République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

M^{elle} Safaâ TAHRAOUI

Existence de Solutions pour un Probleme Non Lineaire d'une Equation Differentielle Fractionnaire Implicite

Encadreur : Dr. Mami Tawfiq Fawzi

Maitre de Conférence "A" à C.U.B.B.A.T. Soutenu en Juin 2020

Devant le jury composé de :

Président :	Dr. Khiar Hamid (MCA)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Dr Biroud Kheireddine (M.C.A)	E.S.M.T.
Encadreur :	Dr. Mami Tawfiq Fawzi (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

à mes très chers, respectueux et manifiques parents :

Mon Père Tahraoui Mohamed et Ma Mère Guedoudou Yamina

qui m'ont soutenu tout au long de ma vie par leur amour et leur encouragement.

A mon frère Oussama,

A mes sœurs Asmaâ et Rajaâ,

A toute ma famille et mes amies,

A tous mes enseignants de mathématiques.

A tous les étudiants de 2^{e} *année Master Math 2019/2020.*

Bref, à tous.

Remerciements

Je remercie avant tout Allah de m'avoir donné la force et la volonté nécessaire pour achever mon travail.

Je remercie Dr. Mami pour son aide et ses conseils, en saluant en lui son savoir faire, sa compétence et ses connaissances dont il m'a fait profiter.

Je remercie aussi les membres du jury Dr.Khiar et Dr.Biroud de m'avoir fait l'honneur d'en faire partie et d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie encore une fois mes Chers parents, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien à la fois moral et matériel qui m'ont permis de réaliser le parcours de mes études que je voulais et par conséquent cet aboutissement.

Je remercie mes sœurs Asmaâ et Rajaâ pour leur encouragement.

Enfin, je remercie toutes les personnes de près ou de loin qui m'ont aidé à réaliser ce travail d'initiation à la recherche.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier l'existence de solutions pour un problème non linéaire d'une équation différentielle fractionnaire implicite. Les dérivées considérées sont au sens de Caputo et d'un ordre compris entre 0 et 1 dans un espace de Banach avec des conditions aux limites puis dans un deuxième temps, aux limites non locales.

Ces résultats ont été obtenus via la théorie du point fixe. Des exemples sont inclus pour illustrer l'applicabilité des résultats théoriques.

Abstract

The main objective of this paper is to study the existence of solutions for a nonlinear problem of an implicit fractional differential equation. The derivatives considered are in the sense of Caputo and of order between 0 and 1 in a Banach space with boundary conditions and in the second case with non-local ones.

These results were obtained by applying the fixed point theory. Examples are included to illustrate the applicability of theoretical results.

ملخص

الهدف الرئيسى من هذه الرسالة هو دراسة وجود حل لمشكلة غير خطية لمعادلة تفاضلّية كسرية ضمنية غير خطية. تم استعمال المشتقات بمفهوم كابتو و بالترتيب بين 0 و 1 في فضاء باناك بشروط حدية و غير محلية.

و قد تم الحصول على هذه النتائج من خلال تطبيق نظرية النقطة الثابتة.

تم تضمين أمثلة لإظهار قابلية تطبيق النتائج النظرية .

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différenciation ordinaire et de l'intégration à des ordres arbitraires (non entiers). Voir, par exemple, les monographies ([4], [8] , [11], [24], [25]) et leurs références. Ces dernières années, des équations différentielles fractionnaires sont apparues naturellement dans divers domaines tels que la rhéologie, les fractales, la dynamique chaotique, la modélisation, la théorie du contrôle, le traitement du signal, la bio-ingénierie et les applications biomédicales, etc.

Les dérivés fractionnaires fournissent un excellent instrument pour la description des propriétés héréditaires de divers matériaux et procédés. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages récents ([1], [2], [5], [6], [12], [15], [19], [20], [21], [27]) et à leurs références.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence de solution pour un problème non linéaire d'une équation différentielle fractionnaire implicite. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques équations et systèmes différentiels fractionnaires non linéaires implicites, en utilisant plusieurs techniques de résolution suivant le problème à étudier.

Ce mémoire comporte quatre chapitres partagés de la façon suivante :

Dans le chapitre des préliminaires, on rappelera quelques notions et définitions relatifs aux espaces surtout fonctionnels qui vont être utilisés dans ce manuscrit et ceci, en décrivant des parties de ces espaces qui présentent des propriétés topologiques intéressantes et sur lesquels on définira des opérateurs permettant d'appliquer la tehchnique de(s) théorème(s) du point fixe, la clé même de l'ensemble des résultats qui vont être exposés dans ce travail. Au passage, on fera allusion au lemme de Grönwall qui est un outil parfois indispensable servant à surmonter quelques difficultés dans certaines preuves.

Pour le deuxième chapitre, nous présentons dans un premier volet, quelques outils et quelques définitions sur les fonctions spéciales utiles tout au long de notre mémoire, en l'occurence : la fonction gamma d'Euler et la fonction bêta avec des exemples et quelques propriétés intéressantes. Dans le deuxième volet, on rappelera les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville puis au sens de Caputo et les liens qui existent entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions de problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires non linéaires implicites, cas où l'ordre de dérivation vérifie $0 < \alpha \leq 1$ et qui sont les suivants :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)), \quad \forall t \in J = [0, T], \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo , $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et a,b,c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$
et

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)), \quad \forall t \in J = [0, T], \\ y(0) + \psi(y) = y_0 \end{cases}$$

Où : ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo et
$f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\psi : C([0, T], \mathbb{R})$ une fonction continue, et y_0 une constante réelle .

Le dernier chapitre sera consacré uniquement aux exemples afin d'illustrer l'applicabilité des principaux résultats d'existence ou d'unicité de la solution des problèmes aux limites d'ordre fractinnaire non linéaires implicites que nous avons étudié dans les chapitres précédents.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons quelques rappels sur des concepts mathématiques qui vont être utilisés tout au long de ce travail ainsi que les notations correspondantes. Quelques définitions relatives aux espaces fonctionnelles telles que les notions d'équicontinuité, de familles uniformément bornées, de compacité relative vont être rappelées tout en mettant l'accent sur le théorème d'Arzelà-Ascoli qui permet de caractériser les parties compactes ou relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un intervalle borné dans un espace métrique. Nous évoquons aussi des résultats relatifs à la notion cruciale de point fixe qui va être le moyen efficace pour arriver à démontrer l'existence de solutions ainsi que l'unicité pour certains problèmes associés à des équations différentielles fractionnaires. Enfin, nous donnons un bref résultat généralisant l'inégalité de Grönwall qui va être utilisée dans certaines démonstrations.

1.1 Définitions et Notations

Tout d'abord, nous introduisons les notations suivantes concernant les espaces auxquels on va se référer souvent le long de ce travail.

- $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ désignera l'espace des fonctions continues d'un intervalle [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions réelles n fois continuement différentiables sur $[a,b]$.

Définition 1.1.1. *On dit qu'un espace vectoriel normé est* ***complet*** *si toute suite* *de Cauchy converge dans cet espace pour la distance associée à cette norme.*

Définition 1.1.2. *On appelle* ***espace de Banach*** $(E, ||.||_E)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de la norme.*

Notons $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues définies de $J = [0, T], T > 0$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$||y||_\infty = \sup_{t \in J} |y(t)|$$

Définition 1.1.3. *Soient* $\Omega = (a, b)$ *avec* $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$ *et* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *:*

1. *Pour* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *:* $L^p(\Omega)$ *désignera l'espace des (classes de) fonctions* f *réelles mesurables sur* Ω *telles que :*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx \leq +\infty$$

   muni la norme :

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty$$

2. $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des (classes de) fonctions mesurables* f *bornées presque partout (p.p) sur Ω muni de la norme :*

$$||f||_\infty = inf\{c \geq 0, ||f|| \leqslant c, \quad p.p \quad sur \quad \Omega\}$$

Définition 1.1.4. *Soit* $\mathcal{M}$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{C}(E, F)$*. On dit que* $\mathcal{M}$ *est* ***uniformément borné****, s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$||f||_\infty \leqslant C, \quad \forall f \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.1.5. *Soit* $f : E \longrightarrow E$ *une application d'un espace de Banach dans lui-même. Un élément* x *de* E *est dit* ***point fixe*** *de* f *si* $f(x) = x$*.*

Définition 1.1.6. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. On dit que* f *est* ***bornée*** *si elle envoie les parties bornées de* E

sur des parties bornées de F.

Définition 1.1.7. *Soit $C(J,E)$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach E et $f \subset C(J,E)$. f est* ***équicontinu*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall t_1, t_2 \in J : |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \varepsilon$$

.

Définition 1.1.8. *Soient E un espace topologique et F une partie de E. On dit que F est* ***relativement compacte*** *si elle est contenue dans un ensemble compact de E.*

Définition 1.1.9. *Etant donnée une fonction $f : E \longrightarrow F$ où E et F désignent deux espaces de Banach.*

1. *f est dite* ***compacte*** *si elle est continue et l'image f(E) est relativement compacte dans F.*
2. *f est dite complètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de E est relativement compacte dans F.*

1.2 Théorème d'Arzelà-Ascoli

En analyse fonctionnelle, le Théorème d'Ascoli, ou Théorème d'Arzelà-Ascoli, démontré par les mathématiciens italiens Giulio Ascoli et Cesare Arzelà, caractérise, à l'aide de la notion d'équicontinuité, les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace métrique. Il se généralise sans difficulté au cas où l'espace de départ est seulement localement compact.

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications (complétude de certains espaces fonctionnels, compacité de certains opérateurs, dépendance en les conditions initiales dans les équations différentielles. . .).

Théorème 1.2.1. *[23] Soit $M \subset C(J,\mathbb{R})$, J étant un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Pour la norme du "sup", la partie M est relativement compacte si et seulement si :*

1. *M est uniformément bornée.*
2. *M est équicontinue.*

1.3 Théorème du point fixe

Dans cette section, nous allons rappeler quelques principaux résultats relatifs au "Théorème du point fixe" qui seront exploités par la suite. En analyse, un théorème du point fixe donne des conditions suffisantes d'existence d'un point fixe pour une fonction ou une famille de fonctions.

Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de résolution des équations différentielles.

1.3.1 Théorème de Banach

Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.

Théorème 1.3.1. *(Contractante de Banach)[13]*
Soit E un espace de Banach et $f : E \to E$ une application contractante c'est à dire $\exists\ 0 < k < 1$ tel que $\forall x, y \in E$:

$$||f(x) - f(y)||_E \leq k\,||x - y||_E$$

Alors f admet un unique point fixe.

1.3.2 Théorème de Brouwer

Théorème 1.3.2. *[7] Soit B_n la boule unité fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors, toute application continue T de $B_n \longrightarrow B_n$ admet un point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1.3.3 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour la démonstration de l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.3.3. *[7] Soit U un ensemble non vide compact et convexe dans un espace de Banach E et soit $f : U \longrightarrow U$ une application continue. Alors f admet un point fixe.*

Pour les applications, la généralisation suivante s'avère utile.

Théorème 1.3.4. *[7] Soit U un ensemble non vide fermé et convexe dans un espace de Banach E et soit $f : U \longrightarrow U$ une application continue telle que $f(U)$ soit une partie relativement compacte de E. Alors f admet au moins un point fixe.*

1.3.4 Théorème de Leray-Schauder

Théorème 1.3.5. *[16] Soit E un espace de Banach et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$, soit $f : U \to U$ un opérateur complètement continu. Alors :*

i) Soit f admet un point fixe,

ii) Soit l'ensemble $\xi = \{x \in U, x = \lambda f(x), 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.

Le résultat qui suit, est une combinaison des théorèmes de Banach et de Schauder.

1.3.5 Théorème de Krasnoselskii

Théorème 1.3.6. *[23] Soit U un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach E. Soient $f_1,\ f_2 : U \to E$ deux applications telles que :*

1. $f_1(x) + f_2(y) \in U, \quad \forall x, y \in U,$

2. f_1 est une contraction,

3. f_2 est compacte et continue.

Alors, l'application $f_1 + f_2$ admet un point fixe i.e. :

$$\exists\ x \in U : \quad f_1(x) + f_2(x) = x.$$

Le résultat qui vient, est en vérité une généralisation de l'inégalité bien connue de Grönwall. C'est un outil qui permet d'obtenir de nombreuses approximations pour les solutions d'équations différentielles ordinaires comme il sert aussi à montrer l'unicité de la solution à de nombreux problèmes. Ici, nous avons une version adaptée :

1.4 Lemme de Grönwall

Lemme 1.4.1. *[10] Soient $v : [0, T] \longrightarrow [0, \infty)$ une fonction réelle et $w(.)$ une fonction non négative, localement intégrable sur $[0, T]$. On Suppose l'existence des constantes $b > 0$ et $0 < \alpha < 1$ telles que :*

$$v(t) \leqslant w(t) + b \int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s) ds$$

Alors, il existe une constante positive K_α telle que :

$$v(t) \leqslant w(t) + K_\alpha \ b \int_0^t (t-s)^{-\alpha} w(s) ds. \quad \forall t \in [0, T]$$

Chapitre 2

Fonctions spéciales et Calcul Fractionnaire

Ce chapitre sera consacrée aux outils de base du calcul fractionnaire à savoir l'introduction de la fonction spéciale d'Euler dite "Fonction Gamma" qui joue un rôle fondamental dans la définition de certains concepts relatifs au calcul fractionnaire. Puis, dans un deuxième temps aux définitions et aux propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation dans deux versions bien connues et très utilisées et qui vont permettre de dégager les différents résultats relatifs au calcul fractionnaire.

2.1 Fonctions spéciales

Dans cette partie on va présenter deux fonctions spéciales : la fonction Gamma et la fonction Bêta qui seront utilisées dans la suite et jouent un rôle capital dans la théorie du calcul fractionnaire.

2.1.1 Fonction Gamma

Sans aucun doute, c'est la fonction de base du calcul fractionnaire on l'appelle aussi fonction d'Euler notée $\Gamma(z)$. Elle permet la généralisation de la notion de factorielle $n!$ et permet à n de prendre également des valeurs non entières et même complexes. Nous rappellerons dans cette section quelques résultats relatifs à cette fonction.

Définition 2.1.1. *[18] La fonction Gamma est une fonction complexe à variable complexe définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad Re(z) > 0$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

- Sur l'axe réel on a : $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0_+) = +\infty$. En plus, elle est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, \infty[$.
- Elle admet un prolongement analytique en une fonction méromorphe (i.e. holomorphe sur tout le plan complexe sauf aux points isolés $z = 0,\ -1,\ -2,\ -3, \dots$ qui représentent des "pôles").
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > 0$, elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

C'est l'une de ses propriétés de base qu'on peut démontrer par une intégration par parties :
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

La fonction Gamma généralise la notion de "factorielle". En effet, d'après (2.1) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on a :

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$

$\vdots$

ainsi, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1) = n!$

Exemple 2.1.1. *Pour les rationnels positifs, prenons l'exemple de $z = 1/2$ et mon-*

trons que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

D'après la définition (2.1.1) , nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

si on pose $t = x^2$ alors, $dt = 2x\ dx$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

sachant que : $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Intégrale de Gauss).

2.1.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 2.1.2. *[18] La fonction Bêta ou " fonction de Bessel " est donnée par :*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$$

pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ *tel que :* $Re(z) > 0$ *et* $Re(w) > 0$.

Proposition 2.1.1. *La fonction Gamma est liée à la fonction Bêta par la relation suivante :*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Démonstration.

Pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} t^{z-1}x^{w-1}e^{-(t+x)}\ dt\ dx$$

on effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = r - t \\ t = rs \end{cases}$$

alors,

$$r \geqslant 0 \quad , \quad 0 \leqslant s \leqslant 1$$

Ainsi : $\quad dt = r\ ds + s\ dr \quad , \quad dx = (1-s)\ dr - r\ ds$

et le jacobien de cette transformation sera donc :

$$\frac{d(t,x)}{d(s,r)} = \begin{vmatrix} r & s \\ -r & 1-s \end{vmatrix} = r$$

d'où, $dt\ dx = r\ ds\ dr$.

En substituant dans notre intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty \int_0^1 r^{z-1} s^{z-1} r^{w-1} (1-s)^{w-1} e^{-r}\ r\ ds\ dr \\ &= \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}\ ds \int_0^\infty e^{-r} r^{z+w-1}\ dr \\ &= B(z,w)\Gamma(z+w). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on a :*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{2.2}$$

Démonstration.

A partir de la relation :

$$B(z,z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt, \quad \forall Re(z) > 0$$

et en remarquant que $y(t) = t(1-t)$ est une fonction symétrique, et en effectuant la subtitution $s = 4t(1-t)$, nous aurons :

$$\begin{aligned} B(z,z) &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{z-1} dt \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= 2^{1-2z} B\left(z, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Par suite,

$$B\left(z, \frac{1}{2}\right) = 2^{2z-1} B(z,z).$$

Ainsi, d'après la proposition (2.1.1) on a :

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

c'est à dire :

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

C.Q.F.D.

□

A présent si on prend $z = n + \dfrac{1}{2}$ alors :

$$\Gamma(2n+1) = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)$$

ce qui implique encore la relation :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(2n+1)}{2^{2n}\ \Gamma(n+1)} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}\ n!}$$

2.2 Calcul fractionnaire

2.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Rieman-Liouville :

Définition 2.2.1. *[11] Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue , on appelle intégrale d'ordre α au sens de Rieman-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t > a\ ,\ Re(\alpha) > 0$$

Exemple 2.2.1. *Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$, $\forall t \in [a,b]$ où $\beta > -1$.*
Par définition on a :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta ds$$

effectuons le changement de variable :

$$s = t - \tau(t-a) \Rightarrow ds = -(t-a)d\tau$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(t-a)^\beta &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^0 [\tau(t-a)]^{\alpha-1}[t-\tau(t-a)-a]^\beta(t-a)\ d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a)^{\alpha+\beta}\tau^{\alpha-1}(1-\tau)^\beta d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^\beta d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)
\end{aligned}$$

en utilisant la proposition (2.1.1), on obtient :

$$I_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}$$

Si $\beta = 0$, on a :

$$I_a^\alpha 1 = I_a^\alpha(t-a)^0 = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

d'où pour une constante K, on aura :

$$I_a^\alpha K = K.\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
I_a^1(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(t-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}(t-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\beta+1}
\end{aligned}$$

On retrouve donc l'intégrale usuelle : $\int_a^t (x-a)^\beta dx$

Proposition 2.2.1. *[1] Soient α et β deux nombres complexes et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.*

i) $I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad où \quad Re(\alpha) > 0 \quad et \quad Re(\beta) > 0.$

ii) $\dfrac{d}{dt}(I_a^\alpha f) = I_a^{\alpha-1} f, \quad où \quad Re(\alpha) > 1.$

Démonstration.

i) En effet :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} I_a^\beta f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-r)^{\beta-1} f(r) dr \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-r)^{\beta-1} \right] f(r) dr ds
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable :

$$s = r + \tau(t-r) \Rightarrow ds = (t-r)d\tau$$

nous donne

$$\begin{aligned}
\int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-r)^{\beta-1} ds &= (t-r)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= (t-r)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) \\
&= (t-r)^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) B(\beta,\alpha) dr \\
&= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) dr \\
&= I_a^{\alpha+\beta} f(t)
\end{aligned}$$

ii) En utilisant les théorème classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre ainsi que la relation : $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{d}{dt}(t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} f(s)ds \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s)ds \\
&= I_a^{\alpha-1} f(t)
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Dérivée au sens de Rieman-Liouville :

Définition 2.2.2. *[1] On appelle " dérivée au sens de Rieman-Liouville " d'ordre α d'une fonction f, la fonction définie par :*

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds
\end{aligned}$$

avec $Re(\alpha) > 0$, $t > a$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.

Notation 2.2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, le symbole D^n désignera l'opérateur de différentiation d'ordre entier n, c'est à dire :*

$$D_a^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

avec la convention :

$$D_a^0 f(t) = f(t)$$

Exemple 2.2.2. *Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$, $\forall t \in [a,b]$ où $\beta > -1$, nous avons :*

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[I_a^{n-\alpha}(t-a)^\beta\right]$$

d'après l'exemple (2.2.1)

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n+\beta-\alpha} \end{aligned}$$

mais ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^m &= m(m-1)(m-2)....(m-n+1)(t-a)^{m-n} \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}(t-a)^{m-n} \end{aligned}$$

et par suite ,

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

Remarque 2.2.1. *Si on prend $\alpha = 1$ on aura :*

$$\begin{aligned} D_a^1 (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(t-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{d}{dt}(t-a)^\beta \end{aligned}$$

Remarque 2.2.2. *Si on prend $\beta = 0$, on aura :*

$$D_a^\alpha(1) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Ainsi, la dérivée fractionnaire au sens de Rieman-Liouville d'une constante C n'est pas nulle, mais :

$$D_a^1(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

Proposition 2.2.2. *Pour un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$ et une fonction donnée $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, supposons que :*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0$$

alors,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha-n)}(t-a)^{i+\alpha-n}$$

Où les C_i,$i = 0, 1, ..., n-1$, sont des constantes réelles.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha f)(t) = 0 &\Longrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f(t)) = 0 \\ &\Longrightarrow I_a^{n-\alpha} f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i (t-a)^i\end{aligned}$$

par composition avec l'opérateur I_a^α on obtient :

$$I_a^n f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha)} (t-a)^{i+\alpha}$$

par composition avec D^n on obtient :

$$f(t) = D_a^n I_a^n f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{i+\alpha}$$

or,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{i+\alpha} = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} (t-a)^{i+\alpha-n}$$

alors,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} (t-a)^{i+\alpha-n}$$

C.Q.F.D.

□

Théorème 2.2.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent avec $n-1 < \alpha < n$. Alors, pour λ, $\mu \in \mathbb{R}$, si $D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(t)$ existe on a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Démonstration. :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha(\lambda f+\mu g)(t) &= D^n I_a^{n-\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)] \\
&= D^n(\lambda I_a^{n-\alpha} f(t)+\mu I_a^{n-\alpha} g(t)) \\
&= \lambda D^n I_a^{n-\alpha} f(t)+\mu D^n I_a^{n-\alpha} g(t) \\
&= \lambda D_a^\alpha f(t)+\mu D_a^\alpha g(t)
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

□

Proposition 2.2.3. *[1] Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction admettant une intégrale fractionnaire d'ordre α. Alors :*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha)f(t)=f(t)$$

Cependant, on a la remarque suivante mettant en exergue la non commutativité de ces opérateurs.

Remarque 2.2.3. *[1] La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et non-commutative car :*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(t)\neq D_a^\alpha I_a^\alpha f(t)$$

Puisque :

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha)f(t)=f(t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{D^{n-i}[I_a^{n-\alpha}f](a)(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)},\quad \forall t\in[a,b]$$

avec $Re(\alpha)>0$ et $n=[Re(\alpha)]+1$.

2.2.3 Dérivée au sens de Caputo

Définition 2.2.3. *[1]*

Soient $\alpha\in\mathbb{C}$ avec $Re(\alpha)\geq 0$ et $n=[Re(\alpha)]+1$ et soit $f\in C^n([a,b],\mathbb{R})$. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f est définie *par :*

$$\begin{aligned}({}^cD_a^\alpha f)(t) &= (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Remarque 2.2.4. *L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

Exemple 2.2.3. $f(t) = (t-a)^\beta$ *avec* $\beta > n-1$ *on a :*

$${}^cD_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

Démonstration.

nous avons :

$${}^cD_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} (\tau-a)^\beta d\tau$$

on a :

$$\frac{d^n}{d\tau^n} (\tau-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau-a)^{\beta-n}$$

alors,

$${}^cD_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (\tau-a)^{\beta-n} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau$$

En effetuant le changement de variable suivant :

$$\tau = t - s(t-a) \ \text{ avec } \ d\tau = -(t-a)ds \ \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 s^{n-\alpha-1}(1-s)^{\beta-n}(t-a)^{\beta-\alpha}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}B(n-\alpha,\beta-n+1) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D. □

Remarque 2.2.5. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle. Autrement dit :* ${}^cD_a^\alpha K = 0, \quad K \in \mathbb{R}.$

Proposition 2.2.4. *[11] Soit α un nombre complexe tel que $Re(\alpha) > 0$. Alors l'équation différentielle :*

$${}^cD_a^\alpha f(t) = 0, \quad t \in [a,b]$$

admet la solution générale :

$$f(t) = K_0 + K_1(t-a) + K_2(t-a)^2 + ... + K_{n-1}(t-a)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} K_i(t-a)^i$$

avec $K_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,n-1$ des constantes réelles.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^\alpha f(t) = 0 &\Longrightarrow I_a^{n-\alpha}[f^{(n)}(t)] = 0 \\
&\Longrightarrow f^{(n)}(t) = 0 \\
&\Longrightarrow f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} K_i(t-a)^i
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

□

Proposition 2.2.5. *[1] Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ on a :*

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad \text{où} \quad Re(\alpha) > 0$$

En plus, si elle est n fois continûment différentiable sur $[a,b]$ et si $Re(\alpha) > 0$ et

$n = [Re(\alpha)] + 1$, *alors :*

$$(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{i!}$$

Remarque 2.2.6. *Signalons les deux cas particuliers suivants :*

- *Si* $Re(\alpha) \in]0,1]$ *alors :* $(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f)(t) = f(t) - f(a)$.
- *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *alors :* ${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$.

2.2.4 Dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville

[1] Considérons une fonction f admettant des dérivées fractionnaires d'ordre α au sens de Riemann-Liouville $D_a^\alpha f(t)$ et au sens de Caputo ${}^cD_a^\alpha f(t)$. Alors, pour tout scalaire complexe α tel que $Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$ nous avons :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}$$

Par ailleurs, si $f^{(i)}(a) = 0$ pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ on a :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$$

Ici aussi, on signale le cas particulier lorsque $Re(\alpha) \in]0,1[$ où :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

2.2.5 Propriétés de la dérivée de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction f jouisse de propriétés similaires à celles de Riemann-Liouville. En effet, nous avons les résultats admis suivants :

- Pour toutes deux fonctions f et g définies sur $[a,b]$ dont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α existent et pour tous deux scalaires λ, $\mu \in \mathbb{R}$:

$${}^cD_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda \, {}^cD_a^\alpha f(t) + \mu \, {}^cD_a^\alpha g(t), \quad \forall t \in [a,b]$$

– Pour $m \in \mathbb{N}$ et si : $n-1 < \alpha < n$ alors :

$$^{c}D_a^m({}^{c}D_a^\alpha f(t)) = {}^{c}D_a^\alpha({}^{c}D_a^m f(t)) = {}^{c}D_a^{\alpha+m} f(t), \quad \forall t \in [a,b]$$

si $f^{(i)}(0) = 0,\ i \in \{n, n+1, \ldots, m\}$

Chapitre 3

Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires implicites

3.1 Etude d'un problème aux limites

3.1.1 Présentation du problème

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites de type suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^{c}D^{\alpha}y(t)), \quad t \in J := [0, T], 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.1}$$

avec la condition aux bords :

$$ay(0) + by(T) = c \tag{3.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo , f étant une fonction de $J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et a, b, c sont des constantes réelles avec $a+b \neq 0$.

Définition 3.1.1. *Une fonction $y \in C^{1}([0, T], \mathbb{R})$ est dite solution du problème* $(3.1) - (3.2)$ *si y satisfait l' équation* (3.1) *sur J et la condition* (3.2) *à la fois.*

Afin d'étudier l'existence de solutions à ce problème , on doit passer d'abord par énoncer les résultats préliminaires suivants :

Lemme 3.1.1. *Considérons une fonction continue $\ell : [0,T] \to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$ alors, le problème linéaire :*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = \ell(t) \quad \forall t \in J \tag{3.3}$$

$$ay(0) + by(T) = c \tag{3.4}$$

a une solution unique donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds - c\right] \tag{3.5}$$

Démonstration. :

Si on applique l'opérateur I^{α} aux deux membres de l'égalité (3.3) et on utilise la formule indiquée dans la remarque (2.2.6) on aura :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(^{c}D^{\alpha}y(t)) &= I^{\alpha}\ell(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds \\ &= y(t) - y(0) \end{aligned}$$

de là, on tire pour $t = T$:

$$y(T) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds$$

Or, on a la condition (3.4) par suite

$$ay(0) + by(0) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds = c$$

i.e.

$$y(0) = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds\right]$$

Par suite, la solution du problème aux limites $(3.3) - (3.4)$ est bien :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\ell(s)ds - c\right] \tag{3.6}$$

$\square$

Lemme 3.1.2. *Soit $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème* $(3.1) - (3.2)$ *est equivalent au problème :*

$$y(t) = A + I^\alpha v(t) \tag{3.7}$$

avec

$$A = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)ds\right]$$

et $v \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$v(t) = f(t, A + I^\alpha v(t), v(t))$$

Démonstration. :

Soit y la solution du problème (3.7). Montrons que y est aussi solution du problème $(3.1) - (3.2)$.

Nous avons :

$$y(t) = A + I^\alpha v(t)$$

ainsi,

$$y(0) = A \qquad \text{et} \qquad y(T) = A + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)ds$$

alors,

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= \frac{-ab}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds + \frac{ac}{a+b} - \frac{b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &+ \frac{bc}{a+b} + \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &= c \end{aligned}$$

donc,

$$ay(0) + by(T) = c$$

D'autre part, en usant des propriétés de la dérivée de Caputo, nous avons :

$$\begin{aligned}
{}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha(A + I^\alpha v(t)) \\
&= {}^cD^\alpha(A) + {}^cD^\alpha(I^\alpha v(t)) \\
&= 0 + v(t) \\
&= f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t))
\end{aligned}$$

□

3.1.2 Résolution du problème en utilisant une contraction

Dans le théorème suivant, on va énoncer un premier résultat sur l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) − (3.2) en introduisant un opérateur sur l'espace fonctionnel $C(J, \mathbb{R})$. On montrera que l'opérateur est une contraction sur cet espace et par suite, en utilisant le théorème de contraction de Banach, on arrive à conclure.

Théorème 3.1.1. *Supposons que :*

($\mathcal{H}_1$) *La fonction $f(t, u, w) : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

($\mathcal{H}_2$) *Il existe deux constantes $L > 0$ et $0 < K < 1$ telles que :*

$$|f(t, u, w) - f(t, u', w')| \leq L|u - u'| + K|w - w'| \quad \forall u, u', w, w' \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall t \in J$$

si

$$\frac{LT^\alpha}{(1 - K)\Gamma(\alpha + 1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a + b|}\right) < 1 \tag{3.8}$$

Alors le problème (3.1) − (3.2) a une solution unique.

Démonstration.

On va transformer le problème (3.1) − (3.2) en un problème de point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur :

$$\mathcal{N} : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$$

défini par :

$$(\mathcal{N}y)(t) := \mathcal{N}y(t) = A_y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} v_y(s) ds \tag{3.9}$$

Où :

$$v_y(t) = f(t, A_y + I^\alpha v_y(t), v_y(t))$$

et

$$A_y = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_y(s)ds\right]$$

il est clair que le point fixe de l'opérateur $\mathcal{N}$ est solution du (3.1) − (3.2).

L'opérateur $\mathcal{N}$ est bien défini. En effet, si $y \in C(J, \mathbb{R})$ alors, $\mathcal{N}y \in C(J, \mathbb{R})$. Pour montrer que $\mathcal{N}$ admet un point fixe, il suffit de montrer que $\mathcal{N}$ est une contraction. Soient $y, z \in C(J, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}y(t) - \mathcal{N}z(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[v_y(s) - v_z(s)\right] ds \\ &- \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left[v_y(s) - v_z(s)\right] ds\end{aligned}$$

où : $v_y,\ v_z \in C(J, \mathbb{R})$ sont données par :

$$v_y(t) = f(t, y(t), v_y(t))$$

$$v_z(t) = f(t, z(t), v_z(t))$$

on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}y(t) - \mathcal{N}z(t)| \leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v_y(s) - v_z(s)|ds \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v_y(s) - v_z(s)|ds\end{aligned} \tag{3.10}$$

Par $(\mathcal{H}_2)$ nous avons :

$$\begin{aligned}|v_y(t) - v_z(t)| =&|f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)) - f(t, z(t), {}^cD^\alpha z(t))| \\ &\leq L|y(t) - z(t)| + K|v_y(t) - v_z(t)|\end{aligned}$$

donc,

$$|v_y(s) - v_z(s)| \leq \frac{L}{(1-K)}|y(t) - z(t)|$$

Par (3.10) nous avons :

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}y(t)-\mathcal{N}z(t)| &\leq \frac{L}{(1-K)\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|y(s)-z(s)|ds \\ &+ \frac{L|b|}{|a+b|(1-K)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|y(s)-z(s)|ds \\ &\leq \frac{LT^\alpha}{(1-K)\Gamma(\alpha+1)}||y-z||_\infty + \frac{LT^\alpha|b|}{|a+b|(1-K)\Gamma(\alpha+1)}||y-z||_\infty\end{aligned}$$

par suite,

$$||\mathcal{N}y-\mathcal{N}z||_\infty \leq \left[\frac{LT^\alpha}{(1-K)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)\right]||y-z||_\infty$$

d'après la condition (3.8), on déduit que $\mathcal{N}$ est une contraction. Ainsi, d'après le théorème de Banach (1.3.1) $\mathcal{N}$ admet un seul point fixe qui est la solution du problème (3.1) − (3.2). □

Notre deuxième résultat pour le problème (3.1) − (3.2) est basé sur le théorème de Schauder.

3.1.3 Résolution du problème en utilisant le théorème de Schauder

Théorème 3.1.2. *Supposons les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ soient satisfaites ainsi que l'hypothèse :*

$(\mathcal{H}_3)$ *Il existe $p, q, r \in C(J, \mathbb{R}_+)$ avec $r^* = \sup_{t\in J} r(t) < 1$ tels que*

$$f(t,u,w) \leq p(t) + q(t)|u| + r(t)|w| \quad \textit{pour} \ \ t\in J \quad \textit{et} \quad u,w\in\mathbb{R}$$

si :

$$q^*M\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) < 1 \tag{3.11}$$

Où :

$$q^* = \sup_{t\in J} q(t) \quad \textit{et} \quad M = \frac{T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)},$$

Alors le problème (3.1) − (3.2) admet au moins une solution.

Démonstration. :

On va utiliser le théorème du point fixe version Schauder pour montrer que $\mathcal{N}$ défini par (3.9) admet un point fixe.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

Etape 1. *: $\mathcal{N}$ est continu,*

Soit $(y_n)_n$ une suite dans $C(J,\mathbb{R})$ convergente pour la norme $||.||_\infty$ vers une limite y ie :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}||y_n - y||_\infty \longrightarrow 0$$

Il suffit de montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}||\mathcal{N}y_n - \mathcal{N}y||_\infty = 0.$$

En effet, $\forall t \in J$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}y_n(t) - \mathcal{N}y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v_n(s) - v(s)|ds \\ & + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v_n(s) - v(s)|ds\end{aligned}$$

Où $\quad v_n,\ v \in C(J,\mathbb{R})$ *sont définies par :*

$$v_n(t) = f(t, y_n(t), v_n(t))$$

$$v(t) = f(t, y(t), v(t))$$

on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in J, \quad |v_n(t) - v(t)| &= |f(t, y_n(t), v_n(t)) - f(t, y(t), v(t))| \\ &\leq L\,|y_n(t) - y(t)| + K\,|v_n(t) - v(t)|\end{aligned}$$

d'où ,

$$\forall t \in J, \quad |v_n(t) - v(t)| \leq \frac{L}{1-K}\,|y_n(t) - y(t)|$$

puisque : $y_n \longrightarrow y$, nous avons : $v_n(t) \longrightarrow v(t)$ quand $n \longrightarrow \infty$, $\forall t \in J$.

Il existe $\lambda > 0$ *tel que* $|v_n(t)| \leq \lambda$ *et* $|v(t)| \leq \lambda$ *pour lequel on a :*

$$\begin{aligned}(t-s)^{\alpha-1}\,|v_n(s)-v(s)| &\leqslant (t-s)^{\alpha-1}(|v_n(s)|+|v(s)|)\\ &\leqslant 2\lambda(t-s)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(T-s)^{\alpha-1}\,|v_n(s)-v(s)| &\leqslant (T-s)^{\alpha-1}(|v_n(s)|+|v(s)|)\\ &\leqslant 2\lambda(T-s)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Pour $t \in J$*, les fonctions :* $s \longrightarrow 2\lambda(t-s)^{\alpha-1}$ *et* $s \longrightarrow 2\lambda(T-s)^{\alpha-1}$ *sont intégrables sur J. Par passage à la limite on a :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}|\mathcal{N}y_n(t)-\mathcal{N}y(t)| = 0, \quad \forall t \in J$$

on tire,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}||\mathcal{N}y_n-\mathcal{N}y||_\infty = 0$$

d'où la continuité de $\mathcal{N}$.

Soients $p* = sup_{t\in J}p(t)$,

$$\frac{\dfrac{|c|}{|a+b|}+\left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)p^*M}{1-\left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)q^*M} \leq \mu$$

et considérons l'ensemble :

$$B_\mu = \{y \in C(J,\mathbb{R}), ||y||_\infty \leq \mu\}.$$

il est clair que B_μ *est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de* $C(J,\mathbb{R})$.

Etape 2. $\mathcal{N}(B_\mu) \subset B_\mu$,

Soit $y \in B_\mu$ *et montrons que* $\mathcal{N}y \in B_\mu$.

Pour tout $t \in J$ *on a :*

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}y(t)| \leq & \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds \\ & + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}|v(t)| &= |f(t, y(t), v(t))| \\ &\leq p(t) + q(t)|y(t)| + r(t)|v(t)| \\ &\leq p(t) + q(t)\mu + r(t)|v(t)| \\ &\leq p^* + q^*\mu + r^*|v(t)|\end{aligned}$$

d'où ,

$$|v(t)| \leq \frac{p^* + q^*\mu}{1 - r^*} := N^*$$

par suite, pour tout $t \in J$ *:*

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}y(t)| &\leq \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{(p^* + q^*\mu)T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|\,(p^* + q^*\mu)T^\alpha}{|a+b|\,(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{|c|}{|a+b|} + (p^* + q^*\mu)M + \frac{|b|\,(p^* + q^*\mu)M}{|a+b|} \\ &\leq \frac{|c|}{|a+b|} + p^*M\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) + q^*M\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)\mu \\ &\leq \mu\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{N}y \in B_\mu$.

Etape 3. $\mathcal{N}(B_\mu)$ *est relativement compact,*

Soient $t_2, t_1 \in J$ *tels que* $t_1 < t_2$. B_μ *est un ensemble borné de* $C(J, \mathbb{R})$ *(démontré à l'étape 02).*

Soit $y \in B_\mu$ alors,

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{N}y(t_2) - \mathcal{N}y(t_1)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]v(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]\left|v(s)\right|ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\left|v(s)\right|ds \\
&\leq \frac{N^*}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]ds + \frac{N^*}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{N^*}{\Gamma(\alpha+1)}[t_2^\alpha - t_1^\alpha + 2(t_2-t_1)^\alpha]
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, $\mathcal{N}y(t_1) - \mathcal{N}y(t_2) \to 0$, d'où l'équicontinuté de $\mathcal{N}(B_\mu)$.
D'après les étapes 1) et 3) et le théorème d'Arzela-Ascoli (1.2.1), Par conséquent, $\mathcal{N} : B_\mu \to B_\mu$ est continu et compact.
Ainsi, d'après le théorème de schauder (1.3.4) $\mathcal{N}$ admet un point fixe qui est la solution du problème (3.1) − (3.2).

□

Le prochain résultat d'existence est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

3.1.4 Résolution du problème en utilisant le théorème de Leray-Schauder

Théorème 3.1.3. *Supposons que $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ soient satisfaitent. Alors, le problème (3.1) − (3.2) admet au moins une solution .*

Démonstration.

On va utiliser le théorème du point fixe version Leray-Schauder pour montrer que $\mathcal{N}$ défini par (3.9) admet un point fixe.
La démonstration se fait en plusieurs étapes :

Etape 1. *$\mathcal{N}$ est continu,*

Etape 2. *$\mathcal{N}(B_\omega) \subset B_\omega$,*
Soit $y \in B_\omega$, l'image de tout ensemble borné par $\mathcal{N}$ est un ensemble borné dans $C(J, \mathbb{R})$.
En effet, il suffit de montrer que pour tout $\omega > 0$, il existe une constante ℓ telle que

pour tout $y \in B_\omega = \{y \in C(J,\mathbb{R}),\ ||y||_\infty \leq \omega\}$ *on a :* $||\mathcal{N}y||_\infty \leq \ell$.

Pour $y \in B_\omega$ *nous avons, pour tout* $t \in J$,

$$|\mathcal{N}y(t)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,|v(s)|\,ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

mais,

$$\begin{aligned}|v(t)| &= |f(t,y(t),v(t))|\\ &\leq p(t)+q(t)|y(t)|+r(t)|v(t)|\\ &\leq p(t)+q(t)\omega+r(t)|v(t)|\\ &\leq p^*+q^*\omega+r^*|v(t)|\end{aligned}$$

donc,

$$|v(t)| \leq \frac{p^*+q^*\omega}{1-r^*} := M^*$$

Il s'ensuit,

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}y(t)| &\leq \frac{M^*T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M^*T^\alpha\,|b|}{\Gamma(\alpha+1)\,|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}\\ &\leq \frac{M^*T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{|c|}{|a+b|}\end{aligned}$$

Alors

$$||\mathcal{N}y||_\infty \leq \frac{M^*T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\frac{|b|}{|a+b|}) + \frac{|c|}{|a+b|} := \ell$$

donc, $\mathcal{N}(B_\omega)$ *est borné.*

Etape 3. *il est clair que L'image de tout borné par* $\mathcal{N}$ *est un ensemble équicontinu de* $C(J,\mathbb{R})$, *ce qui fait que* $\mathcal{N}$ *est continu et par conséquent* $\mathcal{N} : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ *est complètement continu.*

Etape 4. *A présent, il reste à montrer que l'ensemble :*

$$\xi = \{y \in C(J,\mathbb{R}), y = \lambda.\ \mathcal{N}y, 0 < \lambda < 1\} \text{ est borné.}$$

Soit $y \in \xi$ i.e. $y = \lambda.\, \mathcal{N}(y)$ avec $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \frac{c}{a+b} \right]$$

d'où l'inégalité,

$$|y(t)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds + \frac{|b|}{|a+b|\, \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

D'autre part, nous avons les majorations suivantes pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned} |v(t)| &= |f(t, y(t), v(t))| \\ &\leq p(t) + q(t)|y(t)| + r(t)|v(t)| \\ &\leq p(t) + q(t)|y(t)| + r(t)|v(t)| \\ &\leq p^* + q^*|y(t)| + r^*|v(t)| \end{aligned}$$

d'où,

$$\forall t \in J, \quad |v(t)| \leq \frac{p^* + q^*|y(t)|}{1 - r^*}$$

Il s'ensuit alors,

$$\begin{aligned} |y(t)| \leq\ & \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{p^* T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \\ &+ \frac{q^*}{(1-r^*)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s)|\, ds \\ &+ \frac{|b|\, q^*}{(1-r^*)\, |a+b|\, \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |y(s)|\, ds \\ \leq\ & \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{p^* T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \\ &+ \frac{q^*\, ||y||_\infty}{(1-r^*)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &+ \frac{|b|\, q^*\, ||y||_\infty}{|a+b|\, (1-r^*)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} dS \\ \leq\ & \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{p^* T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \\ &+ \frac{q^* T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) ||y||_\infty \end{aligned}$$

puis pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}||y||_\infty \leq \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{p^* T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) \\ + \frac{q^* T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)||y||_\infty\end{aligned}$$

et par suite, nous avons pour tout $t \in J$:

$$||y||_\infty \leq \frac{\dfrac{|c|}{|a+b|} + \left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)p^* M}{1-\left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)q^* M} := C$$

Cela montre que ξ est borné et comme conséquence du Théorème du point fixe de Leray-schauder (1.3.5), on déduit que $\mathcal{N}$ admet au moins un point fixe lequel est une solution du problème (3.1) − (3.2).

□

Nous donnerons à présent un résultat sur l'unicité de la solution du problème (3.1) − (3.2).

3.1.5 Unicité de la solution

Théorème 3.1.4. *Supposons que $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ soient satisfaitent. Alors, le problème (3.1) − (3.2) admet une solution unique .*

Démonstration.

l'existea d' au moins une solution y(t) du problème (3.1) − (3.2) est assurée par le théorème (3.1.2) pour prouver l'unicité de y(t) soit z(t) une autre solution du problème (3.1) − (3.2) alors $\forall t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}|y(t)-z(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v_y(s)-v_z(s)|\,ds \\ + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)\,|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v_y(s)-v_z(s)|\,ds\end{aligned}$$

où : $v_y,\ v_z \in C(J,\mathbb{R})$ sont données par :

$$v_y(t) = f(t, y(t), v_y(t))$$

$$v_z(t) = f(t, z(t), v_z(t))$$

on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in J, \quad |v_y(t) - v_z(t)| &= |f(t, y_t(t), v_y(t)) - f(t, z(t), v_z(t))| \\ &\leq L\,|y(t) - z(t)| + K\,|v_y(t) -_z v(t)|\end{aligned}$$

d'où ,

$$\forall t \in J, \quad |v_y(t) - v_z(t)| \leq \frac{L}{1-K}\,|y(t) - z(t)|$$

par suite

$$\begin{aligned}|y(t) - z(t)| \leq{}& \frac{L}{\mathit{\Gamma}(\alpha)(1-K)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s) - z(s)|\,ds \\ &+ \frac{|b|\,L}{\mathit{\Gamma}(\alpha)\,|a+b|\,(1-K)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,|y(s) - z(s)|\,ds\end{aligned}$$

alors, pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned}|y(t) - z(t)| \leq{}& \frac{L}{\mathit{\Gamma}(\alpha)(1-K)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|y(s) - z(s)|\,ds \\ &+ \frac{|b|\,L}{\mathit{\Gamma}(\alpha)\,|a+b|\,(1-K)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,|y(s) - z(s)|\,ds \\ \leq{}& \frac{L}{\Gamma(\alpha)(1-K)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,|y(s) - z(s)|\,ds\end{aligned}$$

finalement

$$||y - z||_\infty \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)(1-K)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,||y - z||_\infty\,ds$$

D'après le lemme de Grönwall (1.4.1) avec $w = 0$, nous avons :

$$||y - z||_\infty \leq 0 \Longrightarrow y(t) = z(t), \quad \forall t \in J.$$

Alors le problème (3.1) $-$ (3.2) a une solution unique . $\square$

Chapitre 4

Problème aux limites avec conditions non locales

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solution pour une équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire implicite avec des conditions non locales.

4.0.6 Présentation du problème

Considérons le problème suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^{c}D^{\alpha}y(t)), \quad \forall t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{4.1}$$

$$y(0) + \psi(y) = y_0 \tag{4.2}$$

Où :

- $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo,
- $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,
- $\psi : C([0, T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue,
- et y_0 une constante réelle .

Comme exemple de conditions non locales, on peut ajouter à y_0 une expression de type :

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} C_i y(t_i)$$

Où : $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < T$ un ensemble de n points de l'intervalle $J = [0, T]$ et C_i sont n constantes réelles.

Définition 4.0.2. *Toute fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation :*

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)), \quad \forall t \in J$$

et la condition :

$$y(0) + \psi(y) = y_0$$

est appelée solution du problème (4.1) $-$ (4.2).

Les deux lemmes suivants dont les preuves sont similaires aux lemmes (3.1.1), (3.1.2) du chapitre précédent nous permettent de préparer les énoncés et les arguments de démonstration des théorèmes d'existence qui suivront.

Lemme 4.0.3. *Soient $0 < \alpha \leqslant 1$ et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le problème linéaire :*

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad \forall t \in J \tag{4.3}$$

$$y(0) + \psi(y) = y_0 \tag{4.4}$$

admet une unique solution donnée par :

$$y(t) = y_0 - \psi(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \tag{4.5}$$

Lemme 4.0.4. *Soit $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le problème* (4.1) $-$ (4.2) *est équivalent au problème :*

$$y(t) = y_0 - \psi(y) + I^\alpha g_y(t)$$

où :

$$g_y(t) = f(t, y(t), g_y(t)).$$

Nous sommes maintenant en position d'énoncer le résultat relatif à l'existence ainsi qu'à l'unicité de la solution pour le problème (4.1) $-$ (4.2) en se basant sur le théorème du point fixe de Banach sous des conditions appropriées.

4.0.7 Existence et unicité de la solution

Théorème 4.0.5. *Soit la fonction continue $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons que :*
$(\mathcal{H}'_1)$ *: Il existe deux constantes $L > 0$, $0 < L' < 1$ telles que :*

$$|f(t,u,w) - f(t,u',w')| \leq L|u-u'| + L'|w-w'|, \quad \forall t \in J \quad et \quad \forall u,u',w,w' \in \mathbb{R}$$

$(\mathcal{H}'_2)$ *Il existe une constante $0 < K < 1$ telle que :*

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in C(J,\mathbb{R})$$

$(\mathcal{H}'_3)$ *:*

$$K + \frac{LT^\alpha}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)} < 1 \quad \forall u,u' \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

Alors, le problème (4.1) − (4.2) admet une unique solution sur J.

Démonstration. :
On va transformer le problème (4.1) − (4.2) en un problème de point fixe en considérant l'opérateur :

$$\mathcal{L} : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$$

défini par :

$$\mathcal{L}y(t) = y_0 - \psi(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s)ds \tag{4.7}$$

où :

$$g_y(t) = f(t, y(t), g_y(t))$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur $\mathcal{L}$ sont solutions du problème (4.1) − (4.2) et si $y \in C(J,\mathbb{R})$ alors, $\mathcal{L}y \in C(J,\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{L}$ est bien définie.
Nous allons montrer que $\mathcal{L}$ admet un point fixe unique. Pour cela, il faut montrer que $\mathcal{L}$ est une contraction.
Soient $y,\ z \in C(J,\mathbb{R})$ et $t \in J$ on a :

$$\mathcal{L}z(t) - \mathcal{L}y(t) = \psi(y) - \psi(z) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[g_z(s) - g_y(s)]ds$$

En prenant les valeurs absolues des deux membres, nous obtenons l'inégalité :

$$|\mathcal{L}z(t) - \mathcal{L}y(t)| \leq |\psi(z) - \psi(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g_z(s) - g_y(s)| ds \tag{4.8}$$

Par ailleurs, nous avons pour tout $s \in J$:

$$\begin{aligned} |g_z(s) - g_y(s)| &= |f(t, z(s), g_z(s)) - f(t, y(s), g_y(s))| \\ &\leq L|z(s) - y(s)| + L'|g_z(s) - g_y(s)| \end{aligned}$$

D'où :

$$|g_z(s) - g_y(s)| \leq \frac{L}{1-L'} |z(s) - y(s)|$$

Par suite :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}z(t) - \mathcal{L}y(t)| &\leq K|z(t) - y(t)| \\ &\quad + \frac{L}{(1-L')\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |z(s) - y(s)| ds \\ &\leq K||z-y||_\infty + \frac{LT^\alpha}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)} ||z-y||_\infty \end{aligned}$$

D'où :

$$||\mathcal{L}z - \mathcal{L}y||_\infty \leq \left[K + \frac{LT^\alpha}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)} \right] ||z-y||_\infty$$

D'après $(\mathcal{H}_3')$, $\mathcal{L}$ est une contraction et par le théorèmede Banach (1.3.1) , $\mathcal{L}$ admet un point fixe unique qui est la solution du problème (4.1) $-$ (4.2). $\square$

Le deuxième résultat est basé sur le théorème du point fixe de Krasnosel'skii.

4.0.8 Existence de la solution en utilisant le théorème de Krasnosel'skii

On pose :

$$M := \frac{T^\alpha}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)}, \quad a := |\psi(0)| \quad \text{et} \quad f^* := \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t, 0, 0)|.$$

Théorème 4.0.6. *Supposons que $(\mathcal{H}_1')$, $(\mathcal{H}_2')$ et $(\mathcal{H}_3')$ soient vérifiées. Alors le problème (4.1) $-$ (4.2) admet au moins une solution .*

Démonstration. :

Considérons l'opérateur $\mathcal{L}$ défini comme dans (4.7). Nous avons :

$$\mathcal{L}(y)(t) = y_0 - \psi(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s) ds$$

où $g_y \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$g_y(t) = f(t, y(t), g_y(t))$$

fixons θ tel que :

$$\frac{|y_0| + a + Mf^*}{1 - K - ML} \leq \theta$$

et définissons :

$$B_\theta = \{y \in C(J, \mathbb{R}), ||y||_\infty \leq \theta\}$$

Il est clair que B_θ est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de $C(J, \mathbb{R})$. Considérons les opérateurs P et Q définis sur B_θ par :

$$(Py)(t) := Py(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s) ds$$

où $g_y \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$g_y(t) = f(t, y(t), g_y(t))$$

et

$$(Qy)(t) := Qy(t) = y_0 - \psi(y)$$

Etape 1. *Pour toutes $y, z \in B_\theta$, $Py + Qz \in B_\theta$?*

$\forall t \in J$, nous avons :

$$|Py(t) + Qz(t)| \leq |y_0| + |\psi(z)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g_y(s)| ds \tag{4.9}$$

Or,

$$\begin{aligned}|g_y(t)| &= |f(t, y(t), g_y(t))| \\ &\leq |f(t, y(t), g_y(t)) - f(t, 0, 0)| + |f(t, 0, 0)| \\ &\leq L\,|y(t) - 0| + L'\,|g_y(t) - 0| + \sup_{0\leq t\leq T} |f(t, 0, 0)| \\ &\leq L\theta + L'\,|g_y(t)| + f^*\end{aligned}$$

On tire alors,

$$|g_y(t)| \leqslant \frac{L\theta + f^*}{1 - L'}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}|\psi(z)| &\leq |\psi(z) - \psi(0)| + |\psi(0)| \\ &\leq K\,||z||_\infty + a \\ &\leq K\theta + a\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors :

$$\begin{aligned}|Py + Qz| &\leq |y_0| + (K\theta + a) + \frac{L\theta + f^*}{(1 - L')\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq |y_0| + (K\theta + a) + \frac{(L\theta + f^*)T^\alpha}{(1 - L')\Gamma(\alpha + 1)} \\ &= |y_0| + K\theta + a + M(L\theta + f^*) \\ &\leq \theta\end{aligned}$$

soit donc, $Py + Qz \in B_\theta$.

Etape 2. *Q est une contraction sur B_θ ?*
En effet, nous avons :

$$\forall y, z \in B_\theta,\ |Qz - Qy| = |(y_0 - \psi(z)) - (y_0 - \psi(y))| \leqslant K|z - y|_\infty$$

et par suite,

$$||Qz - Qy||_\infty \leqslant K\,||z - y||_\infty.$$

d'où la contraction de Q .

Etape 3. *P est continue ?.*

Soit $(y_n)_n$ une suite dans $C(J,\mathbb{R})$ convergente vers une limite y pour la norme $||.||_\infty$ ie :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}||y_n - y||_\infty \longrightarrow 0$$

il faut montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}||Py_n - Py||_\infty = 0.$$

Pour tout $t \in J$ on a :

$$|Py_n(t) - Py(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|g_n(s) - g(s)|ds$$

Où $g_n,\ g \in (J,\mathbb{R})$ sont définies par :

$$g_n(t) = f(t, y_n(t), g_n(t))$$

$$g(t) = f(t, y(t), g(t))$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}|g_n(t) - g(t)| &= |f(t, y_n(t), g_n(t) - f(t, y(t), g(t))| \\ &\leq L\,|y_n(t) - y(t)| + L'\,|g_n(t) - g(t)|\end{aligned}$$

d'où :

$$|g_n(t) - g(t)| \leq \frac{L}{1-L'}\,|y_n(t) - y(t)|$$

Puisque : $y_n \longrightarrow y$ alors, $g_n(t) \longrightarrow g(t)$ qd $n \longrightarrow \infty$ et ceci pour tout $t \in J$.

Il existe donc $\lambda > 0$ tel que $|g_n(t)| \leq \lambda$ et $|g(t)| \leq \lambda$ et nous aurons :

$$\begin{aligned}(t-s)^{\alpha-1}\,|g_n(s) - g(s)| &\leqslant (t-s)^{\alpha-1}(|g_n(s)| + |g(s)|) \\ &\leqslant 2\lambda(t-s)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Pour tout $t \in J$, la fonction $s \longrightarrow 2\lambda(t-s)^{\alpha-1}$ est intégrable sur J et par passage à *la limite, nous obtenons :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |Py_n(t) - Py(t)| = 0, \quad \forall t \in J$$

ou bien :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||Py_n - Py||_\infty = 0.$$

d'où la continuité de P.

Etape 4. *P est compact ?*

Soit $(y_n)_n$ une suite de B_θ, pour $t \in J$ nous avons :

$$|Py_n(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g_n(s)| ds \tag{4.10}$$

Où $g_n \in C(J, \mathbb{R})$ est définie par :

$$g_n(t) = f(t, y_n(t), g_n(t))$$

mais,

$$\begin{aligned} |g_n(t)| &= |f(t, y_n(t), g_n(t)| \\ &= |f(t, y_n(t), g_n(t) - f(t,0,0)| + |f(t,0,0)| \\ &\leq L\,|y_n(t) - 0| + L'\,|g_n(t) - 0| + \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t,0,0)| \\ &\leq L\theta + L'\,|g_n(t)| + f^*. \end{aligned}$$

d'où :

$$|g_n(t)| \leq \frac{L\theta + f^*}{1 - L'}$$

Il s'ensuit donc,

$$\begin{aligned} \forall t \in J, \quad |Py_n(t)| &\leq \frac{L\theta + f^*}{(1-L')\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{(L\theta + f^*)T^\alpha}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq M(L\theta + f^*) \end{aligned}$$

et par suite, $P(B_\theta)$ *est uniformément bornée.*

Maintenant, prouvons que $P(B_\theta)$ *est équicontinu.*

Soient $t_1 < t_2$ *de* J *et* $y \in B_\theta$. *Alors,*

$$\begin{aligned}
|Py(t_2) - Py(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] \, |g(s)| \, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \, |g(s)| \, ds \\
&\leq \frac{L\theta + f^*}{(1 - L')\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] ds + \frac{L\theta + f^*}{(1 - L')\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{L\theta + f^*}{(1 - L')\Gamma(\alpha + 1)} [t_2^\alpha - t_1^\alpha + 2(t_2 - t_1)^\alpha]
\end{aligned}$$

Par conséquent, $|Py(t_1) - Py(t_2)| \to 0$ *lorsque* $t_1 \to t_2$. *D'où l'équicontinuité de* $P(B_\theta)$.

D'après les étapes 1-4 et le théorème d'Arzela-Ascoli, nous concluons que l'opérateur :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} : \quad B_\theta &\longrightarrow \quad C(J, \mathbb{R}) \\
y &\longmapsto \quad Qy + Py
\end{aligned}$$

est continu et compact. En conséquence du théorème de point fixe de Krasnosel'skii (1.3.6), nous déduisons que $\mathcal{L}$ *admet un point fixe qui est une solution du problème* (4.1) − (4.2).

□

Chapitre 5

Exemples illustratifs

Dans ce chapitre, on va mettre en application les résultats évoqués dans les deux derniers chapitres en considérant des problèmes aux limites avec des équations différentielles fractionnaires implicites montrant comment on arrive à trouver des réponses à ce genre de questions selon le type de conditions initiales exigées par le problème.

Exemple 5.0.1. *On considére le problème aux limites suivant :*

$$^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{1}{3e^{t+2}(1+|y(t)|+\left|^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)\right|)}, \quad t \in [0,2] \tag{5.1}$$

$$y(0)+y(2)=1 \tag{5.2}$$

Posons :

$$f(t,u,w) = \frac{1}{3e^{t+2}(1+|u|+|w|)}, \quad \forall t \in [0,2] \quad \forall u,w \in \mathbb{R}$$

Il est clair que la fontion f est continue. L'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.

Pour tout $u, w, u', w' \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,2]$ on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,u,w)-f(t,u',w')| &= \frac{1}{3e^{t+2}}\left|\frac{(|u'|-|u|)+(|w'|-|w|)}{(1+|u|+|w|)(1+|u'|+|w'|)}\right| \\
&\leq \frac{1}{3e^{t+2}}\left|(|u'|-|u|)+(|w'|-|w|)\right| \\
&\leq \frac{1}{3e^{t+2}}[|u-u'|+|w-w'|]
\end{aligned}$$

d'autre part, pour tout $t \in [0,2]$ on a :

$$\frac{1}{3e^{t+2}} \leq \frac{1}{3e^2}$$

donc,

$$|f(t,u,w) - f(t,u',w')| \leq \frac{1}{3e^2}[|u-u'| + |w-w'|]$$

comme : $0 < L = K = \dfrac{1}{3e^2} < 1$; Alors,$(\mathcal{H}_2)$ est satisfaite.

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{LT^{\alpha}}{(1-K)\mathit{\Gamma}(\alpha+1)}(1+\frac{|b|}{|a+b|}) &= \frac{\sqrt{2}\frac{1}{3e^2}}{(1-\frac{1}{3e^2})\Gamma(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(e^2-\frac{1}{3})} \\ &< 1\end{aligned}$$

par suite, la condition (3.8) est satisfaite .

D'après le théorème (3.1.1), le problème (5.1)-(5.2) admet une unique solution sur $[0,2]$

Exemple 5.0.2. *On considère le problème aux limites suivant :*

$$^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{2+|y(t)|+\left|^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)\right|}{10e^{t+5}\left(1+|y(t)|+\left|^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)\right|\right)}, \quad t \in [0,2] \tag{5.3}$$

$$y(0) + y(2) = 1 \tag{5.4}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{2+|u|+|v|}{10e^{t+5}(1+|u|+|v|)}, \quad \forall t \in [0,2] \quad \forall u,v \in \mathbb{R}$$

Il est clair que la fontion f est continue. L'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ du théorème est vérifiée. pour tout $u,w,u',w' \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,2]$ on a :

$$\begin{aligned}|f(t,u,w) - f(t,u',w')| &= \left|\frac{(|u'|-|u|)+(|w'|-|w'|)}{10e^{t+5}(1+|u|+|w|)+(1+|u'|+|w'|)}\right| \\ &\leq \frac{1}{10e^{t+5}}\left|(|u'|-|u|)+(|w'|-|w|)\right| \\ &\leq \frac{1}{10e^{t+5}}[|u-u'|+|v-w'|]\end{aligned}$$

d'autre part, pour tout $t \in [0,2]$ on a :

$$\frac{1}{10e^{t+5}} \leq \frac{1}{10e^5}$$

donc,

$$|f(t,u,w) - f(t,u',w')| \leq \frac{1}{10e^5}[|u-u'| + |w-w'|]$$

comme : $0 < L = K = \dfrac{1}{10e^5} < 1$ *alors,* $(\mathcal{H}_2)$ *est satisfaite.*

De plus,

$$\frac{LT^\alpha}{(1-K)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(10e^5-1)} < 1$$

nous avons aussi :

$$|f(t,u,w)| \leq \frac{1}{10e^{5+t}}(2 + |u| + |w|)$$

comme : $p(t) = \dfrac{1}{5e^{t+5}}$ *et* $q(t) = r(t) = \dfrac{1}{10e^{t+5}}$ *; Alors,* $(\mathcal{H}_3)$ *est satisfaite.*

$$\begin{aligned} q^*M(1 + \frac{|b|}{|a+b|}) &= \frac{3\sqrt{2}}{2(10e^5-1)\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(10e^5-1)} \\ &< 1 \end{aligned}$$

avec $a = b = 1$ *,* $T = 2$ *,* $\alpha = \dfrac{1}{2}$*, et* $q^* = r^* = \dfrac{1}{10e^5}$.
La condition (3.11) est donc satisfaite.
D'après le théorème (3.1.2), le problème (5.3) − (5.4) admet au moin une solution sur $[0.2]$ *.*

Exemple 5.0.3. *On considère le problème aux limites suivant :*

$$^cD^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{2 + |y(t)| + \left|{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)\right|}{12e^{t+9}(1 + |y(t)| + \left|{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)\right|)} \quad \forall t \in [0.1] \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}y(1) = 1 \tag{5.6}$$

Posons :

$$f(t,u,w) = \frac{2+|u|+|v|}{12e^{t+9}(1+|u|+|w|)} \quad \forall t \in [0.1] \quad \forall u,w \in \mathbb{R}$$

Il est clair que la fontion f est continue et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est donc vérifiée.

pour tout $u, v, w', w' \in \mathbb{R}$ et $t \in [0.1]$ on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,u,w) - f(t,u',w')| &\leq \frac{1}{12e^{t+9}} \left| \frac{(|u'|-|u|)+(|w'|-|w'|)}{(1+|u|+|w|)+(1+|u'|+|w'|)} \right| \\
&\leq \frac{1}{12e^{t+9}} \left|(|u'|-|u|)+(|w'|-|w|)\right| \\
&\leq \frac{1}{12e^{t+9}}[|u-u'|+|v-w'|]
\end{aligned}$$

d'autre part, pour tout $t \in [0,2]$ on a :

$$\frac{1}{12e^{t+9}} \leq \frac{1}{12e^9}$$

donc,

$$|f(t,u,w) - f(t,u',w')| \leq \frac{1}{12e^9}[|u-u'|+|w-w'|]$$

comme : $0 < L = K = \dfrac{1}{12e^9} < 1$;Alors, , la condition $(\mathcal{H}_2)$ est satisfaite

De plus,

$$\frac{LT^\alpha}{(1-K)\mathit{\Gamma}(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{3}{\sqrt{\pi}(12e^9-1)} < 1$$

nous avons aussi :

$$|f(t,u,w)| \leq \frac{1}{12e^{t+9}}(2+|u|+|w|)$$

comme : $p(t) = \dfrac{1}{6e^{t+9}}$ et $q(t) = r(t) = \dfrac{1}{12e^{t+9}}$; Alors, $(\mathcal{H}_3)$ est satisfaite.

$$q^* M(1+\frac{|b|}{|a+b|}) = \frac{3}{2(12e^9-1)\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{3}{(12e^9-1)\sqrt{\pi}} < 1$$

avec $a = b = \frac{1}{2}, c = T = 1, \alpha = \frac{1}{2}$ et $q^* = r^* = \dfrac{1}{12e^9}$

ainsi la condition(3.11) *satisfaite et d'apres théorème* (3.1.2)*le problème* (5.5) − (5.6) *admet au moins une solution du sur* [0.1]

Exemple 5.0.4. *Considérons le problème aux conditions non locales suivant :*

$$
{}^{c}D^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{1}{3e^{t+2}(1+|y(t)|+\left|{}^{c}D^{\frac{1}{2}}y(t)\right|)}, \quad t \in [0,2] \tag{5.7}
$$

$$
y(0) + \psi(y) = 1 \tag{5.8}
$$

où

$$
\psi(y) = \frac{|y|}{20+|y|}
$$

Posons :

$$
f(t,u,w) = \frac{1}{3e^{t+2}(1+|u|+|w|)}, \quad \forall t \in [0,2] \quad \forall u, v \in \mathbb{R}
$$

La fontion f est évidemment continue.

Pour tous $u, w, u', w' \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,2]$ on a :

$$
|f(t,u,w) - f(t,u',w')| \leq \frac{1}{3e^2}[|u-u'| + |w-w'|]
$$

comme : $L = L' = \dfrac{1}{3e^2}$ et la condition $(\mathcal{H}'_1)$ est donc satisfaite.

D'autre part ,

$$
\psi(u) = \frac{|u|}{20+|u|}, u \in \mathbb{R}
$$

et pour tous $u, w \in \mathbb{R}$ on a :

$$
\begin{aligned}
|\psi(u) - \psi(w)| &= \left| \frac{|u|}{20+|u|} - \frac{|w|}{20+|w|} \right| \\
&\leq \left| \frac{20\,|u-w|}{(20+|u|)(20+|w|)} \right| \\
&\leq \frac{1}{20}\,|u-w|
\end{aligned}
$$

comme :$K = \dfrac{1}{20}$, la condition $(\mathcal{H}'_2)$ est aussi satisfaite. , D'où la condition $(\mathcal{H}'_3)$:

$$
K + \frac{LT^{\alpha}}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{20} + \frac{\sqrt{2}}{(3e^2-1)\Gamma(\frac{3}{2})} < 1
$$

Les conditions du théorème (4.0.5) étant vérifiées, le problème (5.7) – (5.8) admet donc une unique solution sur $[0,2]$.

Exemple 5.0.5. *Soit le problème aux conditions non locales suivant :*

$$ {}^{c}D^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{e^{-t}}{9+e^{t}}\left[\frac{|y(t)|}{1+|y(t)|} - \frac{\left|{}^{c}D^{\frac{1}{2}}y(t)\right|}{1+\left|{}^{c}D^{\frac{1}{2}}y(t)\right|)}\right], \quad t\in[0,1]. \tag{5.9} $$

$$ y(0)+\psi(y)=1 \tag{5.10} $$

où :

$$ \psi(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{|y|}{1+|y|}\right) $$

posons :

$$ f(t,u,w)=\frac{e^{-t}}{9+e^{t}}\left[\frac{|u|}{1+|u|}-\frac{|w|}{1+|v|}\right], \quad \forall t\in[0,1] \quad \forall u,v\in\mathbb{R} $$

f *est bien sûr continue.*

D'une part, pour tous $u,w,u',w'\in\mathbb{R}$ *et* $t\in[0,1]$ *on a :*

$$ \begin{aligned} |f(t,u,w)-f(t,u',v')| &\leq \frac{e^{-t}}{9+e^{t}}[|u-u'|+|w-w'|] \\ &\leq \frac{1}{10}[|u-u'|+|w-w'|] \end{aligned} $$

comme : $L=L'=\dfrac{1}{10}$ *;Alors,* $(\mathcal{H}'_1)$ *est satisfaite.*

et d'autre part,

$$ \begin{aligned} |\psi(u)-\psi(w)| &\leq \left|\frac{1}{2}\left(\frac{|u|}{1+|u|}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{|w|}{1+|w|}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|u-w| \end{aligned} $$

comme : $k=\dfrac{1}{2}$ *La condition* $(\mathcal{H}'_2)$ *est aussi satisfaite. la condition* $(\mathcal{H}'_3)$ *serait satisfaite i.e. :*

$$ K+\frac{LT^{\alpha}}{(1-L')\Gamma(\alpha+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9\Gamma(\frac{3}{2})}<1. $$

Les conditions du théorème (4.0.5) *étant vérifiées, le problème* (5.9) – (5.10) *admet donc une unique solution sur* $[0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons vu quelques méthodes de résolution pour des équations différentielles fractionnaires implicites basées sur quelques versions du théorème du point fixe pour établir l'existence et même l'unicité de la solution lorsque les hypothèses sont bien choisies. Les théorèmes relatifs au point fixe fournissent un excellent outil pour ce genre de problème et pour tant d'autres.

Nous espérons étudier au futur ces mêmes types de problèmes en utilisant les transformations intégrales telles que la transformée de Laplace ou celle de Fourier, transférant ainsi le problème, du domaine d'analyse et d'équations différentielles, en un problème traité algébriquement où les manipulations se fassent de manière "automatiques" (Calcul opérationnel).

Bibliographie

[1] A. Anatoly Kilbas, Hari M Srivastava and Juan J Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies 204. Elsevier, Amsterdam, (2006).

[2] A. J. Luo, V. Afraimovich ; Long-range Interactions, Stochasticity and Fractional Dynamics, Springer, New York, (2010).

[3] B. Keith Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus. Academic Press, INC. (1974). California.

[4] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo ; Fractional Calculus Models and Numerical Methods, World Scientific , New York, (2012).

[5] D. Baleanu, Z. B. Guven¸c, J. A. T. Machado ; New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications, Springer, New York, (2010).

[6] D. Baleanu, J. A. T. Machado, A.C.-J. Luo ; Fractional Dynamics and Control, Springer, New

[7] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorems, Springer-Verlag, New york Berlin Heiderberg, Tokyo 1985. York, (2012).

[8] G. A. Anastassiou ; Advances on Fractional Inequalities, Springer, New York, (2011).

[9] H. Jack Theory of Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences vol **3**. Springer-Verlag. (1977).

[10] H. Ye - J. Gao - Y. Ding, A Generalized Gronwall Inequality and its Application to a Fractional Differential Equation, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 1075-1081.

[11] I. Podlubny Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (1999).

[12] I. Petras, Fractional-Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation, Springer, New York, (2011).

[13] K. Deng, H. A. Levine, The Role of Critical Exponents in Blow-up Theorems : The sequel, J Math. Anal.Appl. 243 (2000), 85-126.

[14] M. Benchohra and S. Hamani, Boundary Values Problems for Differential Inclusions with Fractional Order, 28 (2008) 147 -164.

[15] M. D. Otigueira ; Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Lecture Notes in Elec- trical Engineering, 84, Springer, Dordrecht, (2011).

[16] M. Frigon, A. Granas, Resultats du Type Leray-Schauder pour des Contractions Multivoques, Journale of the Juliusz Schauder center, Volume 4. (1994), 197-208.

[17] M. D. Otigueira ; Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Lecture Notes in Elec- trical Engineering, 84, Springer, Dordrecht, (2011).

[18] P. Igor Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications, Vol.198. Elsevier, (1998).

[19] P. Sahoo, T. Barman, J. P. Davim ; Fractal Analysis in Machining, Springer, New York, (2011).

[20] R. Hermann ; Fractional Calculus : An Introduction For Physicists, World Scientific, Singa-pore, (2011).

[21] R. Hilfer ; Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).

[22] R. Hervé . Equations différentielles. 34002, Gauthiers-Villars Paris, (1982).

[23] R.P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of Fractional Neutral Functional Differential Equations, Comput. Math. Appl. 59 (3) (2010), 1095-1100.

[24] S. Abbas, M. Benchohra, G. M. N'Guérékata ; Topics in Fractional Differetial Equations, Springer-Verlag, New York, (2012).

[25] S. Abbas, M. Benchohra, G. M. N'Guérékata ; Advanced Fractional Differential and Integral Equations, Nova Science Publishers, New York, (2015).

[26] S. Kenneth Miller and Bertram Ross An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. (1993).

[27] V. E. Tarasov ; Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, Springer, Heidelberg. Higher Education Press, Beijing, (2010).