
République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Équations Différentielles et modélisation

Présentée par :
M^{elle}. Hadjira GASMI

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN MODÈLE D'HÉROÏNE AVEC LE TRAITEMENT ÂGE

Encadrant :
M. BENTOUT Soufiane
Maitre de Conférence "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le 23 septembre 2020.

Devant le jury composé de :

Président : M^{me}. BENZERDJEB Sarra (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Examinatrice : M^{me}. MAMMAR Imane (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Encadrant : M. BENTOUT Soufiane (M.C.B) C.U.B.B.A.T.

Remerciement

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

*Parvenu au terme de ces travaux, je souhaite exprimer ma reconnaissance, ma plus profonde gratitude et mon indéfectible attachement à mon encadrant **M BENTOUT Soufiane**, qui a su guider mon travail avec compétence et merci pour votre gentillesse, votre disponibilité, vos conseils, votre rigueur scientifique et votre aide très précieuse.*

*Mes respectueux remerciements s'adressent aux les membres du jury, **M^{me} BENZERD-JEB Sarra** d'avoir accepté de présider le jury et **M^{me} MAMMAR Imane** pour avoir accepté d'examiner mon travail et contribué aux discussions lors de la soutenance.*

J'adresse mes chaleureux remerciements à tous les enseignants de département des mathématiques qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

Je remercie plus largement mes camarades de Master et mes amis qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

À toutes et à tous, je témoigne ma gratitude sur le soutien dont ils m'ont honorés.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

La plus chère au monde, ma mère, que dieu la garde et la protège, aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour elle, pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de consentir durant toute ma vie.

À mes chers parents et mes chers soeurs et frères.

À toutes mes chères amies qui m'ont toujours aidé, qui étaient toujours à mes côtés.

À ceux et celles qui m'ont honorés de leurs soutiens durant ces années d'étude.

M^{elle} Hadjira Gasmi.

*"C'est par la logique que nous prouvons.
C'est par l'intuition que nous inventons ."*

Sommaire

Notations et abréviations	5
Introduction Générale	6
I Préliminaires	8
I.1 Généralités sur les systèmes dynamiques	8
I.2 Le taux de reproduction basique	9
I.3 Notion de stabilité et points d'équilibre	10
I.4 Bifurcation backward	12
I.5 Stabilité des équilibres au sens de Lyapunov	14
I.6 Persistance	15
I.6.1 Persistance uniforme	16
II Modèle d'héroïne classique	18
II.1 Le modèle mathématique	19
II.1.1 Les hypothèses du modèle	20
II.2 Le taux de reproduction basique	21
II.2.1 Définition et Interprétation de \mathcal{R}_0 :	21
II.2.2 Calcul de \mathcal{R}_0 :	21
II.2.3 Analyse de sensibilité du \mathcal{R}_0 :	23
II.3 Stabilité du point d'équilibre sans drogue $\mathcal{R}_0 < 1$	23
II.4 Analyse du cas $\mathcal{R}_0 = 1$	24
II.5 Existence d'équilibre endémique :	29
III Modèle d'héroïne avec le traitement âge	32
III.1 l'analyse du modèle Mathématique	33
III.2 Étude de la stabilité locale	37
III.3 Persistance uniforme	41
III.4 Étude de la stabilité globale	47

III.4.1 Stabilité globale d'équilibre sans drogue	47
III.4.2 Stabilité globale d'équilibre endémique	49

Conclusion Générale	56
----------------------------	-----------

Bibliographie	57
----------------------	-----------

Notations et abréviations

$\ \cdot \ $	La norme.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant définie par : $\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \text{ est bijectif} \}$.
\mathcal{D}	L'opérateur dérivé.
$\frac{dx}{dt}$	Dérivé de la variable x par rapport au temps .
\mathcal{I}	L'opérateur identité.
$\mathcal{L}_1^+([a, b])$	L'espace de Lebesgue intégrable à valeur dans (a, b) .
\mathbb{R}^+	L'ensemble des nombres réels positifs $[0, \infty)$.
\det	Le déterminant d' une matrice.
tr	La trace d'une matrice.
V	désigne la fonction de Lyapunov.
EDO	désigne Les Équations Différentielles Ordinaire.
DFE	désigne en anglais : Drug Free Equilibrium.
\mathcal{R}_0	désigne le nombre de reproduction de base.
J	désigne la matrice jacobienne.
LAS	désigne localement asymptotiquement stable.

Introduction Générale

En dynamique des populations les modèles continus les plus simples ne font intervenir que la densité de la population (nombre individus par unité de temps) ce qui suppose que ces individus sont interchangeableables. Pour construire des modèles plus précis il est donc nécessaire de tenir compte d'autres paramètres importants tel que la répartition spatiale de la population ou l'âge de ces individus. Par exemple en épidémiologie les individus constituant la population infectée ont des taux de reproduction et des capacités de survie selon leurs âges. Dans ce cas précis l'âge est un paramètre important pour modéliser la dynamique d'une telle population, on dit alors que cette population est structurée en âge. La théorie mathématique des systèmes structurés en âge est une branche importante de la théorie plus générale des systèmes dynamiques. Ces systèmes jouent un rôle majeur dans la modélisation en écologie, en démographie, épidémiologie etc. De nombreux modèles simplifient l'analyse mathématique en supposant que le taux de mortalité ainsi que tous les paramètres du modèle qui dépendent de l'âge sont bornés ramenant automatiquement la possibilité de l'immortalité d'autres modèles plus réalistes imposent un âge maximum qui ne peut être atteint en supposant que le taux de mortalité devient non borné,

$$\lim_{a \rightarrow a_{max}} \int_0^a \mu(s) ds = \infty,$$

avec μ est le taux de mortalité et a_{max} l'âge maximum. le premier modèle structuré en âge a été proposé par *Von Foerster* qui est écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} + \mu(a, f(t))p(t, a) = 0, \\ p(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a)p(t, a)da, \\ p(0, a) = p_0(a), \end{cases}$$

avec, $p(t, 0)$ la fonction de naissance, β le taux de naissance et μ le taux de mortalité ou de natalité, avec a représente l'âge et t représente le temps.

Puis, *Gurtin* et *MacCamy* [10] ont proposé le modèle suivant

$$\begin{cases} u_t + u_a = -m(a, P(t))u(a, t), & a \in [0, a_m], \quad t > 0, \\ u(0, t) = \int_0^{a_m} \alpha(a, P(t))u(a, t)da, & t > 0, \\ u(a, 0) = u_0(a), & a \in [0, a_m], \end{cases}$$

en supposant que le taux de natalité et de mortalité dépendent de la taille de la population totale, qui est elle-même une intégrale de la densité de l'âge. Ils ont montré que la solution du système tend vers un équilibre endémique stable.

Cependant, la modélisation mathématique joue un rôle important dans la compréhension et la lutte contre les problèmes de toxicomanie. Les modèles sont des outils très utiles pour prédire le comportement des catégories de toxicomanes et proposer des stratégies de traitement.

Le but principal de ce mémoire est l'étude d'un modèle mathématique d'héroïne basé sur les équations aux dérivées partielles.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

le premier chapitre est consacré aux résultats préliminaires, des définitions et des théorèmes très importants utilisés dans le mémoire ainsi que des outils mathématiques dont nous aurons besoin.

Le deuxième chapitre, on présente un modèle mathématique d'héroïne représentant la propagation de l'usage des drogues dans une population donnée.

Le troisième chapitre est une étude générale d'un modèle d'héroïne avec traitement âge qui est formulé sur la base des principes de l'épidémiologie mathématique. Le modèle rend compte du taux de rechute qui dépend de la durée pendant laquelle l'hôte a été traité pour la dépendance à l'héroïne. On obtient le nombre reproductif de la propagation d'héroïne. En utilisant la méthode de *Lyapunov* fonctionnelle, nous avons établi les propriétés dynamiques du modèle épidémique d'héroïne et les résultats montrent que la dynamique globale du modèle est complètement déterminée par le nombre de reproduction de base. Que l'équilibre sans drogue est localement et globalement asymptotiquement stable si le nombre de reproduction basique \mathcal{R}_0 est inférieur à 1. De plus, on montre que le système est persistant et l'équilibre endémique est localement et globalement asymptotiquement stable quand \mathcal{R}_0 supérieur à 1.

Des conclusions sont données à la fin de ce mémoire, qui se termine par une bibliographie.

Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle des définitions et des théorèmes qui seront utilisés dans ce mémoire.

I.1 Généralités sur les systèmes dynamiques

Définition I.1.1 (Équation différentielle).

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à f l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad (\text{I.1})$$

où $f(t, x) = (f_1(t; x), \dots, f_n(t; x))$, et chaque fonction f_i est continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction f est appelée champs de vecteurs, l'équation représente un système de n équations différentielles ordinaires. Dans la pratique, l'équation (I.1) exprime la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps t , et x représente l'état du système étudié.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)), & t \in (0, b), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \Omega$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème I.1.1 (Cauchy-Lipschitz [19]).

Si f est continue sur Ω et s'il existe une constante $l > 0$ telle que

$$\| f(x_1(t)) - f(x_2(t)) \| \leq l \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega, t > 0,$$

alors le problème (I.2) admet une solution globale et elle est unique.

I.2 Le taux de reproduction basique

La méthode de Van Den Driessche et Watmough [11]

Nous aurons souvent à faire avec l'indice \mathcal{R}_0 qui mesure le nombre de cas secondaire produits par un individu infectieux moyen au cours de sa période d'infectiosité, dans une population entièrement susceptibles. Il existe dans la littérature plusieurs techniques pour calculer \mathcal{R}_0 , nous en présentons une ici :

État de la population : $(x_i), i = 1, \dots, n$, soit le système différentielle suivant

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x} = \mathcal{F}_i(x) + \mathcal{V}_i^+(x) - \mathcal{V}_i^-(x), \quad (\text{I.3})$$

avec

$\mathcal{F}_i(x)$: vitesse d'apparition des infectieux dans le compartiment i.

$\mathcal{V}_i^+(x)$: la vitesse de transfert des individus dans le compartiment i par tout autre moyen (guérison, etc . . .).

$\mathcal{V}_i^-(x)$: la vitesse de transfert hors du compartiment i (mortalité, infection, etc . . .).

- On ordonne les variables d'état afin que les $m(\leq n)$ premières correspondent à des états infectés.
- États sans maladies : $X_s = \{x | x_1 = \dots = x_m = 0\}$.
- Équilibre sans maladie *DFE* $x^* \in X_s$. Pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :

1. Si $x \geq 0$, alors $\mathcal{F}_i \geq 0, \mathcal{V}_i^- \geq 0, \mathcal{V}_i^+ \geq 0$.
2. Si $x_i = 0$, alors $\mathcal{V}_i^- = 0$ (pas de sortie d'un compartiment vide).
3. pour $i > m$ alors, $\mathcal{F}_i = 0$ (pas d'incidence pour états non infectés).
4. si $x \in X_s$, alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$ et pour $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$ (pas d'infection spontanée).
5. si $\mathcal{F}=0$ le système est *LAS* en \dot{x} , i.e. $D(\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-)(x^*)$ a des valeurs propres à parties réelles négatives.

La jacobienne s'écrit

$$J(x^*) = D\mathcal{F}(x^*) + D(\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-)(x^*).$$

Lemme I.2.1. [11] si x^* est un *DFE* de (I.3), alors les matrices

$$D\mathcal{F}(x^*) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D\mathcal{V}(x^*) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix},$$

où F et V sont les matrices $m \times m$ définies par :

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x^*) \right] \text{ et } V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x^*) \right], \text{ avec } 1 \leq i, j \leq m,$$

De plus, $F \geq 0$ et V est une matrice de *Metzler* (terme extra-diagonaux ≥ 0) stable.

Définition I.2.1.

Soit A une matrice carrée, on appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\text{Sp}(A) = \{ \lambda : \lambda \text{ est valeur propre de } A \},$$

et le rayon spectrale de A , la valeur maximale du module des valeurs propres de A ,

$$\rho(A) = \max\{ |\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A) \}.$$

Définition I.2.2 ([11]).

Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est le rayon spectral de la matrice de seconde génération (en anglais : Next Generation Matrix) :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}).$$

I.3 Notion de stabilité et points d'équilibre

Dans l'étude des modèles épidémiologiques, nous sommes souvent amené à étudier deux types d'équilibre, un équilibre sans maladie (ici dans ce mémoire et par analogie équilibre sans drogue) et un équilibre endémique.

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{I.4}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathbb{C}^1 , ω un ouvert. Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre de l'équation (I.4) i.e. $f(x^*) = 0$.

Définition I.3.1 ([20]).

L'équilibre x^* de (I.4) est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (I.4) :

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon.$$

Définition I.3.2 ([20]).

L'équilibre x^* de (I.4) est dit instable, s'il existe $\epsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, tel qu'il existe une solution $x(t)$ de (I.4) vérifiant :

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon.$$

Définition I.3.3 ([20]).

Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que : pour toute solution $x(t)$ de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition I.3.4.

L'équilibre x^* de (I.4) est dit globalement attractif si pour toute condition initiale x_0 du problème (I.4) on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition I.3.5.

L'équilibre x^* de (I.4) est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Soit $J_f(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$, la matrice jacobienne de f évaluée au point x^* . Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax,$$

où $A = J_f(x^*)$ s'appelle la Jacobienne du système non linéaire (I.4) en x^* .

L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre x^* de (I.4).

Théorème I.3.1 ([17]).

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative alors l'équilibre x^* du problème (I.4) est stable.
2. S'il existe au moins une valeur propre de la matrice A de partie réelle strictement positive alors x^* est instable.
3. Lorsqu'un équilibre x^* est stable mais pas asymptotiquement stable on dit que la stabilité est neutre.
4. Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de x^* .

Définition I.3.6 (Stabilité Asymptotique).

Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que : pour toute solution $x(t)$ de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

Définition I.3.7 (règle de signe de Descartes [15]).

C'est une méthode pour déterminer le nombre de racines positives d'un polynôme d'une seule variable avec des coefficients réels différents de zéro, ordonnés par ordre décroissant des exposants telle que si m est le nombre de changements de signes, alors m est le nombre maximum de racines positives (et s'il n'y a pas exactement m , alors il y en a $m-2$, ou $m-4$, ou...). Par exemple,

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1.$$

Ce polynôme a deux changements de signe (la suite des paires successives de signes est - +, + +, + -), ce qui signifie que ce deuxième polynôme a deux ou aucune racines positives, ainsi le polynôme d'origine a deux ou aucune racines négatives.

I.4 Bifurcation backward

Définition I.4.1.

Une bifurcation d'un système dynamique, c'est une modification de la nature de ses points stationnaires ou de ses cycles limites (stabilité ou instabilité d'une ou plusieurs solutions suivant les conditions initiales) a cause de changement de la valeur d'un paramètre du système dynamique, le paramètre de bifurcation.

Soit le système :

$$\dot{x} = f(x, \phi), \tag{I.5}$$

contient un ou plusieurs paramètres ϕ , la valeur du paramètre pour laquelle un changement qualitatif ou quantitatif se produit est dite valeur de bifurcation. Il existe plusieurs types de bifurcation, mais nous limitons ici à la bifurcation backward.

Théorème I.4.1. [2]

$A = D_w f(0, 0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(0, 0) \right)$ est la matrice de linéarisation du système (I.5) autour du point d'équilibre 0 avec ϕ évaluée en 0. Zéro est une valeur propre simple de A et toutes les autres valeurs propres de A ont des parties réelles négatives, la matrice A à un vecteur propre droite x et un vecteur propre gauche y répondant à la valeur propre nulle. Soit f_k le k ème composante de f et :

$$a = \sum_{k,i,j=1}^3 y_k x_i x_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0).$$

et

$$b = \sum_{k,i=1}^3 y_k x_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta_1}(0, 0).$$

Les dynamiques locales de système (I.5) autour de 0 sont totalement déterminées par a et b

- i. $a > 0, b > 0$. Quand $\phi < 0$ avec, $|\phi| \leq 1$ est localement asymptotiquement stable, et il existe un équilibre instable positif; quand $0 < \phi \leq 1$, 0 est instable .
- ii. $a < 0, b < 0$. Quand $\phi < 0$ avec, $|\phi| \leq 1$, 0 est instable, quand $0 < \phi \leq 1$, 0 est localement asymptotiquement stable, et il existe un équilibre instable positif.
- iii. $a > 0, b < 0$. Quand $\phi < 0$ avec, $|\phi| \leq 1$, 0 est instable, quand $0 < \phi \leq 1$, 0 est instable, et il existe localement équilibre négatif asymptotiquement stable, Quand $\phi < 0$, 0 est stable, et un équilibre instable positif apparaît.
- iv. $a < 0; b > 0$. Lorsque ϕ passe de négatif à positif. 0 passe de stable à instable. En conséquence, un équilibre instable négatif devient positif et localement asymptotiquement stable.

Corollaire I.4.1 ([2]).

Si on suppose que $a > 0$ et $b > 0$ alors la bifurcation backward existe au point $\phi = 0$.

I.5 Stabilité des équilibrés au sens de Lyapunov

Définition I.5.1 ([21]).

Soit $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors,

• V est dite définie positive sur U si :

(i) $V(0) = 0$,

(ii) $V(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$.

• V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.

Définition I.5.2 (Fonction de Lyapunov[22]).

Une fonction $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite fonction de Lyapunov pour (I.4) si :

(i) V est définie positive,

(ii) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$.

Théorème I.5.1 (Stabilité de Lyapunov [23]).

Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de (I.4) et V une fonction définie positive sur un voisinage de x^* .

(i) Si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$ alors 0 est stable,

(ii) Si $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$ alors 0 est asymptotiquement stable.

Théorème I.5.2 (Principe d'invariance de LaSalle [24] [25]).

Soit Ω un sous-ensemble de R_n , supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (II.2) en x^* . Soit $V : \Omega \rightarrow R$ une fonction de classe C^1 pour le système (II.2) en x^* telle que :

1. $\dot{V} \leq 0$ sur Ω ,

2. soient $E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$ et L est le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque $t \rightarrow \infty$.

Corollaire I.5.1 ([24][25]).

Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point $x^* \in \Omega$, alors x^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (II.1) défini dans Ω .

Définition I.5.3 ([26]).

soit E un espace de Banach et $A : E \rightarrow E$, un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que :

$$\| Ax - Ay \|_E \leq k \| x - y \|_E, \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Théorème I.5.3 (Contraction de Banach [27][28]).

Soit X un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$ une contraction. Alors, f admet un unique point.

I.6 Persistence

Définition I.6.1 (Espace métrique).

Un espace métrique (X, d) est un ensemble non vide X avec une fonction d qui satisfait aux axiomes suivants :

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$, pour tous $x, y \in X$.
- (2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, pour tous $x, y, z \in X$.
- (3) $d(x, x) = 0$, pour tout $x \in X$.
- (4) $d(x, y) \neq 0$, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

$d(x, y)$ mesure la distance entre x et y . d est appelé une métrique sur X . Si (4) ne tient pas, d est appelé semi-métrique.

Définition I.6.2 (Flot).

La correspondance $\phi_t : x_0 \rightarrow x(t)$ qui associe à une condition initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelé "le flot" au temps t du champs du vecteur X .

Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale x :

$$(t, x) \rightarrow \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t).$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in [-\infty, +\infty]$.

Définition I.6.3 (Point dissipatif).

Soit $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu et $\forall x \in X$, est appelé un point **dissipatif** s'il existe un sous ensemble B de X qui attire tout les points dans X .

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) < B.$$

Définition I.6.4 (Attracteur).

Soit (X, N, f) un système dynamique. Une partie A de X est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

- i) A est fermée.
- ii) A est positivement invariante.
- iii) A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et :

$$\forall u \in U, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

Définition I.6.5 (Compact).

Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ une application, $M \subset X$. L'application ϕ est compact sur M , si pour toute suite convergente (t_n) dans \mathbb{R}^+ quand $t \rightarrow \infty$, $\Phi(t_i, x_i)$ admet une sous suite convergente.

I.6.1 Persistence uniforme

Soit F le flot associé au système (II.1) et soit d une métrique. On note par $\partial\mathcal{F}$ la restriction de \mathcal{F} à ∂E où ∂E n'est pas nécessairement positivement invariant et soit N l'ensemble invariant maximal de $\partial\mathcal{F}$ dans ∂E , de plus N est fermé et il existe un recouvrement $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de N où A est un ensemble d'index non vide et $N_\alpha \subset \partial E$, $N \subset \cup_{\alpha \in A} N_\alpha$ et N_α ($\alpha \in A$) sont des ensembles invariants fermés disjoints deux à deux. Nous proposons les hypothèses suivantes :

- i) Tous les $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont des ensembles invariants isolés du flot \mathcal{F} .
- ii) tout sous ensemble compact de E contient de nombreux recouvrements $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Définition I.6.6.

Soit d une distance métrique et π l'application semi flot. Le semi flot F associé au système (III.1) est dit :

- (i) faiblement persistant si pour tout $x \in \overset{\circ}{E}$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0.$$

(ii) persistant si pour tout $x \in \overset{\circ}{E}$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0.$$

(iii) faiblement uniformément persistant s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \overset{\circ}{E}$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \varepsilon_0.$$

(iv) uniformément persistant s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \overset{\circ}{E}$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \varepsilon_0.$$

Théorème I.6.1.

Soit $E \subset X$ ensemble fermé positivement invariant, et soit \mathcal{F} le flot défini sur E . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que \mathcal{F} est un point dissipatif dans $\mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \overset{\circ}{E}$. Alors, le flot \mathcal{F} est ***uniformément persistant*** si et seulement si :

$$W^+(N_\alpha) \cap \mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset.$$

pour tout $\alpha \in A$, où $W^+(N_\alpha) = \{y \in X, \Lambda^+(y) \subset N_\alpha\}$.

Modèle d'héroïne classique

L'héroïne est un médicament opiacé qui est synthétisé à partir de la morphine, une substance naturelle extraite de la gousse de la plante de pavot à opium d'Asie. L'héroïne apparaît généralement sous forme de poudre blanche ou brune ou de substance collante noire, connue sous le nom «héroïne de goudron noire». En 2000, l'héroïne était toujours le premier choix parmi les consommateurs des drogues et ses voies de livraison les plus fréquentes étaient l'injection intraveineuse et l'inhalation, à risque élevé de dépendance, on estime qu'environ 23% des personnes qui consomment de l'héroïne en deviennent dépendantes. La propagation de l'accoutumance à l'héroïne et de la toxicomanie présente bon nombre des phénomènes bien connus des épidémies, notamment une diffusion rapide et des limites géographiques claires. En plus de leurs effets somatiques et psychologiques délétères, l'abus d'héroïne et la dépendance constituent l'un des modes les plus importants de transmission du virus de l'immunodéficience humaine (*VIH*) et du virus de l'hépatite C (*VHC*).

Des informations statistiques pour l'abus des drogues, comprenant l'abus d'héroïne, est fourni par diverses agences gouvernementales, dont le National Institute on Drug Abuse aux États-Unis, mais il n'est pas réaliste de répéter l'expérience sur le corps humain pour obtenir les données statistiques. Différents modèles mathématiques existent dans la littérature et le choix du modèle dépend de la maladie étudiée, dans ce chapitre nous reprenons un modèle introduit par *White et Comiskey* [5] où l'usage de drogues (l'héroïne en particulier) est considéré de la même façon qu'une épidémie, partant du principe que la consommation des drogues suit un processus qui peut être modélisé de manière similaire à la modélisation de la maladie, un traitement épidémiologique mathématique de la consommation des drogues peut donner un aperçu de la progression tout au long de la carrière de toxicomane, de l'initiation à l'usage habituel, de la rechute et de la récupération éventuelle. Il est bien sûr essentiel de comprendre, dans la mesure du possible, le processus modélisé. Les informations de l'étude *ROSIE* [4] et les commentaires des professionnels dans les domaines liés à la toxicomanie ont été fondamentaux dans le développement du modèle illustré à **La figure-II.1**. L'approche utilisée consistait à adapter les caractéristiques de la carrière de toxicomane au modèle de maladie infectieuse susceptible.

Chaque compartiment de **La figure-II.1** représente une étape de la carrière de toxicomane. Les flèches indiquent les chemins qui peuvent être empruntés entre les compartiments. Suivant les méthodes standard, une fois ce modèle de compartiment simple et sa dynamique correspondante identifiés, des équations différentielles ordinaires ont été dérivées pour représenter mathématiquement le système.

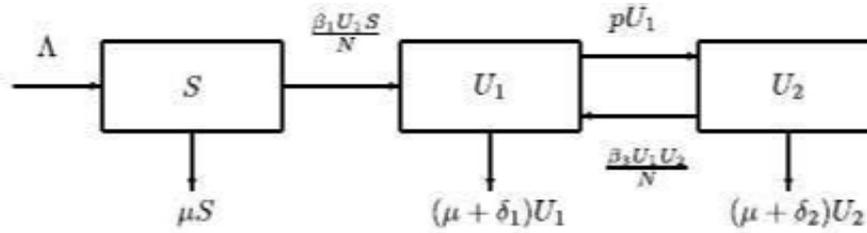


Figure II.1 – le diagramme du modèle d'héroïne.

II.1 Le modèle mathématique

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S, \\ \frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - p U_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) U_1, \\ \frac{dU_2}{dt} = p U_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2) U_2. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec S, U_1 et $U_2 \in \mathbb{R}^n$,

On interprète les paramètres du modèle comme suit :

- ▷ N : La densité de la population totale.
- ▷ S : Le nombre de personnes susceptibles dans la population. Ici, tous les individus vont de l'âge de 15 à 64.
- ▷ U_1 : Le nombre d'utilisateurs de drogues qui ne sont pas en traitement, les débutants, les utilisateurs de drogues qui rechutent.
- ▷ U_2 : Le nombre de consommateurs de drogues sous traitement.
- ▷ Λ : Le nombre d'individus dans la population générale trouvé dans la population susceptible, c-à-d les processus démographiques des personnes atteignant l'âge de 15 ans dans la période de modélisation.
- ▷ μ : Le taux de mortalité naturelle de la population en général.

- ▷ δ_1 : Un taux qui inclut
 - Les décès dus à la drogue des consommateurs qui ne sont pas sous traitement.
 - Un arrêt spontané de l'usage de drogue.
 - Les individus qui ne sont pas sous traitement et qui arrêtent la drogue sans pour autant devenir susceptible.
- ▷ δ_2 : Un taux qui inclut
 - la mortalité des usagers des drogues qui sont sous traitement.
 - Guérison totale et définitive (du moins sur la durée de l'étude).
- ▷ β_1 : La probabilité de devenir un drogué.
- ▷ p : La proportion de drogués qui entrent dans le traitement.
- ▷ β_3 : La probabilité qu'un usager de drogue sous traitement qui rechute.

II.1.1 Les hypothèses du modèle

Nous avons les hypothèses suivants :

- $N = S + U_1 + U_2$,

on suppose que la taille finale de la population est constante, on suppose :

$$\Lambda = \mu S + (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2)U_2.$$

- Les personnes sous traitement utilisent des médicaments.
- Une proportion d'utilisateurs qui ne sont pas en traitement arrêtent de se droguer dans chaque période de temps de modélisation, ceci correspond encore à ce qui est observé dans la pratique.
- Les utilisateurs des drogues qui ne sont pas en traitement sont infectieux pour les personnes susceptibles et les utilisateurs sous traitement.
- Les utilisateurs en traitement rechutent le plus souvent en raison d'un contact avec des utilisateurs qui ne sont pas sous traitement.
- Les utilisateurs des drogues en traitement ne sont pas infectieux pour les personnes susceptibles.
- Chaque individu dans la population a une chance égale de rencontrer un autre individu.
- Tous les membres de la population sont supposés être également susceptible à la toxicomanie. En pratique, certaines sous-populations sont plus susceptibles en raison de facteurs environnementaux, comportementaux et génétiques. Ici, une valeur moyenne de β_1 par rapport à la population générale.

II.2 Le taux de reproduction basique

II.2.1 Définition et Interprétation de \mathcal{R}_0 :

Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 , est le nombre moyen des individus susceptibles qui ont été infectés durant la période d'infectiosité .

Pour le modèle (II.1) est défini comme la probabilité de devenir toxicomane multipliée par le temps moyen passé à consommer de drogues sans traitement. Depuis l'introduction de \mathcal{R}_0 s'est imposé comme un concept-clef en épidémiologie et outil pour étudier l'existence d'équilibres pour le modèle (II.1).

II.2.2 Calcul de \mathcal{R}_0 :

On va calculer \mathcal{R}_0 par la méthode de *Van Den Driessche* et *Watmough* [11], définit le taux de reproduction de base par :

$$\mathcal{R}_0 = \rho \left(-\tilde{F}(\tilde{V})^{-1} \right).$$

Le point d'équilibre sans drogue (*DFE*),

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S, \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} + (\mu + \delta_1)U_1, \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{dU_2}{dt} = pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} + (\mu + \delta_2)U_2, \quad (\text{II.4})$$

$U_1 = 0$ et $U_2 = 0$ on remplace dans (II.3), on trouve

$$(S^*, U_1^*, U_2^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right).$$

Calcul de \mathcal{R}_0 :

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 U_1 S}{N} + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -p U_1 - (\mu + \delta_1) U_1 \\ p U_1 - (\mu + \delta_2) U_2 \end{pmatrix},$$

\tilde{F} et \tilde{V} les dérivés de F et V respectivement,

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 S^*}{N} + \frac{\beta_3 U_2^*}{N} & \frac{\beta_3 U_1^*}{N} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 S^*}{N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda}{N \mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{V} = \begin{pmatrix} -p - (\mu + \delta_1) & 0 \\ p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\det(\tilde{V}) = (-p - (\mu + \delta_1))(-(\mu + \delta_2)) \neq 0$, donc la matrice \tilde{V} est inversible d'inverse donné par :

$$(\tilde{V})^{-1} = \frac{1}{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)} \begin{pmatrix} -(\mu + \delta_2) & 0 \\ -p & -p - (\mu + \delta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(p + \mu + \delta_1)} & 0 \\ \frac{-p}{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)} & \frac{-1}{(\mu + \delta_2)} \end{pmatrix}.$$

On calcule le rayon spectral de la matrice $(-\tilde{F}\tilde{V}^{-1})$, on trouve :

$$\rho(-\tilde{F}\tilde{V}^{-1}) = \frac{\frac{\beta_1 \Lambda}{N \mu}}{N(p + \mu + \delta_1)},$$

et

$$N = S = \frac{\Lambda}{\mu} \Rightarrow \rho(-\tilde{F}\tilde{V}^{-1}) = \frac{\beta_1}{(p + \mu + \delta_1)},$$

donc le nombre de reproduction de base du modèle (II.1) est donné par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{(p + \mu + \delta_1)}. \tag{II.5}$$

En réalité :

\mathcal{R}_0 donne des informations sur l'évolution de l'épidémie

- si $\mathcal{R}_0 < 1$: il y a pas d'individus infectée (l'épidémie va eventuellement disparaître dans la population avec le temps).
- si $\mathcal{R}_0 = 1$: chaque personne infectée cela infectera une personne susceptible.
- si $\mathcal{R}_0 > 1$: en moyenne dans la période de de toxicomane chaque utilisateur de drogue va "infecter" veut dire que initier au mois une autre personne à la consommation de drogue (l'épidémie s'installe dans la population).

II.2.3 Analyse de sensibilité du \mathcal{R}_0 :

Pour examiner la sensibilité de \mathcal{R}_0 à chacun de ses paramètres, l'indice de sensibilité direct normalisé par rapport à chacun des paramètres est calculé par :

$$A_{\beta_1} = \frac{\partial \mathcal{R}_0 \cdot \frac{1}{\mathcal{R}_0}}{\partial \beta_1 \frac{1}{\beta_1}} = \frac{\beta_1}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta_1} = \beta_1 \left(\frac{p + \mu + \delta_1}{\beta_1} \right) \left(\frac{1}{p + \mu + \delta_1} \right) = 1. \quad (\text{II.6})$$

$$A_p = \frac{\partial \mathcal{R}_0 \frac{1}{\mathcal{R}_0}}{\partial p \frac{1}{p}} = \frac{p}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial p} = \left| \frac{-p}{p + \mu + \delta_1} \right| < 1.$$

$$A_\mu = \frac{\partial \mathcal{R}_0 \frac{1}{\mathcal{R}_0}}{\partial \mu \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \mu} = \left| \frac{-\mu}{p + \mu + \delta_1} \right| < 1.$$

$$A_{\delta_1} = \frac{\partial \mathcal{R}_0 \frac{1}{\mathcal{R}_0}}{\partial \delta_1 \frac{1}{\delta_1}} = \frac{\delta_1}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \delta_1} = \left| \frac{-\delta_1}{p + \mu + \delta_1} \right| < 1.$$

D'après l'analyse de sensibilité du \mathcal{R}_0 , on conclut qu'il est plus sensible au paramètre β_1 , une augmentation de β_1 entraîne une augmentation de la même proportion dans \mathcal{R}_0 (également, une diminution de β_1 entraînera une équivalente diminution de \mathcal{R}_0), mais les autres paramètres p, μ, δ_1 sont en relation inversement proportionnelle avec \mathcal{R}_0 . Une augmentation de l'un d'entre eux entraînera une diminution de \mathcal{R}_0 . Cependant, la taille de la diminution sera proportionnellement plus petite.

II.3 Stabilité du point d'équilibre sans drogue $\mathcal{R}_0 < 1$

On utilise \mathcal{R}_0 pour déterminer l'existence d'équilibres pour le système (II.1). En particulier, il est connu que l'équilibre sans drogue (*DFE*) des modèles épidémiologiques est localement asymptotiquement stable pour $\mathcal{R}_0 < 1$.

Théorème II.3.1 ([14]).

Si $\mathcal{R}_0 < 1$ alors le point d'équilibre sans drogue $(\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.

Preuve. J la matrice jacobienne du modèle (II.1)

$$J(S, U_1, U_2) = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_1 U_1}{N} - \mu & -\frac{\beta_1 S}{N} & 0 \\ \frac{\beta_1 U_1}{N} & \frac{\beta_1 S}{N} - p + \frac{\beta_3 U_2}{N} - (\mu + \delta_1) & \frac{\beta_3 U_1}{N} \\ 0 & p - \frac{\beta_3 U_2}{N} & -\frac{\beta_3 U_1}{N} - (\mu + \delta_2) \end{pmatrix}.$$

J au point $(S^*, U_1^*, U_2^*) = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$, en rappelons que $S^* = N$,

$$J(\frac{A}{\mu}, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 - (p + \mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres :

$$\lambda_1 = -\mu .$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \delta_2) .$$

$$\lambda_3 = \beta_1 - (p + \mu + \delta_1) .$$

λ_1 et λ_2 sont clairement réels et négatifs. Aussi comme $\mathcal{R}_0 < 1$, alors $\beta_1 < p + \mu + \delta_1 \Rightarrow \lambda_3 < 0$.

Donc le point $(\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable. \square

II.4 Analyse du cas $\mathcal{R}_0 = 1$ **L'existence de bifurcation backward :**

Si $a > 0$ et $b > 0$, la bifurcation à $\phi = 0$ est "backward" (en arrière). L'existence de cette bifurcation signifie qu'il existe de multiples équilibres endémiques en particulier, un équilibre endémique existe lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$ un effort important est nécessaire pour réduire \mathcal{R}_0 à un niveau suffisamment petit pour éradiquer la maladie de la population, β_1 est le choix évident du paramètre de bifurcation notamment comme cela a été montré dans l'équation (II.6) que \mathcal{R}_0 est plus sensible aux changements de β_1 que de ses autres paramètres.

$$\mathcal{R}_0 = 1 \Rightarrow \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1} = 1 \Rightarrow \beta_1^* = p + \mu + \delta_1. \quad (\text{II.7})$$

La matrice jacobienne est obtenue comme précédemment dans l'équation (II.6) et l'identité (II.7) est utilisée, conduisant à :

$$J\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & \beta_1^* - (p + \mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} = A .$$

Cette matrice a des valeurs propres $(0, -\mu, -(\mu + \delta_2))$, le 0 c'est une simple valeur propre et les autres ayant une partie réelle négative.

Le vecteur propre droite x correspondant à la valeur propre nulle est :

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\mu x_1 - \beta_1^* x_1 = 0. \\ px_2 - (\mu + \delta_2)x_3 = 0. \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\beta_1^*}{\mu} x_2. \\ x_2 = \frac{(\mu + \delta_2)}{p} x_3. \end{cases} \end{aligned}$$

On pose que $x_3=1$, on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\beta_1^* (\mu + \delta_2)}{\mu p}. \\ x_2 = \frac{(\mu + \delta_2)}{p}. \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Donc le vecteur propre droite est :

$$\left(\frac{-(p + \mu + \delta_2)(\mu + \delta_2)}{\mu p}, \frac{(\mu + \delta_2)}{p}, 1 \right) x_3^t. \quad (\text{II.8})$$

Le vecteur propre gauche y correspondant à la valeur propre nulle est :

$$y^t A = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\mu y_1 = 0 \\ -\beta_1^* y_1 + p y_3 = 0 \\ -y_3(\mu + \delta_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0. \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Donc le vecteur propre gauche est :

$$(0, y_2, 0) = (0, 1, 0)y_2. \quad (\text{II.9})$$

On pose $x_1 = S$, $x_2 = U_1$, $x_3 = U_2$ et on a $\beta_1 = \beta_1^*$.

Donc le système (II.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1^* x_2 x_1}{N} - \mu x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\beta_1^* x_2 x_1}{N} - p x_2 + \frac{\beta_3 x_2 x_3}{N} - (\mu + \delta_1) x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = p x_2 - \frac{\beta_3 x_2 x_3}{N} - (\mu + \delta_2) x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$D_x f = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta_1^* x_2}{N} & -\frac{\beta_1^* x_1}{N} & 0 \\ \frac{\beta_1^* x_2}{N} & \frac{\beta_1^* x_1}{N} + \frac{\beta_3 x_3}{N} - (p + \mu + \delta_1) & \frac{\beta_3 x_2}{N} \\ 0 & p - \frac{\beta_3 x_3}{N} & -\frac{\beta_3 x_2}{N} - (\mu + \delta_2) \end{pmatrix}.$$

• pour f_1 :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = -\frac{\beta_1^*}{N} = -\frac{\mu(p + \mu + \delta_1)}{\Lambda}.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = -1.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

- pour f_2 :

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\beta_1^*}{N} = \frac{\mu(p + \mu + \delta_1)}{\Lambda}.$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\beta_3}{N} = \frac{\beta_3 \mu}{\Lambda}.$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 1, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

- pour f_3 :

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = -\frac{\beta_3}{N} = -\frac{\beta_3 \mu}{\Lambda}.$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = 0.$$

Pour calculer a et b on les définit par les équations suivantes :

$$a = \sum_{k,i,j=1}^3 y_k x_i x_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (0, 0).$$

et

$$b = \sum_{k,i=1}^3 y_k x_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta_1} (0, 0).$$

On rappelle que (II.8) le vecteur propre droite et (II.9) le vecteur propre gauche, associés à la valeur propre nulle.

Calcul de a :

$$\begin{aligned}
a &= y_2 x_1 x_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_1 x_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_2 x_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) \\
&+ y_2 x_2 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_3 x_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_3 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) \\
&+ y_2 x_3 x_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right), \\
a &= y_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_2 x_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_3 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right), \\
a &= 2y_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + 2y_2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right). \\
a &= 2y_2 x_1 x_2 \frac{\beta_1^*}{N} + 2y_2 x_2 x_3 \frac{\beta_3}{N}. \tag{II.11}
\end{aligned}$$

On remplace x et y dans (II.11)

$$\begin{aligned}
a &= -2\mu \frac{(p + \mu + \delta_1)^2 (\mu + \delta_2)^2}{\mu p^2 \Lambda} + 2\mu \frac{(\mu + \delta_2) \beta_3}{\Lambda p}, \\
a &= 2\mu \left(\frac{\mu + \delta_2}{\Lambda p} \right) \left(\beta_3 - \frac{(\mu + \delta_2)(\mu + p + \delta_1)^2}{\mu p} \right).
\end{aligned}$$

donc $a > 0$ si est seulement si $\frac{(\mu + \delta_2)(\mu + p + \delta_1)^2}{\mu p} < \beta_3$.

Calcul de b :

$$b = y_1 x_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) + y_2 x_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial \beta_1} \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right) = (-1)(0)(1) + (1)(1) \left(\frac{\mu + \delta_2}{p} \right) = \frac{\mu + \delta_2}{p} > 0.$$

Donc la bifurcation "backward" ($a, b > 0$) ne se produira que si

$$\left| \frac{(\mu + \delta_2)(\mu + p + \delta_1)^2}{\mu p} \right| < \beta_3. \tag{II.12}$$

II.5 Existence d'équilibre endémique :

La première équation du (II.1) au point d'équilibre endémique :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \implies S^* = \Lambda \left(\frac{N}{\beta_1 U_1} + \frac{1}{\mu} \right).$$

Maintenant on remplace S^* dans la deuxième équation du (II.1) et la résoudre pour U_2^* :

$$\frac{dU_1}{dt} = 0 \iff \frac{\beta_1 U_1}{N} \Lambda \left(\frac{N}{\beta_1 U_1} + \frac{1}{\mu} \right) - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 = 0,$$

$$\Lambda + \frac{\beta_1 U_1 \Lambda}{N\mu} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 = 0,$$

$$\frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} = -\Lambda - \frac{\beta_1 U_1 \Lambda}{N\mu} + pU_1 + (\mu + \delta_1)U_1.$$

Par conséquent

$$U_2^* = -\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} - \frac{\beta_1 U_1 \Lambda}{N\mu} \frac{N}{\beta_3 U_1} + pU_1 \frac{N}{\beta_3 U_1} + (\mu + \delta_1)U_1 \frac{N}{\beta_3 U_1},$$

$$U_2^* = -\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} - \frac{\beta_1 \Lambda}{\beta_3 \mu} + \frac{pN}{\beta_3} + \frac{N(\mu + \delta_1)}{\beta_3},$$

$$U_2^* = -\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} - \frac{N}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu} + p + (\mu + \delta_1) \right).$$

On met U_2^* dans la troisième équation du II.1 et la résoudre pour U_1^*

$$pU_1 + \frac{\beta_3 U_1}{N} \left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} - \frac{N}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu} + p + (\mu + \delta_1) \right) \right) - (\mu + \delta_2) \left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} - \frac{N}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu} + p + (\mu + \delta_1) \right) \right) = 0,$$

$$pU_1 + \left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} + \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - \frac{N}{\beta_3} (p + \mu + \delta_1) \right) \left(\frac{\beta_3 U_1}{N} + \mu + \delta_2 \right) = 0.$$

Une manipulation algébrique supplémentaire produit le quadratique suivant dans U_1^* :

$$pU_1^2 + U_1 \left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} + \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - \frac{N}{\beta_3} (p + \mu + \delta_1) \right) \left(\frac{\beta_3 U_1}{N} + \mu + \delta_2 \right) = 0,$$

$$U_1^2 \left[p + \frac{\beta_3}{N} \left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} + \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - \frac{N}{\beta_3} (p + \mu + \delta_1) \right) \right] + U_1 \left[\left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} + \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - \frac{N}{\beta_3} (p + \mu + \delta_1) \right) (\mu + \delta_2) \right] = 0,$$

$$U_1^2 \left[p + \frac{\Lambda}{U_1} + \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu N} - (p + \mu + \delta_1) \right] + U_1 \left[\left(\frac{N\Lambda}{\beta_3 U_1} + \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - \frac{N}{\beta_3} (p + \mu + \delta_1) \right) (\mu + \delta_2) \right] + \frac{N\Lambda}{\beta_3} (\mu + \delta_2) = 0,$$

$$U_1^2 \left[\frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - (\mu + \delta_1) \right] + U_1 \left[\Lambda + \frac{1}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1 \Lambda}{\mu} (\mu + \delta_2) - N(p + \mu + \delta_1) (\mu + \delta_2) \right) \right] = 0,$$

$$U_1^2 \left[\frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - (\mu + \delta_1) \right] + U_1 \left[\Lambda + \frac{1}{\beta_3} \left(\beta_1 \Lambda \frac{\beta_1 \Lambda \delta_2}{\mu} - \mu N(p + \mu + \delta_1) - \delta_2(p + \mu + \delta_1) \right) \right] + \frac{N \Lambda}{\beta_3} (\mu + \delta_2) = 0.$$

Une vraie valeur positive pour U_1^* est nécessaire pour qu'un équilibre endémique existe, évidemment le terme constant est positif. Cependant les signes des coefficients de U_1^2 et U_1 ne sont pas évident.

Quatre cas quadratiques se présentent :

$$aU_1^2 + bU_1 + c = 0.$$

Alors que

$$\begin{cases} a = \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} - (\mu + \delta_1). \\ b = \Lambda + \frac{1}{\beta_3} \left(\beta_1 \Lambda + \frac{\beta_1 \Lambda \delta_2}{\mu} - \mu N(p + \mu + \delta_1) - \delta_2(p + \mu + \delta_1) \right). \\ c = \frac{N \Lambda}{\beta_3} (\mu + \delta_2). \end{cases}$$

Auquel cas, selon la règle des signes de Descartes [16], aucun changement de signe ne signifie qu'il n'y a pas de racines réelles et qu'il n'y a pas d'équilibre endémique. En utilisant la même règle.

$$aU_1^2 - bU_1 + c = 0.$$

a deux changements de signe et deux valeurs positives réelles pour U_1^* seraient attendu.

$$-aU_1^2 + bU_1 + c = 0.$$

a un changement de signe et donc une vraie racine positive comme le cas final :

$$-aU_1^2 - bU_1 + c = 0.$$

Les inégalités suivantes doivent être étudiées pour déterminer l'existence de l'équilibre endémique. Le coefficient de U_1^2 sera négatif si

$$\left| \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu \beta_3} \right| < |\mu + \delta_1|.$$

Le coefficient de U_1 ne peut être négatif que si

$$\Lambda < \frac{1}{\beta_3} \left| \beta_1 \Lambda \left(1 + \frac{\delta_2}{\mu} \right) - N(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2) \right|.$$

où

$$\left| \beta_1 \Lambda \left(1 + \frac{\delta_2}{\mu} \right) \right| < |N(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)|.$$

Soit le coefficient de U_1^2 ou U_1 ou les deux doivent être négatifs pour garantir l'existence d'au moins un équilibre endémique.

Modèle d'héroïne avec le traitement âge

Partant du principe que la consommation des drogues suit un processus qui peut être modélisé de manière similaire à la modélisation de la maladie, un modèle mathématique de traitement épidémiologique de la consommation des drogues peut donner un aperçu de la progression à travers la carrière des toxicomanes, de l'initiation à l'usage habituel, le traitement, la rechute et la récupération éventuelle il est bien sûr essentiel de comprendre, dans la mesure du possible, le processus modélisé. Les informations de l'étude ROSIE [4] et les commentaires des professionnels dans les domaines liés à la toxicomanie ont été fondamentaux dans l'élaboration du modèle. Afin d'étudier l'influence de l'âge du traitement sur la propagation de l'épidémie d'héroïne, nous divisons la population en trois compartiments (sous-groupes) mutuellement, à savoir les susceptibles, les toxicomanes non traités et les consommateurs des drogues sous traitement, notées respectivement $S(t)$, $U_1(t)$ et $U_2(\theta, t)$. Ici, le paramètre θ indique l'âge de traitement des utilisateurs de drogues sous traitement au temps t . D'une part, nous supposons que les consommateurs de drogues non traités ne sont infectieux que pour les susceptibles et que les consommateurs des drogues sous traitement ne sont pas contagieux pour les susceptibles. De plus, les toxicomanes retourneraient dans la classe des toxicomanes non traités après l'arrêt d'un programme de traitement de la toxicomanie. D'un autre part, nous supposons que chaque individu dans la population a une chance égale de rencontrer n'importe quel autre individu et tous les membres de la population sont également susceptibles à la toxicomanie et nous formulons le modèle épidémique d'héroïne avec l'âge de traitement.

III.1 l'analyse du modèle Mathématique

Nous considérons le modèle épidémique d'héroïne structuré en âge, dans une population divisée en trois sous-populations :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)U_1(t) - \mu S(t), \\ \frac{dU_1(t)}{dt} = \beta S(t)U_1(t) - (\mu + \delta_1 + p)U_1(t) + \int_0^\infty k(\theta)U_2(\theta, t)d\theta, \\ \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta_2 + k(\theta))U_2(\theta, t), \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{cases} U_2(0, t) = pU_1(t), \\ S(0) = S^0, \quad U_1(0) = U_1^0, \quad U_2(\theta, 0) = U_2^0(\theta), \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

$$S^0, U_1^0 \in \mathcal{R}^+, \quad \text{et} \quad U_2^0(\theta) \in L_+^1((0, +\infty), \mathcal{R}^+).$$

On interprète les paramètres du modèle comme suit :

- ▷ N : la densité de la population totale.
- ▷ $S(t)$: le nombre d'individus susceptible dans la population au temps t .
- ▷ $U_1(t)$: le nombre d'usagers des drogues non traités, initiale et rechute.
- ▷ $U_2(\theta, t)$: le nombre d'usagers des drogues en traitement avec l'âge θ au temps t .
- ▷ Λ : représente les nouveaux individus entrant dans la population des susceptibles (soit de l'immigration ou des nouveaux nés).
- ▷ β : le taux de la consommation de drogues.
- ▷ p : le taux d'usagers des drogues qui entrent en traitement.
- ▷ δ_1 : un taux de retrait qui inclut
 - les décès liés à la drogue d'usagers non traités et un taux de récupération spontanée.
 - les personnes qui ne suivent pas de traitement et qui cessent de consommer des drogues mais qui ne sont plus susceptibles.
- ▷ δ_2 : un taux d'élimination qui inclut les décès d'usagers liés à la drogue en cours de traitement et un taux de «guérison» réussie qui correspond à la récupération vers une vie sans drogues et l'immunité à la toxicomanie pour la durée de la période de modélisation.

- ▷ $k(\theta)$: la probabilité qu'un utilisateur de drogues en traitement avec l'âge de traitement θ rechute à une utilisation non traitée.
- ▷ μ : le taux de mortalité naturelle de la population générale.

Tous les paramètres λ et μ sont positifs, nous supposons également que $k(\theta) \in L^1_+((0, +\infty), \mathcal{R}^+)$. On définit l'espace fonctionnel

$$X_+ = \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \times L^1_+(0, \infty).$$

Muni de la norme

$$\| (S, U_1, U_2(\theta)) \|_{X_+} = |S| + |U_1| + \int_0^\infty |U_2(\theta, t)| d\theta.$$

Avec

$$U_2(t) = \int_0^\infty U_2(\theta, t) d\theta \text{ et } N(t) = S(t) + U_1(t) + U_2(t).$$

Pour $(S^0, U_1^0, U_2^0(\theta)) \in X_+$, nous pouvons montrer que le système (III.1) avec les conditions initiales (III.2) admet une solution unique positive et bornée pour tout $t > 0$, qui peut être obtenue par des méthodes classiques inspirées des travaux de Webb [6] et Iannelli [9].

Théorème III.1.1.

le système (III.1) est **point dissipatif**. Plus précisément, soit $(S^0, U_1^0, U_2^0(\theta)) \in X_+$ alors il existe une solution unique positive $(S, U_1, U_2) \in X_+$.

Preuve. En utilisant le théorème standard du point fixe de Banach, nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution positive de (III.1), en additionnant toutes les équations du système, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(S(t) + U_1(t) + U_2(t)) &= \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dU_1(t)}{dt} + \int_0^\infty \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial t} d\theta \\
&= (\Lambda - \beta S(t)U_1(t) - \mu S(t)) + (\beta S(t)U_1(t) - (\mu + \delta_1 + p)U_1(t) \\
&\quad + \int_0^\infty k(\theta)U_2(\theta, t)d\theta) + \int_0^\infty \left\{ -\frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial \theta} - (\mu + \delta_2 + k(\theta))U_2(\theta, t) \right\} d\theta \\
&= \Lambda - \mu(S(t) + U_1(t) + \int_0^\infty U_2(\theta, t)d\theta) - pU_1 - U_2(\theta, t)|_{\theta=0}^{\theta=\infty} \\
&\quad - \delta_1 U_1(t) - \delta_2 \int_0^\infty U_2(\theta, t)d\theta \\
&\leq \Lambda - \mu(S(t) + U_1(t) + \int_0^\infty U_2(\theta, t)d\theta).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$\frac{dN(t)}{dt} \leq \Lambda - \mu N(t).$$

Nous avons aussi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

□

Par conséquent, le système (III.1) est point dissipatif, notons

$$\Omega = \left\{ (S, U_1, U_2) \in X_+, S(t) + U_1(t) + \int_0^\infty U_2(\theta, t)d\theta \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\},$$

nous savons que Ω attire tous les points de X . Ensuite, l'ensemble Ω est positivement invariant pour le système (III.1).

Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 du modèle (III.1), est donné par l'expression suivante :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \cdot \frac{\Lambda}{\mu}}{(\mu + \delta_1 + p) - pK}, \quad (\text{III.3})$$

avec

$$K = \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta.$$

Pour interpréter la formule (III.3) comme un nombre secondaire d'utilisateurs d'héroïne produits par un usager d'héroïne, nous notons que le temps moyen des usagers des drogues hors classe de traitement au premier passage est $\frac{1}{\mu + \delta_1 + p}$ et la probabilité de survivre à cette classe est $\frac{p}{\mu + \delta_1 + p}$. Étant donné que K est la probabilité de rechute des utilisateurs des drogues dans la

classe de traitement est

$$\Pi(\theta) = e^{-\int_0^\theta (\mu + \delta_2 + k(\sigma))d\sigma},$$

la probabilité d'être toujours les utilisateurs des drogues en traitement après unités de temps. Le temps moyen total des utilisateurs des drogues hors classe de traitement (sur plusieurs passes) est :

$$\frac{1}{\mu + \delta_1 + p} \left[1 + \frac{p}{\mu + \delta_1 + p} \cdot K + \left(\frac{p}{\mu + \delta_1 + p} \cdot K \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{(\mu + \delta_1 + p) - pK}.$$

En multipliant cela par $\beta \cdot \frac{\Lambda}{\mu}$ on trouve \mathcal{R}_0 , qui est le nombre moyen de nouveaux utilisateurs des drogues produits par un utilisateur de drogues typique non traité introduit dans une population entièrement susceptible [11]. Ainsi, \mathcal{R}_0 est le nombre de reproduction de base qui agit comme un seuil.

Le système (III.1) possède toujours un équilibre sans drogue

$$\begin{cases} 0 = \Lambda - \beta S^* U_1^* - \mu S^*, \\ 0 = \beta S^* U_1^* - (\mu + \delta_1 + p) U_1^* + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) d\theta, \\ \frac{\partial U_2^*(\theta)}{\partial \theta} = -(\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2^*(\theta), \\ U_2^*(0) = p U_1^*. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Si $U_1^* = 0$, ensuite nous avons $U_2^*(\theta) = 0$, de la première équation de (III.4), on trouve $S_0^* = \frac{\Lambda}{\mu}$.

De toute évidence, le système (III.1) possède toujours un équilibre sans drogue, dans lequel il n'y a pas d'utilisateurs des drogues, donné par

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right).$$

On résout la troisième équation de (III.4) on trouve,

$$U_2^*(\theta) = U_2^*(0)e^{-\int_0^\theta (\mu + \delta_2 + k(\sigma))d\sigma} = pU_1^*\Pi(\theta). \quad (\text{III.5})$$

Si $U_1^* \neq 0$, en remplaçant (III.5) dans la deuxième équation de (III.4), nous avons

$$\beta S^* = (\mu + \delta_2 + p) - pK \implies S^* = \frac{(\mu + \delta_2 + p) - pK}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\Lambda}{\mu},$$

En substituant le résultat à la première équation de (III.4), on trouve

$$U_1^* = \frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*} = \frac{\mu}{\beta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1).$$

Si $\mathcal{R}_0 > 1$ le système (III.1) admet un équilibre endémique unique

$$E^* = (S^*, U_1^*, U_2^*(\theta)).$$

En résumant les discussions ci-dessus, nous avons le théorème suivant,

Théorème III.1.2.

Le système (III.1) admet deux points d'équilibres. Plus précisément, nous avons

1. L'équilibre sans drogue $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ existe toujours .
2. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, il existe un équilibre endémique unique, où

$$S^* = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\Lambda}{\mu}, \quad U_1^* = \frac{\mu}{\beta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1), \quad U_2^*(\theta) = pU_1^*\Pi(\theta).$$

III.2 Étude de la stabilité locale

Dans cette section, nous prouvons principalement la stabilité locale des équilibres dont l'existence a été énoncée dans le théorème (III.1.2). Tout d'abord, nous étudions de la stabilité locale d'équilibre sans drogue E_0 , et nous avons le théorème suivant

Théorème III.2.1.

L'équilibre sans drogue $E_0(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 < 1$ et instable si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Preuve. On introduit les variables de perturbation suivant :

$$S(t) = x(t) + \frac{\Lambda}{\mu}, \quad U_1(t) = y(t), \quad U_2(\theta, t) = z(\theta, t).$$

La linéarisation du système (III.1) au point E_0 donne

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\beta \frac{\Lambda}{\mu} y(t) - \mu x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \beta \frac{\Lambda}{\mu} y(t) - (\mu + \delta_1 + p)y(t) \int_0^\infty k(\theta)z(\theta, t)d\theta, \\ \frac{\partial z(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial z(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta_2 + k(\theta))z(\theta, t), \\ z(0, t) = py(t). \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Pour analyser le comportement asymptotique autour de E_0 , nous recherchons des solutions de la forme :

$$x(t) = \bar{x}e^{\lambda t}, \quad y(t) = \bar{y}e^{\lambda t}, \quad z(\theta, t) = \bar{z}(\theta)e^{\lambda t}. \quad (\text{III.7})$$

\bar{x} , \bar{y} sont des constants et $\bar{z}(\theta)$ est une fonction dépend de θ . En remplaçant (III.6) dans (III.7), il s'ensuit que

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\bar{x} = -\beta \frac{\Lambda}{\mu} \bar{y}, \\ (\lambda + \mu + \delta_1 + p)\bar{y} = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \bar{y} + \int_0^\infty k(\theta)\bar{z}(\theta)d\theta, \\ \frac{d\bar{z}(\theta)}{d\theta} = -(\lambda + \mu + \delta_2 + k(\theta))\bar{z}(\theta), \\ \bar{z}(0) = p\bar{y}. \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

En résolvant la troisième équation de (III.8), on trouve

$$\bar{z}(\theta) = \bar{z}(0)e^{-\lambda\theta} e^{-\int_0^\theta (\mu + \delta_2 + k(\sigma))d\sigma} = p\bar{y}.e^{-\lambda\theta}.\Pi(\theta). \quad (\text{III.9})$$

En injectant (III.9) dans la deuxième équation de (III.8) et en annulant \bar{y} (pour $\bar{y} \neq 0$), on obtient

$$p \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda\theta}\Pi(\theta)d\theta = \lambda + \mu + \delta_1 + p - \beta \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (\text{III.10})$$

Nous avons aussi

$$1 = \frac{\beta \frac{\Lambda}{\mu}}{\lambda + \mu + \delta_1 + p - p \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda\theta}\Pi(\theta)d\theta}. \quad (\text{III.11})$$

On définit la fonction $\mathcal{H}(\lambda)$ comme étant le côté droit ci-dessus. $\mathcal{H}(\lambda)$ est une fonction différentiable et continue avec $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\lambda) = 0$. Par calcul direct, il est facile de montrer que $\mathcal{H}'(\lambda) < 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}(\lambda)$ est une fonction décroissante. Par conséquent, toute solution réelle de l'équation (III.11) est négative si $\mathcal{H}(0) < 1$, et positive si $\mathcal{H}(0) > 1$. D'où, si $\mathcal{H}(0) > 1$ l'équilibre E_0 est instable.

Ensuite nous montrons que (III.11) n'a pas de solutions complexes avec une partie réelle non négative si $\mathcal{H}(0) < 1$. On suppose que $\lambda = a + ib$ avec a et b des réelles est une solution complexe de (III.11) avec $Re\lambda > 0$, alors

$$1 = |\mathcal{H}(\lambda)| \leq \mathcal{H}(a) \leq \mathcal{H}(0) < 1.$$

Ceci est impossible, cela signifie que toutes les racines de (III.11) ont des parties réelles négatives donc l'équilibre E_0 est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{H}(0) < 1$.

En remarquant que $\mathcal{H}(0) = \mathcal{R}_0$, donc le point d'équilibre sans drogue E_0 est *localement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_0 < 1$ et il est *instable* si $\mathcal{R}_0 > 1$. □

Dans la suite, nous étudions la stabilité locale du point d'équilibre endémique E^* et nous avons le théorème suivant,

Théorème III.2.2.

l'équilibre endémique $E^*(S^*, U_1^*, U_2^*(\theta))$ et *localement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Preuve. On introduit les variables de perturbation suivant :

$$S(t) = x(t) + S^*, \quad U_1(t) = y(t) + U_1^*, \quad U_2(\theta, t) = z(\theta, t) + U_2^*(\theta).$$

La linéarisation du système (III.1) au point E^* est donnée par le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = -\beta S^* y(t) - \beta U_1^* x(t) - \mu x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \beta S^* y(t) + \beta U_1^* x(t) - (\mu + \delta_1 + p)y(t) + \int_0^\infty k(\theta)z(\theta, t)d\theta, \\ \frac{\partial z(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial z(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta_2 + k(\theta))z(\theta, t), \\ z(0, t) = py(t). \end{array} \right. \tag{III.12}$$

Pour analyser le comportement asymptotique autour de E^* , nous recherchons des solutions de la forme suivante :

$$x(t) = \bar{x}e^{\lambda t}, \quad y(t) = \bar{y}e^{\lambda t}, \quad z(\theta, t) = \bar{z}(\theta)e^{\lambda t}. \quad (\text{III.13})$$

\bar{x} , \bar{y} sont des constants et $\bar{z}(\theta)$ est une fonction dépend de θ . En remplaçant (III.13) dans (III.12), on trouve

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\bar{x} = -\beta S^*\bar{y} - \beta U_1^*\bar{x}, \\ (\lambda + \mu + \delta_1 + p)\bar{y} = \beta S^*\bar{y} + \beta U_1^*\bar{x} + \int_0^\infty k(\theta)\bar{z}(\theta)d\theta, \\ \frac{d\bar{z}(\theta)}{d\theta} = -(\lambda + \mu + \delta_2 + k(\theta))\bar{z}(\theta), \\ \bar{z}(0) = p\bar{y}. \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

En résoudre la troisième équation de (III.14), on trouve

$$\bar{z}(\theta) = \bar{z}(0)e^{-\lambda\theta} e^{-\int_0^\infty (\mu + \delta_2 + k(\sigma))d\sigma} = p\bar{y}.e^{-\lambda\theta}.\Pi(\theta). \quad (\text{III.15})$$

En résolvant la première équation de (III.14), nous obtenons

$$\bar{x} = \frac{-\beta S^*}{\lambda + \mu + \beta U_1^*}\bar{y}. \quad (\text{III.16})$$

En injectant (III.15) et (III.16) à la deuxième équation de (III.14) et en annulant \bar{y} (pour $\bar{y} \neq 0$), on obtient

$$p \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda\theta}\Pi(\theta)d\theta = \lambda + \mu + \delta_1 + p - \beta S^* \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + \beta U_1^*}.$$

On a aussi

$$1 = \frac{\beta S^* \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + \beta U_1^*}}{\lambda + \mu + \delta_1 + p - p \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda\theta}\Pi(\theta)d\theta}. \quad (\text{III.17})$$

Si $Re\lambda \geq 0$, en prenant la valeur absolue du côté droit (*RHS*) de (III.17) et en utilisant la formule $\beta S^* = (\mu + \delta_1 + p) - pK$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|RHS| &\leq \frac{\beta S^* \cdot \left| \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + \beta U_1^*} \right|}{\left| \lambda + \mu + \delta_1 + p - p \int_0^\infty k(\theta) e^{-\lambda\theta} \Pi(\theta) d\theta \right|} \\
&< \frac{\beta S^*}{\left| \mu + \delta_1 + p - p \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta \right|} \\
&= \frac{\beta S^*}{|\mu + \delta_1 + p - pK|} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

C'est absurde, cela signifie que les racines de (III.17) ont des parties réelles négatives. Par conséquent, le point d'équilibre endémique E^* localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 > 1$.

□

III.3 Persistance uniforme

Dans cette section, nous étudions la persistance uniforme du système (III.1) on définit les espaces suivants :

$$\tilde{M} = \mathcal{R}^+ \times \{0\} \times \hat{M}, \quad \partial\tilde{M} = X_0 \setminus \tilde{M}.$$

Avec

$$\hat{M} = \left\{ \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(., t) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^+ \times L_+^1((0, +\infty), \mathcal{R}^+) : U_1(t) > 0 \text{ ou } \int_0^{\bar{\theta}} k(\theta) d\theta > 0 \right\},$$

et

$$\bar{\theta} = \inf \left\{ \theta, \int_\theta^\infty k(\theta) d\theta = 0 \right\}.$$

Par conséquent, nous obtenons un semi-flot continu $U(t) : \mathcal{R}^+ \times X_+ \rightarrow X_+$ pour le système (III.1) qui est défini comme

$$U(t, x_0) = U_t(x_0) = (S(t), U_1(t), U_2(., t)), \quad t \geq 0, x_0 \in X_+.$$

Théorème III.3.1.

$\partial\tilde{M}$ est positivement invariant sous le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$. De plus, l'équilibre sans drogue $E_0(S_0^*, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable pour le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ réduit à $\partial\tilde{M}$.

Preuve. l'ensemble $\partial\tilde{M}$ est positivement invariant sous le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ c'est-à-dire que $U(t, \partial\tilde{M}) \subset \partial\tilde{M}$.

Soit $(S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in \partial\tilde{M}$. Ensuite $(U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in \mathcal{R}^+ \times L^1_+((0, +\infty), \mathcal{R}^+) \setminus \hat{M}$ et nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_1(t)}{dt} = \beta S(t)U_1(t) - (\mu + \delta_1 + p)U_1(t) + \int_0^\infty k(\theta)U_2(\theta, t)d\theta, \\ \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta_2 + k(\theta))U_2(\theta, t), \\ U_2(0, t) = pU_1(t), \\ U_1(0) = 0, \\ U_2(\theta, 0) = U_2^0(\theta). \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

Comme $S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, nous avons

$$U_1(t) \leq \hat{U}_1(t) \text{ et } U_2(\theta, t) \leq \hat{U}_2(\theta, t), \quad (\text{III.19})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \hat{U}_1(t) - (\mu + \delta_1 + p)\hat{U}_1(t) + \int_0^\infty k(\theta)\hat{U}_2(\theta, t)d\theta, \\ \frac{\partial \hat{U}_2(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{U}_2(\theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \delta_2 + k(\theta))\hat{U}_2(\theta, t), \\ \hat{U}_2(0, t) = p\hat{U}_1(t) \\ \hat{U}_1(0) = 0, \\ \hat{U}_2(\theta, 0) = \hat{U}_2^0(\theta). \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, on trouve

$$\hat{U}_2(\theta, t) = \begin{cases} \hat{U}_2(t - \theta, 0)\Pi(\theta) = p\hat{U}_1(t - \theta)\Pi(\theta), & t > \theta, \\ \hat{U}_2^0(\theta - t)\frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)}, & t < \theta. \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

En insérant (III.21) dans la première équation de (III.20), on obtient

$$\frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = \beta \frac{A}{\mu} \hat{U}_1(t) - (\mu + \delta_1 + p) \hat{U}_1(t) + p \int_0^t k(\theta) \hat{U}_1(t - \theta) \Pi(\theta) d\theta + F(t),$$

où

$$F(t) = \int_t^\infty k(\theta) \hat{U}_2^0(\theta - t) \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)} d\theta.$$

Comme $(U_1^0, U_2^0(\cdot)) \in \mathcal{R}^+ \times L_+^1((0, +\infty), \mathcal{R}^+) \setminus \hat{M}$ et $k(\theta) \in L_+^1((0, +\infty), \mathcal{R}^+) \setminus \{0\}$, on peut déduire que $F(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, par conséquent, le système

$$\begin{cases} \frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = \beta \frac{A}{\mu} \hat{U}_1(t) - (\mu + \delta_1 + p) \hat{U}_1(t) + p \int_0^t k(\theta) \hat{U}_1(t - \theta) \Pi(\theta) d\theta, \\ \hat{U}_1(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Le système (III.22) admet une solution nulle $\hat{U}_1(t) = 0$, alors on déduit que $\hat{U}_2(\theta, t) = 0$ pour $0 \leq \theta \leq t$. Pour $t < \theta$ nous avons

$$\begin{aligned} \| U(S^0, U_1^0, U_2^0(\cdot, t)) \| &= \| \hat{U}_2(\theta, t) \|_{L^1}, \\ &= \left\| \hat{U}_2^0(\theta - t) \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)} \right\|_{L^1}, \\ &\leq e^{-\mu t} \| U_2^0 \|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que comme $t \rightarrow \infty$, on a $U_2(\theta, t) \rightarrow 0$.

En utilisant (III.19), on a $U_1(t) = 0$ et $U_2(\theta, t) \rightarrow 0$. Il résulte de la première équation du système (III.1) que $S(t) \rightarrow S_0^*$. Ainsi, l'équilibre sans drogue E_0 est *globalement asymptotiquement stable* en $\partial \tilde{M}$. \square

Ensuite, nous introduisons le résultat suivant sur les équations intégrales différentielles de Volterra linéaires qui seront utiles dans les prochaines preuves.

Lemme III.3.1 ([3]).

Considérons les équations intégrales différentielles de Volterra scalaires pour énoncer un résultat important de la persistance uniforme dans le théorème qui suit ce lemme

$$\frac{dh(t)}{dt} = \int_0^\infty \rho(\theta)h(t-\theta)d\theta - ah(t), \quad h(0) > 0.$$

où $\rho(\cdot) \in L^1_+(0, +\infty)$, et $\int_0^\infty \rho(\theta)d\theta > a$. Il existe une solution unique $h(t)$ qui est non borné.

Théorème III.3.2.

Supposons que $\mathcal{R}_0 > 1$. Le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément persistant dans \tilde{M} par rapport à $(\tilde{M}, \partial\tilde{M})$ s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ qui est indépendante des valeurs initiales telles que pour chaque $(S, U_1, U_2^0) \in \tilde{M}$.

Ce qui donne

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} U_1(t) \geq \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \|U_2(\cdot, t)\|_{L^1_+} \geq \varepsilon.$$

De plus, le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ a un attracteur global compact A_0 dans \tilde{M} .

Preuve. Il découle du théorème (III.3.1) que E_0 est *globalement asymptotiquement stable* dans $\partial\tilde{M}$. Il suffit d'étudier le comportement de la solution à partir de \tilde{M} dans un voisinage de E_0 . Ainsi, il suffit de prouver que

$$W^S(E_0) \cap \tilde{M} = \emptyset,$$

avec

$$W^S(E_0) = \{x \in X_+ : \lim_{t \rightarrow \infty} U(t, x) = E_0\}.$$

Pour des raisons de contradiction, nous supposons qu'il existe une liste

$$x_n = (S^n(0), U_1^n(0), U_2^n(0)) \in \{y \in \tilde{M} : \|E_0 - y\| \leq \zeta\}.$$

avec

$$\|E_0 - U(t)x_n\| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall t \geq 0.$$

L'ensemble $(S^n(t), U_1^n(t), U_2^n(t)) = U(t)x_n$. Alors pour tous $t \geq 0$, nous avons

$$\| (S^n(t), U_1^n(t), U_2^n(t)) - (S_0^*, 0, 0) \| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall t \geq 0.$$

On choisit $n > 0$ assez grand tel que $S_0^* - \frac{1}{n+1} > 0$. Pour $n > 0$, $\exists T > 0$ tel que pour tout $t > T$, nous avons

$$S_0^* - \frac{1}{n+1} < S^n(t) < S_0^* + \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq U_1^n(t) \leq \frac{1}{n+1}, \quad (\text{III.23})$$

à partir des solutions (III.21), on obtient

$$U_2(\theta, t) = U_2(t - \theta, 0)\Pi(\theta) + U_2^0(t - \theta)\frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)} \geq pU_1(t - \theta)\Pi(\theta). \quad (\text{III.24})$$

En insérant (III.24) dans la seconde équation de (III.1) et en utilisant le principe de comparaison, on obtient

$$U_1^n(t) \geq \tilde{U}_1^n(t), \quad (\text{III.25})$$

où $\tilde{U}_1^n(t)$ est la solution du système auxiliaire suivant

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{U}_1^n(t)}{dt} = p \int_0^\infty k(\theta)\tilde{U}_1^n(t - \theta)\Pi(\theta)d\theta - \left\{ (\mu + \delta_1 + p) - \beta \left(S_0^* - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \tilde{U}_1^n(t), \\ \tilde{U}_1^n(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Notez que si $\tilde{U}_1^n(t) = 0$, puis $\tilde{U}_1^n(t) > 0$, donc sans perte de généralité, on peut prendre $\tilde{U}_1^n(0) > 0$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \cdot \frac{\Lambda}{\mu}}{(\mu + \delta_1 + p) - pK} > 1,$$

et nous avons $\mathcal{R}_0 > 1$ alors il existe $n \in \mathbb{R}^+$ suffisamment grand tel que

$$\frac{\beta \cdot \left\{ \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{1}{n+1} \right\}}{(\mu + \delta_1 + p) - pK} > 1.$$

On sait que $S_0^* = \frac{\Lambda}{\mu}$ et $K = \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta$, par conséquent, nous avons

$$p \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta > (\mu + \delta_1 + p) - \beta \left(S_0^* - \frac{1}{n+1} \right).$$

D'après le lemme (III.3.1) $\tilde{U}_1^n(t)$ est non borné. Depuis (III.25) nous obtenons que $U_1^n(t)$ n'est pas borné. Ainsi, $W^S(E_0) \cap \tilde{M} = \emptyset$ est vrai.

D'après [18] le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ asymptotiquement régulière. De plus, l'équilibre sans drogue E_0 est globalement asymptotiquement stable dans $\partial\tilde{M}$. Par [13] que le semi-flot $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément persistant par rapport à $(\partial\tilde{M}, \tilde{M})$. \square

III.4 Étude de la stabilité globale

Dans cette section, nous intéressons à la stabilité globale de chacun des points d'équilibre possibles du système (III.1). La technique des preuves consiste à utiliser des fonctions appropriées de Lyapunov et le Principe d'invariance de LaSalle.

III.4.1 Stabilité globale d'équilibre sans drogue

Théorème III.4.1.

si $\mathcal{R}_0 < 1$, le point d'équilibre sans drogue $E_0(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ est *globalement asymptotiquement stable*.

Preuve. D'après le théorème (III.2.1) nous savons que l'équilibre sans drogue E_0 du (III.1) est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 < 1$. Dans la suite, on montrera que l'attracteur global est contenu seulement l'équilibre sans drogue (DFE) dans $\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \times L_+^1((0, +\infty), \mathcal{R}^+) \setminus \partial\tilde{M}$, i.e, $A_0 = \{E_0\}$.

Nous allons utiliser une fonction de Lyapunov appropriée pour aborder ce problème. Nous utilisons la fonction g qui est défini comme

$$g(x) = x - 1 - \ln x, \quad x \in \mathcal{R}^+. \quad (\text{III.27})$$

Il est clair que $g(x) \geq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathcal{R}^+$, $g(x)$ atteint son minimum global à un, avec $g(1) = 0$.

On définit

$$\alpha(\theta) = \int_\theta^\infty k(\sigma) \exp \left\{ - \int_\theta^\sigma (\mu + \delta_2 + k(\tau)) d\tau \right\} d\sigma = \int_\theta^\infty k(\sigma) \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\theta)} d\sigma. \quad (\text{III.28})$$

Notez que $\alpha(\theta) > 0$ pour tous $0 < \theta < +\infty$. On peut facilement vérifier que

$$\alpha(0) = \int_0^{\infty} k(\sigma)\Pi(\sigma)d\sigma = K. \quad (\text{III.29})$$

Nous avons également

$$\alpha'(\theta) = \alpha(\theta) (\mu + \delta_2 + k(\theta)) - k(\theta). \quad (\text{III.30})$$

On définit la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = V_1(t) + U_1(t) + V_2(t),$$

où

$$V_1(t) = S_0^* g\left(\frac{S(t)}{S_0^*}\right), \quad V_2(t) = \int_0^{\infty} \alpha(\theta) U_2(\theta, t) d\theta.$$

Nous pouvons facilement voir que la fonction $V(t)$ est borné lorsqu'elle est restreinte à A_0 . Puisque la fonction $g(x)$ n'est pas négative pour tout $x > 0$, et a le minimum global à $x = 1$, il s'ensuit alors que la fonction $V(t)$ est non négatif et le point E_0 est le point minimum global. On voit aussi facilement que la fonction $V(t)$ est différentiable continue.

En calculant la dérivée de $V_1(t)$ et en remplaçant $\Lambda = \mu S_0^*$, ce qui donne

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= S_0^* \left(1 - \frac{S_0^*}{S(t)}\right) \frac{S'(t)}{S_0^*}, \\ &= S_0^* \left(\frac{1}{S_0^*} - \frac{1}{S(t)}\right) (\Lambda - \beta S(t) U_1(t) - \mu S(t)), \\ &= S_0^* \left(\frac{1}{S_0^*} - \frac{1}{S(t)}\right) (\mu(S_0^* - S(t)) - \beta S(t) U_1(t)), \\ &= -\frac{\mu(S_0^* - S(t))^2}{S(t)} + \beta S_0^* U_1(t) - \beta S(t) U_1(t). \end{aligned}$$

Ensuite, on dérivé $V_2(t)$ et en utilisant (III.29), (III.30), nous obtenons

$$\begin{aligned} V_2'(t) &= \int_0^{\infty} \alpha(\theta) \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial t} d\theta \\ &= -\int_0^{\infty} \alpha(\theta) \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta - \int_0^{\infty} \alpha(\theta) (\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2(\theta, t) d\theta \\ &= -\alpha(\theta) U_2(\theta, t) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} + \int_0^{\infty} U_2(\theta, t) \frac{\partial \alpha(\theta)}{\partial \theta} d\theta - \int_0^{\infty} \alpha(\theta) (\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2(\theta, t) d\theta \\ &= -\alpha(\theta) U_2(\theta, t) \Big|_{\theta=\infty} + \alpha(0) U_2(0, t) + \int_0^{\infty} U_2(\theta, t) [\alpha(\theta) (\mu + \delta_2 + k(\theta)) - k(\theta)] d\theta \\ &\quad - \int_0^{\infty} \alpha(\theta) (\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2(\theta, t) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\alpha(\theta)U_2(\theta, t)|_{\theta=\infty} + \alpha(0)U_2(0, t) - \int_0^\infty k(\theta)U_2(\theta, t)d\theta \\
 &= -\alpha(\theta)U_2(\theta, t)|_{\theta=\infty} + pU_1(t) \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta - \int_0^\infty k(\theta)U_2(\theta, t)d\theta.
 \end{aligned}$$

Notez la formule de \mathcal{R}_0 . En combinant les trois composants de la fonction de Lyapunov, nous avons

$$\begin{aligned}
 V'(t) &= V_1'(t) + U_1'(t) + V_2'(t) \\
 &= -\frac{\mu(S_0^* - S(t))^2}{S(t)} + \beta S_0^* U_1(t) - (\mu + \delta_1 + p)U_1(t) - \alpha(\theta)U_2(\theta, t)|_{\theta=\infty} \\
 &\quad + pU_1(t) \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta \\
 &= -\frac{\mu(S_0^* - S(t))^2}{S(t)} + \left\{ (\mu + \delta_1 + p) - p \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta \right\} (\mathcal{R}_0 - 1)U_1(t) \\
 &\quad - \alpha(\theta)U_2(\theta, t)|_{\theta=\infty} \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte du fait que $\mathcal{R}_0 < 1$. On remarque que $V(t) = 0$ si et seulement si $S(t) = S_0^*$ et $U_1(t) = 0$. On définit un ensemble

$$\Upsilon = \{(S, U_1, U_2) \in \Omega | V'(t) = 0\}.$$

Ainsi, l'ensemble $A_0 = \{E_0\}$ est le plus grand ensemble invariant compact de Υ , c'est-à-dire que ce plus grand ensemble invariant compact est le singleton donné par l'équilibre sans drogue. Par le principe d'invariance Lyapunov – LaSalle [1], nous concluons que E_0 est *globalement asymptotiquement stable* lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$. \square

III.4.2 Stabilité globale d'équilibre endémique

Dans la section précédente, nous avons obtenu que le système (III.1) est uniformément persistant et a un attracteur global. Maintenant nous sommes prêts à établir la stabilité globale d'équilibre endémique.

Théorème III.4.2.

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, le point d'équilibre endémique $E^*(S^*, U_1^*, U_2^*(\theta))$ du système (III.1) est *globalement asymptotiquement stable* dans \tilde{M} .

Preuve. D'après le théorème (III.2.2) nous savons que l'équilibre endémique E^* du (III.1) est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 > 1$. Dans la suite, nous devons montrer que E^* est l'attracteur globale dans $\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \times L_+^1((0, +\infty), \mathcal{R}^+) \setminus \partial\tilde{M}$, i.e, $A_0 = \{E^*\}$.

De la même manière que pour la preuve de (III.4.1), nous utilisons toujours une fonction de Lyapunov appropriée pour aborder le problème. Soit $U(t) = (S(t), U_1(t), U_2(\theta, t))$ une solution complète au système (III.1) qui réside dans l'attracteur A_0 , à partir du théorème (III.3.2), nous savons qu'il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que

$$\delta_1 \leq \frac{S(t)}{S^*} \leq \delta_2, \quad \delta_1 \leq \frac{U_1(t)}{U_1^*} \leq \delta_2, \quad \delta_1 \leq \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \leq \delta_2$$

pour tous $t \in \mathcal{R}$ et $\theta \geq 0$.

Maintenant on définit la fonction de Lyapunov

$$W(t) = W_S(t) + W_1(t) + W_2(t),$$

où

$$W_S(t) = S^* g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right), \quad W_1(t) = U_1^* g\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right), \quad W_2(t) = \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g\left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)}\right) d\theta,$$

où $g(x) = x - 1 - \ln x$, ($x \in \mathcal{R}_+$) est donnée dans (III.27) et $\alpha(\theta)$ est donnée dans (III.28). Nous pouvons facilement voir que la fonction $W(t)$ est bornée lorsqu'elle est restreinte à A_0 . Puisque la fonction $g(x)$ n'est pas négative pour tout $x > 0$, et a le minimum global à $x = 1$, il s'ensuit alors que $W(t)$ est non négatif et le point E^* est le point minimum global. On voit aussi facilement que $W(t)$ est différentiable continue.

En raison de la complexité des expressions, nous prenons séparément la dérivée de chaque composant de la fonction de Lyapunov, en calculant d'abord la dérivée de $W_S(t)$, et en remplaçant $\Lambda = \beta S^* U_1^* + \mu S^*$, ce qui donne

$$\begin{aligned} W_S'(t) &= S^* \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \frac{1}{S^*} S'(t) \\ &= S^* \left(\frac{1}{S^*} - \frac{1}{S(t)}\right) (\Lambda - \beta S(t) U_1(t) - \mu S(t)) \\ &= S^* \left(\frac{1}{S^*} - \frac{1}{S(t)}\right) [\mu(S^* - S(t)) + (\beta S^* U_1^* - \beta S(t) U_1(t))] \\ &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S} + \beta S^* U_1^* \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t) U_1(t)}{S^* U_1^*}\right). \end{aligned}$$

Ensuite, en calculant la dérivée de $W_1(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= U_1^* \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(t)}\right) \frac{1}{U_1^*} U_1'(t) \\ &= U_1^* \left(\frac{1}{U_1^*} - \frac{1}{U_1(t)}\right) \left\{ \beta S(t) U_1(t) - (\mu + \delta_1 + p) U_1(t) + \int_0^\infty k(\theta) U_2(\theta, t) d\theta \right\}. \end{aligned}$$

On note

$$\mu + \delta_1 + p = \frac{1}{U_1^*} \left(\beta S^* U_1^* + \int_0^\infty k(\theta) U_2(\theta, t) d\theta \right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= U_1^* \left(\frac{1}{U_1^*} - \frac{1}{U_1(t)}\right) \left\{ \beta S(t) U_1(t) - \frac{U_1(t)}{U_1^*} \left(\beta S^* U_1^* + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) d\theta \right) + \int_0^\infty k(\theta) U_2(\theta, t) d\theta \right\} \\ &= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(t)}\right) \left\{ \beta S^* U_1^* \left(\frac{S(t) U_1(t)}{S^* U_1^*} - \frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*} - \frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) d\theta \right\} \\ &= \beta S(t) U_1(t) - \beta S^* U_1(t) - \beta S(t) U_1^* + \beta S^* U_1^* \\ &\quad + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} - \frac{U_1(t)}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1(t)} \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} + 1 \right) d\theta. \end{aligned}$$

Maintenant on passe à la dérivée de $W_2(t)$,

$$\begin{aligned} W_2'(t) &= \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta \\ &= \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \cdot \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)}\right) \frac{1}{U_2^*(\theta)} \frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial t} d\theta \\ &= \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \cdot \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)}\right) \frac{1}{U_2^*(\theta)} \left\{ -\frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial \theta} - (\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2(\theta, t) \right\} d\theta \\ &= - \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)}\right) \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \left\{ \frac{U_{2\theta}(\theta, t)}{U_2(\theta, t)} + (\mu + \delta_2 + k(\theta)) \right\} d\theta \\ &= - \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} - 1 \right) \left\{ \frac{U_{2\theta}(\theta, t)}{U_2(\theta, t)} + (\mu + \delta_2 + k(\theta)) \right\} d\theta. \end{aligned} \tag{III.31}$$

On note

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) &= \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \\
&= \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)} \right) \cdot \frac{\frac{\partial U_2(\theta, t)}{\partial \theta} U_2^*(\theta) - U_2(\theta, t) \frac{dU_2^*(\theta)}{d\theta}}{(U_2^*(\theta))^2} \\
&= \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)} \right) \cdot \frac{U_{2\theta}(\theta, t) U_2^*(\theta) - U_2(\theta, t) [-(\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2^*(\theta)]}{(U_2^*(\theta))^2} \\
&= \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)} \right) \cdot \frac{U_{2\theta}(\theta, t) + U_2(\theta, t) (\mu + \delta_2 + k(\theta))}{U_2^*(\theta)} \\
&= \left(1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(\theta, t)} \right) \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \left\{ \frac{U_{2\theta}(\theta, t)}{U_2(\theta, t)} + (\mu + \delta_2 + k(\theta)) \right\} \\
&= \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} - 1 \right) \cdot \left\{ \frac{U_{2\theta}(\theta, t)}{U_2(\theta, t)} + (\mu + \delta_2 + k(\theta)) \right\}. \tag{III.32}
\end{aligned}$$

En remplaçant (III.32) dans (III.31), nous obtenons

$$\begin{aligned}
W_2'(t) &= - \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta \\
&= -\alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} + \int_0^\infty g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \frac{d}{d\theta} (\alpha(\theta) U_2^*(\theta)) d\theta \\
&= -\alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} - \alpha(0) U_2^*(0) g \left(\frac{U_2(0, t)}{U_2^*(0)} \right) \\
&\quad + \int_0^\infty g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \frac{d}{d\theta} (\alpha(\theta) U_2^*(\theta)) d\theta. \tag{III.33}
\end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} (\alpha(\theta) U_2^*(\theta)) &= \frac{d}{d\theta} \alpha(\theta) \cdot U_2^*(\theta) + \alpha(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} U_2^*(\theta) \\
&= [\alpha(\theta) (\mu + \delta_2 + k(\theta)) - k(\theta)] \cdot U_2^*(\theta) + \alpha(\theta) \cdot [-(\mu + \delta_2 + k(\theta)) U_2^*(\theta)] \\
&= -k(\theta) U_2^*(\theta), \tag{III.34}
\end{aligned}$$

et

$$\alpha(0) = \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta, \quad U_2^*(0) = pU_1^*, \quad U_2(\theta, t) = pU_1(t). \tag{III.35}$$

En substituant (III.34) et (III.35) dans (III.33), nous avons aussi

$$W_2'(t) = -\alpha(\theta)U_2^*(\theta)g\left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right)\Big|_{\theta=\infty} + pU_1^* \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta.g\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) - \int_0^\infty g\left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right)k(\theta)U_2^*(\theta)d\theta.$$

En combinant les trois composantes de la fonction de Lyapunov, nous obtenons

$$\begin{aligned} W'(t) &= W_S'(t) + W_1'(t) + W_2'(t) \\ &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} + \beta S^* U_1^* \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t) U_1(t)}{S^* U_1^*}\right) \\ &\quad + \beta S(t) U_1(t) - \beta S^* U_1(t) - \beta S(t) U_1^* + \beta S^* U_1^* \\ &\quad + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)} - \frac{U_1(t)}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1(t)} \frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)} + 1\right) d\theta \\ &\quad - \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g\left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right)\Big|_{\theta=\infty} + pU_1^* \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta.g\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) \\ &\quad - \int_0^\infty g\left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right)k(\theta)U_2^*(\theta)d\theta \\ &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} + \beta S^* U_1^* \left(1 - \frac{S(t) U_1(t)}{S^* U_1^*} - \frac{S^*}{S(t)} + \frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) \\ &\quad + \beta S(t) U_1(t) - \beta S^* U_1(t) - \beta S(t) U_1^* + \beta S^* U_1^* \\ &\quad + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)} - \frac{U_1(t)}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1(t)} \frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)} + 1\right) d\theta \\ &\quad - \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g\left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right)\Big|_{\theta=\infty} + pU_1^* \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta.g\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right) \\ &\quad - \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)} - 1 - \ln \frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right) d\theta \\ &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} + \beta S^* U_1^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*}\right) \\ &\quad + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left\{-\frac{U_1(t)}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1(t)} \frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)} + 2 + \ln \frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right\} d\theta \\ &\quad - \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g\left(\frac{U_2(\theta,t)}{U_2^*(\theta)}\right)\Big|_{\theta=\infty} + pU_1^* \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta.g\left(\frac{U_1(t)}{U_1^*}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

En réorganisant l'équation (III.36), nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
 W'(t) &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} + \beta S^* U_1^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) \\
 &+ \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left(\left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(t)} \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} + \ln \frac{U_1^*}{U_1(t)} \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) + \left(1 - \frac{U_1(t)}{U_1^*} + \ln \frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) \right) d\theta \\
 &- \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} + p U_1^* \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta \cdot g \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) \\
 &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} + \beta S^* U_1^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) \\
 &- \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_1^*}{U_1(t)} \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta - \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \cdot g \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) d\theta \\
 &- \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} + p U_1^* \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta \cdot g \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*} \right). \tag{III.37}
 \end{aligned}$$

En remarquant la formule dans (III.5), nous avons

$$\begin{aligned}
 W'(t) &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} + \beta S^* U_1^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) \\
 &- \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_1^*}{U_1(t)} \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta - \int_0^\infty k(\theta) \cdot p U_1^* \Pi(\theta) \cdot g \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) d\theta \\
 &- \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} + p U_1^* \int_0^\infty k(\theta) \Pi(\theta) d\theta \cdot g \left(\frac{U_1(t)}{U_1^*} \right) \\
 &= -\frac{\mu(S(t) - S^*)^2}{S(t)} - \beta S^* U_1^* \left(\frac{S^*}{S(t)} - 2 + \frac{S(t)}{S^*} \right) \\
 &- \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_1^*}{U_1(t)} \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta - \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left(\frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty}. \tag{III.38}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $W'(t) \leq 0$, soit

$$\hat{\Upsilon} = \{(S, U_1, U_2) \in \Omega \mid W'(t) = 0\}.$$

Nous voulons montrer que le plus grand ensemble invariant dans $\hat{\Upsilon}$ est le singleton $\{E^*\}$. D'abord, nous remarquons que l'égalité dans (III.38) se produit si et seulement si $S(t) = S^*$, et

$$\frac{S^*}{S(t)} = \frac{S(t)}{S^*}, \quad \frac{U_1^*}{U_1(t)} \cdot \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{U_2(\theta, t)}{U_2^*(\theta)} = 1. \tag{III.39}$$

De conditions (III.39) il s'ensuit que

$$S(t) = S^*, \quad U_1(t) = U_1^*, \quad U_2(\theta, t) = U_2^*(\theta).$$

Ainsi, nous concluons que l'ensemble $A_0 = \{E^*\}$ est le plus grand ensemble invariant compact de \hat{Y} , c'est-à-dire que A_0 est le singleton donné par l'équilibre endémique E^* . Par le principe d'invariance Lyapunov – LaSalle [1], nous voyons qu'il est *globalement asymptotiquement stable* lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$. □

Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons étudié des modèles en modélisation de l'héroïne.

Dans le premier chapitre on constate que $\frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1}$ est le rapport de reproduction de base \mathcal{R}_0 , pour le modèle (II.1). L'analyse de sensibilité identifie β_1 comme le paramètre plus utile à cibler pour la réduction de \mathcal{R}_0 pour des raisons pratiques, cela correspond à mieux prévenir que guérir, les efforts visant à accroître la prévention sont plus efficaces pour contrôler la propagation de la consommation habituelle des drogues que les efforts visant à augmenter le nombre des personnes ayant accès au traitement. Le point sans drogue est *localement asymptotiquement stable* quand le $\mathcal{R}_0 < 1$. On remarque clairement si le $\mathcal{R}_0 = 1$ on trouve le résultat suivant, si l'inégalité (II.12) détient, alors une bifurcation backward peut se produire et bien que $\mathcal{R}_0 < 1$ un endémique équilibre existe. Si cet équilibre est stable, des efforts importants peuvent être nécessaires pour réduire la prévalence et éviter une épidémie. Si nous avons $\mathcal{R}_0 > 1$, l'analyse produit une équation quadratique dans U_1 . L'existence d'un équilibre endémique dépend de l'existence d'au moins une valeur positive réelle pour U_1 ainsi, soit le coefficient de U_1^2 ou U_1 ou les deux doivent être négatifs pour garantir l'existence d'au moins un équilibre endémique.

Dans le deuxième chapitre on a fait l'étude d'un modèle d'héroïne structuré en âge, en utilisant la méthode de Lyapunov fonctionnelle nous avons établi les propriétés dynamiques du modèle épidémique d'héroïne et les résultats montrent que la dynamique globale du modèle est complètement déterminée par \mathcal{R}_0 , on trouve que l'équilibre sans drogue E_0 est *globalement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_0 < 1$. De plus, le système de propagation de l'héroïne a une persistance uniforme et l'unique équilibre endémique est *globalement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_0 > 1$.

Bibliographie

- [1] *A.M.Lyapunov*, The general problem of the stability of motion, *Int. J. Control* 55(3) (1992)531–534.
- [2] *Carlos Castillo-Chavez*. Dynamical models of tuberculosis and their applications. *MATHEMATICAL BIOSCIENCES AND ENGINEERING*, September 2004.
- [3] *C.J.Browne,S.S.Pilyugin*, Global analysis of age-structured within-host virus model, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*18(8)(2013)1999–2017.
- [4] *C. Comiskey, G. Cox* : Research Outcome Study in Ireland (ROSIE) : Evaluating Drug Treatment Effectiveness, Baseline Findings. www.nuim.ie/ROSIE/ResearchHistory.shtml, March 2005.
- [5] *Emma white and catherine comiskey*. Heroin epidemics, treatment and ode modelling. *mathematical biosciences*, 208(312-324) :312 324, 7 novembre 2006.
- [6] *G.F.Webb*, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, NewYork, 1985.
- [7] *J.K.Hale,P.Waltman*, Persistence in infinite dimensional systems, *SIAMJ. Math. Anal.* 20(1989)388~395.
- [8] *L.Arriola,J.Hyman*, Lecture notes, forward and adjoint sensitivity analysis : with applications in Dynamical Systems, Linear Algebra and Optimisation Mathematical and Theoretical Biology Institute, Summer, 2005.
- [9] *M.Iannelli*, Mathematical theory of age-structured population dynamics, in : *Applied Mathematics Monographs CNR*, vol.7, Giadini Editorie Stampatori, Pisa, 1994.
- [10] *M.E. Gurtin, R.C. MacCamy*. Nonlinear age-dependent population dynamics, *Arch. Ration Mech. Anal.* 54 (1974)281 – 300.
- [11] *P.van den Driessche,J.Watmough*. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Math. Biosci.* 180 (2002) 29.
- [12] *P.Magal,C.C.McCluskey, G.F.Webb*, Lyapunov function al and global asymptotic stability for an infection-age model, *Appl. Anal.* 89(7)(2010)1109~1140.

- [13] *P.Magal, X.Q.Zhao*, Global attractor in uniformly persistence dynamical systems, SIAMJ. Math. Anal. 37(2005)251~275.
- [14] *SWARNALI SHARMA and G.P.SAMANTA*. Dynamical behaviour of a drinking epidemic model. Journal of applied mathematics, informatics, 4January2013.
- [15] *Scott E.Brodie*. Descartes rule of signs. <<https://fr.wikipedia.org/wiki/RDescartes>>, 1 January 1999.
- [16] *Scott E. Brodie*. Descartes rule of signs. <<https://fr.wikipedia.org/wiki/RDescartes>>, 1January1999.
- [17] *T A BURTON* . Stability and periodic solution of ordinary and functional deferential equation, Academic Press, inc, 1985.
- [18] *Youcef BELBACHIR*, Modèle épidémiologique avec l'âge de la vaccination,(2019) 40-42.
- [19] *T.A.BUNTON*. *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*. Academic Press, inc 1985.
- [20] *DANG-VU, H., AND DELCARTE, C*. *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*. Ellipses, 2000.
- [21] *X. LIAO, L. WANG, P. YU*, *Stability of Dynamical Systems*. Elsevier, première édition, 2007.
- [22] *AUGER, P., LETT, C., AND POGGIALE, J*. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*.
- [23] *MOULAY, E*. *Stabilité des équations différentielles ordinaires*.
- [24] *LASALLE,J*. *Stability theory for ordinary differential equations*. *J.Differ. Equations* 1968.
- [25] *LASALLE,J.P*. *the Stability of dynamical systems, society for industrial and applied mathematics, philadelphia, pa., Regional conference Series in Applied Mathematics*. 1976.
- [26] *J.P. DENAILLY*, *Analyse Numérique et Équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences, France, 2006.
- [27] *A. GRANAS, J. DUGUNDJI* *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [28] *Y.ZHOU*, *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, World Scientific, New Jersey, 2014.