

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
المركز الجامعي لعين تموشنت  
Université d'Ain-Temouchent - Belhadj Bouchaib  
Institut des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique



Projet de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme de Master en :  
Domaine : SCIENCE ET TECHNOLOGIE  
Filière : GENIE MECANIQUE  
Spécialité : CONSTRUCTION MECANIQUE  
Thème

# *Modélisation Numérique du Vibration des Arbres Tournants*

Présenté le 01/10/2020 par :

MAGHARBI Abdelhadi

Devant les jurys composés de :

Dr.BELOUFA Mohamed El Amine Président

Dr. AMIRAT Mohamed C.U.B.B (Ain Temouchent) Encadreur

Dr.ASSEM Hassan Examineur

Année universitaire 2019/2020

## **Remerciements**

*La thèse est une période pleine de leçons, de découvertes, de doutes, d'espoirs, de difficultés et de rencontres. Tout cela constitue la richesse d'une thèse.*

*Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'avancement de mes travaux de recherche.*

*Je remercie profondément mon Encadreur, Mr AMIRAT.M, pour avoir accepté de diriger mes travaux et pour m'avoir guidé tout au long du mémoire pour ses conseils, ses critiques et son attitude exemplaire tout au long de la réalisation de ce travail de recherche, je remercie aussi tout le personnel du département du génie mécanique du centre universitaire BELHADJ BOUCHAIB D'Ain Temouchent.*

*Ensuite je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury pour le temps et l'énergie qu'ils ont dédiés à la lecture et à la correction de mon manuscrit.*

*Enfin. Je tiens à remercier tous les membres de ma famille mes amis pour leur appui moral surtout ma mère. Mon père. Je leur serai reconnaissant toute ma vie.*

## Liste des tableaux

N°	Titre de Tableaux	Pages
1	Maillage du Rotor	60
2	Maillage du Rotor avec disque et balourd	61
3	les déplacements max et les fréquences (modèle 1)	63
4	Fréquence et déplacement Max de chaque mode calculé (modèle 2)	65

## Liste des Figures

N°	Titre de Figures	Pages
1	Modèle de Rankine	15
2	Exemple typique de banc d'essai de paliers de rotor	17
3	Modèle Jeffcott	19
4	Caractéristiques fondamentales des vibrations	25
5	Vibration de torsion	26
6	Arbre de machine	28
7	Elément infinitésimale d'arbre	30
8	Position relative des centres de masse G et géométrique O1	32
9	modèle de palier	38
10	Description du rotor [23]	42
11	Roue de la turbine Francis	42
12	Fonctionnement d'un palier hydrodynamique	44
13	Elément de balourd	44
14	Ecart d'usinage (excentricité et parallélisme) cause de balourd	45
15	Modèle discrétisé de balourd dans le rotor (à droite) et Profil de distribution de balourd dans le rotor (à gauche)	45
16	Rotor à arbre long (a), Rotor typedisque arbre (b), Rotor à aubes (c), Rotor libre (d).	46

17	Rotor de Jeffcott.	47
18	Eléments finis d'une poutre	47
19	Elément fini de la poutre isolé	48
20	Illustration de l'interpolation d'une fonction	49
21	Modèle élément fini du disque	50
22	Modèle élément fini de l'arbre	51
23	Maillage du rotor	60
24	Maillage du rotor avec disque et balourd	61
25	Condition aux limite ( Modèle 1)	62
26	condition aux limité (Modèle2)	62
27	Déformation totale (modèle 1)	65
28	la vitesse de rotation de fonctionnement $\Omega= 10000$ rpm	63
29	graph de fréquence et de déplacement max	64
30	Déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10000 rpm	64
31	Déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10000 rpm	65
32	Diagramme de Campbell palier rigide (modèle1)	66
33	Diagramme de Campbell palier rigide (modèle2)	68

# SOMMAIRE

## Introduction Générale

## Chapitre I Recherche bibliographique sur les arbres tournants (Rotor)

<b>I. Introduction à la dynamique des rotors.....</b>	<b>13</b>
<b>I.1 Principes de base.....</b>	<b>14</b>
<b>I.2 Historique du dynamique du rotor.....</b>	<b>15</b>
<b>I.3 Rotors.....</b>	<b>16</b>
<b>I.3.1 Classification des rotors.....</b>	<b>17</b>
<b>I.3.2 Selon le paramètre géométrique.....</b>	<b>17</b>
<b>I.3.2.1 Modèle usuel à long arbre.....</b>	<b>17</b>
<b>I.3.2.2 Modèle de disque rotor.....</b>	<b>17</b>
<b>I.3.2.3 Modèle de rotor aubagé.....</b>	<b>18</b>
<b>I.3.2.4 Modèle de rotor libre.....</b>	<b>18</b>
<b>I.3.3 Selon les paramètres mécaniques.....</b>	<b>18</b>
<b>I.3.3.1 Modèle de rotor de Jeffcott.....</b>	<b>18</b>
<b>I.4 Machines tournantes.....</b>	<b>20</b>
<b>I.4.1 Historique.....</b>	<b>20</b>

<b>I.5 Analyse vibratoire des machines tournantes.....</b>	<b>21</b>
--	-----------

## **Chapitre II Théorie De Vibration**

### **II .Vibration**

<b>II.1 INTRODUCTION.....</b>	<b>24</b>
<b>II.2 NOTIONS FONDAMENTALES.....</b>	<b>25</b>
<b>II.3 TYPES DE VIBRATIONS.....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.1 Vibrations transversales.....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.2 Vibrations longitudinales.....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.3 Vibrations de torsion.....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.4 AMORTISSEMENT.....</b>	<b>27</b>
<b>II.3.5 Vitesse Critique.....</b>	<b>27</b>
<b>II.4 Dommages Causés Par Des Vibrations Excessives.....</b>	<b>27</b>
<b>II.5 Vibrations des arbres de machines.....</b>	<b>28</b>
<b>II.5.1 Equation différentielles.....</b>	<b>28</b>
<b>II.6 Formulation intégrale.....</b>	<b>34</b>
<b>II.5 Disque minces indéformables.....</b>	<b>36</b>
<b>II.7 Paliers.....</b>	<b>37</b>

## **Chapitre III : recherche sur les applications de vibration des arbres tournants**

### **Introduction**

<b>III.1 Description des éléments d'un rotor.....</b>	<b>41</b>
<b>III.1.1 Définition du rotor.....</b>	<b>42</b>

<b>III.1.1.1. Disque.....</b>	<b>42</b>
<b>III.1.1.2. Arbre.....</b>	<b>43</b>
<b>III.1.1.3. Aube.....</b>	<b>43</b>
<b>III.1.1.4. Palier.....</b>	<b>43</b>
<b>III.1.1.5. Balourd.....</b>	<b>44</b>
<b>III.1.1.5.1 Géométrie des pièces tournantes.....</b>	<b>44</b>
<b>III.1.1.5.2 Assemblage des pièces.....</b>	<b>45</b>
<b>III.1.1.5.3 Conditions de service.....</b>	<b>45</b>
<b>III.1.1.6 Types de rotors.....</b>	<b>46</b>
<b>III.2. Généralités sur la méthode des éléments finis.....</b>	<b>47</b>
<b>III.2.1 Problème d'interpolation.....</b>	<b>48</b>
<b>III.2.2 Principe général de la méthode des éléments finis.....</b>	<b>49</b>
<b>III.2.3 Etablissement des éléments finis du rotor.....</b>	<b>50</b>
<b>III.2.4.Modélisation élément fini du disque.....</b>	<b>50</b>
<b>III.2.5.Modélisation élément fini de l'arbre.....</b>	<b>51</b>
<b>III.2.5.1 Energie de déformation de l'arbre.....</b>	<b>54</b>
<b>III.2.6 Modélisation du rotor.....</b>	<b>56</b>
<b>III.2.7 Simulation numérique du mouvement du rotor.....</b>	<b>56</b>

## **Chapitre IV : modélisation numérique de vibration des arbres tournants sur ANSYS 2019**

<b>IV.1. Analyse modale logiciel Workbench ANSYS 19.....</b>	<b>58</b>
<b>IV.1.1. Caractéristique géométrique de rotor.....</b>	<b>58</b>
<b>IV.1.2.Génération et maillage de la géométrie de rotor.....</b>	<b>60</b>
<b>IV..1.3. Les conditions aux limites.....</b>	<b>61</b>

<b>IV.2 : Résultant de simulation numérique.....</b>	<b>63</b>
<b>IV.2.1 : Le déplacements Max et les fréquences.....</b>	<b>63</b>
<b>IV.2.2 Digramme de campbell .....</b>	<b>66</b>
<b>IV.2.3 Comparaison des résultats entre les deux modèles....</b>	<b>68</b>
<b>Conclusion Générale</b>	



## Introduction Générale

Les machines tournantes représentent la classe de machines la plus importante. Ces machines sont utilisées pour le transport de fluides, le traitement et le formage des métaux, la production d'énergie, la propulsion d'aéronefs et d'autres usages. Le rotor équipé d'un disque à aubes ou d'une hélice tourne à grande vitesse dans un environnement fluide, permettant à la machine tournante de générer, d'absorber, de transformer ou d'ajuster une grande quantité d'énergie, généralement dans un boîtier compact et incomparablement petit. . Les exigences économiques croissantes pour une plus grande capacité, une meilleure qualité et une meilleure acceptation de l'environnement dans la production et le transport, ainsi que l'augmentation inévitable des attentes des utilisateurs, imposent des exigences strictes sur les performances des machines.

Les machines tournantes produisent des vibrations en fonction de la structure du mécanisme impliqué dans le processus. Tout défaut dans la machine peut augmenter ou exciter les signatures de vibration. Le comportement vibratoire de la machine dû au déséquilibre est l'un des principaux aspects des machines tournantes qui doit être étudié en détail et pris en compte lors de la conception. Tous les objets, y compris les machines tournantes, présentent une fréquence naturelle en fonction de la structure de l'objet. La vitesse critique d'une machine tournante se produit lorsque la vitesse de rotation correspond à sa fréquence naturelle. La vitesse la plus basse à laquelle la fréquence naturelle est rencontrée pour la première fois est appelée la première vitesse critique, mais à mesure que la vitesse augmente, des vitesses critiques supplémentaires sont observées. Par conséquent, minimiser le déséquilibre de rotation et les forces externes inutiles sont très importants pour réduire les forces globales qui déclenchent la résonance. Lorsque la vibration est en résonance, elle crée une énergie destructrice qui devrait être la principale préoccupation lors de la conception d'une machine tournante. L'objectif ici doit être d'éviter les opérations proches de la critique et de les traverser en toute sécurité en accélération ou en décélération. Si cet aspect est ignoré, cela peut entraîner la perte de l'équipement, une usure excessive de la machine, une rupture catastrophique irréparable ou même des blessures humaines et des pertes de vie.

Cependant, l'effort qui en résulte devient de plus en plus important et exige fortement le comportement dynamique global et l'amplitude des vibrations de la machine deviennent habituellement, les structures sont trop hautes pour les supporter. Pour cette raison, l'amplitude de la déformation de l'arbre doit être contrôlée et sa fréquence de résonance doit être connue pour éviter des vibrations très élevées produisant une efficacité moindre et un bruit excessif ; et cette vibration peut même provoquer une instabilité du système et des dommages au système : rupture. En raison de la fatigue, le roulement est endommagé et le frottement rotor / stator. Par conséquent, les machines tournantes sont plus importantes que jamais. Le contrôle du comportement des vibrations nécessite de comprendre les caractéristiques des vibrations. L'arbre tournant en matériau composite, la prédiction de cette connaissance est la connaissance de base de la conception de machines tournantes afin de fournir, en termes de vitesse, la gamme "sûre".

**Chapitre I :**  
**Recherche**  
**Bibliographique Sur**  
**Les Arbres**  
**Tournants (Rotor)**

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

## I. Introduction à la dynamique des rotors

la dynamique des rotors, est une branche spécialisée de la mécanique appliquée qui s'intéresse au comportement et au diagnostic des structures tournantes. Il est couramment utilisé pour analyser le comportement de structures allant des moteurs à réaction et turbines à vapeur aux moteurs automobiles et au stockage sur disque informatique. À son niveau le plus élémentaire, la dynamique du rotor concerne une ou plusieurs structures mécaniques (rotors) supportées par des roulements et influencées par des phénomènes internes qui tournent autour d'un seul axe. La structure portante est appelée stator. À mesure que la vitesse de rotation augmente, l'amplitude des vibrations passe souvent par un maximum appelé vitesse critique. Cette amplitude est généralement excitée par le déséquilibre de la structure tournante; les exemples quotidiens incluent l'équilibre du moteur et l'équilibre des pneus. Si l'amplitude des vibrations à ces vitesses critiques est excessive, une défaillance catastrophique se produit. De plus, les turbomachines développent souvent des instabilités liées à la constitution interne des turbomachines et qui doivent être corrigées. C'est la principale préoccupation des ingénieurs qui conçoivent de gros rotors.

La dynamique réelle de la machine est difficile à modéliser théoriquement. Les calculs sont basés sur des modèles simplifiés qui ressemblent à divers composants structurels (modèles à paramètres globaux), des équations obtenues en résolvant des modèles numériquement (méthode Rayleigh – Ritz) et enfin à partir de la méthode des éléments finis (FEM), qui est une autre approche pour la modélisation et l'analyse des la machine pour les fréquences naturelles. Il existe également certaines méthodes analytiques, telles que la méthode de la fonction de transfert distribué, qui peuvent générer des fréquences naturelles analytiques et de forme fermée, des vitesses critiques et une réponse de masse déséquilibrée. Sur n'importe quel prototype de machine, il est testé pour confirmer les fréquences précises de résonance, puis repensé pour garantir qu'aucune résonance ne se produit.

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

## I.1 Principes de base

L'équation du mouvement, sous forme de matrice généralisée, pour un rotor axialement symétrique tournant à une vitesse de rotation constante  $\Omega$  est [1] :

$$M\ddot{q}(t) + (C + G)\dot{q}(t) + (K + N)q(t) = f(t)$$

**M** est la matrice de masse symétrique

**C** est la matrice d'amortissement symétrique

**G** est la matrice gyroscopique à symétrie asymétrique

**K** est la matrice de rigidité du roulement ou du joint symétrique

**N** est la matrice gyroscopique de déviation pour l'inclusion, par exemple, d'éléments centrifuges.

dans laquelle  $q$  est les coordonnées généralisées du rotor en coordonnées inertielles et  $f$  est une fonction de forçage, incluant généralement le balourd.

La matrice gyroscopique  $G$  est proportionnelle à la vitesse de spin  $\Omega$ . La solution générale à l'équation ci-dessus implique des vecteurs propres complexes qui dépendent de la vitesse de rotation. Les spécialistes de l'ingénierie dans ce domaine s'appuient sur le diagramme de Campbell pour explorer ces solutions.

Une caractéristique intéressante du système d'équations du dynamique des rotors sont les termes hors diagonale de rigidité, d'amortissement et de masse. Ces termes sont appelés rigidité à couplage croisé, amortissement à couplage croisé et masse à couplage croisé. Lorsqu'il y a une rigidité à couplage croisé positive, une déviation provoquera une force de réaction opposée à la

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

direction de la déviation pour faire réagir la charge, ainsi qu'une force de réaction dans la direction du tourbillon positif. Si cette force est suffisamment importante par rapport à l'amortissement direct et à la rigidité disponible, le rotor sera instable. Lorsqu'un rotor est instable, il nécessite généralement l'arrêt immédiat de la machine pour éviter une panne catastrophique.

## I.2 Historique du dynamique du rotor :

L'histoire de la dynamique du rotor regorge d'interactions entre théorie et pratique.

W. J. M. Rankine a effectué une première analyse d'un arbre en rotation en 1869 Figure (1), mais son modèle n'était pas adéquat et il a prédit que des vitesses supercritiques ne pourraient pas être atteintes.

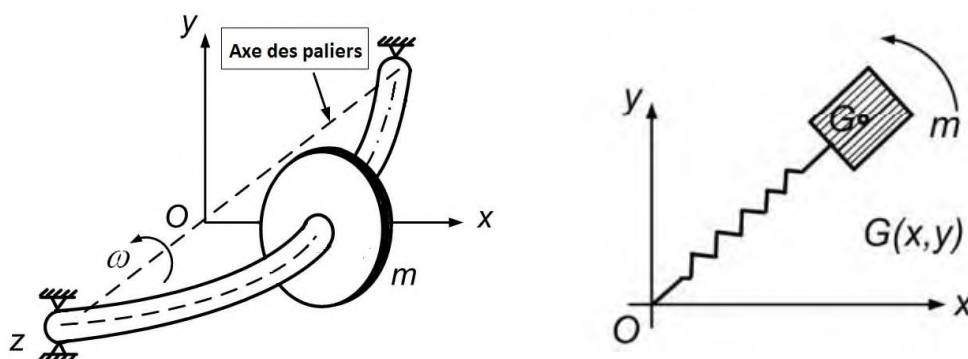


Figure 1 : Modèle de Rankine

En 1895, Dunkerley a publié un article expérimental décrivant les vitesses supercritiques. Gustaf de Laval, un ingénieur suédois, a fait fonctionner une turbine à vapeur à des vitesses supercritiques en 1889, et Kerr a publié un article montrant des preuves expérimentales d'une deuxième vitesse critique en 1916.

Henry Jeffcott a été mandaté par la Royal Society de Londres pour résoudre le conflit entre la théorie et la pratique. Il publia un article désormais considéré comme classique dans le Philosophical Magazine en 1919 dans lequel il confirma l'existence de vitesses supercritiques

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

stables. August Föppl a publié à peu près les mêmes conclusions en 1895, mais l'histoire a largement ignoré son travail.

Entre le travail de Jeffcott et le début de la Seconde Guerre mondiale, il y avait beaucoup de travail dans le domaine des instabilités et des techniques de modélisation, aboutissant au travail de Nils Otto Myklestad et MA Prohl qui a conduit à la méthode de la matrice de transfert (TMM) pour l'analyse des rotors. La méthode la plus répandue utilisée aujourd'hui pour l'analyse rotordynamique est la méthode des éléments finis.

Les modèles informatiques modernes ont été commentés dans une citation attribuée à Dara Childs, "la qualité des prédictions à partir d'un code informatique a plus à voir avec la solidité du modèle de base et la perspicacité physique de l'analyste. Les codes ne guériront pas les mauvais modèles ou le manque de jugement technique. "

Le professeur F. Nelson a beaucoup écrit sur l'histoire de la dynamique des rotors et la majeure partie de cette section est basée sur son travail.

## 1.3 Rotors

Une machine se compose de pièces qui tournent autour d'un axe fixe à travers des roulements, Tous les objets tournant autour du même axe et leurs roulements forment un rotor (Figure 2). La partie non tournante de la machine est spécifiée par définition Rotor de la machine du stator pendant le fonctionnement Énergie tournante et une petite quantité d'énergie vibratoire. Il ressort de cette Le fait que de plus petites turbines propulsent un énorme avion. En opération Le rotor est soumis à des vibrations latérales (flexion), longitudinales (axiales) et torsionnelles; Utilisé seul ou en combinaison. Le but de la dynamique du rotor est Gardez l'énergie de vibration aussi petite que possible[2].

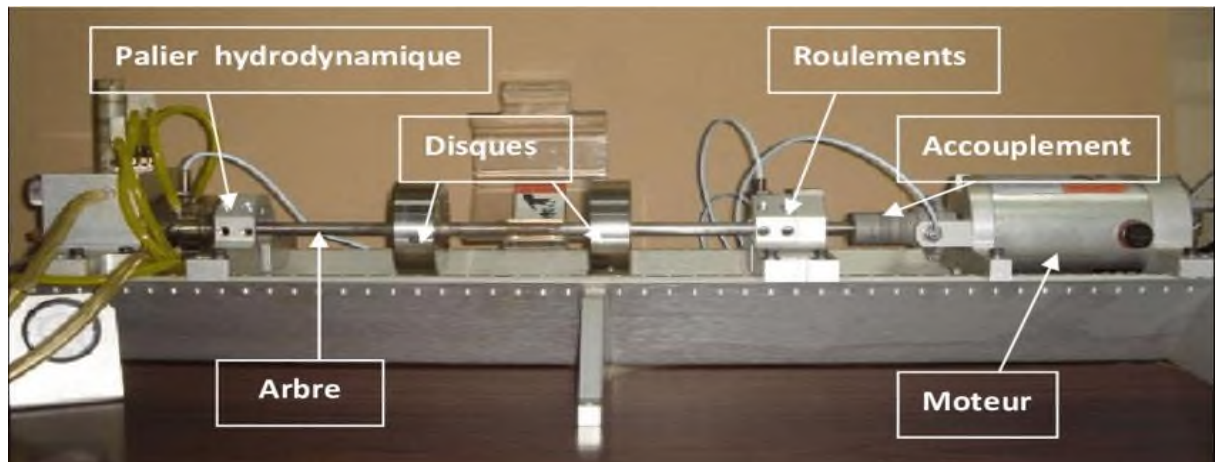
Le rôle principal des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique, ...etc), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses. Comme ci- dessous :

Les différents organes intervenants dans une machine tournant sont classés comme ci-dessous :

- Les arbres (éléments principaux de machines tournants)

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

- Les éléments du support et de positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulement, paliers magnétiques, etc.)
- Les éléments de transmission de mouvements (engrenages, courroi, joint d'accouplement, embrayages, etc.)
- Les éléments fonctionnels (roues aubagées, broches, hélices, etc.)



**Figure 2** Exemple typique de banc d'essai de paliers de rotor

## I.3.1 Classification des rotors

On peut classer les rotors industriels selon deux paramètres en suivant les éléments principaux du rotor (rotor , disque , support ) .

## I.3.2 Selon le paramètre géométrique :

**I.3.2.1 Modèle usuel à long arbre** : les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur, ...etc.). La majorité des travaux de recherche concernant l'étude de comportement vibratoire et dynamique des machines industrielles sont focalisées sur ce modèle.

**I.3.2.2 Modèle de disque rotor** : les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre. Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement dynamique de



# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

quelques que machine industrielle par exemple, micro turbine, turbine hydraulique. Etc Parmi les études effectuées en mentionne celles faites au début de H.Lamb et R.Southwell [3] et la plus récemment en trouve les travaux de G.Genta et A.Tonoli [4].

**I.3.2.3 Modèle de rotor aubagé :** ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubagée (hélicoptère, aérogénérateur, fan de turboréacteur, soufflerie industrielle...etc). L'étude de comportement dynamique de ce modèle reste assez compliquée, car le mode vibratoire du rotor est liée aux différents phénomènes combinatoires (aérodynamique, aéroélasticité, hydrodynamique...etc) une solution a été présentée par John F ward [5] et K.Sinhas [6] pour l'étude et l'identification du comportement vibratoire en déterminant les fréquences et les modes de résonance d'un rotor aubagé à une force radiale concentrée .

**I.3.2.4 Modèle de rotor libre :** ce modèle de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support). Il est bien attiré l'attention des chercheurs dans les dernières années pour développer et étudier le comportement dynamique des projectiles, satellites géostationnaires. P.Hughes [7] et P.W . Fortescue et J. Stark [8] sont considéré parmi les premier chercheur qui ont étudiées le comportement dynamique de ce genre de rotor , la majorité des travaux qui ont suivi ,sont faites par la méthode de simulation numérique .

## I.3.3 Selon les paramètres mécaniques :

**I.3.3.1 Modèle de rotor de Jeffcott :** c'est un modèle simple utilisé pour étudier le comportement dynamique en flexion des rotors industrielle, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopiques. leur comportement dynamique a été étudié par H. Jeffcott en 1919 [9] Ce modèle est très souvent utilisé par les chercheurs dans un but phénoménologique, car il permet une interprétation plus directe de l'influence de quelque phénomène sur le comportement dynamique de système .

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

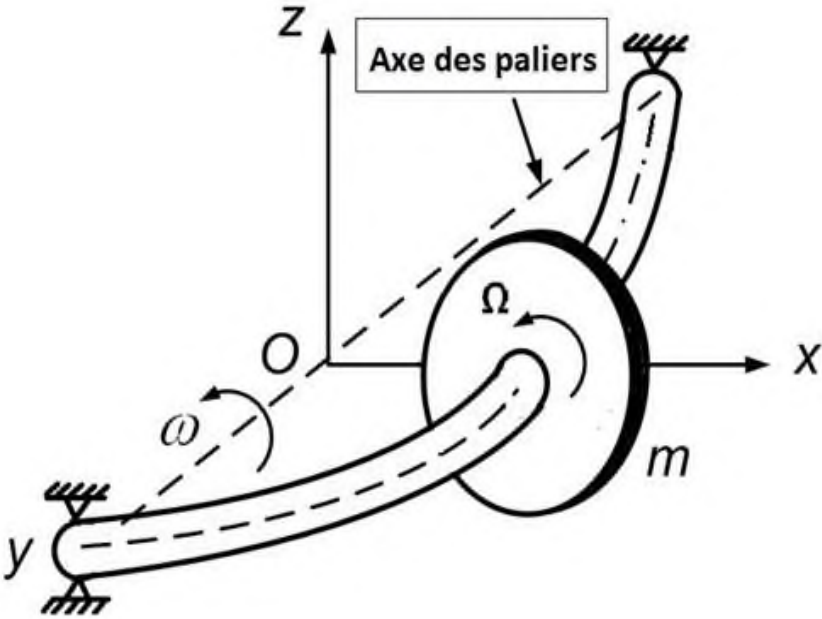


Figure 3 : Modèle Jeffcott

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

## I.4 Machines tournantes

A l'exception de l'électricité issue de l'exploitation de panneaux photovoltaïques, quelle que soit la source d'énergie primaire, l'électricité est produite par un système qualifié de machine tournante, c'est à dire un alternateur produisant de l'électricité.[10]

### I.4.1 Historique

Michaël Faraday (1791 - 1867) met en évidence en 1831 les phénomènes d'induction électromagnétique. C'est à dire que lorsque le champ magnétique créé par un aimant varie en présence d'une bobine, cela fait apparaître dans son circuit un courant appelé courant induit.

Le sens du courant induit dépend donc du sens du déplacement de l'aimant. Par conséquent, une rotation de l'aimant devant la bobine permet d'obtenir une tension alternative.

Principe de fonctionnement d'un alternateur

Un alternateur est une machine constituée de deux parties :

Une partie tournante : le rotor ;

Une partie fixe : le stator.

Le rotor est l'inducteur. Il peut être constitué d'un aimant permanent mais généralement c'est un électroaimant qui assure l'induction.

Le stator est l'induit. Il est constitué d'enroulements, sièges du courant alternatif induit par la variation du flux du champ magnétique généré par la rotation du rotor.

Lors du passage des pôles du rotor, les faces de chaque bobinage du stator changent de polarité ce qui entraîne un changement de sens du courant induit dans le stator. Cela signifie un changement de signe concernant la tension électrique récupérée aux bornes.

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

Il y a donc une alternance électrique positive et négative lors de la rotation du rotor. Si le rotor comporte deux paires de pôles, durant un demi-tour du rotor, la tension du stator réalise une alternance positive et une alternance négative, c'est ce que l'on appelle une période (intervalle de temps nécessaire pour qu'un processus se répète identique à lui-même).

Lors d'un tour du rotor, deux périodes sont alors décrites.

Sachant que la fréquence électrique en France est de 50 Hz et que la fréquence est l'inverse de la période, le rotor doit avoir une vitesse de rotation de 25 tours par seconde pour que la tension alternative produite décrive 50 périodes par secondes (25 tours x 2 périodes par tour) c'est à dire être à la fréquence de 50 Hz.

---

## I.5 Analyse vibratoire des machines tournantes

L'analyse vibratoire des machines tournantes est aujourd'hui très utilisée par les industriels pour diagnostiquer des défauts sur leurs machines avant que celles-ci ne subissent un fortuit : c'est la maintenance conditionnelle. L'identification du problème permet de mettre en place des actions curatives comme un réglage ou le remplacement d'une pièce défectueuse avant la ruine de la machine.[11]

La mesure des vibrations est effectuée à l'aide d'accéléromètres instrumentés sur les paliers de la machine (structure de la machine, et non sur la structure ou le capot de protection). On utilise également des sondes de proximité (capteurs de déplacements inductifs ou lasers) sur les machines à paliers lisses. Généralement, la mesure est prise dans les 3 axes.

Il peut être utile de mesurer le niveau global vitesse entre 10 et 1 000 Hz afin de pouvoir le comparer aux normes ISO 10816 qui donnent des critères sur l'état vibratoire de la machine pour différents types et puissances de machines. L'augmentation du niveau global vitesse en fonction du temps peut signifier une détérioration de la machine. Ceci est un indicateur qui donne une approximation de l'état vibratoire de la machine mais qui peut ne pas être suffisant dans le cas de vibrations hautes fréquences.

La mesure du spectre de vibration permet d'identifier les fréquences de vibrations de la structure et de diagnostiquer certains types de défauts tels que :

- Un problème d'équilibrage se manifestant par un niveau de vibration élevé à la fréquence de rotation de la machine. Un équilibrage permet alors de résoudre ce problème en ajoutant

# CHAPITRE 1 : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ARBRES TOURNANTS (ROTOR)

de la masse sur l'arbre ou la roue pour compenser le balourd. L'équilibrage peut se faire sur plusieurs plans ;

- Un défaut d'alignement se manifestant par un niveau de vibration élevé sur les harmoniques (multiples) de la fréquence de rotation de la machine ;
- Un défaut de roulement se caractérisant par l'apparition de chocs, par une augmentation du niveau vibratoire en haute fréquence et aux fréquences caractéristiques du roulement ;
- Un défaut sur un engrenage (dents abîmées par exemple) se manifestant par un niveau élevé aux fréquences caractéristiques de l'engrenage telles que la fréquence d'engrènement ;
- De la cavitation sur les pompes se manifestant par une augmentation du fond du spectre et un bruit sourd.

L'utilisation d'un top-tour permet de mesurer la vitesse de rotation.

La maintenance conditionnelle permet également de s'affranchir du système coûteux de la maintenance systématique qui consiste à changer une pièce périodiquement, qu'elle soit usée ou non.

**Chapitre II**  
**Théorie**  
**De**  
**Vibration**

# CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

## II -Vibration

### II.1 INTRODUCTION

Les vibrations sont presque omniprésentes dans les centrales électriques : les machines tournantes vibrent en raison des défauts d'équilibrage et d'alignement et des imperfections des paliers ; la tuyauterie et les échangeurs de chaleur vibrent sous l'effet des pulsations d'écoulement ; les structures vibrent en raison des vibrations transmises par les diverses pièces d'équipement qu'elles abritent ; même les lignes de transport d'électricité vibrent sous l'effet des rafales de vent. Ce ne sont là que quelques exemples types des phénomènes vibratoires qu'on peut observer dans une centrale.

De façon générale, les vibrations réduisent la durée de vie de l'équipement et, dans les cas extrêmes, peuvent endommager celui-ci ou même provoquer des défaillances catastrophiques. Par ailleurs, les vibrations peuvent dénoter des problèmes d'équipement. L'observation des phénomènes vibratoires peut donc permettre de déceler ces problèmes et d'éviter des dommages coûteux. La réduction et le contrôle des vibrations se révèlent essentiels à la sûreté et à la rentabilité de l'exploitation d'une centrale.

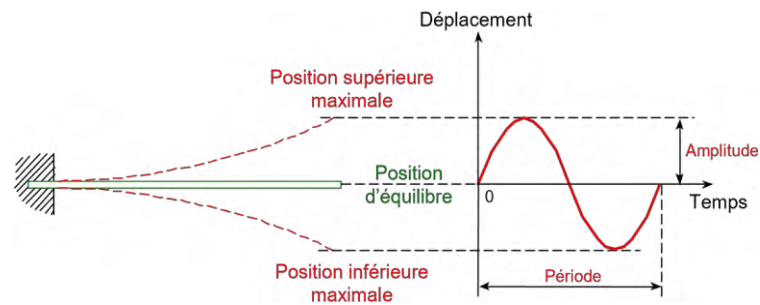
Le contrôle des vibrations est largement utilisé dans le cadre des activités d'exploitation et d'entretien des centrales nucléaires. Certaines grosses pièces d'équipement coûteuses comme le groupe turbogénérateur, les pompes principales du circuit de caloportage et les pompes d'alimentation de chaudière font l'objet d'un contrôle continu. Pour d'autres pièces d'équipement, on effectue périodiquement la lecture des appareils de mesure des vibrations pour évaluer l'état de l'équipement et prévenir des dommages coûteux. Ces activités de contrôle sont menées dans le cadre d'un programme de maintenance conditionnelle.

La présente partie portera sur les caractéristiques fondamentales et les causes des vibrations, les conséquences des vibrations excessives et les méthodes utilisées pour la prévention des vibrations. Ces connaissances vous permettront de comprendre certaines pratiques d'exploitation et de maintenance préventives.

# CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

## II.2 NOTIONS FONDAMENTALES

Prenons tout d'abord un objet dont l'une des extrémités est fixée à un support rigide et dont l'autre peut se déplacer dans un plan comme le montre la figure 4. On pourrait par exemple considérer cet objet comme une représentation approximative d'une poutre encastrée dans un mur, d'une lame de pompe centrifuge en porte-à-faux ou du bec de raccordement d'une machine de chargement du combustible. [12]



**Figure 4 :** Caractéristiques fondamentales des vibrations

Imaginons qu'on fléchit l'objet jusqu'à ce que son extrémité atteigne une de ses positions maximales et qu'on le relâche. L'extrémité se déplace, passe par sa position d'équilibre, atteint la position maximale opposée, repasse par sa position d'équilibre, puis revient à la position maximale initiale et ainsi de suite. Le mouvement répété autour de la position d'équilibre est appelé vibration.

Un cycle de vibration est complété lorsque l'objet passe deux fois consécutives par la position d'équilibre dans la même direction. La figure 4 illustre le déplacement d'un point fixe sur l'objet au cours d'un cycle.

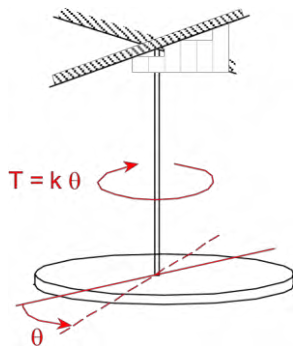


# CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

## II.3 TYPES DE VIBRATIONS

On distingue trois types de vibrations selon la direction du mouvement et les déformations que subit l'objet vibrant :

- Vibrations transversales (figures 4 et 5) ;
- Vibrations longitudinales ;
- Vibrations de torsion (figure 5).



Légende :

$T$  = couple de rappel  $\theta$  = déplacement angulaire par rapport à la position d'équilibre  $k$  = rigidité de torsion

**Figure 5** : Vibration de torsion

### II.3.1 Vibrations transversales

Les vibrations transversales sont les plus communes. Elles se produisent lorsqu'un objet est fléchi dans une direction perpendiculaire à son axe longitudinal. Un objet peut vibrer transversalement sans plier lorsqu'il n'est pas fixé à des supports rigides. Par exemple, les arbres des machines tournantes, les tuyaux et les tubes des échangeurs de chaleur peuvent être animés de vibrations transversales.

### II.3.2 Vibrations longitudinales

Des vibrations longitudinales se produisent lorsqu'un objet est sollicité par des forces longitudinales périodiques. Ces vibrations peuvent par exemple se produire dans les arbres des machines tournantes, les tuyaux et les grappes de combustible d'un réacteur.

### II.3.3 Vibrations de torsion

Des vibrations de torsion se produisent lorsqu'un objet est soumis à un mouvement angulaire périodique autour d'un axe de référence – généralement l'axe longitudinal de l'objet. Les arbres des machines tournantes et les lames des turbines et des compresseurs sont généralement animés de vibrations de torsion. [13]

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

### II.3.4 Amortissement

L'amortissement des vibrations est la dissipation de l'énergie mécanique d'un objet vibrant.

Dans le cas des vibrations libres, l'amortissement réduit à zéro l'amplitude des vibrations. Cette réduction est habituellement progressive. Si l'amortissement est suffisamment élevé, les vibrations libres cesseront même avant que le premier cycle ne soit complété. Dans les cas extrêmes, l'objet ne retournera même pas à sa position d'équilibre initiale après avoir été déplacé.

Dans le cas des vibrations forcées, l'amortissement a pour effet d'absorber l'énergie mécanique produite par la force d'excitation exercée sur l'objet. L'amplitude des vibrations se stabilise à une valeur à laquelle l'énergie produite est égale à l'énergie absorbée. En conséquence, plus l'amortissement est élevé, plus faible est l'amplitude. [14]

L'amortissement est principalement causé par :

- Le frottement interne dans le matériau constitutif de l'objet vibrant ;
- Le frottement entre les surfaces de l'objet vibrant et un autre objet ;
- Le frottement entre la surface de l'objet et le liquide avec lequel elle est en contact (amortissement par un liquide).

Bien qu'ils produisent en général un certain amortissement, les liquides peuvent causer des vibrations. C'est ce que nous verrons dans la prochaine partie.

### II.3.5 Vitesse Critique

La notion de vitesse critique s'applique seulement aux machines tournantes et surtout à l'élément principal de ces dernières, le rotor. La vitesse critique d'une machine tournante est la vitesse à laquelle une des fréquences propres de l'ensemble rotor-palier-socle est égale à la fréquence d'excitation correspondant à la vitesse de rotation de la machine.

L'utilisation du terme « ensemble rotor-palier-socle » dénote le fait que les fréquences propres du rotor dépendent de la rigidité de ses supports.[15]

## II.4 Dommages Causés Par Des Vibrations Excessives

Les vibrations excessives doivent être évitées et rapidement supprimées lorsqu'elles sont détectées parce qu'elles ont pour effet d'accélérer l'usure de l'équipement, qu'elles causent des dommages et qu'elles peuvent provoquer une défaillance et parfois même un accident catastrophique.

Les effets des vibrations causant de l'usure et des dommages sont les suivants :

- Fatigue ;
- Frottement et usure de contact ;
- Impacts ;

# CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

## II.5 Vibrations des arbres de machines

Dans ce chapitre, nous rappellerons les équations aux dérivées partielles décrivant les vibrations transversales de flexion des arbres de machines.

En outre, nous établirons leur forme intégrale globale équivalente, de façon à traduire le procédé de discrétisation présenté au chapitre suivant[16]

### II.5.1 Equation différentielles

Un arbre de machine est une structure dont le champ des déplacements pour l'étude des vibrations latérales est caractérisé par les déplacements dans deux plans orthogonaux. Dans la mesure où la distance entre les points nodaux des régimes vibratoires significatifs est sensiblement plus grande que les dimensions transversales de la structure, celle-ci peut être considérée comme une poutre en rotation. Les défauts dus à l'hétérogénéité de la matière, à l'usinage et au montage créent un écart entre l'axe géométrique et ligne des centres de masse. On admet que le milieu est quasi homogène, c'est-à-dire que l'inhomogénéité est suffisamment importante pour qu'une distinction entre la ligne des centres de masse et l'axe géométrique de la structure soit nécessaire, mais suffisamment faible pour que la théorie des poutres reste applicable. La ligne des centres de masse (courbe gauche) définit un excentrement caractérisé par les projections orthogonales  $e_y(x)$  et  $e_z(x)$  de son amplitude dans deux plans.

La cinématique d'une section de l'arbre par rapport à un repère d'inertie est caractérisée par deux translations  $\Theta_y(x, t)$  et  $\Theta_z(x, t)$  des axes  $y$  et  $z$ .

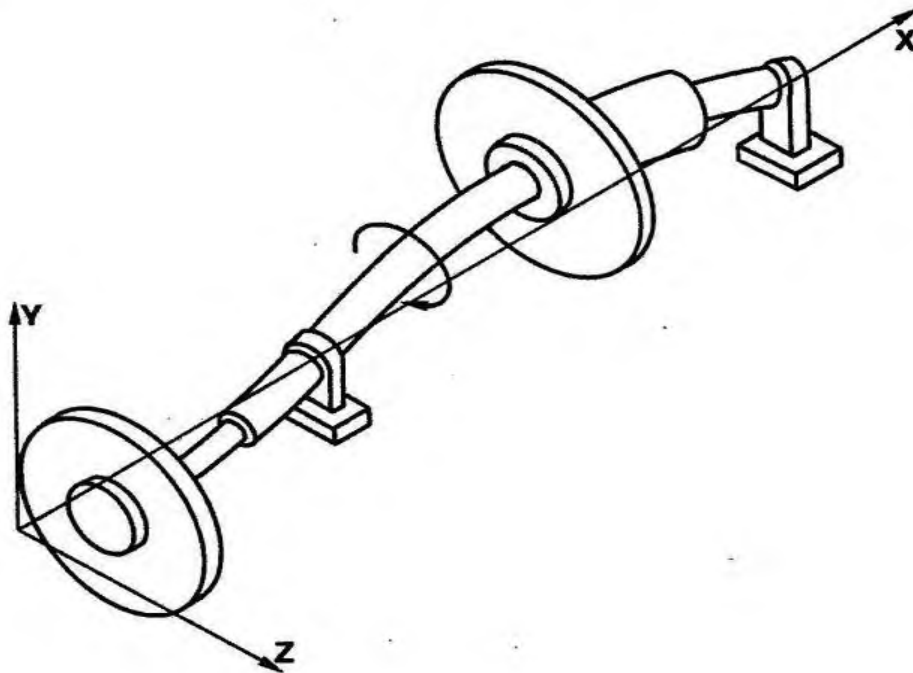


Figure 6 : Arbre de machine

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

Les translations permettent de localiser le centre géométrique de la section et les rotations d'orienter le plan de la section. Les déplacements généralisés d'une section droite de l'arbre sont ainsi définis par des fonctions de champ inconnues que l'on peut regrouper dans un vecteur comme suit

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},t) = [\mathbf{u}_y(\mathbf{x},t) , \mathbf{u}_z(\mathbf{x},t) , \theta_y(\mathbf{x},t) , \theta_z(\mathbf{x},t)]^T \quad (\text{II-1})$$

Le comportement élastique lors des vibrations de flexion est régi par les lois de la flexion plane des poutres. Nous utiliserons la théorie de Timoshenko [17] qui permet de tenir compte de l'effet de cisaillement, ainsi que l'inertie de rotation des sections. Rappelons que, d'après cette théorie, on admet qu'une section plane originalement normale à l'axe neutre demeure plane (gauchissement négligé), mais sous l'effet de l'effort tranchant elle ne reste plus normale à l'axe neutre après déformation. Ainsi, la rotation totale est composée d'une rotation de la tangente à l'axe neutre due à la flexion seule et d'une rotation due à l'effort tranchant.

Les déformations généralisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dues à la flexion plane dans les plans xy et xz s'écrivent

$$(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_y \\ \boldsymbol{\beta}_z \\ \mathbf{x}_y \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_y - \theta_z \\ \mathbf{U}'_z - \theta_y \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

Dans ce vecteur,  $\boldsymbol{\beta}_y$  et  $\boldsymbol{\beta}_z$  représentent les déformations dues à l'effort tranchant, tandis que  $\mathbf{x}_y$  et  $\mathbf{x}_z$  sont les déformations dues à la flexion.

Dans ce contexte, le terme déformation est pris dans son sens le plus général de distorsion interne, comme par exemple la courbure. Les contraintes généralisées doivent être maintenant définies de sorte que leur produit scalaire avec les déformations soit égal au travail intérieur. Elles constituent en fait les efforts intérieurs (moment fléchissant et effort tranchant) regroupés dans le vecteur  $\boldsymbol{\sigma}$  et qui sont donnés par la relation constitutive

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z]^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II-3})$$

Pour un arbre isotrope dont le matériau présente un comportement linéaire élastique, la matrice D, dite d'élasticité, prend, la forme généralisée suivante

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} kGA & & & \\ & kGA & & \\ & & EI & \\ & & & EI \end{bmatrix} \quad (\text{II-4})$$

Dans cette matrice, k A et I représentent respectivement le facteur de forme, l'aire et le moment d'inertie de la section alors que E et G sont les modules d'élasticité et de glissement du matériau

Si l'on exprime les déformations généralisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en fonction du champ des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ , il vient

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

$$\varepsilon = B(x,t) \quad (\text{II-5})$$

L'opérateur différentiel B, compte tenu de l'arrangement des variables cinématiques dans le vecteur  $u(x,t)$ , prend la forme

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II-6})$$

En introduisant la relation (II-5) dans l'expression (II-3)

Des efforts intérieurs, on trouve

$$\sigma(x,t) = D(x)B u(x,t) = S(x) u(x,t) \quad (\text{II-7})$$

Où  $S(x)$  désigne un opérateur dépendant uniquement de la variable spatiale  $x$ .

Les équations aux dérivées partielles de l'équilibre dynamique latéral du mouvement d'un peuvent se déduire, soit par une formulation vibrationnelle (principe de Hamilton), ne soit pas l'application des équations de Newton et du moment cinétique. Considérons un élément d'arbre de longueur infinitésimale  $dx$  (figure 7)

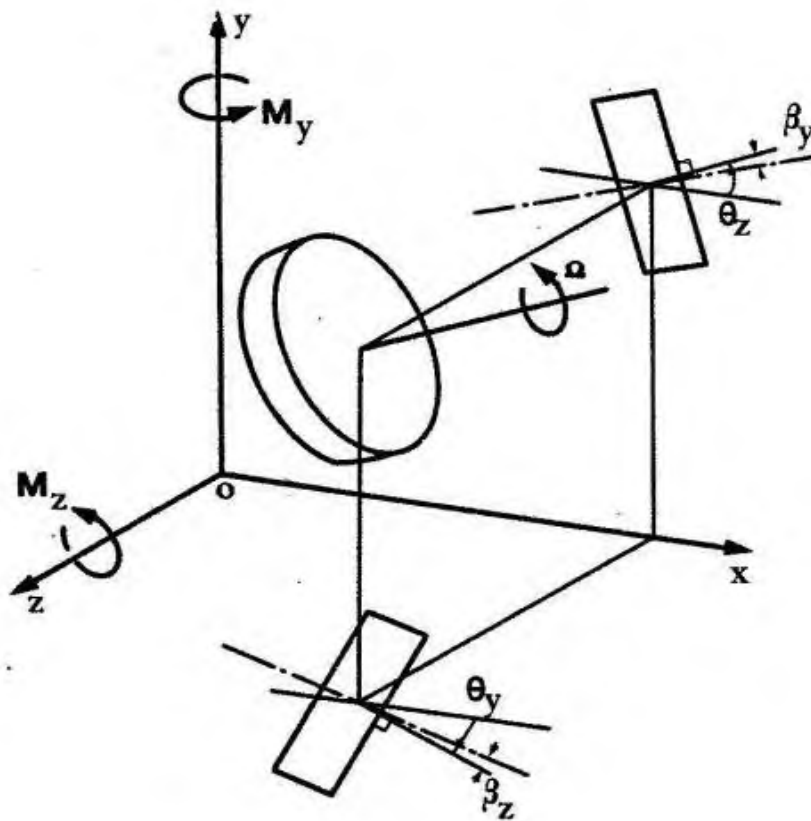


Figure 7 : Élément infinitésimale d'arbre

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

Les équations du mouvement latéral dans un repère fixe s'écrivent, lorsque l'arbre tourne à une vitesse de rotation .... Constante.

$$\mu \ddot{u}_y - \frac{\partial}{\partial x} [kGA(u'_y - \theta_z)] = \mu \Omega^2 (e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t)$$

$$\mu \ddot{u}_z - \frac{\partial}{\partial x} [kGA(u'_z - \theta_y)] = \mu \Omega^2 (e_y \cos \Omega t + e_z \sin \Omega t)$$

$$J_d \ddot{\theta}_y - \Omega J_p \dot{\theta}_z - \frac{\partial}{\partial x} [EI \theta'_y] - kGA(u'_z - \theta_y) = 0$$

$$J_d \ddot{\theta}_z + \Omega J_p \dot{\theta}_y - \frac{\partial}{\partial x} [EI \theta'_z] - kGA(u'_y - \theta_z) = 0 \quad (\text{II-8})$$

A ces équations, il faut ajouter huit conditions aux limites, naturelles (Mixtes) ou essentielles (cinématiques), de la forme

Naturelles

$$(u'_y - \theta_z) = 0$$

$$(u'_z - \theta_y) = 0$$

$$(\theta'_y) = 0$$

$$(\theta'_z) = 0$$

Cinématiques

$$u_y \quad \text{défini}$$

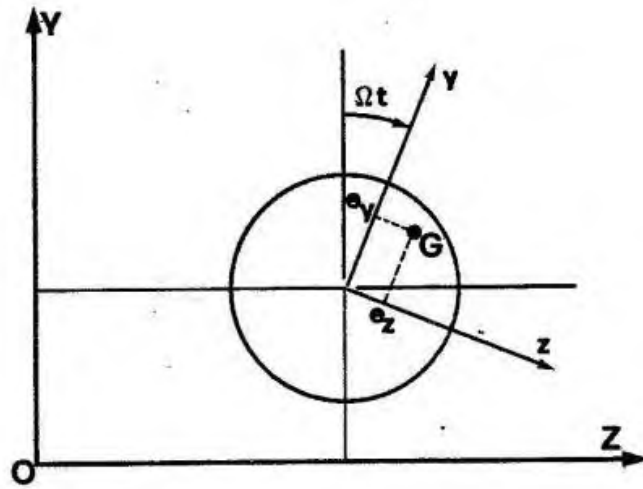
$$u_z \quad \text{"} \quad (\text{II-9})$$

$$\theta_y \quad \text{"}$$

$$\theta_z \quad \text{"}$$

Les deux premières équations (II-8) traduisent l'équilibre des forces, alors que les deux autres traduisent l'équilibre des moments. En effet, les termes de la première colonne dans (II-8) représentent les forces d'inertie dues à la fois à la masse  $\mu dx$  en translation et au moment d'inertie  $J_{dax}$  en rotation autour d'un axe transversal. Ces termes proviennent respectivement de l'équation de Newton et de l'équation du moment cinétique,  $J_d \ddot{\theta}_y$  et  $J_d \ddot{\theta}_z$  étant les composantes principales du moment cinétique selon les axes transversaux. L'effet gyroscopique, dont la particularité principale est de coupler les mouvements selon y et z, se manifeste par l'intermédiaire des termes de couplage -  $\Omega J_p \dot{\theta}_z$  Et  $\Omega J_p \dot{\theta}_y$  présents dans la deuxième colonne des équations (II-8). Ces termes figurent avec des signes opposés dans les deux équations. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour que les moments induits ne soient pas sources d'amortissement. Cette caractéristique constitue un des aspects essentiels de la dynamique des vibrations transversales des arbres de machines. Dans la troisième et quatrième colonne des relations (II-8), on reconnaît, conformément aux définitions des déformations (II-2) et contraintes (II-3), le terme qui caractérise les efforts de rappel élastique de l'arbre. Enfin, les seconds membres sont égaux aux projections sur les axes y et z de la force centrifuge due à la présence de l'excentrement réparti (figure 8).

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION



**Figure 8 :** Position relative des centres de masse G et géométrique  $O_1$

Les équations aux dérivées partielles (II-8) caractérisent les vibrations transversales des arbres isotropes possédant un excentrement et traduisent, à l'échelle locale, l'équilibre des forces généralisées d'un élément infinitésimal

Par commodité de présentation, nous écrivons, en introduisant la définition (II-1) du champ des déplacements et la relation (II-7), le système d'équations différentielles (II-8) sous la forme condensée suivante.

$$J\ddot{u} + Nu - \frac{\partial}{\partial x}(Su) - ZSu = f \quad (\text{II-10})$$

Dans cette relation, les opérateurs  $J(x)$  et  $N(x)$  s'écrivent

$$J = \begin{bmatrix} \mu(x) & & & \\ & \mu(x) & & \\ & & J(x) & \\ & & & J(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II-11})$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\Omega J_p(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II-12})$$

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

L'opérateur différentiel S, défini à la relation (II-7), est fonction de la variable spatiale x et a pour expression

$$S(x) = \begin{bmatrix} kGA \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -kGA \\ 0 & kGA \frac{\partial}{\partial x} & -kGA & 0 \\ 0 & 0 & EI \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II-13})$$

La matrice Z prend la forme suivante

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-14})$$

Pour le vecteur f(x), il vient

$$f(x) = f_c(x) \cos \Omega t + f_s(x) \sin \Omega t$$

$$= \Omega^2 \mu \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 \mu \begin{bmatrix} -e_z \\ e_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \quad (\text{II-15})$$

$$= \Omega^2 \mu \cos \Omega t + \Omega^2 \mu e_s \sin \Omega t$$

La solution analytique  $u = u(x,t)$  de la formulation (II-10) ne peut être trouvée que dans la mesure où les fonctions massiques  $\mu(x)$ ,  $J_d(x)$  et  $J_p(x)$  et les fonctions géométriques  $A(x)$  et  $I(x)$ , de même que les fonctions d'excentrement  $e_y(x)$  et  $e_z(x)$ , sont suffisamment régulières.

D'éventuelles discontinuités de ces fonctions impliquent que les équations différentielles n'existent pas, au sens usuel, aux points correspondants. Une solution analytique au problème ne peut donc être trouvée qu'en appliquant ces équations à chacun des sous-domaines réguliers dont les limites correspondent aux points. La formulation forte du problème du ramène donc à rechercher une fonction continue  $u = u(x,t)$  satisfaisant les équations différentielles en tout point inférieur aux sous-domaines et vérifiant les conditions aux limites ainsi que les conditions de discontinuité.



# CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

## II.6 Formulation intégrale

Les difficultés apparues au paragraphe précédent peuvent être surmontées en abordant le problème par une forme intégrale. Contrairement à l'approche classique, cette formulation alternative s'accommode des propriétés non régulières précitées. Elle résume en une seule expression intégrale globale, tant les équations différentielles traduisant l'équilibre à l'intérieur de chacun des sous-domaines réguliers que les conditions de continuité de la solution et les conditions de discontinuité aux interfaces.

L'approche intégrale consiste à trouver une solution  $u(x,t)$  qui satisfasse les équations différentielles au sens des moyennes pondérées, tout en vérifiant les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites du problème. Selon cette démarche, l'intégrale de la fonction résiduelle  $r_i(u)$  associée à chacune des équations différentielles (II-10) s'écrit sur chaque sous-domaine]  $x_i, x_{i+1}[$

$$\begin{aligned} & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, r_i(u) \rangle dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, J\ddot{u} \rangle dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, N\dot{u} \rangle dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, \frac{\partial}{\partial x}(Su) \rangle dx \quad (\text{II-16}) \\ & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, ZSu \rangle dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, f \rangle dx \end{aligned}$$

Dans cette expression, le symbole  $\langle \dots, \dots \rangle$  représente un produit scalaire et  $w$  désigne une fonction test admissible, c'est-à-dire appartenant à la classe des fonctions qui donnent un sens aux intégrales.

En intégrant par parties le terme associé aux contraintes généralisées, il

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, \frac{\partial}{\partial x}(Su) \rangle dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle \frac{\partial w}{\partial x}, Su \rangle dx - \langle w, Su \rangle \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (\text{II-17})$$

Comme la fonction test  $w$  est supposée suffisamment régulière, l'expression de l'intégrale globale s'écrit, après sommation des intégrales sur les sous domaines et prise en compte des conditions de discontinuités

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \langle w, r(u) \rangle dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, r_i(u) \rangle dx \\ &= \int_0^\ell \langle w, J\ddot{u} \rangle dx + \int_0^\ell \langle w, N\dot{u} \rangle dx + \int_0^\ell \langle \frac{\partial w}{\partial x}, (z^T w), Su \rangle dx \\ & - \int_0^\ell \langle w, f \rangle dx - \langle w, Su \rangle \Big|_\ell + \langle w, Su \rangle \Big|_0 \quad (\text{II-18}) \end{aligned}$$

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

En admettant que les conditions aux limites soient de type essentiel (ce qui signifie que la fonction test s'annule en ces points) et en remplaçant l'opérateur S par la relation (II-7), l'expression ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \langle w, r(u) \rangle \mathbf{dx} &= \int_0^\ell \langle w, J\ddot{u} \rangle \mathbf{dx} + \int_0^\ell \langle w, N\dot{u} \rangle dx + \int_0^\ell \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}, (z^T w), DBu \right. \\ &> dx - \int_0^\ell \langle w, f \rangle \mathbf{dx} \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

En assimilant la fonction  $w$  aux déplacements virtuels généralisés ( $w=\delta u$ ) et en tenant compte des relations (II-2) et (II-5), la formulation faible consiste en fait à rechercher la solution  $u(x,t)$  qui vérifie les conditions initiales et aux limites du problème et qui satisfait l'équation

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \langle \delta u, J\ddot{u} \rangle \mathbf{dx} + \int_0^\ell \langle \delta u, N\dot{u} \rangle dx + \int_0^\ell \langle B\delta u, (DBu), \rangle dx - \int_0^\ell \langle \delta u, f \rangle \mathbf{dx} = 0 \\ (\forall \delta u) \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Remarquons que cette expression, en imposant que le travail virtuel total soit nul, traduit l'équilibre global du système.

Pour introduire le frottement interne dans la formulation, nous adoptons les modèles linéaires visqueux et hystérétique développés dans les références. Selon ces modèles, les forces de frottement hystérétique sont proportionnelles aux forces élastiques, alors que les forces visqueuses sont proportionnelles aux vitesses de déformation. Sur la base de ces hypothèses, l'expression du travail virtuel devient

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \langle \delta u, J\ddot{u} \rangle \mathbf{dx} + \int_0^\ell \langle \delta u, N\dot{u} \rangle dx + \int_0^\ell \langle \delta u, B^T (DB\dot{u}), \rangle dx \\ \int_0^\ell n_a \langle \delta u, B^T DBu \rangle \mathbf{dx} + \int_0^\ell n_b \langle \delta u, B^T N_f DBu \rangle dx - \int_0^\ell \langle \delta u, f \rangle \mathbf{dx} \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

Dans cette relation, la matrice antisymétrique  $N_f$  prend la forme

$$N_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-22})$$

Alors que les paramètres  $n_a$  et  $n_b$  s'écrivent

$$n_a = \frac{1+n_H}{\sqrt{1+n_H^2}} \quad (\text{II-23})$$

$$n_b = \Omega n_v \frac{1+n_H}{\sqrt{1+n_H^2}} \quad (\text{II-24})$$

Les quantités  $n_H$  et  $n_V$  caractérisent les amortissements hystérétique et visqueux du matériau de l'arbre. Remarquons que, si le frottement interne est négligé ( $n_H = n_V = 0$ ), on retrouve la forme fable (II-20) des systèmes conservatifs .

### II.7 Disque minces indéformables

Les organes portés par l'arbre peuvent être considérés comme des disques minces indéformables [A, B3] qui contribuent uniquement aux termes d'inertie. Leur excentrement constitue une source de forces de balourds mais n'a pas d'influence appréciable sur les moments d'inertie

D'après l'expression (II-20) du travail virtuel d'un élément infinitésimal de l'arbre, les forces d'inertie d'un disque mince indéformable, placé au point  $x=x_i$  et tournant à une vitesse constante  $\Omega$ , fournissent le travail virtuel

$$\delta W_d = [\delta u^T M^{d\ddot{u}} + \delta u^T G^{d\dot{u}} - \delta u^T f^d]_{x=x_i} \quad (\text{II-25})$$

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

Dans cette relation, le vecteur  $u(x_i, t)$  représente les déplacements du centre géométrique du disque alors que  $M^d$  et  $G^d$  sont respectivement la matrice d'inertie et de couplage gyroscopique. Ces matrices ont pour expressions

$$M^d = \begin{bmatrix} m^d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_d^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d^d \end{bmatrix} \quad (\text{II-26})$$

$$G^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega J_p^d \\ 0 & 0 & -\Omega J_p^d & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-27})$$

Dans lesquelles  $m^d$  représente la masse du disque,  $J_d^d$  le moment d'inertie diamétral et  $J_p^d$  le moment d'inertie polaire ( $J_p^d = 2 J_d^d$ ). Le vecteur  $f^d$ , représentant le balourd, prend la forme

$$f^d = \Omega^2 m^d \begin{bmatrix} e_y^d \\ e_z^d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 m^d \begin{bmatrix} -e_z^d \\ e_y^d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \quad (\text{II-28})$$

Dans cette expression,  $e_y^d$  et  $e_z^d$  désignent, à l'instant de référence, les projections selon les axes  $y$  et  $z$  de l'excentrement du disque.

Remarquons que les disques apportent une contribution purement locale le long l'axe de l'arbre. Ils introduisent donc une discontinuité dans les efforts de cisaillement et de flexion.

### II.7 Paliers

Le comportement dynamique d'un arbre de machine appuyé sur des paliers hydrodynamiques est fortement influencé par les propriétés mécaniques du film d'huile. Un mouvement instable de l'arbre peut même se produire

Les forces de réaction du film d'huile sont fonctions des coordonnées du centre de l'arbre, des vitesses correspondantes et du nombre de Sommerfeld. Le comportement d'un palier hydrodynamique est essentiellement non – linéaire et non – conservatif. Néanmoins, pour une charge radiale donnée et pour des petits mouvements du centre de l'arbre autour de la position d'équilibre, on peut linéariser les relations qui lient les forces de réaction du film d'huile aux déplacements et aux vitesses. Dans ces conditions, un modèle linéaire satisfaisant d'un palier hydrodynamique peut être caractérisé par quatre rigidités et quatre coefficients de dissipation, (fig. 9).

## CHAPITRE 2 THEORIE DE VIBRATION

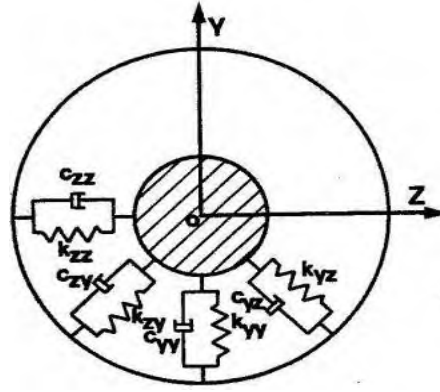


Figure 9 : modèle de palier

Ainsi, chacun des paliers du système peut être représenté par une matrice de rigidité et une matrice de dissipation. On suppose ici que chacun des paliers établit une liaison entre les degrés de liberté de translation d'un point  $x_j$  de l'arbre et un support fixe. Les forces de liaison correspondantes sont données par la relation suivante

$$f^p(\Omega) = [K^P(\Omega) + C^P G^{d\dot{u}} - \dot{u}]_{x=x_j} \quad (\text{II-29})$$

Dans laquelle  $K^P(\Omega)$  et  $C^P(\Omega)$  sont respectivement la matrice de rigidité et celle de dissipation. Ces matrices de dimension (4x4) s'écrivent

$$K^d(\Omega) = \begin{bmatrix} K_{yy}(\Omega) & 0 & K_{yz}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zy}(\Omega) & 0 & K_{zz}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-30})$$

$$C^P(\Omega) = \begin{bmatrix} C_{yy}(\Omega) & 1 & C_{yz}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{zy}(\Omega) & 0 & C_{zz}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-31})$$

La détermination des rigidités et coefficients de dissipation peut être effectuée de façon analytique ou expérimentale [C2, L4]. L'anisotropie du palier, qui se traduit par la non-symétrie des matrices  $K^P(\Omega)$  et  $C^P(\Omega)$  est la cause principale d'une éventuelle instabilité du mouvement de l'arbre.

Quant au travail virtuel des forces non – conservatives de liaison, il est donné par l'expression matricielle

$$\delta W_p = [\delta u^T K^P(\Omega) u + \delta u^T C^P(\Omega) \dot{u}]_{x=x_j} \quad (\text{II-32})$$

Dans laquelle  $\delta u$  désigne le champ des déplacements virtuels.

**Chapitre III :**  
**Recherche Sur Les**  
**Applications De**  
**Vibration Des**  
**Arbres Tournants**

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

## Introduction

Dans le secteur industriel tel que : la mécanique automobile ou industrie mécanique, l'industrie nucléaire, la mécanique aéronautique, ... il est question de transformer une forme d'énergie dans une autre forme d'énergie par l'intermédiaire d'un organe mécanique. La machine tournante est constituée d'un rotor et d'un stator. Actuellement, l'industrie moderne ne peut se passer des machines tournantes et font l'objet d'un système d'ingénierie concurrentielle [17] et [18]. Dès la phase de la conception et de fabrication, ces machines doivent répondre à un cahier de charge bien défini ; cela a conduit à l'optimisation des performances et le rendement des machines tournantes. La tendance actuelle vise à réduire les jeux entre le rotor et le stator, à réduire la masse totale de la machine tournante tout en augmentant sa vitesse de rotation, à accroître sa durée de vie par une amélioration de sa fiabilité par des techniques de maintenance [19].

Par ailleurs, un système oscille toujours lorsqu'il est en mouvement relatif. Il effectue un mouvement de va et vient autour de la position d'équilibre. Dans certaines conditions, les efforts générés par les machines tournantes au cours de leurs fonctionnements peuvent devenir importantes, et provoquer la mise hors service prématurée de l'ensemble du système. En pratique, l'arbre est l'élément le plus sollicité par les efforts dynamiques générés. Les causes des déformations de l'arbre sont les suivantes : les vibrations longitudinales (ou axiales), les vibrations de rotation causées par la torsion et les vibrations transversales (ou latérales) [20] et [21].

Les phénomènes vibratoires sont caractérisés par un mode propre, valeurs propres, vecteurs propres, fréquences propres. Ils sont appelés caractéristiques modales. La sûreté de fonctionnement des machines tournantes exige que les fréquences de source excitatrices ne coïncident pas avec les fréquences propres de la machine. Sinon, la résonance se produit, il conduit à la mise hors service prématuré de la machine tournante. La dynamique du rotor permet de cerner, connaître et de maîtriser les phénomènes cités ci.haut. Sur une machine tournante, les phénomènes vibratoires peuvent conduire à l'instabilité ou à l'endommagement du système, caractérisé par la rupture ou la fatigue, frottement entre rotor et stator, endommagement des paliers, les bruits dus au fonctionnement du rotor. La vitesse critique accélère ce phénomène. L'étude dynamique des machines tournantes s'avère indispensable.

Les machines tournantes tiennent le monopole de la production dans les secteurs industriels. Lorsque les vibrations et les bruits apparaissent sur une machine tournante, il est important de connaître les causes et de prédire les conséquences, de faire l'étude dynamique afin de caractériser les anomalies et effectuer l'étude du comportement dynamique. Cet article se fixe pour objectif de connaître l'influence d'un balourd sur un rotor dont les vibrations et les bruits deviennent excessifs ; sachant que l'alignement du rotor, les conditions de fonctionnement sont bonnes.

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

## III.1 Description des éléments d'un rotor

Une turbomachine est un dispositif qui donne ou retire l'énergie à un fluide à partir de l'action dynamique de l'élément rotation autour d'un axe appelé rotor [22]. Les turbomachines sont rencontrées dans les secteurs industriels nécessitant un transfert d'énergie.

Dans l'industrie électrique, par usage des éoliennes (énergie du vent), les turbines à gaz ou à vapeur, les hydroliennes ou encore dans les centrales hydroélectriques. Dans les grandes industries, les turbomachines jouent un rôle fondamental, les compresseurs centrifuges par exemple pour alimenter en air les unités qui transforment les produits ; les ventilateurs pour aération ou aspiration des flammes etc, les turbopompes sont utilisées dans la distribution de l'eau ou en exhaure, les turbocompresseurs, ... dans le secteur du transport, on utilise les ventilateurs dans le système d'aération, en aéronautique, les turbosoufflantes et turbo aérateurs assurent la propulsion des engins, les turbopompes alimentent les moteurs cryogéniques dans les engins aérospatiaux, etc. peu importe la forme ou l'usage d'une turbomachine, le rotor qui est la partie motrice de la machine est constitué de 4 éléments : arbre sur lequel on retrouve une série de roues ; les roues sont modélisées par un tronc de cône ou par un disque de forme cylindrique. Sur la roue, sont fixée des pales qui peuvent être modélisées par des poutres encastées. On retrouve aussi le balourd. Enfin les paliers sur lesquels reposent l'ensemble arbre.roue balourd [22].



# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

## III.1.1 Définition du rotor

Le rotor d'une turbomachine est constitué de l'arbre, le disque, le balourd, les paliers et l'aube [23]. Ces éléments sont visibles à la figure 10.

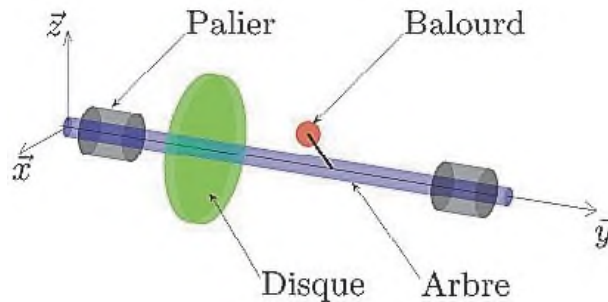


Figure 10 : Description du rotor [23]

### III.1.1.1. Disque

La roue peut être modélisée par un disque, il peut être déformable ou rigide. Une roue peut être représentée géométriquement sous forme cylindrique ; mais dans l'analyse dynamique, cette forme s'avère limitée. La roue est généralement représentée en forme de tronc de cône. Pour une roue rigide, seule son énergie cinétique intervient dans l'analyse dynamique [22]. Sur la figure 11 effectuée sur solidwork, nous avons une roue d'une turbine Francis.

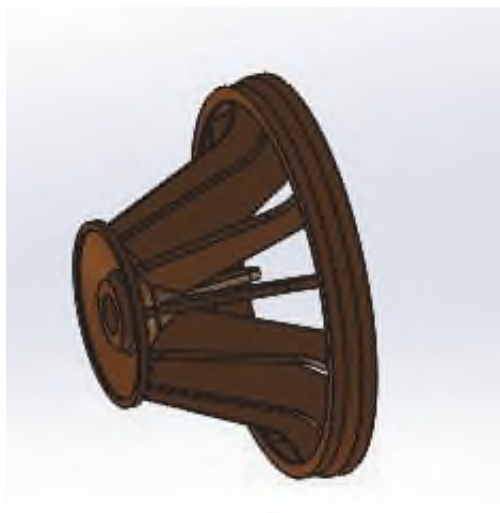


Figure 11 : Roue de la turbine Francis

## **CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS**

### ***III.1.1.2. Arbre***

C'est un organe qui porte les roués. Il peut être rigide ou flexible, ces propriétés dépendent de son matériau. L'arbre est considéré déformable dans l'analyse dynamique, cela permet de tenir compte des effets des déformations [22]. Géométriquement, la section de l'arbre peut être constante ou variable. L'étude en flexion devient complexe pour l'arbre à section variable du fait que le mouvement est décrit par les équations différentielles linéaires à coefficients variables dont les solutions sont les fonctions de Bessel [22].

### ***III.1.1.3. Aube***

L'aube est un organe fixé sur la roue, sa modélisation se fait par une poutre encastree à l'une des extrémités. Elle peut être flexible ou rigide. Pour une étude du comportement dynamique des roues aubages, elles sont considérées flexibles [23].

### ***III.1.1.4. Palier***

Le palier est aussi appelé support, il peut être flexible (isotrope ou anisotrope) ou rigide. Le palier constitue un système de dissipation ou non lorsque la flexibilité est anisotrope. L'arbre du rotor loge dans un carter, la surface fonctionnelle du carter est séparée de celle de palier par un matériau antifriction et d'un film d'huile. L'huile ou la graisse assure la lubrification afin de réduire la friction entre les deux surfaces [24] et [25].

On parle des paliers hydrodynamiques (avec fluide liquide) lorsque le film de fluide est généré par le mouvement relatif des deux surfaces. Ils sont largement utilisés en turbomachine, leur fonctionnement est illustré à la figure 11 : en effet, la rotation de l'arbre génère une raideur à l'intérieur du palier et un amortissement visqueux dont les caractéristiques dépendent de la charge (poids propre et autres forces) appliquée sur les paliers par le rotor, la géométrie du palier, de la vitesse de rotation et le rapport L/D (largeur/diamètre), des variations de sa température et de la viscosité de l'huile utilisée. Pour calculer ces paramètres qui sont des fonctions non linéaires des charges appliquées aux paliers. On modélise l'équilibre des forces de pression du film d'huile à l'aide de l'équation de Reynolds, dans les directions horizontales et verticales [24] et [25].

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

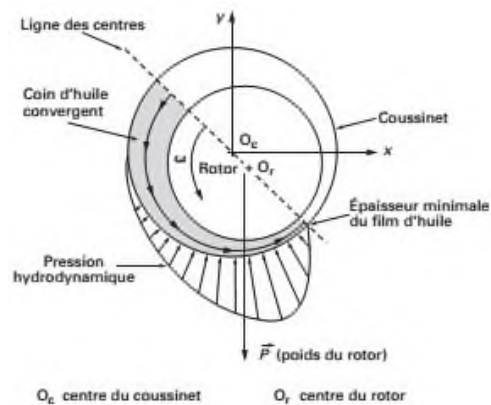


Figure 12 : Fonctionnement d'un palier hydrodynamique [24]

D'autres types de paliers sont : paliers aérostatiques (film fluide gazeux), les paliers aérodynamiques (film fluide gazeux), les paliers hydrostatiques (le film fluide liquide est injecté sous haute pression), lorsqu'on insère les éléments roulant (galets, billes, aiguilles) entre les surfaces, on parle de paliers à roulements [24].

## III.1.1.5. Balourd

Le balourd est toute masse excentrée  $m_b$  d'un rotor. Il est localisé en une distance  $d$  du centre de géométrie de l'arbre comme montré à la figure 13 [22].

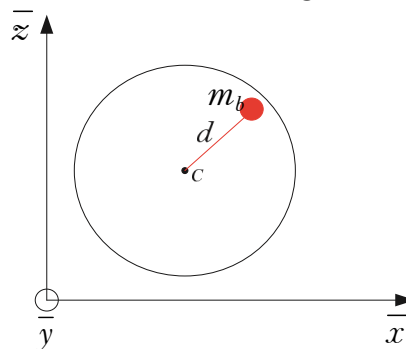


Figure 13 : Elément de balourd

Les balourds ont différentes origines. On parle souvent des inhomogénéités du matériau, mais il existe d'autres causes :

### III.1.1.5.1. Géométrie des pièces tournantes

La distribution de balourd d'un rotor dépend de la position du centre de masse de chaque tronçons par rapport à l'axe de rotation, qui est différent de l'axe géométrique qui passe par les centres des paliers. Pour des rotors monoblocs constitués des roues usinées dans la masse, on observe également une modification de la position des centres de gravité due aux écarts d'usinages [26].

## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

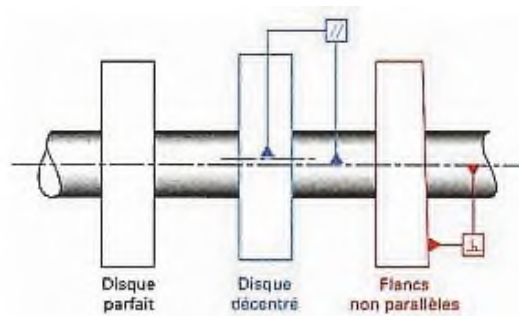


Figure 14: Ecart d'usinage (excentricité et parallélisme) cause de balourd [26]

Par exemple, la distribution naturelle des ailettes de turbine donne un balourd qui dépend de leurs positions relatives de montage [26].

### III.1.1.5.2. Assemblage des pièces

Les pièces assemblées sur un arbre en rotation déplacent naturellement leurs centres de masse. C'est le cas des turbines, moteurs électriques, ... il est crucial de veiller sur le procédé d'assemblage pouvant faire de deux pièces assemblées un bloc balourdé [24].

### III.1.1.5.3. Conditions de service

On peut citer les causes dues à la variation de la température au voisinage de la machine en service. On peut aussi parler de la relaxation des contraintes, l'usure non axisymétrique etc. susceptible d'apporter des balourds qui peuvent évoluer avec le temps [22].

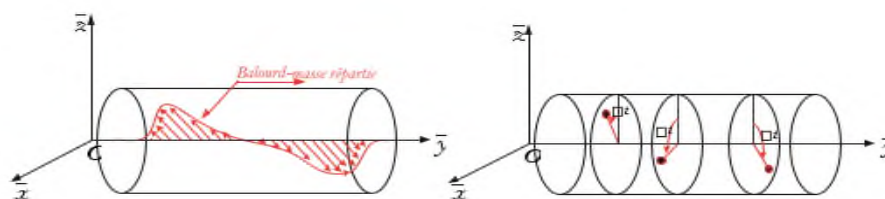


Figure 15 :Modèle discrétisé de balourd dans le rotor (à droite) et Profil de distribution de balourd dans le rotor (à gauche) [22] et [20]

Généralement, le balourd se répartit de façon aléatoire et de façon continue (figure 15). Pour modéliser de manière simple, on le décompose en plusieurs masses concentriques situées dans différents plans (figure 15). Ces masses concentriques comparativement au balourd continu, sont supposées avoir un même effet sur le comportement dynamique du rotor [21]. La norme DIN ISO 1940.1 défini les masses de

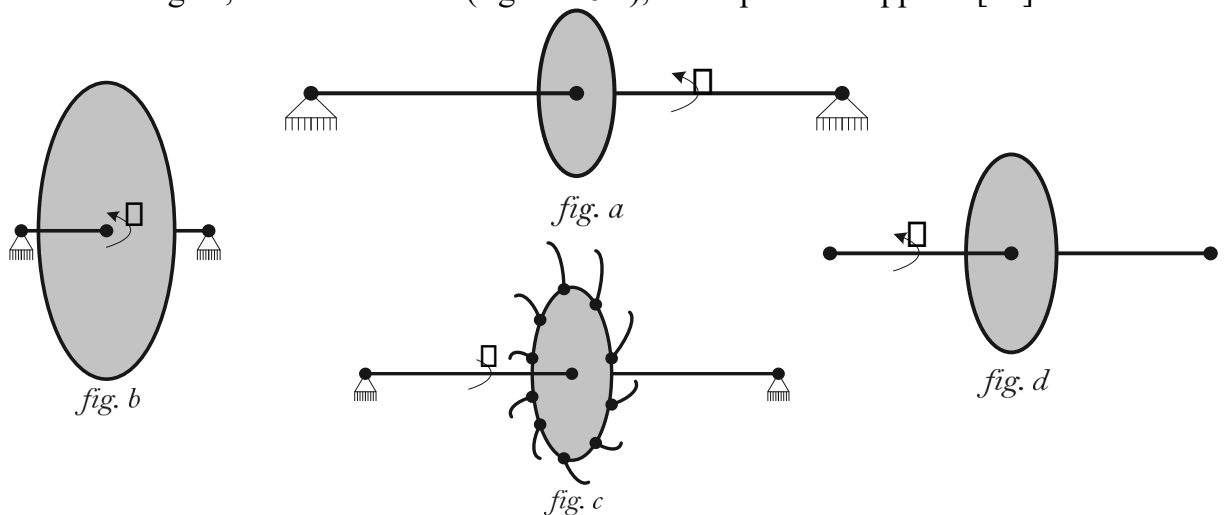
## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

balourd admissibles au regard de la masse du corps à équilibrer en fonction de la vitesse de rotation maximale du corps et en fonction des divers niveaux de qualité notée G [21].

Dans cette norme, le groupe G6.3 pour les rotors de ventilateurs, de soufflerie et de roues d'avions, le G16 correspond aux rotors d'entraînement non critique, le G2.5 pour les rotors d'entraînement machine outils et turbines, le G1 pour les pièces d'entraînement de tours, les platines de tourne disque et le G0.4 pour les gyroscopes et les rotors de tour de précision [21].

### III.1.1.6. Types de rotors

Du point de vue structure mécanique et forme géométrique, les rotors des turbomachines sont distincts. Du point de vue forme géométrique, on distingue des rotors à arbre long (figure 16.a) : les dimensions de la roue sont petites que celle de l'arbre. Ce type de rotor modélise physiquement certaines turbomachines comme les turbines ; les disques rotor (figure 16.b) dont les dimensions de l'arbre sont petits par rapport à celles de l'arbre. Les dispositifs tels que les ventilateurs, des micro turbines, le disque dur des unités centrales ou ordinateurs portables, la meuleuse, etc... sont modélisés par ce type de rotor lors de l'étude du comportement vibratoire ; les rotors à ailes ou à aubages (figure 16.c), ils sont utilisés pour modéliser les turbines Pelton, les rotors verticaux des hélicoptères, les éoliennes, les soufflantes industrielles, ou toute autre structure aubagée ; les rotors libres (figure 16.d), n'ont pas des supports [22].



**Figure 16** :Rotor à arbre long (a), Rotor type disque arbre (b), Rotor à aubes (c), Rotor libre (d).

Selon la structure, on distingue : les rotors flexibles, l'arbre tourne à des vitesses supérieures à la vitesse critique et les déformations sont prises en compte ; les rotors rigides, les éléments de rotors ne se déforment pas et toute la charge dynamique se transmet dans les paliers ; les rotors de Jeffcott (figure 16), il est bien équilibré, les effets

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

gyroscopiques sont négligeables, ce rotor consiste à une masse attachée au centre de la section élastique d'un arbre de masse négligeable [22].

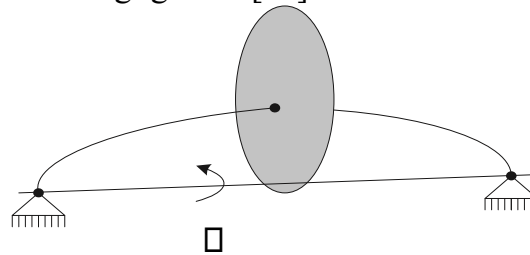


Figure 17 : Rotor de Jeffcott.

Le formalisme mathématique utilisé pour étudier le comportement dynamique du rotor est l'équation de la grange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = F_d \quad \text{[III-1]}$$

## III.2. Généralités sur la méthode des éléments finis

Dans le domaine de la mécanique des solides, la méthode des éléments finis est utilisée afin d'apporter la simplicité dans la modélisation et la résolution d'un problème . Pour les structures simples et à faible degré de liberté, l'approche analytique est possible. Pour les structures complexes à plusieurs degrés de liberté, la mise en équation ainsi que la résolution sont fastidieuses, les méthodes numériques programmables s'imposent. Pour écrire les équations de la dynamique du rotor, nous avons utilisé l'approche de Lagrange.

A titre illustratif, considérons une poutre 3D (figure 18), soumise à diverse sollicitation. Cette poutre subit des contraintes qui impliquent des déformations qu'il faille de calculer.

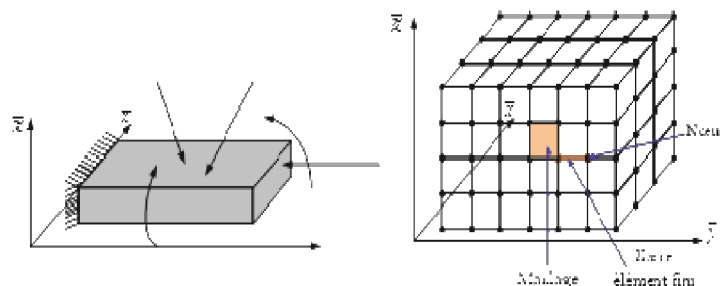


Figure 18 : Eléments finis d'une poutre

Le calcul est compliqué, il faut remplacer la structure continue par une autre en grillage. Il s'agit des barres dont les points de croisement s'appellent : « nœuds ». La structure sera calculée comme une structure discontinue discrétisée, constituée des petits

## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

éléments en forme géométriques triangulaires, curviligne ou rectangulaire. Le problème consiste de passer de la structure continue à une structure discrétisée équivalente. Isolons l'élément rectangulaire hachuré (figure19), nous avons :

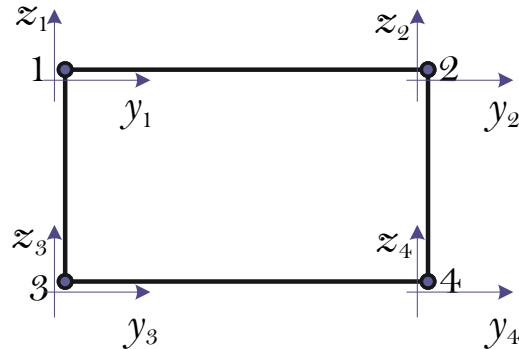


Figure19 : Elément fini de la poutre isolé

Nous voyons sur la figure 19 que sur chaque nœud, il y a des déplacements nodaux notés  $y_k$  et  $z_k$ ,

cela conduit au champs de déplacement  $\{\vec{g}_e\}$  et un système des forces généralisées noté  $\{\vec{f}_e\}$ , à

chaque force correspond un déplacement :

$$\{\vec{g}_e\} = [K^e]\{\vec{f}_e\} \quad \text{[III-2]}$$

$[K^e]$  est la matrice de rigidité de l'élément fini

### III.2.1.Problème d'interpolation

Au moyen de l'interpolation, il est possible de connaître les déplacements en importe quel point à partir de déplacements noyaux. Il existe des fonctions d'interpolation ou des fonctions de forme notées  $N_i$  qui relient dans le cas de l'approche cinématique, les déplacements d'un point intérieur à un élément aux  $n$  déplacements nodaux  $q_i$  qui sont les degrés de liberté.  $V(y)$  est une combinaison linéaire des déplacements nodaux car c'est un déplacement d'un point quelconque de l'élément. Les coefficients sont les valeurs des fonctions de forme en ce point :

## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

$$v(y) = \sum N_i(y)q_i \quad [\text{III.3}]$$

Ces fonctions permettent le passage du problème continu au problème discret ; la reconstruction du champ de déplacement dans l'élément se fait à partir du déplacement des nœuds quelconques discrets.

La connexion entre éléments obéit à la règle de continuité, sinon, on peut avoir des modes de déformation inacceptables du point de vue physique pour une structure continue. En ce qui concerne les problèmes d'élasticité, l'équation d'équilibre ne fait intervenir que la dérivée première des déformations (déplacements) : le champ de déplacement est de classe  $C^0$  pour chaque élément ; mais pour les problèmes de flexion, nous avons la dérivée seconde des déplacements pour l'équation d'équilibre ; le déplacement est de classe  $C^1$  pour chaque élément. Nous avons sur la figure un problème d'interpolation.

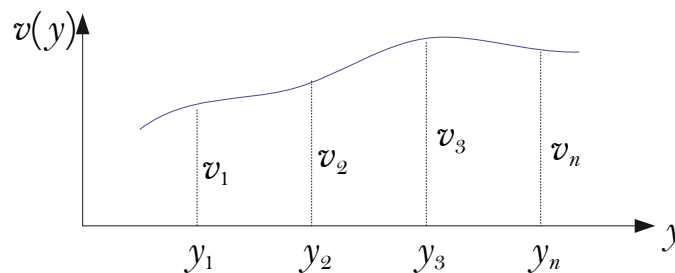


Figure 20 : Illustration de l'interpolation d'une fonction

C'est l'interpolation de la fonction  $v(y)$ . Deux types d'interpolation existent : l'interpolation Hermite et l'interpolation Lagrangienne. La première est de classe  $C^0$  et la seconde de classe  $C^1$ . La première sera utilisée dans la modélisation du rotor.

### III.2.2. Principe général de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à chercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ d'un problème physique défini sur un domaine quelconque. On procède de la manière suivante : la modélisation, la formulation du système d'équations différentielles et ses conditions aux limites, le maillage, le choix de la famille des champs locaux, la discrétisation, la résolution du problème discret, la construction des solutions approchées à partir des valeurs aux nœuds et la simulation ou la visualisation.



# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

## III.2.3. Etablissement des éléments finis du rotor

Il est question de déterminer les conditions d'équilibre du système, par la méthode énergétique, en l'occurrence l'énergie cinétique, de déformation et des fonctions de dissipation. Nous allons effectuer le calcul pour chaque élément du système.

## III.2.4. Modélisation élément fini du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant quatre degrés de liberté: deux déplacements de rotation  $\Psi$  et  $\Theta$  autour des axes  $0x$  et  $0z$  et deux déplacements de translation  $u$  et  $w$  suivant les axes

$\vec{0x}$  et  $\vec{0z}$ . Le disque est considéré comme rigide et symétrique.

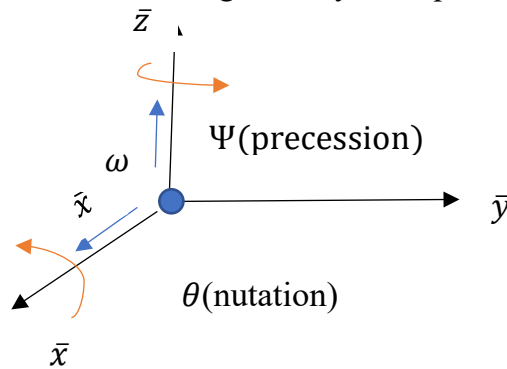


Figure 21 : Modèle élément fini du disque

Le champ de déplacements nodaux est donné par  $\{\vec{q}\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix}$  l'énergie cinétique du

disque est donnée par l'expression:

$$T_d = \frac{1}{2} M_D [(\dot{u})^2 + (\dot{w})^2] + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2 + I_{Dy} (\Omega \dot{\Psi} \dot{\theta})$$

[III-4]

Dans cette relation : le premier terme est l'énergie cinétique de translation du disque, le deuxième

## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

terme est l'énergie de rotation du disque autour des axes  $0\vec{x}$  et  $0\vec{z}$ , le troisième terme est l'énergie de rotation du disque autour de son axe propre et le quatrième décrit l'effet gyroscopique (ou de coriolis).

L'équation de Lagrange (III.1) appliquée à l'énergie cinétique du disque donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q} = [M]\{\ddot{q}\} + \Omega[I]\{\dot{q}\} \quad \text{[III-5]}$$

Avec

$$M = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{DX} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{DZ} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{DY} \\ 0 & 0 & I_{DY} & 0 \end{bmatrix} \quad q = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \Psi \end{Bmatrix} \quad \text{[III-6]}$$

### III.2.5. Modélisation élément fini de l'arbre

L'arbre est considéré comme une poutre de section constante et circulaire, le modèle élément fini est une barre. La barre est définie par ses deux extrémités qui constituent chacune un nœud. Un nœud possède trois déplacements de translation et trois de déplacement de rotation dans l'espace. Dans cette étude, nous ne considérons pas la translation suivant l'axe de rotation de l'arbre. Nous négligeons la rotation du nœud suivant l'axe de rotation de l'arbre. Donc chaque nœud est représenté par deux déplacements de translation  $u_i$  et  $w_i$  suivants les axes  $0x$  et  $0z$ , et deux déplacements de rotation  $\Psi_i$  et  $\theta_i$  autour des axes  $\vec{0x}$  et  $\vec{0z}$ .

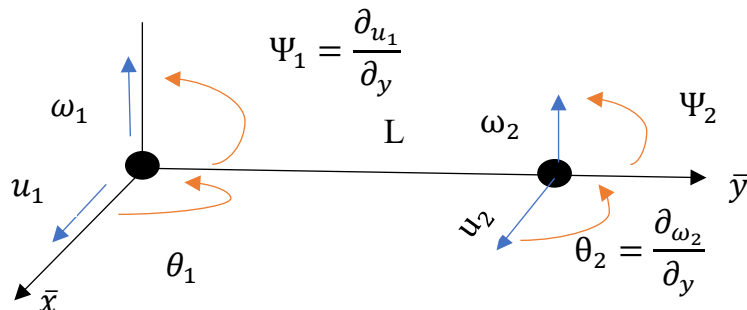


Figure 22 : Modèle élément fini de l'arbre

## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

Nous voyons que l'arbre possède 8 degrés de liberté. Le champ de déplacements nodaux peut alors s'écrire :

$$\{\vec{q}\} = \begin{cases} \vec{q}_u = \begin{Bmatrix} u \\ \Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} \\ \vec{q}_w = \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{cases} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ \Psi_2 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{[III-7]}$$

Le déplacement en un point de l'arbre est donné par :

$$\begin{Bmatrix} u(y) \\ w(y) \end{Bmatrix} = N(y) \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \quad \text{[III-8]}$$

$N(y)$  est la fonction d'interpolation de Hermite

Pour un système à 8 degrés de liberté, la fonction d'interpolation de Hermite prend la forme matricielle suivante :

$$N(y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}y^2 + \frac{2}{L^3}y^3 & 0 & 0 & -y\frac{2}{L}y^2 + \frac{1}{L^2}y^3 & \frac{3}{L^2}y^2 + \frac{2}{L^3}y^3 & 0 & 0 & \frac{1}{L}y^2 - \frac{1}{L^2}y^3 \\ 0 & 1 - \frac{3}{L^2}y^2 + \frac{2}{L^3}y^3 & y\frac{2}{L}y^2 + \frac{2}{L}y^3 & 0 & 0 & \frac{3}{L^2}y^2 + \frac{2}{L^3}y^3 & \frac{1}{L}y^2 + \frac{1}{L^2}y^3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{[III-9]}$$

A partir des expressions du champ de déplacements, nous établissons l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'arbre.

### 3.2.1. Energie cinétique de l'arbre

L'énergie cinétique de l'arbre est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \rho S_a \int_0^L [(\dot{u})^2 + (\dot{w})^2] dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I \Omega^2 L + 2\rho I_{dy} \Omega \int_0^L (\dot{\Psi} \theta) dy \quad \text{[III-10]}$$

Dans la relation (III.10), il y a quatre termes : le premier terme est l'énergie cinétique d'une poutre en flexion (énergie de translation), le deuxième terme indique l'énergie de rotation, le troisième terme est constant et le dernier terme est dû à l'effet gyroscopique.

## CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

$$\text{Sachant que } u = N_1(y)\{q_x\}, w = N_2(y)\{q_x\}, \dot{u} = N_1(y)\{\dot{q}_x\}, \dot{w} = N_2(y)\{\dot{q}_x\} \Psi = -\frac{\partial N_1(y)}{\partial y} \{q_u\} \quad \text{[III-11]}$$

$$\theta = \frac{\partial N_2(y)}{\partial y} \{q_w\}, \dot{\Psi} = -\frac{\partial N_1(y)}{\partial y} \{\dot{q}_u\} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{\partial N_2(y)}{\partial y} \{\dot{q}_w\} \quad \text{[III-12]}$$

L'énergie cinétique devient :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho S_a \int_0^L [(N_1(y)\{\dot{q}_u\})^2 + (N_2(y)\{\dot{q}_u\})^2] dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial N_1(y)}{\partial y} + \{\dot{q}_u\} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_2(y)}{\partial y} + \{q_u\} \right)^2 \right] dy + \rho I \Omega^2 L + 2\rho I_{dy} \Omega \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial N_1(y)}{\partial y} + \{\dot{q}_u\} \right) * \left( \frac{\partial N_2(y)}{\partial y} + \{q_u\} \right) \right] dy \quad \text{[III-13]}$$

Sous la forme quadratique, l'expression peut encore s'écrire :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho S_a \int_0^L [(\{\dot{q}_u\}^T N_1^T N_1 \{\dot{q}_u\}) + (\{\dot{q}_w\}^T N_2^T N_2 \{\dot{q}_w\})] dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \left[ \left( \{\dot{q}_u\}^T \frac{\partial N_1^T}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \{\dot{q}_u\} \right) + \left( \{\dot{q}_w\}^T \frac{\partial N_2^T}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \{\dot{q}_w\} \right) \right] dy + \rho I \Omega^2 L + 2\rho I_{dy} \Omega \int_0^L \left[ \{\dot{q}_u\}^T \frac{\partial N_1^T}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \{q_w\} dy \right] \quad \text{[III-14]}$$

$$\text{Posons } M_1 = \rho S_a \int_0^L N_1^T N_1 dy \text{ et } M_2 = \rho S_a \int_0^L N_2^T N_2 dy, I_1 = \rho I \int_0^L \frac{\partial N_1^T}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} dy \text{ et } I_2 = \rho I \int_0^L \frac{\partial N_2^T}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} dy$$

$$G = \rho I_{dy} \int_0^L \frac{\partial N_1^T}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \text{ Respectivement matrices masse, effet d'inertie de rotation de la section de}$$

l'arbre et effet gyroscopique.

L'expression de l'énergie peut s'écrire :

$$T_a = \frac{1}{2} (\{\dot{q}_u\}^T M_1 \{\dot{q}_u\}) + \frac{1}{2} (\{\dot{q}_w\}^T M_2 \{\dot{q}_w\}) + \frac{1}{2} (\{\dot{q}_u\}^T I_1 \{\dot{q}_u\}) + \frac{1}{2} (\{\dot{q}_w\}^T I_2 \{\dot{q}_w\}) + \rho I \Omega^2 L + (\{\dot{q}_u\}^T G \{q_w\}) \Omega$$

[III-15]

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

En appliquant l'équation de Lagrange (III.1) à la relation (III.13), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial q} = [(M + M_s)]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} \quad \text{[III-16]}$$

M est matrice provenant des matrices masses [15],  $M_s$  vient des matrices dues à l'effet de rotation et C la matrice liée à l'effet gyroscopique., elles sont données par :

$$M = \frac{\rho S_a}{420} L \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22L^2 \\ & & Idem & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{[III-17]}$$

$$M_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L^2 \\ & & Idem & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{[III-18]}$$

$$C = \frac{\rho \Omega I_D y}{15L} L \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -36 & 3L \\ & & Idem & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{[III-19]}$$

## III.2.5.1 Energie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation du rotor est donnée par :

$$U_0 = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad \text{[III-20]}$$

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

C'est l'expression de l'énergie de déformation d'un rotor symétrique soumis en flexion dans le repère fixe ( $x_0z$ ).

Sachant que  $u = N_1(y)q_u$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N_1(y)}{\partial y^2} q_u$ ,  $w = N_2(y)q_w$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N_2(y)}{\partial y^2} q_w$  nous obtenons :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 N_1(y)}{\partial y^2} q_u \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 N_2(y)}{\partial y^2} q_w \right)^2 \right] dy \quad [\text{III-21}]$$

Sous forme quadratique on peut encore écrire :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( q_u^T \frac{\partial^2 N_1(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_1(y)}{\partial y^2} q_u \right) + \left( q_w^T \frac{\partial^2 N_2(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_2(y)}{\partial y^2} q_w \right) \right] dy \quad [\text{II-22}]$$

En posant  $K_1 = EI \int_0^L q_u^T \frac{\partial^2 N_1(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_1(y)}{\partial y^2} dy$  et  $K_2 = EI \int_0^L q_w^T \frac{\partial^2 N_2(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_2(y)}{\partial y^2} dy$ . ces sont les

matrices de raideur de l'arbre, l'énergie de déformation de l'arbre devient :

$$U_0 = \frac{1}{2} (q_u^T K_1 q_u) + \frac{1}{2} (q_w^T K_2 q_w) \quad [\text{III-23}]$$

Après application de l'équation de Lagrange (III.1) à la relation (III.21), nous avons :

$$\frac{\partial U_a}{\partial \{q\}} = K \{q\} \quad [\text{III-24}]$$

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & Idem & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [\text{III-25}]$$

# CHAPITRE 3 : RECHERCHE SUR LES APPLICATIONS DE VIBRATION DES ARBRES TOURNANTS

## III.2.6 Modélisation du rotor

La modélisation mathématique du mouvement du rotor se fait en utilisant les matrices élémentaires obtenues au point 3. Nous obtenons une équation de la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C(\Omega)]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = F_{\text{totales}} \quad \text{[III-26]}$$

Avec  $[M]$  la matrice masse,  $\{q\}$  le champ de déplacements nodaux,  $[C(\Omega)]$  une matrice non symétrique dépendant de la vitesse de rotation du système et tient compte de l'effet gyroscopique,  $[K]$  la matrice de raideur caractéristique des paliers et  $F_{\text{totales}}$  la somme de forces excitatrices du rotor.

## III.2.7 Simulation numérique du mouvement du rotor

Afin de déterminer les caractéristiques modales du rotor, il sera question de résoudre l'équation (III-27).

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C(\Omega)]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad \text{[III-27]}$$

A partir de cette équation (III.24), nous avons : les pulsations propres, les valeurs propres, les vecteurs propres, les coordonnées modales ainsi que la matrice modale du rotor. Le nombre de degré de liberté est élevé, la résolution manuelle est fastidieuse ; l'utilisation des méthodes itératives et programmables devient inévitable. Le logiciel nous permettra de déduire le comportement global du rotor et de tirer certaines informations importantes sur le comportement dynamique du rotor.

Il existe plusieurs logiciels d'étude et de prévision du comportement dynamique du rotor : le Sysrotor, le Rotorinsa, Matlab, Ansys, etc. pour la caractérisation du comportement dynamique du rotor, nous avons utilisé le logiciel Ansys. Ce logiciel est basé sur la méthode des éléments finis.

**Chapitre IV :**  
**Modélisation**  
**numérique de**  
**vibration des arbres**  
**tournants sur**  
**ANSYS**



## IV.1. Analyse modale logiciel Workbench ANSYS 19

Les études essentielles de la dynamique des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquence propres en fonction de vitesse de rotation et le calcul des réponses de disque à balourd lié à l'arbre avec une clavette principalement lors du passage des vitesse critiques pour notre deuxième modèle et sans disque à balourd pour le premier. Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode des éléments finis. Dans ce qui suit on présente la simulation numérique du rotor par le code calcul ANSYS 19 Workbench.

### IV.1.1. Caractéristique géométrique de rotor

Premier modèle : les deux paliers supposé parfaitement rigide, le type de matériel est 'Acier Standard Les paramètres des éléments de rotor sont définies comme suivant :

- **Paramètre géométrique**
  - Pour l'arbre : longueur  $L=500$  mm, diamètre = 50mm
  - Pour les paliers : Diamètre intérieur : 50 mm
  - Densité :  $7850 \text{ Kg/m}^3$
- **Paramètre d'Elasticité isotrope**
  - Module de young:  $2 \text{ e}+11$  Pa
  - Coefficient de poisson : 0.3 v
  - Module d'élasticité :  $1.6667\text{e}+11$  Pa
  - Module de cisaillement :  $7.6923 \text{ e}+10$  Pa
  - Coefficient isotrope sécant de dilatation thermique :  $1.2 \text{ e-}05$   $1/^\circ\text{C}$
  - Limite à la rupture en compression : 0 Pa
  - Limite élastique en compression :  $2.5 \text{ e}+08$  Pa
  - Limite à la rupture en traction :  $4.6 \text{ e}+08$  Pa
  - Limite élastique de chaleur spécifique :  $434.000 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$
- **Paramètre thermique**
  - Conductivité thermique isotrope :  $60.500 \text{ W/}^\circ\text{C}$
  - Pression constante de chaleur spécifique :  $434.00\text{J/kg}^\circ\text{C}$
- **Paramètre Electrique**
  - Résistivité isotrope :  $1.7 \text{ e-}07$  ohm.m
- **Paramètre Magnétique**
  - Perméabilité relative isotrope : 10000

Deuxième modèle : les deux paliers supposés parfaitement rigide, Les paramètres des éléments de rotor sont définies comme suivant :

- **Paramètres géométriques :**

- Pour l'arbre : longueur  $L=500$  mm, diamètre = 50mm
- Palier : Diamètre intérieur 50 mm
- Pour le disque : l'épaisseur : 40 mm, diamètre intérieur :  $D_d= 50$  mm diamètres extérieur = 180 mm
- Pour le balourd : l'épaisseur 10 mm, diamètre = 11.09 mm
- Pour la clavette : l'épaisseur = 24.22 mm, longueur = 20 mm

- **Paramètres d'Elasticité isotrope**

- Module de young:  $2 \text{ e}+11$  Pa
- Coefficient de poisson : 0.3 v
- Module d'élasticité :  $1.6667 \text{ e}+11$  Pa
- Module de cisaillement :  $7.6923 \text{ e}+10$  Pa
- Coefficient isotrope sécant de dilatation thermique :  $1.2 \text{ e}-05$   $1/^\circ\text{C}$
- Limite à la rupture en compression : 0 Pa
- Limite élastique en compression :  $2.5 \text{ e}+08$  Pa
- Limite à la rupture en traction :  $4.6 \text{ e}+08$  Pa
- Limite élastique de chaleur spécifique :  $434.000$  J/kg $^\circ\text{C}$

- **Paramètres thermique**

- Conductivité thermique isotrope :  $60.500$  W/ $^\circ\text{C}$
- Pression constante de chaleur spécifique :  $434.00$ J/kg $^\circ\text{C}$

- **Paramètres Electrique**

- Résistivité isotrope :  $1.7 \text{ e}-07$  ohm.m

- **Paramètres Magnétique**

- Perméabilité relative isotrope : 10000

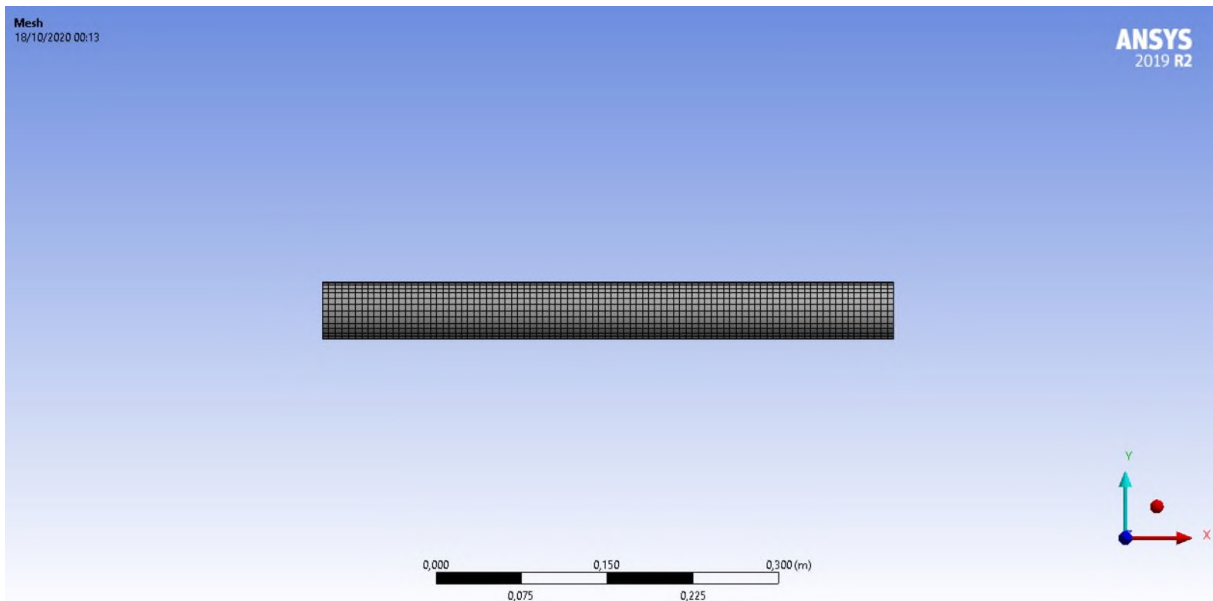
### IV.1.2. Génération et maillage de la géométrie de rotor

La génération de la géométrie du rotor dans le code de calcul ANSYS est obtenue par importation de la géométrie **SolidWorks** et son maillage est obéie au choix des éléments de maillage correspond chaque élément de rotor.

Le maillage global de rotor (élément arbre et palier additionnés) pour le premier modèle représente le modèle global de rotor à élément fini est illustré sur la **Figure 23**

Structure	Elément	Nœud
Rotor	7280	33393

**Tableau 1** :Maillage du Rotor

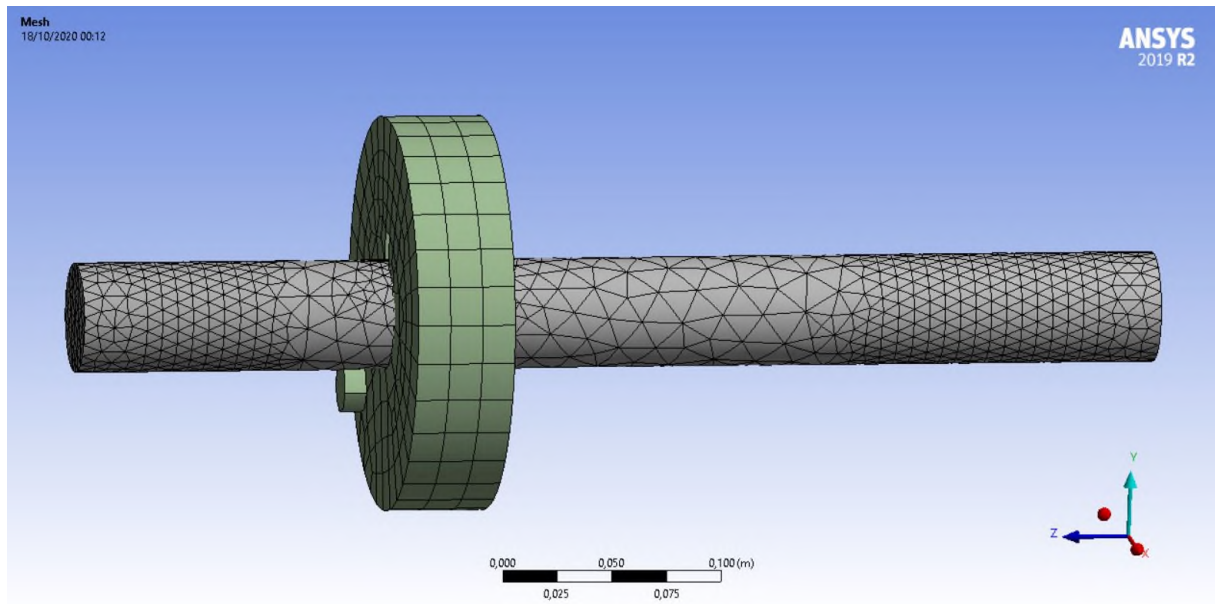


**Figure 24**: Maillage du rotor

Le maillage global de rotor (élément arbre, Disque avec Balourd et palier additionné) pour le premier modèle représente le modèle global de rotor à élément fini est illustré sur la **Figure 24**

Structure	Elément	Nœud
Rotor	16876	28339

**Tableau 2 :** Maillage du Rotor avec disque et balourd



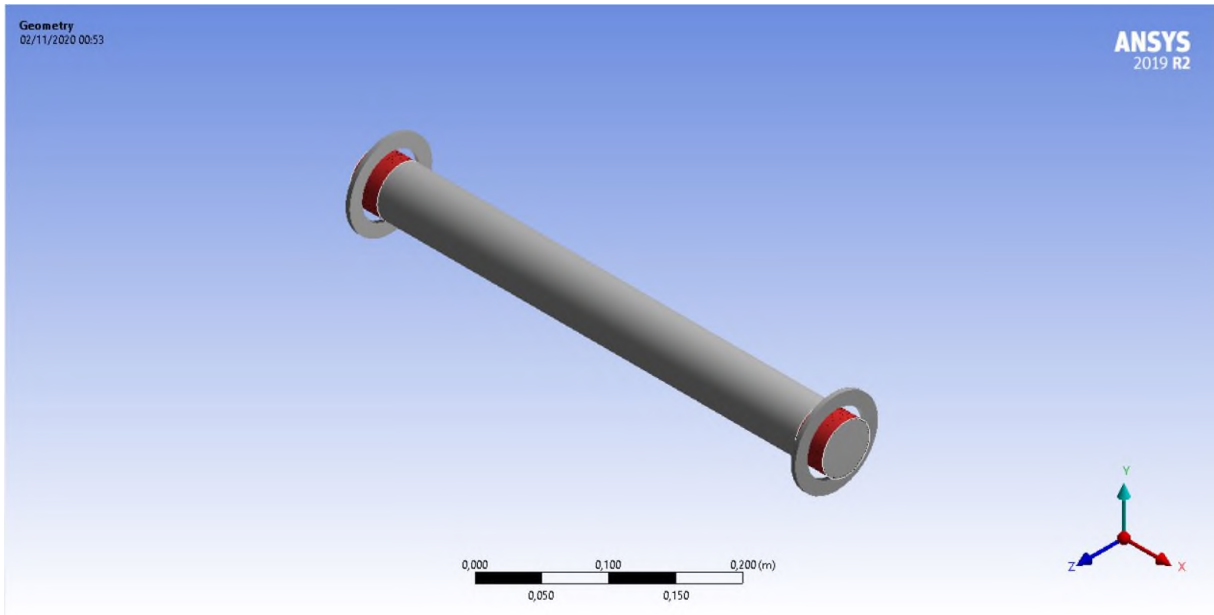
**Figure 25:** Maillage du rotor avec disque et balourd

### IV.1.3. Les conditions aux limites

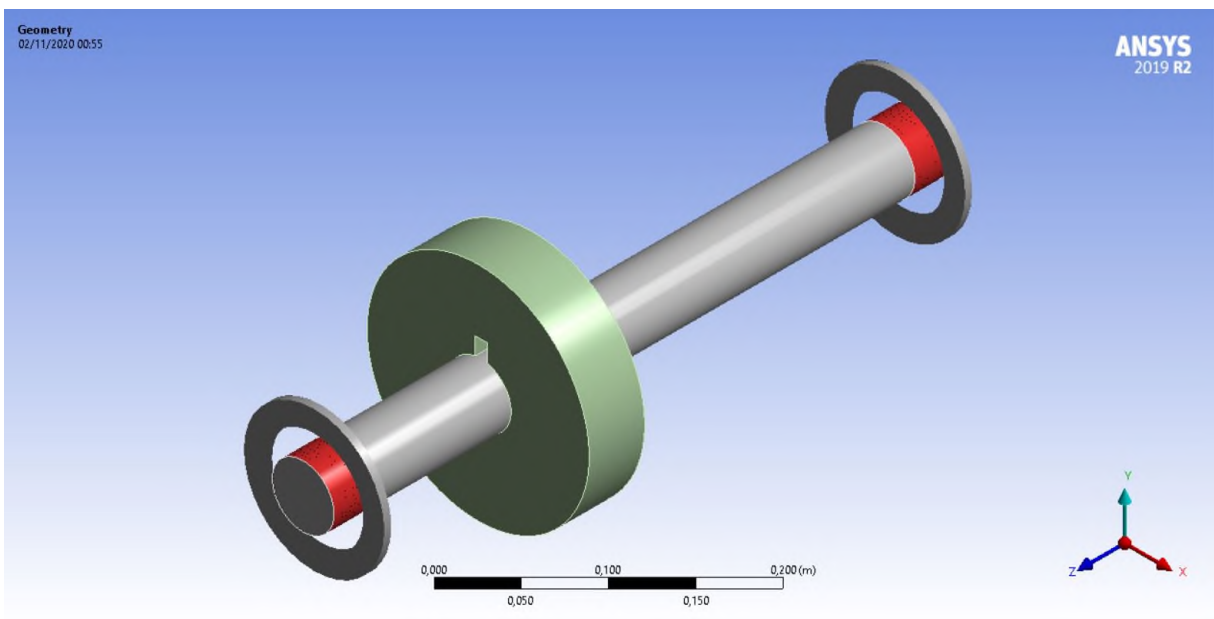
Les conditions aux limites dans nos deux modèles de rotor correspondent :

Le système en rotation suivant l'axe **OX** ( $Rot_x$   $x$ ), les mouvements de flexion suivant l'axe **Z** et **Y**.

Pour les paliers dans le cas où son effet est négligeable ont supposé qu'ils soient rigides (on supprime tous les degrés de libertés suivant les 3 directions dans le point de raccordement avec l'arbre et les points de raccordement avec la fondation. Si son effet n'est pas négligeable on garde les degrés de liberté suivant les axes **OY** et **OZ** et on supprime le déplacement et la rotation suivant **OX** dans les points de raccordement avec l'arbre voire la **Figure 26** et **Figure 27**



**Figure 26 : Condition aux limite ( Modèle 1)**



**Figure 27: condition aux limité (Modèle2)**

## IV.2 : Résultant de simulation numérique

La simulation a été faite pour la vitesse de rotation de fonctionnement  $\Omega$  qui est égale à 10000 Rpm

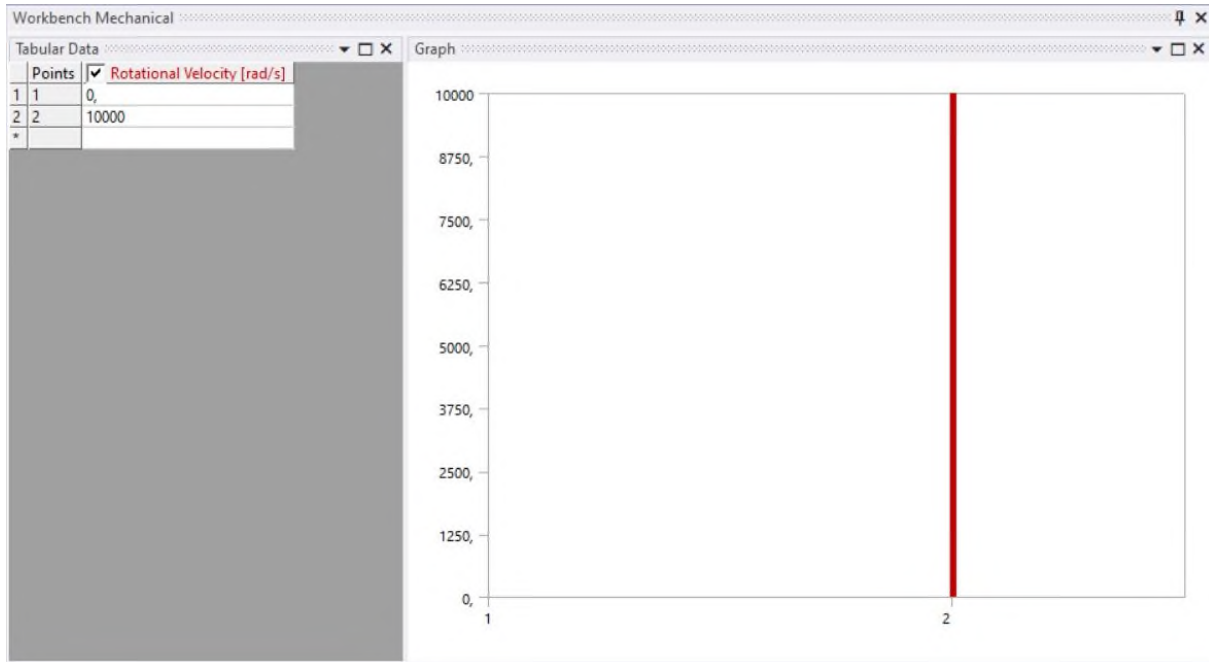


Figure 28 : la vitesse de rotation de fonctionnement  $\Omega= 10000$  rpm

### IV.2.1 : les déplacements max et les fréquences

#### Palier Rigide

Le tableau dessus présent les déplacements max et les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse par palier rigide

Mode	Vitesse de rotation [rpm]	Fréquence [Hz]	Déplacement Max
1	10000	1,7363	0,077416
2		4,8515	0,23005
3		98,849	0,20984
4		732,88	0,55142

Tableau 3 : les déplacements max et les fréquences modèle 1 (voir figures 29)

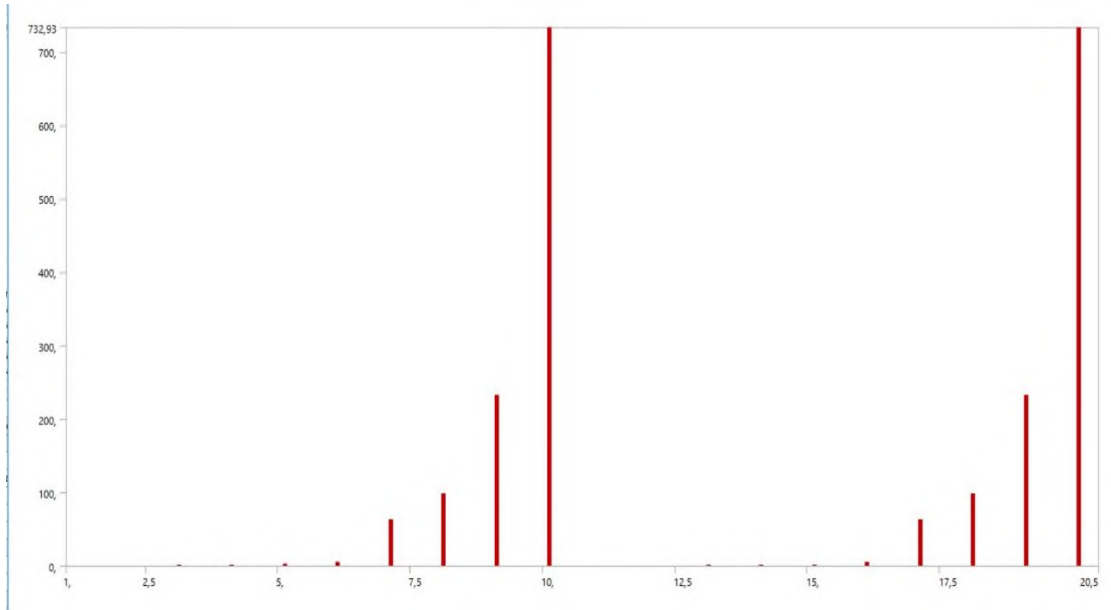


Figure 29 : graph de fréquence et de déplacement max

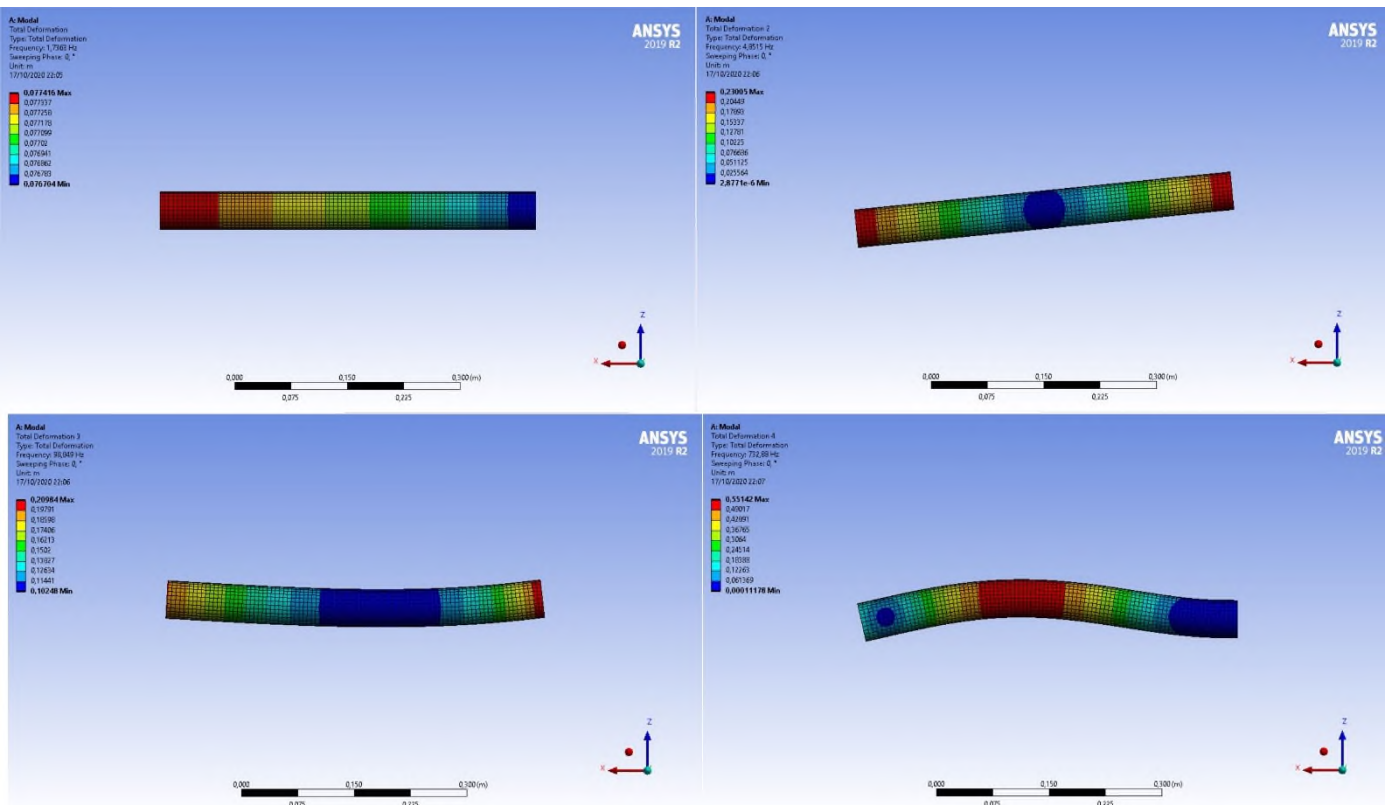


Figure 30 : Déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10000 rpm

## Modèle N° 2 : Arbre tournant et Disque avec Balourd.

### Palier Rigide

Le tableau dessus présent les déplacements max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse par palier élastique.

Mode	Vitesse de Rotation [rpm]	Fréquences [Hz]	Déplacement Max
1.	10000	1,6963	0,7548
2.		7,1569	0,22636
3.		3,7945	0,038902
4.		6953,7	0,15985

Les résultats de déplacement illustrent aux figures au-dessous (voir figure 29,30)

Tableau 4 : Fréquence et déplacement Max de chaque mode calculé (modèle 2)

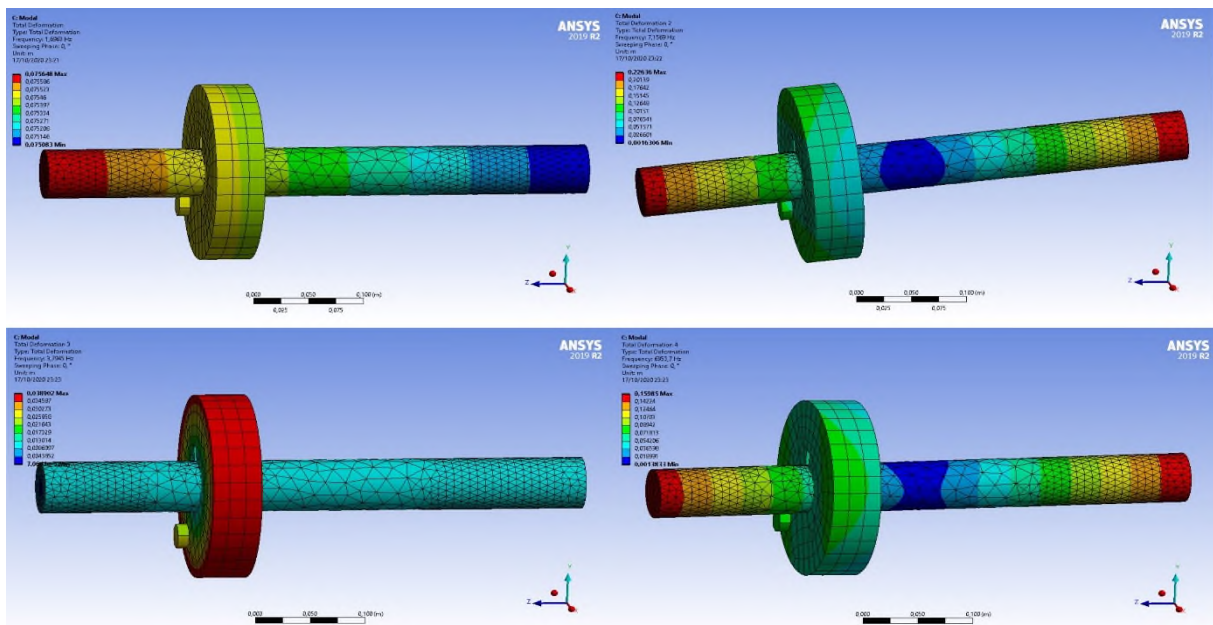


Figure 31: Déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10000 rpm



## IV.2.2 : Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell permet nous de déterminer les vitesse critique pour divers types d'excitation, pour une excitation synchrone de type force de balourd la vitesse critique est obtenue par l'intersection de droit harmonique bissectrice avec les droits des modes de vibration de rotor, le diagramme de Campbell pour les hypothèses de palier aux figures (32.33)

### Modèle 1 :

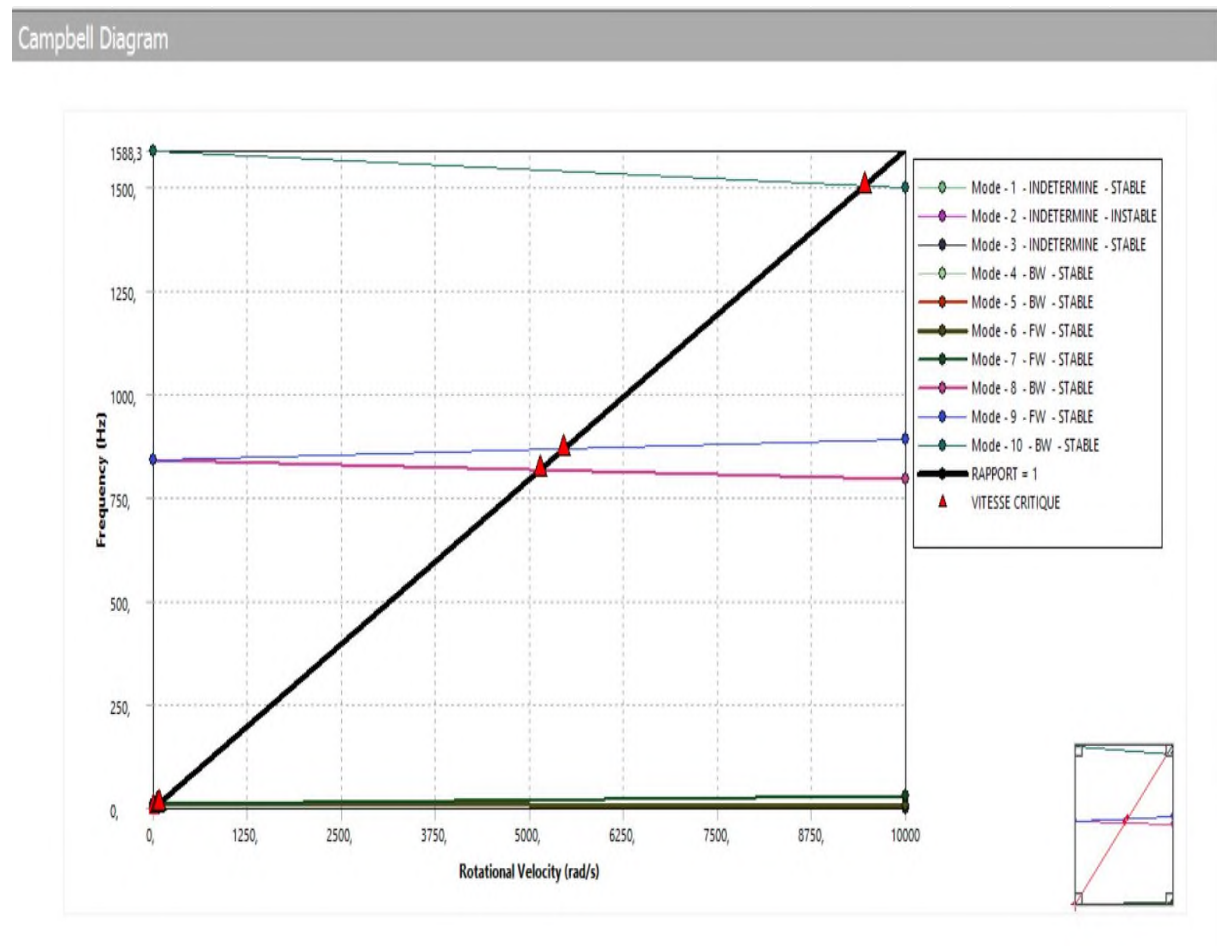


Figure 32 : Diagramme de Campbell palier rigide (modèle 1)

La vitesse n'est pas apparue mais elle est possible d'avoir des grande vitesse et d'absence le gyroscopique , le mode 1 est instable

la première vitesse critique correspond au troisième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 10.91$  rad/s .

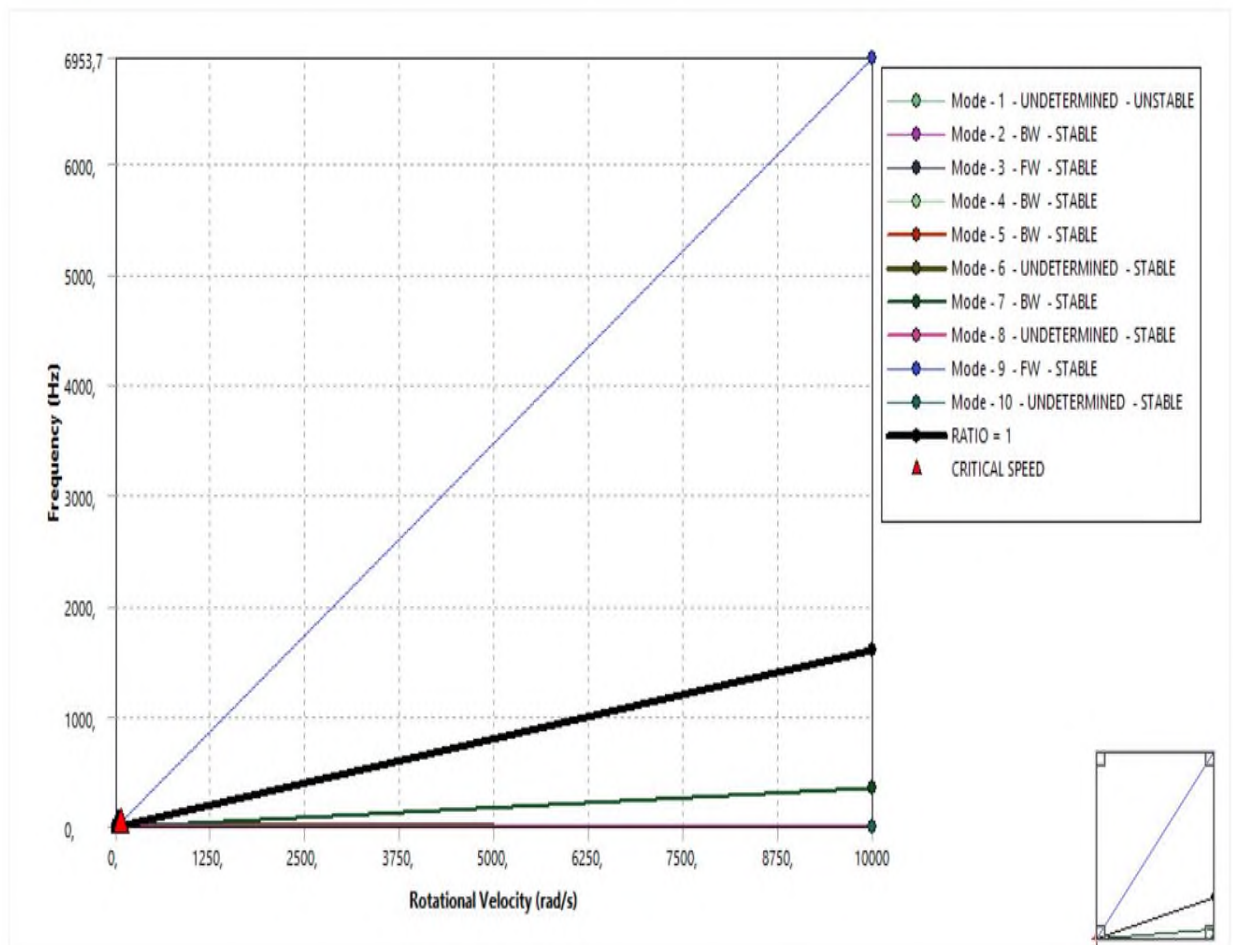
la deuxième vitesse critique correspond au sixième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 30.487$  rad/s

la troisième vitesse critique correspond au huitième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 421.09$  rad/s

la quatrième vitesse critique correspond au dixième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 4605$  rad/s

## Modèle 2 :

### Campbell Diagram



**Figure 33** : Diagramme de Campbell palier rigide (modèle 2)

La vitesse n'est pas apparue mais elle est possible d'avoir des grandes vitesses et d'absence le gyroscopique, le mode 1 est instable

La première vitesse critique correspond au troisième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 10.658$  rad/s.

La deuxième vitesse critique correspond au cinquième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 44.873$  rad/s

La troisième vitesse critique correspond au quinzième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 124.63$  rad/s

La quatrième vitesse critique correspond au dix-neuvième mode est situé à la vitesse  $\Omega_c = 926.65$  rad/s

### **IV2.3 Comparaison des résultats entre les deux modèles**

Dans ce dernier chapitre on a mené des études sur deux modèles d'arbre tournant avec palier rigide le premier modèle sans disque et le deuxième avec un disque et balourd avec une application d'une vitesse de rotation de 10000 (rpm) ,les résultats sont les suivants :

D'après la simulation on a remarqué que dans le 1<sup>er</sup> modèle il n'y avait pas un grand changement dans l'augmentation de la fréquence du mode 1 (1,7363 Hz) jusqu'au mode 4 (732,88 Hz) ni une grande différence en parallèle avec le déplacement max ce qui montre que l'analyse vibratoire à été stable,

Contrairement au deuxième modèle où on a remarqué la grande différence dans l'augmentation de fréquence du mode 1 (1,6963 Hz) au mode 4 (6953,7 Hz) et sa non correspondance au déplacement max ce qui montre que le disque avec balourd à été un facteur de déstabilisation ce qui causera un problème structurel dans le modèle mécanique et une instabilité vibratoire (plus de vibration non voulus)

## Conclusion générale

Ce travail avait pour objectif d'apporter d'étude dynamique de rotors par élément finis

Le premier chapitre est basé sur une introduction générale à ce travail et est basé sur une synthèse bibliographique sur le comportement dynamique et vibratoire des machines tournantes. Il intègre la généralité des rotors et sa contribution à l'histoire et aux travaux de recherche sur le développement de la dynamique du rotor. Selon nos recherches détaillées la conclusion est que les premières recherches sur la dynamique du rotor se limitent généralement à déterminer Vitesse critique et mode de vibration, mais les points de vue des chercheurs récents se sont tournés vers l'étude des systèmes non linéaires et l'analyse de la stabilité du rotor.

Systeme dynamique

Le deuxième chapitre est consacré sur la théorie des vibrations des machines tournants les notions fondamentales des vibrations avec la mention des types de vibrations, l'amortissement, les dommages causés par les vibrations excessives en plus des notions sur le balourd et l'introduction des équations différentielles appliqués sur l'arbre de machine

Le troisième chapitre consacré à l'étude du rotor par la méthode des éléments fini, on a déterminé les différentes matrices des paramètres dynamique de rotor, matrice de masse, matrice d'amortissement et matrice de rigidité.

Enfin, L'étude menée au dernière chapitre est pour objectif de détermine les fréquences, déplacements max ,ces études ont été faite par simulation en ANSYS WORKBENCH et ils sont présentés par des courbes, ou cela on constate que la vitesse critique proportionnel aux grandes vitesses sans oublier et comme une condition très important il faut que le coefficient de gyroscopique égale zéro

D'après le thème que je le traite dans ma mémoire, j été oblige d'apprendre l'utilisation de logiciel ANSYS WORKBENCH pour trouver ces difficiles résultats, on souhaite au futur

D'approfondir le développement et le recherche sur l'Eudes dynamique de rotor par élément fini

## Références Bibliographique

1. [https://www.wikiwand.com/en/Rotordynamics#/Campbell\\_diagram](https://www.wikiwand.com/en/Rotordynamics#/Campbell_diagram)
2. H.Lamb and R.Southwell “the vibration of spinning disk” Proc.of the royal society of London, vol 99.pp.272-280,1921.
3. G.Genta and A.Tonoli “a harmonic finite element for analysis of flexural, torsional, and rotordynamic behaviour of discs” journal of sound and vibration, vol, 196, no1, pp.19-43, 1996.
4. John F.Ward “the dynamic response of flexible rotor blade concentrated for moving from tiptoroot” national aeronautics and space administration. Washington. D.C.Septem BFR 1969, document NASA TN D-5410.
5. K.Sinhas “dynamic characteristics of a flexible bladed rotor with coulomb damping due to tip rub” journal of sound and vibration, vol 273,2004.pp.875-919.
6. P.Hughes “space craft attitude dynamics” Wiley, New York 1986
7. P.W.Fortesue and J.Starck “spacecraft systems engineering” Wiley, New York 1991
8. H.Jeffcott “the lateral vibration of loaded shafts in the neighbour hood of wirling speed- the effect of want of balance” Phil.Mag, vol 37.no 6.pp.304-314,1919
9. <http://www.cndp.fr/crdp-reunion/node/217>
10. [www.silanus.fr > sin > Ressources > hubertfaigner](http://www.silanus.fr/sin/Ressources/hubertfaigner)
11. Théorie du réacteur et notions scientifiques fondamentales – Équipement mécanique  
Groupe de formation technique 2003.
12. Meramria Wafa, Mémoire de Magistère, Etude de L’Effet Dynamique d’un Palier  
Lisse par Analyse Vibratoire, 2009.
13. [http://perso.univ-lemans.fr/~cpotel/chap6\\_vibrations\\_1ddl\\_VAS1\\_potel\\_gatignol.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~cpotel/chap6_vibrations_1ddl_VAS1_potel_gatignol.pdf)
14. <https://canteach.candu.org/Content%20Library/20070700.pdf>

15. <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/11420/2/Texto%20integral.pdf>
16. BERNASCONI O., *Vibrations de torsion des arbres de machines – calcul d'un modèle à paramètres repartis discontinus*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1984.
17. BRAHMI H., *Etude du comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d'un rotor flexible*, Université M'Hamed BOUGARA, Alger, 2010.
18. CHELLIL A., *Identification et modélisation par éléments finis des charges dynamiques du rotor principal d'hélicoptère*, Université M'Hamed BOUGARA, Alger, 2008.
19. STEFAN P. et IORDANOFF Y., *Butées et paliers aérodynamiques*, Technique d'ingénieur, N°serie b5335, 1996.
20. GHABBI R., *Analyse des phénomènes vibratoires en dynamique des rotors – modélisation et expérimentation*, Université de BATNA, Alger, 2014.
21. LALANNE M. et FERRARIS G., *Dynamique des rotors en flexion*, Technique d'ingénieur, N° serie b5110, 1996.
22. REGGIO M. et TREPANIER JY., *Théorie des turbomachines*, Ecole polytechnique Montreal, 2005.
23. JENNY M., *Machines à fluides – turbomachines*, Mines Nancy, 2014.
24. GOJON R., *Critères de choix d'un palier*, Technique d'ingénieur, N° Serie b 5300, 1999.
25. TALA IGHIL N., *Contribution à l'étude des paliers en régime hydrodynamique instationnaire – influence des états de surface*, Université des sciences de technologie d'Oran, 2007.
26. PUGNET JM., *Equilibrage de rotors rigides*, Technique d'ingénieur, N° Serie Bm 5130, 2003.

## Résumé

Le progrès technologique continue d'exiger des systèmes plus efficaces. Pour les machines tournantes, l'objectif idéal est une puissance élevée et une vitesse extrêmement élevée

Cependant, malgré les progrès de la conception, les problèmes de vibration liés aux principaux composants tels que les arbres et les rotors sont toujours un phénomène digne d'attention. Ce dernier est causé par des défaillances inévitables de traitement et d'assemblage, qui limitent les performances de la machine en affectant le fonctionnement et la fiabilité de la machine. Ils peuvent causer de graves dommages ou provoquer sa ruine. La modélisation a été faite par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul ANSYS pour déterminer les fréquences propres, les déformées modales, les vitesses critiques du rotor et de calculer les contraintes agissant sur le rotor pour les différents modes propres.

Le travail présenté dans ce mémoire traite un problème réel concernant l'analyse du comportement dynamique vibratoire de deux modèles arbre tournant avec deux paliers et arbre tournant avec deux paliers et disque avec balourd.

## Abstract

Technological progress continues to demand more efficient systems. For rotating machines, the ideal goal is high power and extremely high speed

However, despite advancements in design, vibration issues related to major components such as shafts and rotors are still a phenomenon worthy of attention. The latter is caused by inevitable processing and assembly failures, which limit the performance of the machine by affecting the operation and reliability of the machine. They can cause serious damage or bring about its ruin. The modeling was done by the finite element method using the ANSYS calculation code to determine the frequencies, the modal deformations, the critical speeds of the rotor and to calculate the stresses acting on the rotor for the different modes.

The work presented in this thesis deals with a real problem concerning the analysis of the dynamic vibratory behavior of two models rotating shaft with two bearings and rotating shaft with two bearings and disc with unbalance.

## ملخص

يستمر التقدم التكنولوجي في المطالبة بأنظمة أكثر كفاءة. بالنسبة للدورات، الهدف المثالي هو الطاقة العالية والسرعة العالية للغاية ومع ذلك، على الرغم من التطورات في التصميم، لا تزال مشكلات الاهتزاز المتعلقة بالمكونات الرئيسية مثل الأعمدة والدورات ظاهرة تستحق الاهتمام. هذا الأخير ناتج عن فشل لا مفر منه في المعالجة والتجميع، مما يحد من أداء الجهاز من خلال التأثير على تشغيل وموثوقية الجهاز. يمكن أن تسبب أضرارًا جسيمة أو تؤدي إلى تدميرها. تم عمل النموذج بطريقة العناصر المحدودة باستخدام كود حساب ANSYS لتحديد الترددات الذاتية، والتشوهات الشكلية، والسرعات الحرجة للدوار ولحساب الضغوط التي تعمل على الدوار لأوضاع مختلفة. يتعامل العمل المقدم في هذه الأطروحة مع مشكلة حقيقية تتعلق بتحليل السلوك الاهتزازي الديناميكي لنموذجين من عمود الدوران بمحملين وعمود دوار بمحملين وقرص غير متوازن.