $k \geq n$*.*

Solution 31.

Pour tout $f \in E$*, on a* $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$*. Supposons que les deux normes soient équivalentes, il existe alors* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_1 .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* f_n *la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par* $f_n(t) = t^n$*. On a*

$$\|f_n\|_\infty = 1, \qquad \|f\|_1 = \frac{1}{n+1}, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et l'inégalité

$$1 \leq \frac{\alpha}{n+1}, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ne peut être satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$*.*

Solution 32.

(N_1) *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*,* $N(x, y) \geq 0$ *et*

$$N(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x| = |y| = |x - y| = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) .$$

(N_2) *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(x,y)) &= N(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|) \\ &= \max(|\lambda||x|, |\lambda||y|, |\lambda||x-y|) \\ &= |\lambda| \max(|x|, |y|, |x-y|) \\ &= |\lambda| N(x,y). \end{aligned}$$

(N_3) *Soit* $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} N[(x,y)+(z,t)] &= N(x+z, y+t) = \max(|x+z|, |y+t|, |x+z-y-t|) \\ &\leq \max(|x|+|z|, |y|+|t|, |x-y|+|z-t|) \\ &\leq \max(|x|, |y|, |x-y|) + \max(|z|, |t|, |z-t|) \\ &\leq N(x,y) + N(z,t), \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

Pour dessiner la boule fermé de centre $(0, 0)$ *et de rayon* 1, *on remarque que*

$$N(x,y) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1, \\ x-1 \leq y \leq x+1, \end{cases}$$

et l'on représente donc facilement la boule unité pour N.

Solution 33.

Si une telle norme existe, elle est nécessairement définie par

$$N(x) = N(x-0) = d(x,0).$$

Montrons donc que $N : x \to d(x, 0)$ *est une norme sur* E *telle que*

$$\text{pour tous } x, y \in E, \qquad d(x,y) = N(x-y).$$

Tout d'aborde cette dernière propriété est vérifiée car pour tous $x, y \in E$, *en utilisant* (ii) *on obtient*

$$N(x-y) = d(x-y, 0) = d(x-y+y, y) = d(x,y).$$

Il reste seulement à vérifier que N *est une norme*

(N_1) *Pour tout* $x \in E$, $N(x) = d(x, 0) \geq 0$ *et*

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow d(x,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

car d *est une distance.*

(N_2) *Pour tout* $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda x) = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| \, d(x, 0) = |\lambda| \, N(x).$$

(N_3) *Soit* $x, y \in E$, *d'aprés* (ii) *on a*

$$\begin{aligned} N(x+y) &= d(x+y, 0) \leq d(x+y, y) + d(y, 0) \\ &= d(x, 0) + d(y, 0) \\ &= N(x) + N(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. N *est donc bien une norme qui a les propriétés demandées.*

Bibliographie

[1] **A. Hitta**, Cours Licence, Topologie des espaces Métriques, Université 8 Mai 1945- Guelma, 2009.

[2] **C. Berger**, Topologie pour la licence, Cours et exercices. Université de Nice-Sophia Antipolis, 2004.

[3] **G. Choquet**, Cours d'analyse, tome II, Topologie. Masson, Paris, 1964.

[4] **G. Christol**, Topologie, Ellipses, Paris, 1997.

[5] **H. Brezis**. Analyse Fonctionnelle, Masson, 1992.

[6] **J. Dieudonné**, Éléments d'analyse, tome I : fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[7] **J. Dixmier**, Topologie générale, Presses universitaires de France, 1981.

[8] **L. Schwartz**.Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Herman, 1980.

[9] **N. Bourbaki**, Topologie générale, Chapitres 1 à 4. Hermann, Paris, 1971.

[10] **S. lipschuts**, topologie, cours et problème, séries schaum. Paris 1981.

[11] **W. Rudin**. Analyse Fonctionnelle, Ediscience international, Paris, 1995.