Université de Ain Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Mathématiques et informatique

Polycopié pédagogique

Dr. MAMMAR Imane

Titre
EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES I
Cours

Cours destiné aux étudiants de

Master: Equations différentielles et modélisation

Année : 2023

Avant Propos

Ce polycopié est basé sur des notes de cours que j'ai utilisé pendant quelques années à enseigner la matière **Equations Différentielles I** déstiné aux étudiants de Master 1 **Equations différentielles et modèlisation** à l'université de Belhaj Bouchaib Ain Temouchent.

Ce cours peut eventuellement être utile pour tout les étudiants et chercheurs qui sont intéréssés par les équations différentielles d'ordre deux, que se soit un problème de Cauchy, un problème aux limites ou un problème de Strum Liouville.

Introduction

Ce polycipié est un cours de master 1 de la matière équations différentielles I, son objectif est de permettre à l'étudiant d'acquérir des connaissances pour étudier les équations différentielles de second ordre, les problèmes aux limites et la fonction de Green, ainsi que de résoudre un problème aux limites de Strum Liouville à valeurs propres.
Les fonctions de Green constituent une méthode assez générale de résolution d'équations différentielles ou de transformation d'équations différentielles en équations intégrales. Elles sont extrêmement utilisées en mécanique quantique où on les appelle des propagateurs, et en théorie des processus stochastiques.
Les problèmes aux limites et les équations de Sturm Liouville sont très appréciés par les chercheurs en particulier les physiciens car elles permettent de modéliser certaines situations. Entre autres, elles sont utilisées dans les problèmes de vibration ou encore lorsqu'on fait face à des ondes stationnaires. De plus, elles se révèlent intéressantes dans des problèmes d'oscillation (voir [5]).
Ce document contient trois chapitres.
Le premier contient quelques résultats sur les problèmes de Cauchy tels que les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution, et la résolution des équations difféntielles du second ordre écrites sous la forme

$$x''(\tau) = a_0(\tau)x(\tau) + a_1(\tau)x'(\tau) + b(\tau), \qquad \forall \tau \in I \in \mathbb{R},$$

où $a_0, a_1, b : I =]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et x est une focntion de classe $\mathcal{C}^2$.

Cette équation est équivalente à une équation d'ordre un sous la forme matricielle

$$X'(\tau) = A(\tau)X(\tau) + B(\tau),$$

avec pour $\tau \in I \subset \mathbb{R}$, $X(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix}$, $A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(\tau) & a_1(\tau) \end{pmatrix}$, $B(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(\tau) \end{pmatrix}$.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution des problèmes aux limites en utilisant la fonction de Green et la fonction de Green généralisée.

On présente des résultats d'existence et d'unicité de la solution et aussi des résultats d'existence de la fonction de Green, on donne la forme générale de la solution du problème aux limites non homogène suivant

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t) \\ B_1(x) = \alpha_a x(a) + \beta_a x'(a) = \gamma_a \\ B_2(x) = \alpha_b x(b) + \beta_b x'(b) = \gamma_b \end{cases}$$

Nous montrons que si la solution du problème homogène est $x \equiv 0$, alors la solution peut être écrite en utilisant la fonction de Green, sinon la solution est écrite en utilisant la fonction de Green généralisée si elle existe.

Dans le dernier chapitre, on introduit les problèmes aux limites de Strum Liouville sous la forme

$$\begin{cases} L^* x(t) = \dfrac{d}{dt}(p(t)x'(t)) + (q(t) + \lambda r(t))x(t) = f(t) \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{cases}$$

et on montre comment chercher les valeurs propres et les fonctions propres associés, et on donne la forme générale de solution (si elle existe) en développement en série de Fourier et en utilisant la fonction de Green (si elle existe).

Le polycopié se termine par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre I

Rappels sur des résultats d'existence et d'unicité du problème de Cauchy

Ce chapitre est consacré aux rappels de résultats d'existence et d'unicité d'un problème de Cauchy d'ordre deux, et à le résoudre en calculant la résolvante.

I.1 Théorème d'existence de solutions

Dans cette section, on considère E un espace de Banach, U un ouvert de E et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{I.1}$$

où $f : I \times U \to E$ est une fonction continue, et x est une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition I.1.1.
Une solution forte x de (I.1) est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J \subset I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeurs dans U, dont la dérivée vérifie $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in J$.

Définition I.1.2.
On appelle condition initiale de l'équation (I.1) une valeur $(t_0, x_0) \in I \times U$ telle que la solution cherchée x satisfait à la condition $x(t_0) = x_0$.

Définition I.1.3.

L'équation différentielle avec une condition initiale s'appelle un problème de Cauchy et s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{I.2}$$

Définition I.1.4.

Une fonction x est dite solution du problème (I.2) si x vérifie l'équation $x' = f(t, x(t)$ et la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Théorème I.1.1.

Une fonction x est solution intégrale de (I.2) sur I si et seulement si

i. pour tout $t \in I$, $x(t) \in U$,

ii. x est continue sur I,

iii. pour tout $t \in I$, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.

Théorème I.1.2.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors toute solution x de l'équation (I.1) est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Définition I.1.5.

Soientt I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E, une fonction continue $f : I \times U \to E$ est dite localement lipschitzienne par rapport à x si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage $J \subset I$ de t_0 et un voisinage $U_0 \subset U$ de x et un réel $K > 0$ tel que
$\forall t \in J, \quad \forall (x_1, x_2) \in U_0^2$, on a

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq K \|x_1 - x_2\|_E$$

Théorème I.1.3.

On suppose que la fonction f est continue sur $I \times U$ et localement lipschitzienne par rapport à x, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U est un ouvert de E.
Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, $\exists \tau > 0$ et une unique solution $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], U)$ du problème (I.2).

Définition I.1.6.

Soit $x : I \to U$ et $\tilde{x} : \tilde{I} \to \tilde{U}$ deux solutions de l'équation (I.1), on dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}(t) = x(t)$ pour tout $t \in I$.

Définition I.1.7.

Une solution $x : I \to U$ de (I.1) est dite maximale si x n'admet pas de prolongement.

Définition I.1.8.

Une solution $x : I \to U$ de (I.1) est dite globale si x est définie sur l'intervalle I tout entier.

Remarque I.1.1.

Toute solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

Théorème I.1.4.

Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et dérivable sur $]a, b[$, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) \leq M$ pour tout $c \in]a, b[$, alors

$$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

I.2 Equations différentielles du second ordre

On considère l'équation différentielle du second ordre de la forme

$$x''(\tau) = a_0(\tau)x(\tau) + a_1(\tau)x'(\tau) + b(\tau), \tag{I.3}$$

où a_0, a_1 et b sont des fonctinues continues définies de $I =]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'équation (I.3) est équivalente à une équation différentielle matricielle d'ordre 1, en effet si on pose $X(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix}$, $A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(\tau) & a_1(\tau) \end{pmatrix}$ et $B(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(\tau) \end{pmatrix}$ alors on a

$$X'(\tau) = A(\tau)X(\tau) + B(\tau)$$

Considérons maintenant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(\tau) = A(\tau)X(\tau) + B(\tau) \\ X(\tau_0) = X_0 \end{cases} \tag{I.4}$$

avec $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est un operateur continu, $B : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continu et $(\tau_0, X_0) \in I \times U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Définition I.2.1.

On appelle solution du problème (I.4) toute fonction X de l'ouvert U qui vérifie l'équation $X' = A(\tau)X + B(\tau)$ pour tout $\tau \in I$, ainsi que la condition initiale $X(\tau_0) = X_0$ pour $(\tau_0, X_0) \in I \times U$.

Théorème I.2.1.

Le problème (I.4) admet une solution unique.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de Cauchy lipschitz I.1.3, en effet soit F une fonction définie par

$$F : I =]\alpha, \beta[\times U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(\tau, X) \to X' = F(\tau, X) = A(\tau)X + B(\tau)$$

F est continue, vérifions qu'elle est lipschitzienne :

Soit $(\tau, X_1), (\tau, X_2) \in I \times U$,

$$\begin{aligned}
|F(\tau, X_1) - F(\tau, X_2)| &= |A(X_1 - X_2)| \\
&\leq \|A\| \|X_1 - X_2\| \\
&\leq \sup_{\tau \in I}(a_0(\tau), 1 + a_1(\tau)) \|X_1 - X_2\| \\
&\leq K \|X_1 - X_2\|
\end{aligned}$$

et $K > 0$ d'où F est lipschitzienne. □

Exemple I.2.1.

L'équation $x'' + 3x' + 4x + 36e^{\tau} = 0$ admet une solution unique, en effet si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}
X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x' \\ -3x' - 4x - 36e^{\tau} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -36e^{\tau} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A est un operateur constant donc continu et borné avec $\|A\| = 4$, et B est continue (l'exponentielle est une fonction continue), d'où F est lipschitzinne.

Proposition I.2.1.

Soit

$$\begin{aligned}
f : I \times U \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\
(\tau, x, x') &\to f(\tau, x, x') = a_0(\tau)x + a_1(\tau)x' + b(\tau)
\end{aligned}$$

où $a_0, a_1, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' = a_0(\tau)x + a_1(\tau)x' + b(\tau) \\ x(\tau_0) = \gamma_0 \\ x'(\tau_0) = \gamma_1 \end{cases} \quad \text{,avec } \tau \in I, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R},$$

admet une solution unique.

Proposition I.2.2.
Soit X_1 une solution maximale de $X' = A(\tau)X$ et soit X_2 une solution particulière de $X' = A(\tau)X + B(\tau)$, alors $X = X_1 + X_2$ est une solution maximale de l'équation $X' = A(\tau)X + B(\tau)$.

Démonstration. Soit X_1 solution maximale de $X' = AX$, d'où X_1 vérifie l'équation $X_1' = AX_1$.
De même soit X_2 solution particulière de $X' = AX + B$, d'où X_2 vérifie l'équation $X_2' = AX_2 + B$.
Posons $X = X_1 + X_2$, alors $X' = X_1' + X_2'$, mais on a

$$X_1' + X_2' = AX_1 + AX_2 + B$$

d'où

$$X' = A(X_1 + X_2) + B = AX + B,$$

ce qui donne que X est une solution de $AX + B$. □

I.3 Système homogène $X' = A(\tau)X$

Dans cette section on va donner la solution du problème homgène en utilisant l'opérateur résolvante.

Considérons le problème de Cauchy homgène suivant

$$\begin{cases} X' = A(\tau)X \\ X(\tau_0) = (\alpha_0, \beta_0) \end{cases} \tag{I.5}$$

avec $A : I =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est un operateur continu, $(\tau_0, X_0) \in I \times U \subseteq \mathbb{R}^2$.
Et $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ où x est solution de l'équation $x'' = a_0(\tau) + a_1(\tau)x' + b(\tau)$ définie par (I.3) et vérifie la solution initiale

$$\begin{pmatrix} x(\tau_0) \\ x'(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}$.

Proposition I.3.1.
Soit $\mathcal{S} = \{X : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ de classe } \mathcal{C}^1 / X' = A(\tau)X\}$ et soit $\tau \in I$, définissons l'application Π_τ par

$$\begin{aligned} \Pi_\tau : \mathcal{S} &\to \mathbb{R}^2 \\ \Phi &\to \Pi_\tau(X) = X(\tau) = (x(\tau), x'(\tau)) \end{aligned}$$

Alors,

1. $\mathcal{S}$ est un sous espace vestoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathrm{I\!R}^2)$.
2. Pour tout $\tau \in I$, Π_τ est un isomorphisme bicontinu (Π_τ est bijective continue et Π_τ^{-1} l'est aussi).
3. $\dim \mathcal{S} = 2$.

Démonstration. $*$ $\mathcal{S} \neq \emptyset$ car pour $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall \tau \in I$,

on a $X'^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$*$ $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{S}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in \mathcal{C}^1$,

On a $(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' = \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2'$,
d'où

$$\begin{aligned}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' &= \lambda_1 A(\tau) X_1 + \lambda_2 A(\tau) X_2 \\ &= A(\tau)\left(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in \mathcal{S}$.

$*$ Soit $\tau \in I$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{S}$,
on a $\Pi_\tau(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \left(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2\right)(\tau)$,
alors,

$$\begin{aligned}\Pi_\tau(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) &= (\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau), \alpha_1 x_1'(\tau) + \alpha_2 x_2'(\tau)) \\ &= \alpha_1 (x_1(\tau), x_1'(\tau)) + \alpha_2 (x_2(\tau), x_2'(\tau)) \\ &= \alpha_1 \Pi_\tau(X_1) + \alpha_2 \Pi_\tau(X_2)\end{aligned}$$

Π_τ est bijectif, en effet

$$\|\Pi_\tau(X)\| = \|X(\tau)\| = \|(x(\tau), x'(\tau))\| \leq \|X\||\tau| \leq K\|X\|,$$

on a $X \in \mathcal{S} : X' = A(\tau)X, X \in \mathcal{C}^1$, donc Π_τ est continue.
pour $\tau_0 \in I$,

$$\begin{aligned}&\Pi_\tau : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2 \\ &X \rightsquigarrow X(\tau_0) = (x(\tau_0), x'(\tau_0))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\Pi_\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S} \\ &(\alpha_0, \beta_0) \rightsquigarrow X\end{aligned}$$

i.e $X' = A(\tau)X$ et $X(\tau_0) = \begin{pmatrix} x(\tau_0) \\ x'(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$.
Π_τ^{-1} c'est l'operateur qui associe à chaque valeur (α_0, β_0) la solution du système $X' = A(\tau)X$ qui passe par (α_0, β_0) à l'instant τ_0.
Donc d'après le théorème d'existence X est définie d'une manière unique c'est à dire

Π_τ^{-1} est bijective et donc Π_τ est bijective, Π_τ^{-1} est continue consequence directe du théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres.

□

I.3.1 Opérateur résolvante

On va définir la résolvante du problème de Cauchy homogène (I.5).

Définition I.3.1. (i) On appelle système fondamental de l'équation $X' = A(\tau)X$ toute base de $\mathcal{S}$.

(ii) Soit (X_1, X_2) une base de $\mathcal{S}$, on appelle solution maximale de l'équation $X' = A(\tau)X$ toute combinaison linéaire de X_1, X_2 i.e. $\alpha X_1 + \beta X_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Définition I.3.2.
Soient $\tau, \tau_0 \in I =]\alpha, \beta[$, on appelle opérateur résolvante de $X' = A(\tau)X$, l'isomorphisme

$$\begin{aligned} R &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\tau, \tau_0) &\to R(\tau, \tau_0) = \Pi_\tau \circ \Pi_{\tau_0}^{-1}, \end{aligned}$$

i.e. $R(\tau, \tau_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Définition I.3.3.
On appelle résolvante l'application

$$\begin{aligned} R &: I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\ (\tau_1, \tau_2) &\to R(\tau_1, \tau_2) = \Pi_{\tau_1} \circ \Pi_{\tau_2}^{-1}, \end{aligned}$$

où $R(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} r_0(\tau_1, \tau_2) & r_1(\tau_1, \tau_2) \\ r_0'(\tau_1, \tau_2) & r_1'(\tau_1, \tau_2) \end{pmatrix}$ et $r_j^i(\tau, \tau) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

Propriétés I.3.1. 1. $\forall \tau_1, \tau_2 \in I,\ R(\tau_1, \tau_2) \circ R(\tau_2, \tau_3) = R(\tau_1, \tau_3)$,

2. $\forall \tau \in I,\ R(\tau, \tau) = Id_{\mathbb{R}^2}$,

3. $[R(\tau_1, \tau_2)]^{-1} = R(\tau_2, \tau_1)$.

Exemple I.3.1.

Soit $x'' = 0$, cette équation est équivalente à

$$X' = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

On a $x'' = 0 \Rightarrow x = \alpha\tau + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned} r_0(\tau_0, \tau_0) &= \alpha\tau_0 + \beta \\ r_0'(\tau_0, \tau_0) &= \alpha \end{aligned}$$

et $r_0(\tau_0, \tau_0) = 1$ et $r_0'(\tau_0, \tau_0) = 0$, par conséquent $\alpha = 0, \beta = 1$. D'où $r_0(\tau, \tau_0) = 1$, de même on a

$$\begin{aligned} r_1(\tau_0, \tau_0) &= \alpha\tau_0 + \beta \\ r_1'(\tau_0, \tau_0) &= \alpha \end{aligned}$$

mais $r_1(\tau_0, \tau_0) = 0$ et $r_1'(\tau_0, \tau_0) = 1$ d'où $\alpha = 1, \beta = -\tau_0$ ce qui donne $r_1(\tau, \tau_0) = \tau - \tau_0$.
Et alors la résolvante est donnée par

$$R(\tau, \tau_0) = \begin{pmatrix} 1 & \tau - \tau_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple I.3.2.

Soit l'équation suivante : $x'' - 3x' + 2x = 0 \ldots (*)$ où $x \in \mathcal{C}^2(]a, b[, \mathbb{R})$, $(*)$ est équivalente à

$$X' = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

on a $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ d'où $\lambda_1 = 1 \quad$ et $\lambda_2 = 2$

La forme générale de la solution est donnée par

$$x(\tau) = C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

et donc on a

$$\begin{aligned} r_0(\tau_0, \tau_0) &= C_1 e^{\tau_0} + C_2 e^{2\tau_0} \\ r_0'(\tau_0, \tau_0) &= C_1 e^{\tau_0} + 2C_2 e^{2\tau_0} \end{aligned}$$

mais $r_0(\tau_0, \tau_0) = 1$ et $r_0'(\tau_0, \tau_0) = 0$, d'où $C_1 = 2e^{-\tau_0}$, et $C_2 = -e^{-2\tau_0}$. Donc

$$r_0(\tau, \tau_0) = 2e^{\tau - \tau_0} - e^{\tau - 2\tau_0}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} r_1(\tau_0, \tau_0) &= C_1 e^{\tau_0} + C_2 e^{2\tau_0} \\ r_1'(\tau_0, \tau_0) &= C_1 e^{\tau_0} + 2C_2 e^{2\tau_0} \end{aligned}$$

avec $r_1(\tau_0, \tau_0) = 0$ et $r_1'(\tau_0, \tau_0) = 1$ par conséquent $C_1 = -e^{-\tau_0}$ et $C_2 = -e^{-2\tau_0}$ ce qui donne $r_1(\tau, \tau_0) = -e^{\tau - \tau_0} - e^{\tau - 2\tau_0}$.

D'où la résolvante est donnée par

$$R(\tau, \tau_0) = \begin{pmatrix} 2e^{\tau - \tau_0} - e^{2(\tau - \tau_0)} & -e^{\tau - \tau_0} - e^{2(\tau - \tau_0)} \\ 2e^{\tau - \tau_0} - 2e^{2(\tau - \tau_0)} & -e^{\tau - \tau_0} - 2e^{2(\tau - \tau_0)} \end{pmatrix}.$$

Théorème I.3.1.

Le problème de Cauchy (I.5) admet une solution donnée par

$$X(\tau) = R(\tau, \tau_0) X_0.$$

Démonstration. En effet, on a $R(\tau, \tau_0) X_0 = (\Pi_\tau \circ \Pi_{\tau_0}^{-1})(X(\tau_0))$, d'où

$$\begin{aligned} R(\tau, \tau_0) X_0 =& \Pi_\tau (\Pi_{\tau_0}^{-1}(X(\tau_0))) \\ =& X(\tau). \end{aligned}$$

□

Corollaire I.3.1.

Pour tout $\tau, \tau_0 \in I$, $\quad R(\tau, \tau_0)$ est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R'(\tau, \tau_0) = A(\tau)R(\tau, \tau_0) \\ R(\tau_0, \tau_0) = Id_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

Démonstration. D'après le théorème $X(\tau) = R(\tau, \tau_0)X_0$ est solution de (I.5) d'où

$$X'(\tau) = R'(\tau, \tau_0)X_0,$$

mais $R'(\tau, \tau_0) = A(\tau)R(\tau, \tau_0)$, d'où

$$R'(\tau, \tau_0) = A(\tau)R(\tau, \tau_0).$$

De plus, $X(\tau_0) = X_0$ et $X(\tau_0) = R(\tau_0, \tau_0)X_0$ ce qui donne $R(\tau, \tau_0) = Id$. □

Corollaire I.3.2.

Le système $\{(r_0(\cdot,\cdot), r_0'(\cdot,\cdot)), (r_1(\cdot,\cdot), r_1'(\cdot,\cdot))\}$ est une base de $\mathcal{S}$, qu'on appelle système fondamental principal de la solution de (I.5).

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, puisque la $dim\mathcal{S} = 2$ et $dim\mathcal{S} \neq 0$ il suffit de vérifier que la famille est libre, $\forall \tau \in I$,

$$\begin{cases} \lambda_1 r_0(\tau, \tau_0) + \lambda_2 r_1(\tau, \tau_0) = 0 \\ \lambda_1 r_0'(\tau, \tau_0) + \lambda_2 r_1'(\tau, \tau_0) = 0 \end{cases}$$

En prenant $\tau = \tau_0$ on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. □

I.3.2 Wronksien

Définition I.3.4.

Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$, on appelle wronksien de X_1, X_2 l'application

$$W : I \to \mathbb{R}$$
$$\tau \to W(\tau, X_1, X_2) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}.$$

Exemple I.3.3.

$x'' + 2x' + x = 0 \Leftrightarrow X' = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X.$

et $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2$, d'où les valeurs propres sont données par $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, et la solution est donnée par

$$x(\tau) = (C_1 + C_2\tau)e^{-\tau}.$$

Après calcul de la résolvante on trouve $r_0(\tau, \tau_0) = (1-\tau_0+\tau)e^{\tau_0-\tau}, r_1(\tau, \tau_0) = \dfrac{-\tau_0+\tau}{1-2\tau_0}e^{\tau_0-\tau}$.

On pose $X_1(\tau) = \begin{pmatrix} r_0(\tau, 0) \\ r_0'(\tau, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\tau)e^{-\tau} \\ -\tau e^{-\tau} \end{pmatrix}$ et $X_2(\tau) = \begin{pmatrix} r_1(\tau, 0) \\ r_1'(\tau, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau e^{-\tau} \\ (1-\tau)e^{-\tau} \end{pmatrix}$.

Calculons le wronksien

$$W(\tau, X_1, X_2) = det|X_1(\tau), X_2(\tau)| = e^{-2\tau}, \qquad \forall \tau.$$

Notation 1.

On note $W(\tau) = W(\tau, X_1, X_2)$.

Proposition I.3.2.

Pour tout $\tau, \tau_0 \in I$, on a $W(\tau) = W(\tau_0) \det R(\tau, \tau_0)$.

Théorème I.3.2.

W est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, W est solution de l'équation différentielle dite équation d'évolution

$$W'(\tau) = tr(A(\tau)) * W(\tau).$$

Démonstration. Soient X_1, X_2 une base de $\mathcal{S}$ où X_1 et X_2 sont deux éléments de $\mathcal{S}$.

$$W(\tau) = det[X_1(\tau), X_2(\tau)].$$

$X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ donc sont de classe $\mathcal{C}^1$, par conséquent $W(\tau)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ (la régularité de W se découle de celle des X_i).
On a

$$W(\tau) = x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau),$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} W'(\tau) &= x_1'(\tau)x_2'(\tau) + x_1(\tau)x_2''(\tau) - x_2'(\tau)x_1'(\tau) - x_2(\tau)x_1''(\tau) \\ &= x_1(\tau)x_2''(\tau) - x_2(\tau)x_1''(\tau) \end{aligned}$$

On a aussi $X_i' = A(\tau)X$ et $x_i'' = a_0(\tau)x_i + a_1(\tau)x_i'$ pour $i = 1, 2$, d'où

$$\begin{aligned} W'(\tau) &= x_1(\tau)\left(a_0(\tau)x_2(\tau) + a_1(\tau)x_2'(\tau)\right) - x_2(\tau)\left(a_0(\tau)x_1(\tau) + a_1(\tau)x_1'(\tau)\right) \\ &= a_1(\tau)\left(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau)\right) = a_1(\tau)W(\tau). \end{aligned}$$

vu que $A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(\tau) & a_1(\tau) \end{pmatrix}$, alors $W'(\tau) = tr(A) * W(\tau)$. □

Corollaire I.3.3. 1. Pour tout $\tau, \tau_0 \in I$, $W(\tau) = W(\tau_0)e^{\int_{\tau_0}^{\tau} tr(A(s))ds}$.

2. $\det R(\tau, \tau_0) = e^{\int_{\tau_0}^{\tau} tr(A(s))ds}$.

3. Pour tout $\tau \in I$, $\quad W(\tau)$ a un signe constant.

4. S'il exist $\tau^* \in I$ tel que $W(\tau^*) = 0$ alors pour tout $\tau \in I$, $\quad W(\tau) = 0$.

Corollaire I.3.4.

On dit que (X_1, X_2) est un système fondamental de solution de $X' = A(\tau)X$ (respectivement (x_1, x_2) est un système fondamental de l'équation $x'' = a_0(\tau)x + a_1(\tau)x'$) si et seulement si $\forall \tau \in I, \quad W(\tau) \neq 0$.

I.3.3 Procédé D'Alember et d'invariance

Considérons l'équation

$$x'' = a_0(\tau)x + a_1(\tau)x', \tag{I.6}$$

où $a_0, a_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et x est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On peux chercher la solution de cette équation sans utuliser la résolvante à la place on utilise le procédé D'Alember et d'invariance.

Théorème I.3.3.

Soit $x_1(\tau) \neq 0$ une solution particulière de (I.6), si $x_2 = \phi(\tau)x_1(\tau)$ où ϕ est solution de l'équation $\phi'' = (a_1 - 2\frac{x_1'}{x_1})\phi'$ et ϕ n'est pas constante,
alors $\{x_1, x_2\}$ est un système fondamental de solution de l'équation (I.6).

Démonstration. Montrons que $x_2$est solution de (I.6), en effet
on a $x_2 = \phi x_1$ d'où

$$x_2' = \phi' x_1 + \phi x_1', \qquad \text{et } x_2'' = 2\phi' x_1' + \phi'' x_1 + \phi x_1''.$$

En remplaçant dans l'équation (I.6) et en tenant compte que x_1 est solution de (I.6)on trouve

$$\begin{aligned} a_0(\tau)x_2 + a_1(\tau)x_2' - x_2 &= \phi(a_0(\tau)x_1 + a_1(\tau)x_1' - x_1) + \phi'(a_1(\tau)x_1 - 2x_1') - \phi'' x_1 \\ &= x_1\phi'' - \phi'' x_1 = 0 \end{aligned}$$

alors x_2 est solution de (I.6).
Montrons maintenant que $\{x_1, x_2\}$ est un système fondamental, en effet

Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}$.
Le wronksien donne

$$W(\tau, X_1, X_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1^2\phi'$$

puisque $x_1 \neq 0$ et ϕ n'est pas constante alors $W(\tau, X_1, X_2) \neq 0$.

D'où $\{x_1, x_2\}$ est un système fondamental de solution de (I.6).

□

Définition I.3.5.

On appelle invariante de l'équation (I.6)ication I définie de $[\alpha, \beta]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ par

$$I(\tau) = \frac{a_1'(\tau)}{2} - \frac{a_1^2(\tau)}{4} - a_0(\tau).$$

pour tout $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Théorème I.3.4.

Soit $\phi \neq 0$, une solution de l'équation différentielle $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{a_1}{2}$ et soit ψ une solution de l'équation $\psi'' + I(\tau)\psi = 0$, alors $x = \phi\psi$ est une solution de (I.6)

Démonstration. On a $x = \phi\psi$, d'où

$$x' = \phi'\psi + \phi\psi', \qquad \text{et } x'' = \phi'\psi' + \phi''\psi + \phi\psi''$$

Il suffit de calculer $a_0(\tau)x + a_1(\tau)x' - x$ qu'on trouvera égale à zéro. □

Exemple I.3.4.

Soit

$$3x'' + \frac{6}{\tau}x' + 3x = 0$$

où $x \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. On a $a_1(\tau) = \frac{-2}{\tau}$ et $a_0(\tau) = -1$. D'où $I(\tau) = 1$, et ψ est la solution de l'équation

$$\psi'' + \psi = 0$$

qui est donnée par $\psi(\tau) = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer ϕ on résoud l'équation

$$\frac{\phi'}{\phi} = -\frac{1}{\tau}$$

qu'on trouve égale à $\phi = \frac{C_3}{\tau}$ avec $C_3 \in \mathbb{R}$.

La solution et donc donnée par $x(\tau) = \phi(\tau)\psi(\tau) = \dfrac{\alpha \sin\tau + \beta\cos\tau}{\tau}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On pose $x_1(\tau) = \frac{\sin\tau}{\tau}$, $\quad x_2(\tau) = \frac{\cos\tau}{\tau}$, $\{x_1, x_2\}$ qui est un système fondamental, en effet :

$$W(\tau) = \begin{vmatrix} \frac{\sin\tau}{\tau} & \frac{\cos\tau}{\tau} \\ \frac{\cos\tau}{\tau} - \frac{\sin\tau}{\tau^2} & -\frac{\sin\tau}{\tau} - \frac{\cos\tau}{\tau^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\tau^2} \neq 0 \qquad \tau \in I.$$

I.4 Système non homogène $X' = A(\tau)X + B(\tau)$

Soit l'équation linéaire d'ordre deux,

$$\begin{cases} x'' & = a_0(\tau)x + a_1(\tau)x' + b(\tau), \\ x(\tau_0) & = \alpha_0 \\ x'(\tau_0) = \beta_0 \end{cases} \tag{I.7}$$

où $a_0, a_1, b : I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}$ et $\tau_0 \in I$.

L'écriture matricielle ramène (I.7) à un système différentiel d'ordre 1

$$\begin{cases} X' = A(\tau)X + B(\tau) \\ \quad X(\tau_0) = X_0 \end{cases} \tag{I.8}$$

avec $A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(\tau) & a_1(\tau) \end{pmatrix}$, $B(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(\tau) \end{pmatrix}$. et $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$.

Théorème I.4.1.

Le problème de Cauchy (I.4) admet pour solution

$$X(\tau) = R(\tau, \tau_0)X_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} R(\tau, s)B(s)ds.$$

où $R(\tau, \tau_0)$ est la résolvante du système $X' = AX$.

Exemple I.4.1.

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' = b(\tau) \\ x(\tau_0) = \alpha_0, \quad x'(\tau_0) = \beta_0. \end{cases}$$

Le problème maticielle assicié est donné par

$$\begin{cases} X' = A(\tau)X + B(\tau) \\ X(\tau_0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(\tau) \end{pmatrix}$.
ESSM $X' = AX$ i.e. $x'' = 0$ la résolvante est donnée par

$$R(\tau, \tau_0) = \begin{pmatrix} 1 & \tau - \tau_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution est donnée par

$$X(\tau) = R(\tau, \tau_0)X_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} R(\tau, s)B(s)ds.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \tau-\tau_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \int_{\tau_0}^{\tau} \begin{pmatrix} 1 & \tau-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_0+\beta_0(\tau-\tau_0) \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau} (\tau-s)b(s)ds \\ \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau} b(s)ds \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où la solution est

$$x(\tau) = \alpha_0 + \beta_0(\tau-\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau-s)b(s)ds.$$

I.5 Exercices

Exercice I.5.1.

Trouver la résolvante et la solution des problèmes suivants :

1. $x'' - \sqrt{5}x' - 2x = 0$ avec $x(1) = 1$ et $x'(1) = 0$.

2. $x'' - 4x' + 3x = 0$ avec $x(1) = -2$ et $x'(1) = 1$.

Exercice I.5.2.

Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants

$$1) \begin{cases} x'' - 5x' + 4x = 2t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) - 1 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x'' + 2x' - 2x = e^t \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice I.5.3.

Trouver la solution de

1. $x'' + 2tx' + t^2x = 0$

2. $tx'' - 2x' = 0$

I.6 Conclusion

On a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy non homogène d'ordre deux, en passant par l'écriture matricielle équivalente.
On a donné la forme générale de la solution du problème homogène en utilisant la résolvante, on a fini le chapitre par la solution du problème non homogène.
chaque section est enrichie par des exemples détaillés.

Chapitre II

Problèmes aux limites et fonction de Green

Dans ce chapitre on va étudier les problèmes aux limites et les résoudre en utilisant la fonction de Green. On va aussi donner les propriétés de la fonction de Green, celle ci existe quand la solution du problème homogène est nulle, et de la fonction de Green généralisée qui exite quand la solution du problème homogène est non nulle.

II.1 Définitions et notations

Considérons l'équation différentielle du second ordre définie pour tout t dans l'intervalle $[a, b]$

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t), \tag{II.1}$$

où a_0, a_1 et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$.
On peut réecrire l'équation (II.1) sous la forme

$$\frac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t) \tag{II.2}$$

Avec $p(t) = \exp(\int_a^t a_1(s)ds)$, $p(t) > 0$, $q(t) = a_0(t)p(t)$ et $f(t) = g(t)p(t)$.

Définition II.1.1.

On note par L l'opérateur définit par l'équation (II.2),

$$L : \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$
$$x \to Lx(t) = \frac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t).$$

Où q et f sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et p est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $p(t) > 0$, pour tout $t \in [a,b]$.

On va considérer par la suite le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t) \\ B_1(x) = \alpha_a x(a) + \beta_a x'(a) = \gamma_a \\ B_2(x) = \alpha_b x(b) + \beta_b x'(b) = \gamma_b \end{cases} \tag{II.3}$$

où les coefficients $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a$ et β_b sont des constantes réelles telle que $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ (i=a,b).

Notation 2.

f et q sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et p est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $p(t) > 0$, pour tout $t \in [a,b]$,

1. On note (PP) un problème aux limites non homogène avec des conditions non homogènes, pour $t \in [a,b]$

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t) \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = \gamma_a \\ \alpha_b x'(b) + \beta_b x(b) = \gamma_b \end{cases} \tag{II.4}$$

2. On note (PH) un problème aux limites non homogène avec des conditions homo-

gènes, pour $t \in [a, b]$

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t) \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = 0 \\ \alpha_b x'(b) + \beta_b x(b) = 0 \end{cases} \tag{II.5}$$

3. On note (HP) un problème aux limites homogène avec des conditions non homogènes, pour $t \in [a, b]$

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = 0 \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = \gamma_a \\ \alpha_b x'(b) + \beta_b x(b) = \gamma_b \end{cases} \tag{II.6}$$

4. On note (HH) un problème aux limites homogène avec des conditions homogènes, pour $t \in [a, b]$

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = 0 \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = 0 \\ \alpha_b x'(b) + \beta_b x(b) = 0 \end{cases} \tag{II.7}$$

II.2 Problème aux limites homogène

Considérons le problème aux limites (HH) suivant

$$\begin{cases} L(x(t)) = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = 0 \\ \alpha_a x'(a) + \beta_a x(a) = 0 \\ \alpha_b x'(b) + \beta_b x(b) = 0 \end{cases} \tag{II.8}$$

Où q est une fonction continue sur $[a, b]$ et p est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $p(t) > 0$, pour tout $t \in [a, b]$, et les coefficients $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a$ et β_b sont des constantes réelles telle que $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ (i=a,b).
Il est clair que le problème (II.8) admet au moins une solution par exemple $x \equiv 0$, le but

est de chercher une solution non triviale.

le problème (II.8) admet au moins une solution non triviale, en effet

Soient x_1 et x_2 deux solutions linéairement indépendantes sur $[a, b]$ de $Lx(t) = 0$, ces solutions existent toujours.

Supposons que x est une solution non nulle du problème (II.8), alors ils existent deux constantes c_1 et c_2 (non toutes les deux nulles) telle que pour tout $t \in [a, b]$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t). \tag{II.9}$$

Puisque x satisfait les conditions aux limites, on aura

$$\begin{cases} B_1(x) = c_1 B_1(x_1) + c_2 B_1(x_2) = 0 \\ B_2(x) = c_1 B_2(x_1) + c_2 B_2(x_2) = 0 \end{cases} \tag{II.10}$$

qui est un système en c_1 et c_2.

Le fait que c_1 et c_2 ne sont pas toutes les deux nulles nécéssite que le déterminant des coefficients soit nul, c'est à dire

$$\begin{vmatrix} B_1(x_1) & B_1(x_2) \\ B_2(x_1) & B_2(x_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{II.11}$$

Si la solution n'existe pas alors le problème (II.8) admet uniquement la solution triviale.

Il est clair que la fonction $y(t) = cx(t)$ où c est une constante, est aussi une solution non triviale du problème (II.8), d'où on obtient une infinité de solutions non triviales de (II.8).

On résume cette analyse précédente dans le théorème suivant

Théorème II.2.1.

Le problème aux limites homogène admet une solution non triviale si et seulement si la condition (II.11) est satisfaite, dans ce cas toutes les solutions sont données par $y(t) = cx(t)$ où y et x sont des solutions non triviales du problème (II.8) et c est une constante arbitraire.

Exemple II.2.1.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont données par

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin 0 & cos 0 \\ \sin \pi & \cos \pi \end{vmatrix} = 0$$

d'où le problème admet des solutions non triviales.

En applicant les conditions aux limites on trouve $c_2 = 0$ et c_1 quelconque.

Donc les solutions sont données par $x(t) = c \sin t$ où c est une constante arbitraire.

Exemple II.2.2.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{4}x = 0 \\ x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont données par

$$x(t) = c_1 \sin \frac{1}{2}t + c_2 \cos \frac{1}{2}t.$$

Puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin 0 & cos 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

alors le problème donné admet uniquement la solution triviale, en utilisant les condition aux limites on trouve $c_1 = c_2 = 0$.

II.3 Problème non homogène et fonction de Green

Considérons le problème aux limites suivant avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} Lx = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] - q(t)x(t) = f(t) \\ x(a) = 0 \\ x(b) = 0 \end{cases} \tag{II.12}$$

où f et q sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et $p \in \mathcal{C}^1$ et $p(t) > 0$ pour tout $t \in [a,b]$.
Considérons le problème homogène

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ x(a) = 0 \\ x(b) = 0 \end{cases} \tag{II.13}$$

Soit ϕ_1 une solution non triviale de $L\phi = 0$ qui satisfait $\phi_1(a) = 0$,
et soit ϕ_2 une solution non triviale de $L\phi = 0$ qui satisfait $\phi_2(b) = 0$, donc on a deux solutions linéairement indépendantes.
On définit maintenant une solution de (II.21) par

$$x(t) = u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t) \tag{II.14}$$

où u_1, u_2 sont des fonctions à déterminer, dérivons (II.14) et posons

$$u_1'(t)\phi_1(t) + u_2'(t)\phi_2(t) = 0 \tag{II.15}$$

on obtient

$$x'(t) = u_1(t)\phi_1'(t) + u_2(t)\phi_2'(t) \tag{II.16}$$

dérivons (II.16)

$$x''(t) = u_1'(t)\phi_1'(t) + u_2'(t)\phi_2'(t) + u_1(t)\phi_1''(t) + u_2(t)\phi_2''(t), \tag{II.17}$$

et on a

$$Lx = f \Leftrightarrow p'(t)x'(t) + p(t)x''(t) + q(t)x(t) = f(t).$$

En remplaçant x,x' et x'' par (II.14),(II.15) et (II.16) on trouve

$$\begin{aligned} &p'(t)\left(u_1(t)\phi_1'(t) + u_2(t)\phi_2'(t)\right) + p(t)\left(u_1'(t)\phi_1'(t) + u_2'(t)\phi_2'(t) + u_1(t)\phi_1''(t) + u_2(t)\phi_2''(t)\right) \\ &\quad + q(t)\left(u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t)\right) = f(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &u_1(t)\left(p(t)\phi_1'(t) + p(t)\phi_1''(t) + q(t)\phi_1(t)\right) + u_2(t)\left(p'(t)\phi_2'(t) + p(t)\phi_2''(t) + q(t)\phi_2(t)\right) \\ &\quad + p(t)(u_1'(t)\phi_1'(t) + u_2'(t)\phi_2'(t)) = f(t). \end{aligned}$$

Mais $L\phi_1 = 0$ et $L\phi_2 = 0$, ainsi

$$u_1'(t)\phi_1'(t) + u_2'(t)\phi_2'(t) = \frac{f(t)}{p(t)} \tag{II.18}$$

De (II.18) et (II.15) on a le système

$$\begin{cases} u_1'(t)\phi_1(t) + u_2'(t)\phi_2(t) = 0 \\ u_1'(t)\phi_1'(t) + u_2'(t)\phi_2'(t) = \dfrac{f(t)}{p(t)} \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\dfrac{u_2'(t)\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \\ -\dfrac{u_2'(t)\phi_2(t)}{\phi_1(t)}\phi_1'(t) + u_2'(t)\phi_2'(t) = \dfrac{f(t)}{p(t)} \end{cases}$$

ainsi

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\dfrac{u_2'(t)\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \\ u_2'(t)\dfrac{\phi_2(t)\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\phi_1(t)}{\phi_1(t)} = \dfrac{f(t)}{p(t)} \end{cases}$$

or

$$W(\phi_1, \phi_2, t) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = W(t) \neq 0$$

Donc

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\dfrac{u_2'(t)\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \\ u_2'(t) = \dfrac{\phi_1(t)f(t)}{p(t)W(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) = -\dfrac{\phi_2(t)f(t)}{p(t)W(t)} \\ u_2'(t) = \dfrac{\phi_1(t)f(t)}{p(t)W(t)} \end{cases}$$

En integrant et en supposant $u_1(a) = 0$ et $u_2(b) = 0$ on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^t u_1'(s)ds = -\int_a^t \frac{\phi_2(s)f(s)}{p(s)W(s)}ds \\ \displaystyle\int_t^b u_2'(s)ds = \int_t^b \frac{\phi_1(s)f(s)}{p(s)W(s)}ds \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} u_1(t) = -\displaystyle\int_a^t \frac{\phi_2(s)f(s)}{p(s)W(s)}ds \\ u_2(t) = \displaystyle\int_t^b \frac{\phi_1(s)f(s)}{p(s)W(s)}ds \end{cases}$$

en remplaçant dans (II.14), on obtient

$$x(t) = \int_a^t \phi_1(t)\frac{\phi_2(s)f(s)}{p(s)W(s)}ds + \int_t^b \phi_2(t)\frac{\phi_1(s)f(s)}{p(s)W(s)}ds.$$

qui est solution du problème (II.21).

Définition II.3.1.

Soit ϕ_1 une solution de $\begin{cases} Lx = 0 \\ x(a) = 0 \end{cases}$ et ϕ_2 une solution de $\begin{cases} Lx = 0 \\ x(b) = 0 \end{cases}$
et soit $K = p(t)W(t, \phi_1, \phi_2)$, alors on définit la fonction de Green par l'application

$$G : I \times I \to \mathbb{R}$$

$$(t, s) \to G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{K}\phi_1(t)\phi_2(s) & a \leq t \leq s \\ \dfrac{1}{K}\phi_2(t)\phi_1(s) & s \leq t \leq b \end{cases}$$

Remarque II.3.1.

$K = p(t)W(t, \phi_1, \phi_2)$ est constante.

En effet, on a

$$\phi_1(t)L(\phi_2(t)) - \phi_2(t)L(\phi_1(t)) = \phi_1(t)(p'(t)\phi_2'(t) + p(t)\phi_2''(t) + q(t)\phi_2(t))$$

d'où

$$\phi_1(t)L(\phi_2(t)) - \phi_2(t)L(\phi_1(t)) = p'(t)\left(\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_2(t)\phi_1'(t)\right) + p(t)\left(\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_2(t)\phi_1'(t)\right)'$$

alors

$$\phi_1(t)L(\phi_2(t)) - \phi_2(t)L(\phi_1(t)) = (p(t)W(t, \phi_1(t), \phi_2(t)))' \qquad \text{(Identité de Lagrange).}$$

Puisque $L(\phi_i) = 0$, $i = 1, 2$ donc $(p(t)W(t, \phi_1(t), \phi_2(t)))' = 0$.

Théorème II.3.1.

Si le problème homogène (II.13) admet $x \equiv 0$ comme solution unique alors il existe une seule fonction qui ne dépend pas de f dite fonction de Green telle que pour toute fonction f, la solution x du problème non homogène (II.21) s'écrit de manière unique sous la forme

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds. \tag{II.19}$$

Propriétés II.3.1.

Les propriétés de la fonction de Green

1. $G(t, s) = G(s, t)$, G est symétrique pour l'opérateur différentiel L sur $[a, b]$.
2. $t \mapsto G(t, s)$ est continue et vérifie les conditions aux limites homogènes.
3. $t \mapsto \frac{\partial}{\partial t}G(t, s)$ est discontinue pour $t = s$, pour tout $t \in [a, b]$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t, t^+) - \frac{\partial}{\partial t}G(t, t^-) = \frac{1}{p(t)}.$$

4. Pour tout $t \neq s$, G satisfait l'équation $LG = 0$ i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t}(p(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t, s)) + q(t)G(t, s) = 0, \qquad t \in [a, b].$$

Exemple II.3.1.

Construire la fonction de Green et donner la solution du problème suivant

$$\begin{cases} x''(t) = f(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = 0 & x(1) = 0 \end{cases}$$

on a $q(t) = 0$, $p(t) = 1$, le problème homogène associé est

$$\begin{cases} x''(t) = 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = 0 & x(1) = 0 \end{cases}$$

d'où $x''(t) = 0 \Rightarrow x(t) = \alpha t + \beta$ avec les conditions aux limites on a

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

par conséquent la seule solution du problème homogène est $x \equiv 0$. Donc la fonction de Green existe.

pour $\begin{cases} x''(t) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ on a $\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta \\ \beta = 0 \end{cases}$, alors pour $\alpha = 1$ on a $\phi_1(t) = t$

pour $\begin{cases} x''(t) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$ on a $\begin{cases} x(t) = \alpha t + \beta \\ \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \end{cases}$, alors pour $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et on a $\phi_2(t) = t - 1$.

on a aussi

$$W(t, \phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

D'où la fonction de Green est définie par

$$G(s,t) = \begin{cases} s(t-1) & 0 \leq s \leq t \\ t(s-1) & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

pour que la solution soit en fonction de t, on travaille avec $G(s,t)$ au lieu de $G(t,s)$ et donc la solution est donnée par, pour $f(t) = t$ on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 G(s,t)f(s)ds \\ &= \int_0^t s(t-1)sds + \int_t^1 t(s-1)sds \\ &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}t \end{aligned}$$

Exemple II.3.2.

Trouver la fonction de Green en utilisant ses propiétés du problème suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Où f est une fonction continue et x est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. $G''(t,s) = 0 \Rightarrow G(t,s) = \begin{cases} at + b & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ ct + d & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$

2. $G(0,s) = b = 0$ et $G(1,s) = c + d = 0 \Rightarrow c = -d$, d'où

$$G(t,s) = \begin{cases} at & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ c(t-1) & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

3. $\lim\limits_{t \to s^+} G(t,s^+) = \lim\limits_{t \to s^-} G(t,s^-)$ d'où $as = c(s-1) \Rightarrow c = a\dfrac{s}{s-1}$.

4. $\dfrac{dG}{dt}(s^+,s) - \dfrac{dG}{dt}(s^-,s) = \dfrac{-1}{p(t)} \Rightarrow c - a = 1 \Rightarrow a = c - 1$ donc $c = s$ et $a = s - 1$.

Alors la fonction de Green est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ s(t-1) & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Considéons le problème suivant

$$\begin{cases} Lx = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] - q(t)x(t) = 0 \\ \qquad\qquad x(a) = \gamma_a \\ \qquad\qquad x(b) = \gamma_b \end{cases} \tag{II.20}$$

Soit $x_1(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$ solution du problème (II.20), où c_1 et c_2 sont des constante. En utilisant les conditions aux limites du problème (II.20) et du fait que $\phi_1(a) = 0$ et $\phi_2(b) = 0$, on obtient

$$x(a) = c_2\phi_2(a) = \gamma_a \qquad \text{et } x(b) = c_1\phi_1(b) = \gamma_b,$$

d'où

$$c_1 = \frac{\gamma_b}{\phi_1(b)} \qquad \text{et } c_1 = \frac{\gamma_a}{\phi_2(a)}$$

Exemple II.3.3.

Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = f(t) \\ x(0) = 1, \qquad x(1) = B \end{cases}$$

La solution du problème

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = f(t) \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = 0 \end{cases}$$

est donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin t \sin(s-1)}{\sin 1} & 0 \le t \le s \\ \dfrac{\sin s \sin(t-1)}{\sin 1} & s \le t \le 1 \end{cases}$$

Il reste à determiner la solution du problème

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1, \qquad x(1) = B \end{cases}$$

on a $x'' + x = 0 \Rightarrow x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$, par les conditions aux limites on a

$$x(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \qquad x(1) = B \Rightarrow B = \frac{B - \cos 1}{\sin 1}$$

et la solution $x_1(t) = \cos t + \dfrac{B - \cos 1}{\sin 1} \sin t$.
Donc la solution du problème donné est

$$x(t) = \cos t + \frac{B - \cos 1}{\sin 1} \sin t + \int_0^1 G(t,s) f(s) ds.$$

Théorème II.3.2.

Si le problème homogène (II.13) admet une solution unique $x \equiv 0$ et le problème (II.20) admet une solution x_1, alors la fonction de Green existe et le problème

$$\begin{cases} Lx = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] - q(t)x(t) = f(t) \\ x(a) = \gamma_a \\ x(b) = \gamma_b \end{cases} \tag{II.21}$$

admet pour solution

$$x(t) = x_1(t) + \int_a^b G(t,s) f(s) ds.$$

Exemple II.3.4.

Trouver la solution du problème non homogène suivant

$$\begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = 1 \qquad x(1) = 2. \end{cases}$$

Où f est une fonction continue et x est de classe $\mathcal{C}^2$.

Le problème homogène (HH) associé est donné par

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

la problème admet $x \equiv 0$ comme solution unique, d'où la fonction de Green existe et elle est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) & 0 \leq t \leq s \\ s(t-1) & t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

La solution du problème (HP)

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ x(0) = 1 \qquad x(1) = 2. \end{cases}$$

on a $x(t) = \alpha t + \beta$ en appliquant les conditions aux limites

$$\begin{cases} x(0) = \beta = 1 \\ x(1) = \alpha + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1. \end{cases}$$

d'où la solution du problème (HP) est donnée par $x_1(t) = x + 1$.
Par conséquant la solution du problème (PP) est

$$x(t) = x + 1 + \int_0^1 G(t,s)f(s)ds.$$

II.4 Fonction de Green généralisée

On a formuler la solution du problème aux limites si le problème homogène admet uniquement la solution trivialle sinon le problème (PH) (II.21) admet soit une infinité de solutions ou il n'en admet aucune.
Dans le cas ou $x \equiv 0$ n'est la seule solution du problème (HH), alors la fonction de Green n'existe pas, dans ce cas on passe à la fonction de Green généralisée ou modifiée.

Définition II.4.1.

Soit x_0 une solution non trivialle du problème (II.13), et x_1 une solution de $Lx = 0$ qui ne vérifie pas les conditions aux limites. x_0 et x_1 sont linéairement indépendantes i.e $W(t, x_0, x_1) \neq 0$.
et soit $K = p(t)W(t, x_0, x_1)$, alors on définit la fonction de Green généralisée ou modifiée par l'application, soit $I = [a, b] \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
G_M &: I \times I \to \mathbb{R} \\
&(t, s) \to G_M(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{K} x_0(t)x_1(s) & a \leq t \leq s \\ \dfrac{1}{K} x_0(s)x_1(t) & s \leq t \leq b \end{cases}
\end{aligned}
$$

Théorème II.4.1.

Si le problème (II.13) admet une solution non trivialle $x_0 \neq 0$, alors la fonction de Green généralisée existe et le problème (II.21) admet pour solution

$$x(t) = Cx_0(t) + \int_a^b G_M(s, t)f(s)ds, \quad \text{ssi} \qquad \int_a^b x_0(t)f(t)dt = 0.$$

Démonstration. On a une équivalce à démontrer, commençant par la première implication.
$\Rightarrow$? Soit $x(t)$ solution de (II.21) et x_0 solution de (II.13), on veut montrer que si x est solution de (II.21) alors $\int_a^b x_0(t)f(t)dt = 0$?
En effet, on a $Lx = f \Rightarrow x_0 Lx = x_0 f$.
En utilisant l'identité de Lagrange on a

$$
\begin{aligned}
x_0 Lx - xLx_0 = \frac{d}{dt}(p(t)W(t, x_0, x_1)) \quad &\Rightarrow \quad x_0 Lx = xLx_0 + \frac{d}{dt}(p(t)W(t, x_0, x_1)) \\
&\Rightarrow \quad x_0 f = xLx_0 + \frac{d}{dt}(p(t)W(t, x_0, x_1)).
\end{aligned}
$$

En intégrant de a à b on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b x_0(t)f(t)dt &= \int_a^b x(t)Lx_0(t) + \frac{d}{dt}(p(t)W(t,x_0,x))dt \\
&= \int_a^b x(t)Lx_0(t)dt + \int_a^b \frac{d}{dt}(p(t)W(t,x_0,x))dt \\
&= [p(t)W(t,x_0,x)] \\
&= p(b)w(b,x_0,x) - p(a)w(a,x_0,x) \\
&= p(b)\left(x_0(b)x'(b) - x(b)x_0'(b)\right) - p(a)\left(x_0(a)x'(a) - x(a)x_0'(a)\right) = 0.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$? Montrons maintenant que si $\int_a^b x_0(t)f(t)dt = 0$ alors x est solution de (II.21) ? Soit x_1 solution de $Lx = 0$ qui ne satisfait pas les conditions aux limites.
et soit x_0 solution du problème homogène (II.13), x_1 et x_0 sont lineairement indépendantes d'où on a

$$x(t) = \int_{c_1}^t x_0(s)\frac{x_1(s)f(s)}{k}ds + \int_{c_2}^t x_1(t)\frac{x_0(s)f(s)}{k}ds, \tag{II.22}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires et $k = p(t)w(t,x_0,x_1)$.
x est une solution du problème (II.21). Pour $t = a$ on obtient

$$\begin{aligned}
x(a) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{c_1}^a x_0(a)\frac{x_1(s)f(s)}{k}ds + \int_{c_2}^a x_1(a)\frac{x_0(s)f(s)}{k}ds = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_{c_2}^a x_1(a)\frac{x_0(s)f(s)}{k}ds = 0 \Rightarrow c_2 = b.
\end{aligned}$$

De même pour $t = b$ on trouve que c_1 est quelconque et $c_2 = b$.
Choisissons $c_1 = c_2 = a$ alors l'équation (II.22) devient

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_a^t \left(x_0(s)x_1(t) - x_0(t)x_1(s)\right)f(s)ds, \tag{II.23}$$

il est claire que x est une solution (II.21) et satisfait la condition $\int_a^b x_0(t)f(t)dt = 0$, mais cette solution n'est pas unique parce qu'on peut ajouter a (II.23) n'importe quel multiple de x_0, en effet si on ajoute le terme

$$x_0(t)\left(C + \int_a^b \frac{x_1(s)f(s)}{k}ds\right) = Cu_0(t) + u_0(t)\left(\int_a^t \frac{x_1(s)f(s)}{k}ds + \int_t^b \frac{x_1(s)f(s)}{k}ds\right)$$

avec C une contante, à l'équation (II.23) on obtient

$$x(t) = Cx_0(t) + \int_a^b G_M(s,t)f(s)ds.$$

□

Corollaire II.4.1.

Si le problème (II.13) admet pour solution $x_0 \neq 0$, et le problème (II.20) admet x_2 comme solution alors la fonction de Green modifiée existe et le problème

$$\begin{cases} Lx = \dfrac{d}{dt}[p(t)x'(t)] - q(t)x(t) = f(t) \\ x(a) = \gamma_a \\ x(b) = \gamma_b \end{cases} \tag{II.24}$$

admet la solution

$$x(t) = x_2(t) + Cx_0(t) + \int_a^b G_M(s,t)f(s)ds, \quad \text{ssi} \qquad \int_a^b x_0(t)f(t)dt = 0.$$

Propriétés II.4.1.

Les propriétés de la fonction de Green généralisée

1. $G_M(t,s) = G_M(s,t)$, G_M est symétrique pour l'opérateur différentiel L sur $[a,b]$.
2. $\forall t \in [a,b]$, $t \mapsto G_M(t,s)$ est continue et vérifie les conditions aux limites homogènes.
3. $t \mapsto \frac{\partial}{\partial t}G_M(t,s)$ est discontinue pour $t = s$, pour tout $t \in [a,b]$

$$\frac{\partial}{\partial t}G_M(t,t^+) - \frac{\partial}{\partial t}G_M(t,t^-) = \frac{1}{p(t)}.$$

4. Pour tout $t \neq s$, G_M satisfait l'équation $LG_M = 0$.
5. $\forall t \in [a,b]$, $\int_a^b G_M(t,s)x_0(s)ds = 0$

Exemple II.4.1.

Trouver la solution du problème suivant

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 3t + 1 \\ x(0) = x(1) = 1 \end{cases}$$

le problème homogène est donné par

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t \\ x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ x(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$$

Le problème homogène admet une solution non trivialle $x_0(t) = \sin \pi t$.

vérifions la condition d'orthogonalité, on a $f(t) = 3t + 1$, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin \pi t(3t+1)dt &= \int_0^1 \sin \pi t dt + 3 \int_0^1 t \sin \pi t dt \\ &= \left[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \right]_0^1 + 3 \left(\left[t - \frac{\cos \pi t}{\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin \pi t}{\pi} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{5}{\pi} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc G_M n'existe pas, et le problème n'admet pas de solution.

Exemple II.4.2.

Trouver la solution du problème suivant

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 2t - 1 \\ x(0) = 1 \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

le problème homogène est donné par

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t \\ x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ x(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$$

Le problème homogène admet une solution non trivialle $x_0(t) = \sin \pi t$.

vérifions la condition d'orthogonalité, on a $f(t) = 2t - 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin \pi t(2t-1)dt &= -\int_0^1 \sin \pi t dt + 2\int_0^1 t \sin \pi t dt \\
&= \left[\frac{\cos \pi t}{\pi}\right]_0^1 + 2\left(\left[t - \frac{\cos \pi t}{\pi}\right]_0^1\right) \\
&= -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = 0
\end{aligned}$$

d'où la condition d'orthogonalité est vérifiée et la fonction de Green généralisée existe en effet :

la solution du problème homogène est donée par $x_0(t) = \sin \pi t$, x_1 es une solution qui ne vérifie pas les condition aux limites i.e $c_1 \neq 0$ donc on peut prendre $x_1(t) = \cos \pi t + sin \pi t$, x_0, x_1 sont linéairement indépendantes

$$W(t, x_0, x_1) = \begin{vmatrix} \sin \pi t & \cos \pi t + \sin \pi t \\ \pi \cos \pi t & -\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t \end{vmatrix} = -\pi \neq 0$$

$K = p(t)W = -\pi$ et la fonction de Green généralisée est

$$G_M(s,t) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \sin \pi s(\cos \pi t + \sin \pi t) & 0 \leq s \leq t \\ -\frac{1}{\pi} \sin \pi t(\cos \pi s + \sin \pi s) & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

La solution du problème (HP)

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 cos\pi t + c_2 \sin \pi t \\ x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 1 \\ x(1) = 0 \Rightarrow c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc la solution du problème (PP) est donnée par

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos \pi t + c_2 \sin \pi t + \sin \pi t + + \int_0^1 G_M(s,t) f(s) ds \\
&= \frac{2t-1}{\pi^2} + \alpha \cos \pi t + \beta \sin \pi t.
\end{aligned}$$

D'où le problème admet une infinité de solution pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

II.5 Exercices

Exercice II.5.1.

Montrer que la fonction de Green existe et trouver la

$$1)\begin{cases} x'' + x' - x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x'' = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases}$$

Exercice II.5.2.

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ x(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le problème sous sa forme réduite.

2. Trouver la fonction de Green

3. Résoudre le problème pour $f(t) = e^{-t}$.

Exercice II.5.3.

Trouver la solution des problème suivant

$$1)\begin{cases} x'' + x = 1 \\ x(0) = x'(0) \\ x(\pi) + x'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x'' + x = 1 \\ x'(0) = 1 \\ x'(\pi) = 1 \end{cases}$$

II.6 Conclusion

On a présenté les problèmes aux limites d'une équation différentielle d'ordre deux qu'on a résolu en utilisant la fonction de Green.
Nous avons aussi donné la méthode de recherche de la fonction de Green qui existe quand le problème aux limites homgène admet uniquement la solution triviale, et dans le cas contraire on cherche la fonction de Green généralisée qui existe si et seulement si la condition d'orthogonalité est satisfaite.
A la fin on a donné la forme générale de la solution quand elle existe.

Chapitre III

Problème de Strum Liouville

Dans ce chapitre on va présenter un problème de Strum Liouville et chercher les valeurs propres et les fonctions propres associées, on va résoudre le problème homgène et non homogène et donner la forme générale de la solution en developpement en serie de Frourier et l'équation intégrale de la fonction de Green.

III.1 Définitions

Dans cette section on va définir les problème de Strum-Liouville.

Définition III.1.1.
On appelle un problème régulier de Strum-Liouville le prbolème aux limites qui dépend d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'une fonction poid ou densité $r(t) > 0$ avec $t \in [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ défini par le système suivant

$$\begin{cases} L^*x(t) = \dfrac{d}{dt}(p(t)x'(t)) + (q(t) + \lambda r(t))x(t) = 0 \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{cases} \tag{III.1}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ et $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ et $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.
Et $p, q, r : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $p(t) > 0$, $r(t) > 0$ des fonctions continues.

Corollaire III.1.1.

l'équation différentielle du second ordre

$$a(t)x''(t) + f(t)x'(t) + (g(t) + \lambda)x(t) = 0$$

où a, f et g sont des fonctions continues définies de $[a, b]$ à $\mathbb{R}$, peut se mettre sous la forme d'un problème de Strum-Liouville.

Démonstration. En Effet On pose

$$p(t) = e^{\int_a^t \frac{f(s)}{a(s)}ds}, \qquad q(t) = \frac{g(t)}{a(t)}p(t) \quad \text{et} \quad r(t) = \frac{p(t)}{a(t)}$$

avec $p(t) > 0$ et $a(t) > 0$, d'où

$$\frac{d}{dt}(p(t)x'(t)) + (q(t) + \lambda r(t))x(t) = 0,$$

ainsi

$$p(t)\frac{f(t)}{a(t)}x'(t) + p(t)x''(t) + (\frac{g(t)}{a(t)}p(t) + \lambda\frac{p(t)}{a(t)})x(t) = 0$$

alors

$$\frac{p(t)}{a(t)}(a(t)x''(t) + f(t)x'(t) + (g(t) + \lambda)x(t)) = 0$$

□

III.2 Valeurs propres et fonctions propres

Soit $x(t, \lambda) = c_1x_1(t, \lambda) + c_2x_2(t, \lambda)$ solution générale de l'équation $L^*x = 0$, alors le problème (III.1) admet pour solution $x(t, \lambda)$ si c_1, c_2 vérifient le système suivant

$$\begin{cases} c_1(\alpha_1x_1(a) + \alpha_2x_1'(a)) + c_2(\alpha_1x_2(a) + \alpha_2x_2'(a)) = 0 \\ c_1(\beta_1x_1(b) + \beta_2x_1'(b)) + c_2(\beta_1x_2(b) + \beta_2x_2'(b)) = 0 \end{cases}$$

et on a

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1(a) + \alpha_2 x_1'(a) & \alpha_1 x_2(a) + \alpha_2 x_2'(a) \\ \beta_1 x_1(b) + \beta_2 x_1'(b) & \beta_1 x_2(b) + \beta_2 x_2'(b) \end{vmatrix}$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$ alors la seule solution est $x(t, \lambda) \equiv 0$,
et si $\Delta(\lambda) = 0$ alors soint le problème admet une infinité de solutions ou il n'admet aucune.

Définition III.2.1.
(valeurs propres et fonctions propres)

1. Les racine de $\Delta(\lambda) = 0$ s'appellent les valeurs propres du problème (III.1).
2. A chaque valeur propre on associe une solution su problème (III.1) qu'on appelle fonction propre.

Propriétés III.2.1.
1. Soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes du problème (III.1) alors les solutions associées $x(t, \lambda_1)$ et $x(t, \lambda_2)$ sont lineairement indépendantes.
2. Soit λ_0 une valeur propre alors $E_{\lambda_0} = \{x = x(t, \lambda_0), L^* x = 0\}$ est un K espace vectoriel avec $dim E_{\lambda_0} = 1$

Théorème III.2.1.
Pour qu'un problème de Strum-Liouville soit régulier avec p, q, r continues sur $[a, b]$, on a toutes deux fonctions propres x_i, x_j de classe $\mathcal{C}^1$, qui correspondent à deux valeurs propres distinctes λ_i, λ_j respectivement, sont orthogonales et on a

$$< x_i, x_j >= \int_a^b x_i(t) x_j(t) r(t) dt = 0.$$

Démonstration. Pour x_i, x_j on a

$$\frac{d}{dt}(p(t) x_i'(t)) + (q(t) + \lambda_i r(t)) x_i(t) = 0 \qquad \times x_j(t) \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}(p(t) x_j'(t)) + (q(t) + \lambda_j r(t)) x_j(t) = 0 \qquad \times x_i(t) \qquad (2)$$

(1)-(2) donne

$$x_j \frac{d}{dt}(p(t)x_i'(t)) - x_i \frac{d}{dt}(p(t)x_j'(t)) + (\lambda_i - \lambda_j)r(t)x_i(t)x_j(t) = 0$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(p(t)(x_i'(t)x_j(t) - x_j'(t)x_i(t))) + (\lambda_i - \lambda_j)r(t)x_i(t)x_j(t) = 0$$

En intégrant on obtient

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_a^b r(t)x_i(t)x_j(t)dt = p(a)(x_i'(a)x_j(a) - x_j'(a)x_i(a)) - p(b)(x_i'(b)x_j(b) - x_j'(b)x_i(b))$$

Mais on a

$$\begin{cases} \alpha_1 x_i(a) + \alpha_2 x_i'(a) = 0 & \times x_j(a) \\ \alpha_1 x_j(a) + \alpha_2 x_j'(a) = 0 & \times x_i(a) \end{cases}$$

on obtient $\alpha_2(x_i'(a)x_j(a) - x_j'(a)x_i(a)) = 0$, alors si $\alpha_2 = 0$ donc $x_i(a) = x_j(a) = 0$ et si $\alpha_2 \neq 0$ donc $x_i'(a)x_j(a) - x_j'(a)x_i(a) = 0$.
de même pour $x_i'(b)x_j(b) - x_j'(b)x_i(b) = 0$ si $\beta_2 = 0$ alors $x_i(b) = x_j(b) = 0$ et si $\beta_2 \neq 0$ donc $x_i'(b)x_j(b) - x_j'(b)x_i(b) = 0$.
D'où $\int_a^b r(t)x_i(t)x_j(t)dt = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$ par suite x_i et x_j sont orthogonales. □

Théorème III.2.2.
Un problème de Strum-Liouville régulier n'admet que des valeurs propres réelles.

Démonstration. Admettons que $\lambda_j = \alpha + i\beta$ est une valeur prpore avec $\beta \neq 0$ du problème de Strum-Liouville, la fonction propre associé à λ_j est $x_j = u + iv$, alors

$$\frac{d}{dt}(p(t)(u' + iv')) + (q(t) + \lambda_j r(t))(u + iv) = 0$$

Si on prend le complexe conjugué de l'équation on obtient

$$\frac{d}{dt}(p(t)(u' - iv')) + (q(t) + \lambda_k r(t))(u - iv) = 0$$

si on reprend la preuve du théorème précenet on arrive à

$$(\lambda_j - \lambda_k) \int_a^b r(t) x_j(t) x_k(t) dt = 0$$

ce qui implique que $\lambda_j - \lambda_k = 0$ d'où $\beta = 0$ et les valeurs propres sont des réelles. □

Théorème III.2.3.

Pour un problème de Strum-Liouville régulier, à chaque valeur propre on associe une unique fonction propre.

Démonstration. Soit x_1, x_2 deux fonctions propres associées à la même valeur propore λ, alors

$$\frac{d}{dt}(p(t)x_1'(t)) + (q(t) + \lambda r(t))x_1(t) = 0 \qquad \times x_2(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(p(t)x_2'(t)) + (q(t) + \lambda r(t))x_2(t) = 0 \qquad \times x_1(t) \qquad (2)$$

(1)-(2) donne

$$x_2 \frac{d}{dt}(p(t)x_1'(t)) - x_1 \frac{d}{dt}(p(t)x_2'(t)) = 0$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(p(t)(x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t))) = 0$$

ce qui implique que $\forall t \in [a, b]$

$$p(t)(x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t)) = cst$$

donc

$$p(t)(x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t)) = p(a)(x_1'(a)x_2(a) - x_2'(a)x_1(a)) = 0$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1'(t)x_2(t) = x_2'(t)x_1(t) \\ &\Rightarrow \quad \frac{x_1'(t)}{x_(t)} = \frac{x_2'(t)}{x_2(t)} \\ &\Rightarrow \quad x_1(t) = Kx_2(t). \end{aligned}$$

D'où x_1 et x_2 sont co-linéaire (cotradiction).

Alors pour chaque λ on a une seule fonction propre. $\square$

Théorème III.2.4.

Soit un problème de Strum-Liouville regulier pour lequel $q(t) \geq 0$, alors ce admet une infinité de valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_i < \cdots$ avec $\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = +\infty$.

Définition III.2.2.

Soient les fonctions $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_3(t), \ldots, \phi_n(t), \ldots$ définis sur un intervalle de $\mathbb{R}$ $[a, b]$ où $n \in \mathbb{N}$. On dit que les fonctions de la suites $\{\phi_n\}_n$ sont orthogonales entre elles par rapport à la fonction poids $r(t)$ sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\int_a^b r(t)\phi_m(t)\phi_n(t)dt = 0 \qquad \text{pour tout } n \neq m,$$

on dit aussi que $\{\phi_n\}_n$ est un système orthogonale par rapport à $r(t)$ sur $[a, b]$.

Si $n = m$, on dit que $\|\phi_n(t)\| = \left[\int_a^b r(t)\phi_n^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$ est la norme de $\phi_n(t)$.

Remarque III.2.1.

- Si $\|\phi_n(t)\| = 1$, la fonction ϕ_n est dite normalisée.

- si ϕ_n est une fonction telle que $\|\phi_n(t)\| \neq 0$, alors la norme de $\vartheta = \dfrac{\phi_n(t)}{\|\phi_n(t)\|} = 1$,
  En effet

$$\begin{aligned} \int_a^b r(t)\vartheta^2(t)dt &= \int_a^b r(t)\frac{\phi_n^2(t)}{\|\phi_n(t)\|^2}dt \\ &= \frac{1}{\|\phi_n(t)\|^2}\int_a^b r(t)\phi_n^2(t) = \frac{\|\phi_n(t)\|^2}{\|\phi_n(t)\|^2} = 1 \end{aligned}$$

Exemple III.2.1.

Déterminer les fonctions propres normalisées du problème suivant pour $\lambda > 0$ et $t \in [0, L]$

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(L) = 0 \end{cases}$$

on a $r^2 + \lambda = 0$ d'où $r = \pm i\sqrt{\lambda}$, donc la solution est donnée par $x(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}t$.

Avec les conditons initiales on a

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \qquad x(L) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = K\pi$$

d'où $\sqrt{\lambda} = \dfrac{k\pi}{L}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les fonctions propres sont données par $\S_k(t) = \sin\dfrac{k\pi}{L}t$.

On calcule la norme de $\S_k(t)$:

$$\begin{aligned} \|\S_k(t)\|^2 = \int_0^L r(t)\S_k^2(t)dt &= \int_0^L \sin^2\frac{k\pi}{L}tdt \\ &= \int_0^L \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Les fonctions propres normalisées sont données par $\mathcal{X}_k(t) = \dfrac{\S_k(t)}{\|\S_k(t)\|} = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{k\pi}{L}t$

Définition III.2.3.

On dit que $\{\phi_n\}_n$ est un système orthonormal sur $[a, b]$ par rapport à $r(t)$ si et seulement si

$$\int_a^b r(t)\phi_n(t)\phi_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Exemple III.2.2.

Montrons que le système $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots\}$ est un système orthonormal de fonctions sur $[-\pi, \pi]$, pour la fonction poinds $r(t) = 1$, en effet

- Si $n, m \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)t - \cos(m+n)t}{2} dt \\
&= \begin{cases} \left[\frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)t - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)t\right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n \neq m \\ \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)t\right]_{-\pi} \pi & \text{si } n = m \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

- Si $n, m \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)t + \cos(m+n)t}{2} dt \\
&= \begin{cases} \left[\frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)t + \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)t\right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n \neq m \\ \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)t\right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n = m \geq 1 \\ [t]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \geq 1 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

- si $m \geq 0$ et $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+n)t - \sin(m-n)t}{2} dt \\
&= \begin{cases} \left[\frac{-1}{2(m+n)} \cos(m+n)t + \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)t\right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n \neq m \\ \left[-\frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)t\right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } n = m \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 0 & \text{si } n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$ est un système orthonormal sur $[-\pi, \pi]$

III.3 Développement en série de Fourier

Soit $\{\phi_n\}$ un système de fonctions propres du problème de Strum Liouville (III.1) orthonormal par rapport à la fonction poids $r(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$ et soit f une fonction arbitraire.
Considérons le problème de developpement de $f(t)$ en séries de Fourier de fonctions orthonormales $\phi_1, \phi_2, \ldots$, supposons que qu'un tel developpement existe et on a pour tout $t \in [a, b]$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \phi_n(t). \tag{III.2}$$

On veut déterminer les C_n, en effet, en multipliant (III.2) par $\phi_m(t)r(t)$ et en intergrant de a à b, on trouve

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)r(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)r(t)dt,$$

et comme $\displaystyle\int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)r(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$

on obtient $\displaystyle\int_a^b f(t)\phi_m(t)r(t)dt = C_m$, ainsi si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} C_n\phi_n(t)$ converge uniformement vers $f(t)$ pour $t \in [a, b]$, on peut garantir que les coefficients du developpement sont donnés par

$$C_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)r(t)dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{III.3}$$

Théorème III.3.1.
La série (III.2) de coefficients C_n donné par (III.3) est appelé la série de Fourier généralisé de la fonction par rapport au système orthonormal $\{\phi_n\}$.

Exemple III.3.1.
Déterminer la série (III.2) par la fonction $f(t) = t$ pour $0 \leq t \leq \pi$ par rapport au système orthonormal $\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin nt \right\}$, avec la fonction poids $r(t) = 1$.

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^\pi f(t)\phi_n(t)r(t)dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi t\sin ntdt \\ &= \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{n}\cos nt\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{2\pi}}{n}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

d'où $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\phi_n(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n}(-1)^{n+1}\sin nt.$

III.4 Problème de Strum Liouville non homogène

Soit Le problème de Struim Liouville non homogène pour $t \in [a,b]$ défini par le système suivant

$$\begin{cases} L^*x(t) = \dfrac{d}{dt}(p(t)x'(t)) + (q(t)+\lambda r(t))x(t) = f(t) \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{cases} \tag{III.4}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$ et $\alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0$ et $\beta_1^2+\beta_2^2 \neq 0$.
Et $p,q,r,f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $p(t) > 0$, $r(t) > 0$ des fonctions continues.
Nous supposons que les fonctions propres normalisées ϕ_n correspondantes aux valeurs propres λ_n du problème de Strum Liouville sont connues d'où pour $n \geq 1$, on a

$$L\phi_n(t) = \frac{d}{dt}(p(t)\phi_n'(t)) + q(t)\phi_n(t) = -\lambda_n r(t)\phi_n(t).$$

On suppose que la solution x du problème SL non homogène existe pour tout $t \in [a,b]$ et peut être exprimée sous la forme

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\phi_n(t)$$

x vérifie les conditions aux limites car les fonctions propres ϕ_n les satisfaits.
Il reste à déterminer les coefficients C_n de la série, on a

$$\begin{aligned} Lx(t) + \lambda r(t)x(t) = f(t) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} C_n L\phi_n(t) + \lambda r(t) \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \phi_n(t) = f(t) \\ &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(-\lambda_n r(t)\phi_n(t)) + \lambda r(t) C_n \phi_n(t) = f(t) \\ &\Rightarrow \quad r(t) \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(\lambda - \lambda_n)\phi_n(t) = f(t) \\ &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(\lambda - \lambda_n)\phi_n(t) = \frac{f(t)}{r(t)} = F(t). \end{aligned}$$

Théorème III.4.1. 1. Le problème de Strum Liouville non homogène admet une solution unique

$$x(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t) \qquad \text{avec } b_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$$

si et seulement si λ n'est pas une valeur propre.

2. Si $\lambda = \lambda_{n_0}$ est une valeur propre alors le problème (III.4) admet pour solution

$$x(t) = C\phi_{n_0}(t) + \sum_{n\neq n_0} \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t), \qquad \text{si et seulement si } \int_a^b f(t)\phi_{n_0}(t) = 0.$$

Démonstration. 1. Pour $\Delta(\lambda) \neq 0$ le problème (III.1) a pour solution $x \equiv 0$ imploque que le problème (III.3) admet une solution unique.
x est de classe $\mathcal{C}^2(I)$, et x vérifie les conditions de Drichlet, donc admet un developpement en série de Fourier généralisée qui converge uniformement vers x.
$x = \sum_n C_n\phi_n$ où $(\phi_n)_n$ est un système de fonctions propres, et $C_n =< x, \phi_n >$, et on a

$$Lx(t) = \lambda r(t)x(t) + f(t) \qquad \times\, \phi_n(t) \qquad (1)$$
$$L\phi_n(t) = \lambda_n r(t)\phi_n(t) + f(t) \qquad \times\, x(t) \qquad (2)$$

$(1)-(2)$ donne

$$\begin{aligned}\phi_n(t)Lx(t)-x(t)L\phi_n(t) &= \phi_n(t)f(t)+(\lambda_n-\lambda)\phi_n(t)x(t)r(t)\\ &= \frac{d}{dt}(p(t)w(t,\phi_n,x)) \qquad \text{(Identité de Lagrange)}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}C_n=<x,\phi_n> &= \int_a^b x(t)\phi_n(t)r(t)dt\\ &= \frac{1}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b \phi_n(t)Lx(t)-x(t)L\phi_n(t)-\phi_n(t)f(t)dt\\ &= \frac{1}{\lambda_n-\lambda}\left((p(t)w(t,\phi_n,x))_a^b-\int_a^b\phi_n(t)f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{\lambda-\lambda_n}\int_a^b\phi_n(t)f(t)dt=\frac{b_n}{\lambda-\lambda_n}. \qquad (*)\end{aligned}$$

$\frac{f(t)}{r(t)}=\sum_{n\geq 0}b_n\phi_n$ où $b_n=\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$, c'est à dire $b_n=<\phi_n,\frac{f(t)}{r(t)}>$, alors

$$x(t)=\sum_n C_n\phi_n=\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{\lambda-\lambda_n}\phi_n.$$

2. $x\neq 0$, la solution du problème homogène le cas où $\lambda_n=\lambda_{n_0}$, on peut prendre $x_0=\phi_{n_0}$.

$$(*)\Leftrightarrow(\lambda_n-\lambda_{n_0})C_n=b_n, \text{si}\lambda=\lambda_{n_0}\Rightarrow 0\cdot C_n=b_n.$$

— • Si $b_{n_0}=0$ on a une infinité de solutions.

— • Si $b_{n_0}\neq 0$ on a $0\cdot C_n\neq 0$ impossible d'où C_n n'existe pas, et donc x n'existe pas.

$b_{n_0}=0\Rightarrow b_{n_0}=\int_a^b f(t)\phi_{n_0}(t)dt=0$ c'est la condition d'orthogonalité d'où la solution existe si $b_n=0$ et

$$x(t)=C\phi_{n_0}(t)+\sum_{n\neq n_0}\frac{b_n}{\lambda-\lambda_n}\phi_n(t). \qquad C \text{ est une constante.}$$

□

Exemple III.4.1.

Soit le problème de Struim liouville non homogène suivant

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = t & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 & x(\pi) = 0. \end{cases}$$

Où $\lambda \neq n^2$ avec$n = 1, 2, \ldots$, le problème homogène associé aux fonctions propres normalisées données par $\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sinnt$ correspondantes aux valeurs propres $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Les coefficients de la série de Fourier au second membre $f(t) = t$ par rapport aux système orthonormale $\{\phi_n\}_n$ soient donnés par

$$b_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{n}(-1)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Puisque $\lambda \neq n^2$ (Valeurs propres) alors la solution est donnée par

$$x(t) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda - n^2)} sinnt.$$

III.5 Fonction de Green pour le problème de Strum Liouville

On peut aussi écrire la solution du problème de Strum Liouville en fonction de la fonction de Green.

Théorème III.5.1.

Soit $\{\phi_n\}_n$ un système orthonormé des fonctions propres de (III.1) et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue alors le problème (III.4) de S.L admet une solution unique $x(t)$ telle que

1. Si λ n'est pas une valeur propre du problème (III.1) alors

$$x(t) = \int_I G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \qquad \text{où} \qquad G(t, \tau) = \sum_n \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda - \lambda_n}.$$

2. Si λ est une valeur propre du problème (III.1), i.e $\lambda = \lambda_{n_0}$, alors

$$x(t) = \int_I G_M(t,\tau)f(\tau)d\tau + C\phi_{n_0}(t), \qquad \text{où} \qquad G_M(t,\tau) = \sum_{n \neq n_0} \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda_{n_0} - \lambda_n},$$

si et seulement si $\int_I \phi_n(t)f(t)dt = 0$.

Démonstration. 1. Si $\Delta(\lambda) \neq 0$ alors le problème (III.1) admet $x \equiv 0$ comme solution unique, et la fonction de Green existe et $x(t) = \int_I G(t,\tau)f(\tau)d\tau$, d'autre part, d'après le théorème précedent on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_n \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t), \text{où} \quad b_n = \int_I \phi_n(t)f(t)dt \\ \Rightarrow x(t) &= \sum_n \frac{\int_I \phi_n(\tau)f(\tau)d\tau}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t), \end{aligned}$$

la série converge absolument et uniformément car $x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_I \sum_n \frac{\phi_n(\tau)\phi_n(t)}{\lambda - \lambda_n} f(\tau)d\tau, \\ &= \int_I G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad \text{où} \qquad G(t,\tau) = \sum_n \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda - \lambda_n} \end{aligned}$$

2. Si $\Delta(\lambda) = 0$ alors le problème (III.1) admet une solution unique donnée par $x = C\phi_n$ pour $\lambda = \lambda_{n_0}$ et le problème (III.4) admet une infinité de solution si $\int_I \phi_n(t)f(t)dt = 0$.

Dans ce cas il existe $G_M(t,\tau)$ et $x(t) = \int_I G_M(t,\tau)f(\tau)d\tau + C\phi_{n_0}(t)$, d'un autre coté on a

$$\begin{aligned} & x(t) = C\phi_{n_0}(t) + \sum_{n \neq n_0} \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t) \\ \Rightarrow & \int_I G_M(t,\tau)f(\tau)d\tau = \sum_{n \neq n_0} \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t) \\ & \qquad = \sum_n \frac{\int_I \phi_n(\tau)f(\tau)d\tau}{\lambda - \lambda_n}\phi_n(t). \end{aligned}$$

D'où $G_M(t,\tau) = \sum_{n \neq n_0} \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda_{n_0} - \lambda_n}$

$\square$

III.6 Exemple

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ x(0) = x(\pi) = 0. \end{cases}$$

La solution du problème homogène est donnée par
$x(t) = \alpha \cos \sqrt{\lambda} t + \beta \sin \sqrt{\lambda} t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, par les conditions aux limites on a
$x(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.
$x(\pi) = 0 \Rightarrow \beta \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \sqrt{\lambda}\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ D'où les valeurs propres $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, les fonctions propres associées sont $x_k(t) = \sin \sqrt{\lambda} t = \sin kt$. • Les fonctions propres normalisées :

$$\int_0^\pi r(t) x_k^2(t) dt = \int_0^\pi \sin^2 kt dt = \frac{\pi}{2},$$

d'où le système orthonormé des fonctions propres est donné par $(\varphi_k(t))_{k \in \mathbb{N}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt$.
Il faut distinguer deux cas, le cas où λ est une valeur propre ou pas.

1. $\lambda \neq \lambda_k, \quad \lambda \neq k^2, \quad k \in \mathbb{N}$, on a

$$x(t) = \sum_{n \neq k} \frac{b_n}{\lambda - \lambda_k} \varphi_k(t) dt,$$

et on a

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ntdt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1-(-1)^n}{n} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{n} & n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$x(t) = \sum_{n=2p+1} \frac{4 \sin nt}{\pi n(\lambda - \lambda_n)} \qquad \lambda_n = n^2,$$

et

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \textstyle\sum_n \frac{\varphi_n(t)\varphi_n(s)}{\lambda - \lambda_n} = \displaystyle\sum_n \frac{2}{\pi} \frac{\sin nt \sin ns}{\lambda - n^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_n \frac{\sin nt \sin ns}{\lambda - n^2}. \qquad (S). \end{aligned}$$

Détermination de la fonction de Green

Soient

ψ_1 solution de $\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi_1(t) = \beta \sin \sqrt{\lambda} t.$

ψ_2 solution de $\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0 \\ x(\pi) = 0. \end{cases} \Rightarrow \psi_2(t) = \alpha \cos \sqrt{\lambda} t + \beta \sin \sqrt{\lambda} t.$

$\psi_2(\pi) = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \tan \sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \psi_2(t) = -\tan \sqrt{\lambda}\pi \cos \sqrt{\lambda} t + \sin \sqrt{\lambda} t$ pour $\beta = 1$.

Et on a $k = p()w(t, \psi_{1,2}) = \sqrt{\lambda} \tan \sqrt{\lambda}\pi \neq 0$.

d'où la fonction de Green est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \tan \sqrt{\lambda}\pi} \sin \sqrt{\lambda} t (\tan \sqrt{\lambda}\pi \cos \sqrt{\lambda} s - \sin \sqrt{\lambda} s) & 0 \leq t \leq s \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda} \tan \sqrt{\lambda}\pi} \sin \sqrt{\lambda} s (\tan \sqrt{\lambda}\pi \cos \sqrt{\lambda} t - \sin \sqrt{\lambda} t) & s \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

La série (S) converge vers la fonction de Green déterminée, et

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\pi f(s) G(t,s) ds \\ &= \frac{\cos \sqrt{\lambda}\pi}{\lambda} \left(\cos \sqrt{\lambda} t + \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\tan \sqrt{\lambda}\pi} \right). \end{aligned}$$

La série (2) converge vers cette fonction.

2. Si $\lambda = n_0^2$ on vérifie la condition d'orthogonalité, en effet

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(t)\varphi_n(t)dt &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin n_0 t \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-(-1)^n}{n_0} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \Rightarrow \text{ la solution existe} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{n} & \quad n \text{ impair} \Rightarrow \text{ le problème n'admet aucune solution.} \end{cases}
\end{aligned}$$

III.7 Exercices

Exercice III.7.1.

Trouver toutes les valeurs propres et les fonctions propres du problème suivant :

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0$$

et les conditions aux limites suivantes :

1. $\begin{cases} x(0) - x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases}$

2. $x(0) = x(\pi) - x'(\pi) = 0.$

3. $\begin{cases} x(\frac{-T}{2}) = x(\frac{T}{2}) \\ x'(\frac{-T}{2}) = x'(\frac{T}{2}) \end{cases}$

   Trouver le système orthonormé.

Exercice III.7.2.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + \lambda x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire leproblème sous la forme standard du problème de Struim Liouville.
2. Calculer les valeurs propres et les fonctions propres.
3. vérifier l'orthogonalité.

Exercice III.7.3.
Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = \pi t - t^2 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Trouver le developement en série de la solution du probème en terme de fonctions propres.

III.8 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les problèmes de Strum Liouville dont la résolution nécessite la recherche des valeurs propres et les fonctions propres.
On a aussi donné la forme générale de la solution quand elle existe, en developpement en série de Frourier et sous la forme integrale avec la fonction de Green, on a illustré les secrtions par des exemples.
Pour résoudre un problème de Strum Liouville non homgène il faut d'abord résoudre le problème homgène.
Àla fin on a proposé des exercices sans solutions.

Conclusion

Dans ce polycopié on a présenté quelques résultat d'existence et d'unicité des solution d'un problème aux limites de second ordre, en utilisant la théorie de la fonction de Green. On a aussi introduit les problèmes aux limites de Strum Liouville et la résolution de ces problèmes. Ces résultats permetent d'exprimer la solution générale de ces systèmes par une série de puissances de la valeur propre du système.
Dans l'avenir on espère pouvoir appliquer ces méthodes sur des modèles mathématiques appliqués à la physique, à la biologie ....

Table des matières

Bibliographie

[1] M.A. Al-Gwaiz. Sturm-Liouville Theory and its Applications.Springer-Verlag London Limited, 2008.

[2] A. Cabada, J.A. Cid, B.M. Villamarin, Compulation of Green's functions for boundary value problems with Mathematica. Applied Mathematics and Compulation 219 (2012), 1919-1936.

[3] A. Cabada, Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer Briefs in Mathematics. 2014.

[4] R.S.Johnson. Second-order ordinary differential equations special functions,Strum-Liouville theory and transforms. R.S.Johnson and Ventus Publishing ApS, 2012 ;

[5] O.A. LADYZHENSKAYA. The boundary value problems of mathematical physics. Translated by J. Lohwater, Springer-Verlag, New York. 1985.

[6] V. A. Marchenko. Sturm-Liouville operators and applications. Birkhauser, 1986.

[7] M. A. Pinsky. Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications. McGraw-Hill, Inc., 1991.

[8] H.Reinhard. Equations Différentielles . Gauthier Villars. 1971.

[9] V.Walter. Ordinary Differential Equations. Springer. New York (1998).