

République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

Mlle. Khadidja Maroua BELOUADI

ÉTUDE DE BIFURCATION APPLIQUÉE AUX MODÈLES MATHÉMATIQUES EN SCIENCES

Encadreur :

Mme Zokha BELATTAR

Maitre de Conférence "B" à U.B.B.A.T.

Soutenu le 20/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	MME. BENNAFLA	M.C.B	U.B.B.A.T.
Examineur :	MLLE HELLAL	M.C.B	U.B.B.A.T.
Encadreur :	MME ZOKHA BELATTAR	M.C.B	U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2019 – 2020

Remerciements

Le travail réalisé au cours cette mémoire n'aurait pu aboutir sans le soutien ni les encouragements de nombreuses personnes que je souhaite ici vivement remercier. Avant tout, louange à Allah pour son aide et sa bénédiction qui m'a donné la santé et le courage pour d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, **Mme. BELATTAR Zokha**. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté et conseillé. Je veux exprimer un grand merci à tous les membres du jury **Mme. Bennafra** d'avoir accepté de présider mon jury de mémoire. **Mlle HELLAL** pour avoir accepté d'être examinateur de ma mémoire.

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs du département Mathématiques.

Je n'oublie pas de remercier ma famille et surtout mes parents qui m'ont toujours soutenu durant mes années d'études

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes parents qui m'ont suivi durant mes études et qui ont toujours

été là pour me soutenir et encourager.

À mes bons amis et camarades.

À toute ma famille.

Table des matières

1	Préliminaires	7
1.1	Introduction	7
1.2	Théorème des Fonctions Implicites	8
1.3	Théorème d'inversion local	8
1.4	La concavité et la convexité d'une fonction	8
1.5	Intégrale première	9
1.6	Flot, solution périodique, orbite et cycle limite	9
1.6.1	Flot	10
1.6.2	Orbite	10
1.6.3	Solution périodique	10
1.6.4	Cycle limite	11
1.7	Notion de stabilité	11
1.7.1	Point d'équilibre	11
1.7.2	La stabilité des points d'équilibres aux sens des valeurs propres	11
1.7.3	La stabilité des points d'équilibres aux sens de Lyapunov	15
1.8	Le premier exposant de lyapunov	15
1.9	Prolongement par continuité	16
1.10	L'équivalence topologique	16
2	L'approche théorique de quelques types de bifurcation locales	18
2.1	Introduction	18
2.2	La bifurcation nœud-selle	19

2.2.1	La forme normale de la bifurcation nœud-selle	19
2.2.2	Diagramme de bifurcation nœud-selle	20
2.3	Bifurcation transcritique	23
2.3.1	La forme normale de la bifurcation transcritique	23
2.3.2	Diagramme de bifurcation transcritique	25
2.4	Bifurcation fourche ou "Pitchfork"	28
2.4.1	La forme normale de le bifurcation fourche	28
2.4.2	Diagramme de bifurcation fourche	30
2.5	Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf	33
2.5.1	La forme normale de bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf	35
2.6	Bifurcation cusp	48
2.6.1	La forme normale de bifurcation cusp	48
3	La bifurcation appliquée aux quelques modèles mathématiques en sciences	53
3.1	Modèle génétique	53
3.1.1	Interprétation	53
3.1.2	Les points d'équilibres	54
3.1.3	La stabilité des points d'équilibres	54
3.2	Modèle proie prédateur	57
3.2.1	Interprétation	57
3.2.2	Les points d'équilibres	58
3.2.3	La stabilité des points d'équilibres	58
3.2.4	Existence de P-A-H	61
3.2.5	La nature de bifurcation de P-A-H	61
3.3	Modèle de Rayleigh	64
3.3.1	Les points d'équilibres	64
3.3.2	La stabilité des points d'équilibres	64
3.3.3	Existence de P-A-H	66
3.3.4	La nature de bifurcation de P-A-H	66

3.4	Oscillation dans les réactions chimiques	67
3.4.1	Les points d'équilibres	68
3.4.2	La stabilité des points d'équilibres	68
3.4.3	Existence de bifurcation de P-A-H	69
3.4.4	La nature de bifurcation de P-A-H	71
	Bibliographie	73

Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques est une branche importante pour étudier les modèles mathématiques, généralement, ils s'expriment sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires.

Les systèmes dynamiques ne sont pas similaires, il existe deux types de systèmes : les systèmes stables et les systèmes instables, les systèmes dynamiques peuvent avoir aussi de différents comportements asymptotiques en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre.

Ce changement d'état qualitatif (ou quantitatif) est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation, les différentes bifurcations sont répertoriées en fonction de leurs caractéristiques mathématiques.

Ainsi, nous distinguons les types de bifurcations locales à partir de leurs formes normales, leurs diagrammes de bifurcation, leurs points d'équilibres et l'analyse de stabilité.

Des exemples classiques d'une bifurcation en sciences pures sont par exemple les rythmes circadiens de populations animales en biologie théorique et les solutions de météo en mathématiques et physiques non linéaires, en sciences de l'ingénieur il y a aussi le flambage d'une poutre élastique.

Dans ce mémoire, nous allons aborder trois chapitres :

- * **chapitre 1** : Nous allons présenter quelques notions concernant l'étude des équations différentielles ordinaires, comme le théorème des fonctions implicites, la linéarisation des systèmes non linéaires qui sont très importantes pour étudier la stabilité des équations différentielles.
- * **chapitre 2** : Nous allons étudier quelques types de bifurcations locales (nœud-selle, transcritique, fourche et bifurcation de Poincaré-Andronove-Hopf).
- * **chapitre 3** : Nous allons appliquer cette théorie à quelques modèles mathématiques.

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre d'ouverture, nous présentons quelques préliminaires.

Tout d'abord nous énonçons le théorème des fonctions implicites, ensuite pour faciliter l'analyse qualitative, nous expliquons des concepts géométriques comme orbite, flot et point d'équilibre (hyperbolique, non hyperbolique).

Enfin, nous étudions la notion de stabilité d'un point d'équilibre et le rôle de l'approximation linéaire (linéarisation) dans la détermination de la stabilité.

Définition 1.1.1 :

Soit t une variable réelle, $x(t)$ une fonction dérivable de t à valeur réelle, où t dans notre cas est le temps.

Soit $g : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou U et I deux ouverts de \mathbb{R}), on appelle une équation différentielle du premier ordre associée à g l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, t) \tag{1.1}$$

On dit que l'équation est linéaire si la fonction g est du premier degré par rapport à la variable x , sinon, on dit qu'elle est non linéaire.

1.2 Théorème des Fonctions Implicites

Théorème 1.2.1 (Théorème des fonctions implicites)[1]

Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement dérivable, satisfaisant :

$$g(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Alors il existe un voisinage $U \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de (x_0, y_0) et une application de classe C^1 telle que :

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ x &\rightarrow \varphi(x) = y \end{aligned}$$

avec :

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

1.3 Théorème d'inversion local

Théorème 1.3.1 :[8]

Soit :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

où g est continument différentiable, $a \in \mathbb{R}$. Si $\frac{dg}{dx}(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}$ de a , telle que $g(U) = W \subset \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme.

1.4 La concavité et la convexité d'une fonction

Définition 1.4.1 :

Soit $g(x)$ une fonction continue et dérivable sur un intervalle $U \subset \mathbb{R}$, et $\frac{dg}{dx}(x)$ sa dérivée.

On dit que $g(x)$ est **convexe** sur U si et seulement si sa dérivée est croissante sur U ,
c-à-d : $\frac{d^2g}{dx^2}(x) > 0$.

On dit que $g(x)$ est **concave** sur U si et seulement si sa dérivée est décroissante sur U ,
c-à-d : $\frac{d^2g}{dx^2}(x) < 0$.

1.5 Intégrale première

Définition 1.5.1 :[2]

Une fonction $H(x(t), y(t))$ est dite *intégrale première* du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt}(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, si $H(x(t), y(t))$ est constante pour tout $(x(t), y(t)) \in D$.

$H(x(t), y(t))$ est une *intégrale première* pour (1.2) alors elle vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} f(x(t), y(t)) + \frac{\partial H}{\partial y} g(x(t), y(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.5.1 Un système qui admet une *intégrale première* est dit un système *conservé*.

1.6 Flot, solution périodique, orbite et cycle limite

Dans cette partie nous allons appeler au référence [5].

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction continument dérivable, $x_0 \in U$ (U désigne un ouvert dans \mathbb{R}^2).

1.6.1 Flot

La correspondance $\psi_t : x_0 \rightarrow x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps, qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du système (1.3).

Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (x, t) la solution maximale $x(t)$ au temps qui correspond à la donnée initiale x_0 :

$$\psi(x, t) = \psi_t(x) = x(t)$$

.

1.6.2 Orbite

L'orbite (ou courbe intégrale) γ du (1.3) passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donné par la solution de (1.3) avec donnée initiale x_0 .

On distingue éventuellement l'orbite positive $\gamma^+ = \{\psi_t(x), t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\gamma^- = \{\psi_t(x), t \leq 0\}$ passant par le point $x(0) = x_0$.

1.6.3 Solution périodique

Une solution $\psi(x, t)$ pour (1.3) est appelée une solution périodique de la période T avec $T > 0$ si :

$$\psi(x, t + T) = \psi(x, t) \tag{1.4}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.4) est appelé période.

1.6.4 Cycle limite

On appelle un cycle-limite d'un système (1.3) tout orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques du système.(1.3)

1.7 Notion de stabilité

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.5}$$

Où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction régulière.

1.7.1 Point d'équilibre

Définition 1.7.1 : *(Point d'équilibre)[1]*

On appelle un point d'équilibre (ou point fixe, point stationnaire, point critique) du système (1.5), tout point constant x^* qui vérifie : $g(x^*) = 0$.

Définition 1.7.2 : *(Point hyperbolique, non hyperbolique)[1]*

Soit le système (1.5) qui admet x^* comme un point d'équilibre, et $J(x^*)$ sa matrice jacobienne au point d'équilibre x^* .

On dit que x^* est un point d'équilibre hyperbolique si la partie réelle des valeurs propres de $J(x^*)$ est non nulle, sinon il dit non hyperbolique.

1.7.2 La stabilité des points d'équilibres aux sens des valeurs propres

1. cas linéaire :

Considérons le système suivant :

$$\dot{X} = AX \tag{1.6}$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

le système (1.6) admet l'origine comme un point d'équilibre.

Classification des points d'équilibres :

Nous allons caractériser la nature de point d'équilibre, calculons le polynôme caractéristique $P(\mu)$ de la matrice A :

$$\begin{aligned} \det(A - \mu I) &= \begin{vmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{vmatrix} = 0 \\ &= (a - \mu)(d - \mu) - cd = 0 \\ &= \mu^2 - (a + d)\mu + ad - cb = 0 \\ P(\mu) &= \mu^2 - \text{tra}(A) + \det(A) = 0 \end{aligned}$$

posons :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \mu_1 \mu_2 \\ \text{tra}(A) &= \mu_1 + \mu_2 \end{aligned}$$

calculons le discriminant du polynôme caractéristique $P(\mu)$:

$$\Delta = \text{tra}(A)^2 - 4\det(A)$$

(a) 1^{ere} cas $\Delta > 0$: le polynôme caractéristique $P(\mu)$ admet deux valeurs propres réelles.

i. $\det(A) < 0$, alors μ_1 et μ_2 sont de signe opposé donc l'origine est un point selle (instable).

ii. $\det(A) > 0$

* $\text{tra}(A) > 0$, alors μ_1 et μ_2 sont positives donc l'origine est nœud instable.

* $\text{tra}(A) < 0$, alors μ_1 et μ_2 sont négatives donc l'origine est nœud stable.

(b) 2^{ème} cas $\Delta < 0$: le polynôme caractéristique $P(\mu)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\mu_1 = \frac{\text{tra}(A)}{2} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, $\mu_2 = \frac{\text{tra}(A)}{2} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

i. $\text{tra}(A) < 0$, la partie réelle des valeurs propres est négative alors l'origine est un foyer stable.

ii. $\text{tra}(A) > 0$, la partie réelle des valeurs propres est positive alors l'origine est un foyer instable.

iii. $\text{tra}(A) = 0$, la partie réelle des valeurs propres est nulle alors l'origine est un centre.

(c) 3^{ème} cas $\Delta = 0$: le polynôme caractéristique $P(\mu)$ admet une valeur propre doublée μ_0

Donc on obtient : $\det(A) = \mu_0^2$ et $\text{tra}(A) = 2\mu_0$.

i. $\mu_0 > 0$ l'origine est nœud dégénéré instable.

ii. $\mu_0 < 0$ l'origine est nœud dégénéré stable.

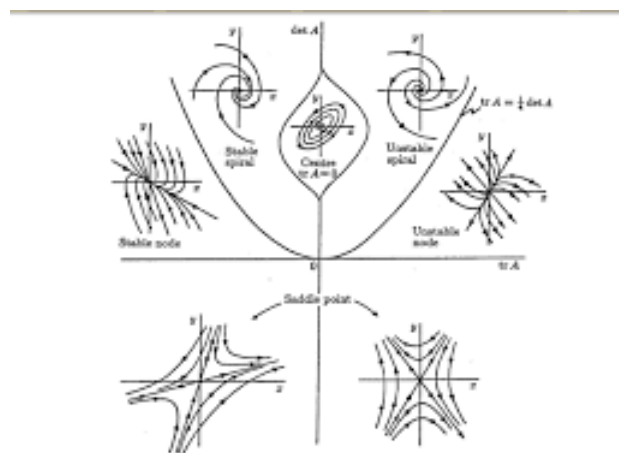


FIGURE 1.1 – Schéma explicatif résumant la notion de stabilité d'un système linéaire à deux dimensions.

2. cas non linéaire :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

Posons (x^*, y^*) un point d'équilibre du système (1.7) .

Soit le changement suivant :

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases} \quad (1.8)$$

Par le développement limité de f et g au voisinage de (x^*, y^*) on a :

$$\begin{cases} f(u + x^*, v + y^*) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \Theta(x, y) \\ g(u + x^*, v + y^*) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \Theta(x, y) \end{cases}$$

Le système (1.7) devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \dot{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où B est la matrice jacobienne du système (1.7).

Pour étudier la stabilité de (x^*, y^*) du système (1.7), revenait au cas linéaire.

Théorème 1.7.1 :[1]

Soit (x^, y^*) un point d'équilibre non hyperbolique, si toutes les valeurs propres de la matrice B , ont des parties réelles négative, alors le point d'équilibre est **asymptotiquement stable**.*

*Si l'une des valeurs propres de la matrice B a une partie réelle positive, alors le point d'équilibre est **instable**.*

1.7.3 La stabilité des points d'équilibres aux sens de Lyapunov

Définition 1.7.3 (*Fonction définie positive*)

On appelle une fonction définie positive (respectivement négative) une fonction $V(x, y)$ réelle de classe C^1 définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ contenant l'origine et vérifiant les conditions suivantes :

1. $V(0, 0) = 0$
2. $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \in D - \{(0, 0)\}$ (respectivement $V(x, y) < 0, \forall (x, y) \in D - \{(0, 0)\}$)

Théorème 1.7.2 :[1]

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.9)$$

qui admet l'origine comme un point d'équilibre, s'il existe une fonction réelle $V(x, y)$ définie sur un ouvert D tel que :

1. $V(x, y)$ une fonction définie positive sur D
2. $\dot{V}(x, y) < 0, \forall (x, y) \in D - \{(0, 0)\}$

Alors $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

1.8 Le premier exposant de Lyapunov

Considérons le système suivant qui admet $(0, 0)$ comme un point d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + f(x, y) \\ \dot{y} = \omega x + g(x, y) \end{cases} \quad (1.10)$$

Satisfaisant les conditions suivantes :

$$f(0, 0) = 0, g(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

Définition 1.8.1 :[4]

Le premier exposant de Lyapunov du système (1.10) est :

$$a(0) = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(0,0) + \frac{\partial^3 g}{\partial^2 x \partial y}(0,0) + \frac{\partial^3 g}{\partial^3 y}(0,0) \right) + \frac{1}{16\omega} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(0,0) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(0,0) \right) \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0)$$

1.9 Prolongement par continuité

Définition 1.9.1 :

Soient U un ouvert dans \mathbb{R}^2 , $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, et $g(x, y)$ une fonction continue sur $U - \{\beta\}$.

posons $\lim_{(x,y) \rightarrow (\beta_1, \beta_2)} g(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}^2$

Le prolongement par continuité de $g(x, y)$ en β est la fonction $G(x, y)$ définie dans U par :

$$G(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (\beta_1, \beta_2) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (\beta_1, \beta_2) \end{cases}$$

1.10 L'équivalence topologique

Définition 1.10.1 :[3]

Soient les deux systèmes suivants :

$$\dot{x} = g(x, \lambda) \tag{1.11}$$

$$\dot{y} = f(y, \gamma) \tag{1.12}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est γ et λ son deux paramètres.

alors le système (1.11) est appelé localement topologiquement équivalent au système (1.12) près de l'origine $(0, 0)$ si :

1. Il existe un homéomorphisme de paramètre défini dans un petit voisinage de $(\lambda, \gamma) = (0, 0)$ tel que :

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto P(\lambda) = \gamma \end{aligned}$$

qui vérifie :

$$P(0) = 0$$

2. Il existe un homéomorphisme de coordonnée dépendant de paramètre λ défini dans un voisinage $U_\lambda(x = 0)$ tel que :

$$\begin{aligned} h_\lambda : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto h_\lambda(x) = y \end{aligned}$$

qui vérifie :

$$h_0(0) = 0$$

Définition 1.10.2 (*C^1 -difféomorphisme*)

Soit $g : U \longrightarrow W$ (U, W deux ouverts de \mathbb{R}) est un C^1 -difféomorphisme si et seulement si g est bijective de classe C^1 et la fonction réciproque g^{-1} est de classe C^1 .

Définition 1.10.3 (*Homéomorphisme*)

Soit $g : X \longrightarrow Y$ (X, Y deux ouverts de \mathbb{R}), est un homéomorphisme si et seulement si g est une bijection de classe C^0 et la fonction réciproque g^{-1} est de classe C^0 .

L'approche théorique de quelques types de bifurcation locales

2.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = g(x, \lambda) \tag{2.1}$$

La théorie des bifurcations des champs de vecteurs a pour but de décrire les modifications des portraits de phase des champs de vecteurs qui dépendent différemment d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, lorsqu'il varie, on dit qu'une valeur λ^* du paramètre λ est une valeur de bifurcation si le champ de vecteurs $g(x, \lambda^*)$ n'est pas topologiquement équivalent à $g(x, \lambda)$ quel que soit λ au voisinage de λ^* .

Ainsi, une bifurcation est un changement du type topologique du système lorsque ses paramètres passent par une valeur de bifurcation.

En fait, le sujet central de ce chapitre est la classification et l'analyse de diverses bifurcations.

2.2 La bifurcation nœud-selle

2.2.1 La forme normale de la bifurcation nœud-selle

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, \lambda), \quad (2.2)$$

où : $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique de l'équation (2.2) c-à-d :

$$g(0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

de plus :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

Par le développement limité de g au voisinage du point d'équilibre $(0, 0)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= g(0, 0) + x \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) + \Theta(x, \lambda) \\ &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) + x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) \\ &= \alpha \lambda + \beta x^2 \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0)$ et $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0)$

Posons $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, $\mu = \frac{\beta}{\alpha} \lambda$ et $\tau = \alpha t$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= \frac{\beta}{\alpha} \frac{dx}{dt}(t) \\ &= \frac{\beta}{\alpha} (\alpha \lambda + \beta x^2) \\ &= \beta \lambda + \frac{\beta^2}{\alpha} x^2 \\ &= \alpha (\mu + y^2) \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} = \alpha &\Rightarrow dt = \frac{d\tau}{\alpha} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\alpha &= \alpha(\mu + y^2)\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{dy}{d\tau}(t) = \mu + y^2 \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) dite forme normale de la bifurcation nœud-selle.

Remarque 2.2.1 *il y a aussi une autre forme normale de la bifurcation nœud-selle :*

$$\frac{dy}{d\tau}(\tau) = \mu - y^2$$

2.2.2 Diagramme de bifurcation nœud-selle

Dans cette partie nous allons appeler au référence [4].

Soit l'équation (2.2), supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique de plus :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

Donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

Il existe deux ouverts $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction φ , de même régularité de g défini par :

$$\begin{aligned}\varphi : U &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \lambda\end{aligned}$$

telle que :

$$\varphi(0) = 0$$

alors on a :

$$g(x, \varphi(x)) = 0 \quad (2.4)$$

Calculons $\frac{d\varphi}{dx}(0)$ et $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0)$, en effet :

dérivons l'équation (2.4) par rapport à x , nous trouvons :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) = 0$$

remplaçons $(x, \varphi(x))$ par $(0, 0)$ on obtient :

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0)} = 0$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + 2 \frac{\partial g}{\partial x \partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}(x, \varphi(x)) \left(\frac{d\varphi}{dx}(x) \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) = 0$ alors $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) = 0$.

remplaçons $(x, \varphi(x))$ par $(0, 0)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) + 2 \frac{\partial g}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \frac{d\varphi}{dx}(0) + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(0) + \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}(0, 0) \left(\frac{d\varphi}{dx}(0) \right)^2 = 0$$

donc :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(0) = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0)} \neq 0$$

Alors on a une discussion :

1. Si $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) > 0$ alors $\varphi(x)$ est convexe au voisinage de 0.

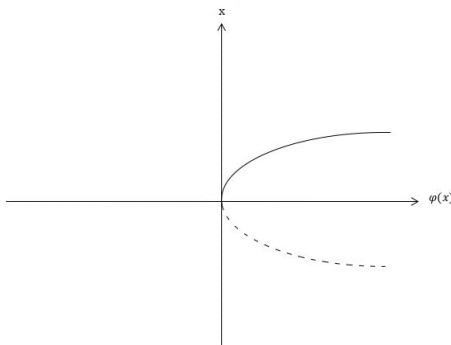


FIGURE 2.1 – Bifurcation noued-selle, la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$

2. Si $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) < 0$ alors $\varphi(x)$ est concave au voisinage de 0.

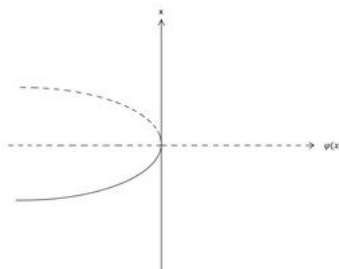


FIGURE 2.2 – Bifurcation noued-selle, la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$

Exemple 2.2.1 Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, \lambda) = x^2 + \lambda \quad (2.5)$$

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \lambda) = 2x$$

Cherchons les points d'équilibres de (2.5)

1. $\lambda \geq 0$ l'équation (2.5) admet un seul point d'équilibre $x_1^* = 0$, pour étudier la stabilité de point d'équilibre x_1^* il faut calculer la dérivée de la fonction $g(x, \lambda)$ au

point d'équilibre.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_1^*, \lambda) = 2 > 0 \quad \text{donc le point } x_1^* \text{ est instable.}$$

2. $\lambda < 0$ l'équation (2.5) admet trois points d'équilibres $x_1^* = 0$, $x_2^* = -\sqrt{-\lambda}$ et $x_3^* = \sqrt{-\lambda}$.

(a) le point x_1^* est instable.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_2^*, \lambda) = -2\sqrt{-\lambda} < 0$, donc le point x_2^* est stable.

(c) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_3^*, \lambda) = 2\sqrt{-\lambda} > 0$, donc le point x_3^* est instable.

donc le système (2.5) admet une bifurcation nœud-selle au point $(\lambda^*, x^*) = (0, 0)$.

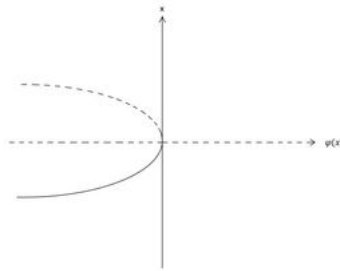


FIGURE 2.3 – Bifurcation nœud-selle, la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$

2.3 Bifurcation transcritique

2.3.1 La forme normale de la bifurcation transcritique

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, \lambda) \tag{2.6}$$

où : $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique de (2.6) c-à-d :

$$g(0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

de plus :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g^2}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$$

Par le développement limité de g au voisinage du point d'équilibre $(0,0)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= g(0,0) + x \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0,0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) + x\lambda \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0,0) + \Theta(x, \lambda) \\ &= \frac{x^2}{2} \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(0,0) + x\lambda \frac{\partial g^2}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \\ &= \alpha x^2 + \beta x\lambda \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(0,0)$ et $\beta = \frac{\partial g^2}{\partial x \partial \lambda}(0,0)$.

posons : $y = \frac{x}{\alpha}$, $\tau = \alpha^2 t$ et $\mu = \frac{\beta \lambda}{\alpha^2}$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{\alpha} (\alpha x^2 + \beta \lambda x) \\ &= x^2 + \frac{\beta \lambda}{\alpha} x \\ \frac{dy}{dt}(t) &= \alpha^2 y^2 + \beta \lambda y \end{aligned}$$

de plus : $\frac{d\tau}{dt} = \alpha^2$, donc :

$$\frac{dy}{d\tau} \alpha^2 = \alpha^2 y^2 + \beta \lambda y$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= y^2 + \frac{\beta \lambda}{\alpha^2} y \\ &= y^2 + \mu y \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{dy}{d\tau} = \dot{y} = y^2 + \mu y \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) est dite forme normale de la bifurcation transcritique.

Remarque 2.3.1 *il y a aussi une autre forme normale de la bifurcation transcritique*

$$\frac{dy}{d\tau}(\tau) = y^2 - \mu y$$

2.3.2 Diagramme de bifurcation transcritique

Dans cette partie nous allons appeler au référence [4].

Soit l'équation (2.6), supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique, de plus :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0$$

D'après ces conditions, le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable

Posons :

$$G(x, \lambda) = \frac{g(x, \lambda)}{x}$$

mais $G(x, \lambda)$ n'est pas défini en $(0, \lambda)$. par un prolongement par continuité, on trouve :

$$G(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{g(x, \lambda)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, \lambda) & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

avec

$$G(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0$$

Donc maintenant on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à $G(x, \lambda)$.

Il existe deux ouvert $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ et il existe une fonction φ de même régularité de g définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \lambda \end{aligned}$$

telle que :

$$\varphi(0) = 0$$

alors on a :

$$G(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U$$

Calculons la monotonie de φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \varphi(x)) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

remplaçons $(x, \varphi(x))$ par $(0, 0)$ on obtient :

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, 0)} \neq 0$$

donc on a une discussion :

1. Si $\frac{d\varphi}{dx}(0) > 0$ alors $\varphi(x)$ est croissante.

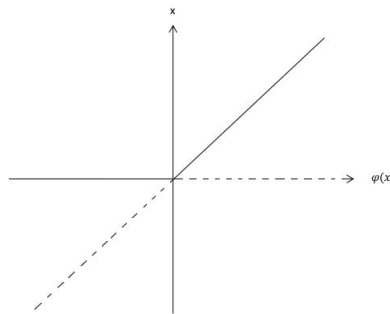


FIGURE 2.4 – Bifurcation transcritique, la valeur de bifurcation est $\lambda^* = 0$

2. Si $\frac{d\varphi}{dx}(0) < 0$ alors $\varphi(x)$ est décroissante.

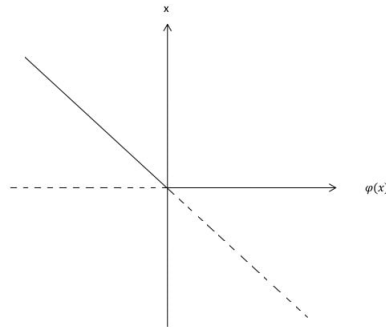


FIGURE 2.5 – Bifurcation transcritique, la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$

Exemple 2.3.1 soit :

$$\dot{x} = g(x, \lambda) = x^2 + \lambda x \quad (2.9)$$

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \lambda) = \lambda + 2x$$

Cherchons les points d'équilibre :

1. $\lambda = 0$, l'équation (2.9) admet un seul point d'équilibre $x_1^* = 0$, pour étudier la stabilité de point d'équilibre $x_1^* = 0$ il faut calculer la dérivée de la fonction $g(x, \lambda)$ au point d'équilibre.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, 0) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_1^*, 0) = 2 > 0, \text{ donc le point } x^* \text{ est instable.}$$

2. $\lambda < 0$ l'équation (2.9) admet deux points d'équilibre $x_1^* = 0$, $x_2^* = -\lambda$.

$$(a) \frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, \lambda) = \lambda < 0, \text{ donc le point } (x_1^*, \lambda) \text{ est stable.}$$

$$(b) \frac{\partial g}{\partial x}(x_2^*, \lambda) = -\lambda > 0, \text{ donc le point } (x_2^*, \lambda) \text{ est instable.}$$

3. $\lambda > 0$, l'équation (2.9) admet deux points d'équilibre $x_1^* = 0$, $x_2^* = -\lambda$.

$$(a) \frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, \lambda) = \lambda, \text{ donc le point } (x_1^*, \lambda) \text{ est instable.}$$

$$(b) \frac{\partial g}{\partial x}(x_2^*, \lambda) = -\lambda < 0, \text{ donc le point } (x_2^*, \lambda) \text{ est stable.}$$

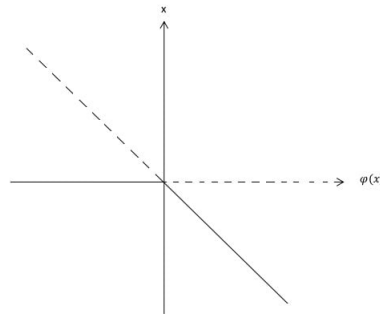


FIGURE 2.6 – Bifurcation de transcritique , la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$ ($\lambda = \varphi(x)$)

2.4 Bifurcation fourche ou "Pitchfork"

2.4.1 La forme normale de le bifurcation fourche

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, \lambda) \quad (2.10)$$

où $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique de (2.10) c-à-d :

$$g(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

de plus :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0.$$

Par le développement limité de g au voisinage du point d'équilibre on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= g(0,0) + x \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0,0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) + \lambda x \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0,0) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \\ &\quad + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0,0) + \Theta(x, \lambda) \\ &= \lambda x \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0,0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0,0) \\ &= \alpha x^3 + \beta x \lambda\end{aligned}$$

où : $\alpha = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0,0)$ et $\beta = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0,0)$

posons : $y = \frac{x}{\alpha}$, $\tau = \alpha^3 t$ et $\mu = \frac{\beta \lambda}{\alpha^3}$

alors :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{\alpha} (\alpha x^3 + \beta \lambda x) \\ &= x^3 + \frac{\beta \lambda}{\alpha} x \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha^3 y^3 + \beta \lambda y\end{aligned}$$

de plus : $\frac{d\tau}{dt} = \alpha^3 \Rightarrow dt = \frac{d\tau}{\alpha^3}$ alors :

$$\frac{dy}{d\tau} \alpha^3 = \alpha^3 y^3 + \beta \lambda y$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= y^3 + \frac{\beta \lambda}{\alpha^3} y \\ &= y^3 + \mu y\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{dy}{d\tau} = \dot{y} = y^3 + \mu y \tag{2.11}$$

L'équation (2.11) est dite forme normale de la bifurcation fourche.

Remarque 2.4.1 *il y a aussi une autre forme normale de la bifurcation transcritique*

$$\frac{dy}{d\tau}(\tau) = y^3 - \mu y$$

2.4.2 Diagramme de bifurcation fourche

Dans cette partie nous allons appeler au référence [4].

Soit l'équation (2.10), supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique, de plus :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0.$$

D'après ces conditions, le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable.

Posons :

$$G(x, \lambda) = \frac{g(x, \lambda)}{x}.$$

mais $G(x, \lambda)$ n'est pas défini en $(0, \lambda)$, par un prolongement par continuité on trouve :

$$G(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{g(x, \lambda)}{x} & \text{si } x \neq (0, \lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, \lambda) & \text{si } x = (0, \lambda) \end{cases} \quad (2.12)$$

avec :

$$G(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0$$

Maintenant on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à $G(x, \lambda)$.

Il existe deux ouverts $(U, V) \in \mathbb{R}$, et il existe une fonction φ de même régularité de g définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \lambda \end{aligned}$$

telle que :

$$\varphi(0) = 0$$

alors on a :

$$G(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U$$

Calculons $\frac{d\varphi}{dx}(x)$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \varphi(x)) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remplaçons $(x, \varphi(x))$ par $(0, 0)$ on obtient :

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, 0)} = 0$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) \right) \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + 2 \frac{\partial G}{\partial x \partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) \\ &\quad + \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(x, \varphi(x)) \left(\frac{d\varphi}{dx}(x) \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \varphi(x)) = 0$, alors $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) = 0$.

remplaçons $(x, \varphi(x))$ par $(0, 0)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0) + 2 \frac{\partial G}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \frac{d\varphi}{dx}(0) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, 0) \frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) + \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(0, 0) \left(\frac{d\varphi}{dx}(0) \right)^2 = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(0, 0) = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, 0)} \neq 0$$

Alors on a une discussions :

1. Si $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) > 0$ alors $\varphi(x)$ est convexe au voisinage de 0.

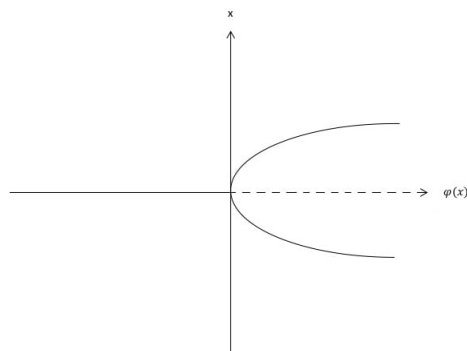


FIGURE 2.7 – Bifurcation fourche super critique , la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$

2. Si $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) < 0$ alors $\varphi(x)$ est concave au voisinage de 0.

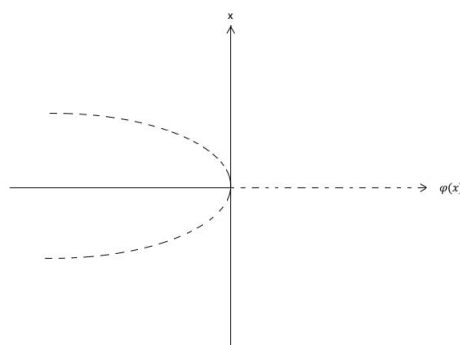


FIGURE 2.8 – Bifurcationde fourche sous critique , la valeurs de bifurcation est $\lambda^* = 0$

Exemple 2.4.1 soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = g(x, \lambda) = \lambda x + x^3 \quad (2.13)$$

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lambda + 3x^2$$

cherchons les points d'équilibre de l'équation (2.13).

1. $\lambda < 0$, l'équation (2.13) admet deux points d'équilibre $x_1^* = 0$ et $x_2^* = -\sqrt{-\lambda}$ et $x_3^* = \sqrt{-\lambda}$, pour étudier la stabilité des points d'équilibre il faut calculer la dérivée de la fonction $g(x, \lambda)$ aux points d'équilibre.

(a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, \lambda) = \lambda < 0$ donc le point x_1^* est stable.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_2^*, \lambda) = -2\lambda > 0$ donc le point x_2^* est instable.

(c) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_3^*, \lambda) = -2\lambda > 0$, donc le point x_3^* est instable.

2. $\lambda > 0$, l'équation (2.13) admet un seul point d'équilibre $x_1^* = 0$.

$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, \lambda) = \lambda > 0$, donc le point x_1^* est instable.

3. $\lambda = 0$, l'équation (2.13) admet un seul point d'équilibre $x_1^* = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1^*, \lambda) = 0$.

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_1^*, \lambda) = 0$.

$\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(x_1^*, \lambda) = 6$, (x_1^*, λ) donc le point x_1^* est un point instable.

donc le système (2.13) admet une bifurcation de fourche sous critique au point $(\lambda^*, x^*) = (0, 0)$.

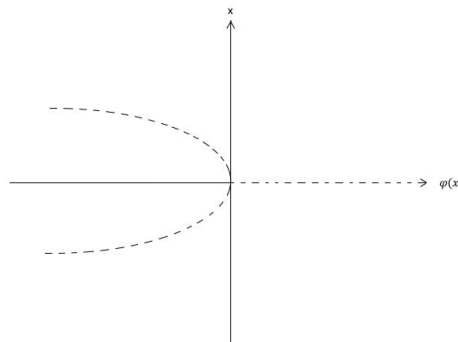


FIGURE 2.9 – Bifurcation de fourche sous critique, la valeur de bifurcation est $\lambda^* = 0$ ($\lambda = \varphi(x)$)

2.5 Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf

Dans la théorie mathématique de bifurcation, une bifurcation de Hopf, est un type de bifurcation où le système passe d'un état stationnaire à un régime périodique caractérisé par l'apparition d'une solution périodique.

térise par la naissance d'un cycle limite, dans laquelle un point d'équilibre d'un système dynamique perd sa stabilité.

Proposition 2.5.1 *Considérons le système suivant :*

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, \lambda) \quad (2.14)$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et g est une fonction régulière.

Supposons que :

Le système (2.14) admet un point d'équilibre $x^*(\lambda)$.

La matrice jacobienne :

$$J(\lambda) = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x, \lambda) \right\|_{x^*(\lambda)} \quad i=1,2$$

de système (2.14) au point d'équilibre $x^*(\lambda)$, admet une paire de valeurs propres complexes conjuguées $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$:

$$\bar{\mu}_{1,2}(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$$

où $\alpha(\lambda)$ est la partie réelle de $\mu_{1,2}$, et $\omega(\lambda)$ est la partie imaginaire de $\mu_{1,2}(\lambda)$.

Pour $\lambda = \lambda^*$ (λ^* est la valeur de bifurcation) on a ces conditions :

$$\begin{cases} \alpha(\lambda^*) = 0 \\ \omega(\lambda^*) \neq 0 \\ \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda^*) \neq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Par ce changement de variable suivante nous allons ramener le point d'équilibre $x^*(\lambda)$ à l'origine :

$$y = x - x^*(\lambda), \quad \beta = \lambda - \lambda^*$$

D'après la linéarisation de (2.14) on obtient :

$$\frac{dy}{dt}(t) = J(\beta)y + G(y, \beta) \quad (2.16)$$

où $G(y, \beta)$ est un terme non linéaire de système (2.16).

Soient $q(\beta)$, et $p(\beta)$ les vecteurs propres de la matrice $J(\beta)$, correspondant aux valeurs propres $\mu_1 = \alpha(\beta) + i\omega(\beta)$, et $\mu_2 = \alpha(\beta) - i\omega(\beta)$ respectivement.

Considérons la base $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 , posons :

$$B = [e_2, e_1] \quad (2.17)$$

où $p(\beta) = e_1 + ie_2$, $q(\beta) = e_1 - ie_2$

par le changement de coordonnées suivante :

$$y = Bu \Rightarrow u = B^{-1}y$$

Donc le système (2.16) devient :

$$\frac{du}{dt}(t) = A(\beta)u + G'(u, \beta) \quad (2.18)$$

où :

$$A(\beta) = B^{-1}J(\beta)B = \begin{pmatrix} \alpha(\beta) & -\omega(\beta) \\ \omega(\beta) & \alpha(\beta) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

et $G'(u, \beta) = B^{-1}G(y, \beta)$.

2.5.1 La forme normale de bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf

Soit le système suivant :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(\lambda)x + G'(x, \lambda) \quad (2.20)$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & -\omega(\lambda) \\ \omega(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}$, $G'(x, \lambda) = \begin{pmatrix} G'_1(x, \lambda) \\ G'_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$.

Le système (2.20) admet un point d'équilibre $x^* = 0$ quand $\lambda = 0$.

La matrice $A(\lambda)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\mu_{1,2} = \alpha(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$.

Pour $\lambda = 0$ on a :

$$\alpha(0) = 0, \omega(0) \neq 0$$

Proposition 2.5.2 :

Soit $q(\lambda) \in \mathbb{C}^2$ le vecteur propre de $A(\lambda)$ correspondant à la valeur propre

$\mu(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)$ telle que :

$$A(\lambda)q(\lambda) = \mu(\lambda)q(\lambda)$$

Soit le vecteur propre $p(\lambda) \in \mathbb{C}^2$ de $A^t(\lambda)$ est la matrice transposée de $A(\lambda)$ correspondant à la valeur propre $\bar{\mu}(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\omega(\lambda)$, telle que :

$$A^t(\lambda)p(\lambda) = \bar{\mu}(\lambda)p(\lambda)$$

$p(\lambda)$ et $q(\lambda)$ sont deux vecteurs normalisés c-à-d :

$$\langle p(\lambda), q(\lambda) \rangle = 1$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ signifie le produit scalaire standard en \mathbb{C}^2 est défini comme :

$$\langle p(\lambda), q(\lambda) \rangle = \bar{p}^{(t)}(\lambda)q(\lambda)$$

Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ peut être représenté de manière unique pour tout petit λ comme :

$$x = zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda) \tag{2.21}$$

Pour certain $z \in \mathbb{C}$, à condition que les vecteurs propres soient spécifiés, en effet nous avons une formule explicite pour déterminer z :

$$z = \langle p(\lambda), x \rangle \tag{2.22}$$

Pour vérifier cette formule, nous avons besoin de cette condition :

$$\langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle = 0$$

qu'est facile de vérifier :

$$\begin{aligned} \langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle &= \langle p(\lambda), \frac{1}{\bar{\mu}(\lambda)} A(\lambda) \bar{q}(\lambda) \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}(\lambda)} \langle A^T(\lambda) p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle \\ &= \frac{\mu(\lambda)}{\bar{\mu}(\lambda)} \langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle \\ \left(1 - \frac{\mu(\lambda)}{\bar{\mu}(\lambda)} \right) \langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

donc $\langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle = 0$ (car $\mu(\lambda) \neq \bar{\mu}(\lambda)$). Alors :

$$\begin{aligned} z &= \langle p(\lambda), x \rangle \\ &= \langle p(\lambda), zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda) \rangle \\ &= \langle p(\lambda), zq(\lambda) \rangle + \langle p(\lambda), \bar{z}\bar{q}(\lambda) \rangle \\ &= z \langle p(\lambda), q(\lambda) \rangle + \bar{z} \langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle \\ &= z \end{aligned}$$

Les lemmes suivants sont importants pour déterminer la forme normale générique de la bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf.

Lemme 2.5.1 :

Le système (2.20) peut être écrit pour suffisamment petit $|\lambda|$ comme :

$$\dot{z} = \mu(\lambda)z + g(z, \bar{z}, \lambda)$$

où $z \in \mathbb{C}$, $g(z, \bar{z}, \lambda) = \theta(|z|^2)$ est une fonction régulière.

Preuve :

Par le changement de variable (2.22) on a :

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \langle p(\lambda), \dot{x} \rangle \\
&= \langle p(\lambda), A(\lambda)x + G'(x, \lambda) \rangle \\
&= \langle p(\lambda), A(\lambda)(zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda)) + G'(x, \lambda) \rangle \\
&= \langle p(\lambda), A(\lambda)zq(\lambda) \rangle + \langle p(\lambda), A(\lambda)\bar{z}\bar{q}(\lambda) \rangle + \langle p(\lambda), G'((zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda)), \lambda) \rangle \\
&= \langle p(\lambda), \mu(\lambda)zq(\lambda) \rangle + \langle p(\lambda), \bar{\mu}(\lambda)\bar{z}\bar{q}(\lambda) \rangle + \langle p(\lambda), G'((zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda)), \lambda) \rangle \\
&= \mu(\lambda)z \langle p(\lambda), q(\lambda) \rangle + \bar{\mu}(\lambda)\bar{z} \langle p(\lambda), \bar{q}(\lambda) \rangle + \langle p(\lambda), G'((zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda)), \lambda) \rangle \\
&= \mu(\lambda)z + \langle p(\lambda), G'(zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda), \lambda) \rangle
\end{aligned}$$

On pose :

$$\langle p(\lambda), F(zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda), \lambda) \rangle = g(z, \bar{z}, \lambda)$$

Alors l'équation (2.20) s'écrit comme :

$$\dot{z} = \mu(\lambda)z + \langle p(\lambda), G'(zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda), \lambda) \rangle$$

On applique le développement de Taylor sur $g(z, \bar{z}, \lambda)$ et on obtient :

$$g(z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\lambda) z^k \bar{z}^l \quad (2.23)$$

où

$$g_{kl}(\lambda) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\lambda), F(zq(\lambda) + \bar{z}\bar{q}(\lambda), \lambda) \rangle$$

Lemme 2.5.2 :

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z} = \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \Theta(|z|^3) \quad (2.24)$$

où $\mu = \mu(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) \neq 0$ et $g_{ij} = g_{ij}(\lambda)$.

L'équation (2.24) peut être transformée par le changement inversible suivant :

$$z = v + \frac{h_{20}}{2} v^2 + h_{11} v \bar{v} + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}^2 \quad (2.25)$$

à une équation différentielle sans termes quadratiques :

$$\dot{v} = \lambda v + \Theta(|v|^3) \quad (2.26)$$

où h_{20} , h_{11} et h_{02} , seront déterminés après.

Preuve :

Soit la transformation inverse de l'équation (2.25) :

$$v = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 \quad (2.27)$$

dérivons l'équation (2.27) :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \bar{z} \dot{\bar{z}} \\ &= \mu z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \mu h_{20} \right) z^2 + \left(g_{11} - \mu h_{11} - \bar{\mu} h_{11} \right) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\mu} h_{02} \right) \bar{z}^2 \\ &= \mu v + \frac{1}{2} (g_{20} - \mu h_{20}) v^2 + (g_{11} - \bar{\mu} h_{11}) v \bar{v} + \frac{1}{2} (g_{02} - (2\bar{\mu} - \mu) h_{02}) \bar{v}^2 + \Theta(|v|^3) \end{aligned}$$

Pour :

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mu}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\mu}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\mu} - \mu}$$

On aura :

$$\dot{v} = \lambda v + \Theta(|v|^3) \quad (2.28)$$

Lemme 2.5.3 :

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z} = \mu z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} \bar{z}^2 z + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \Theta(|z|^4) \quad (2.29)$$

où $\mu = \mu(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) \neq 0$ et $g_{ij} = g_{ij}(\lambda)$.

L'équation (2.29) peut être transformée par le changement inversible suivant :

$$z = \frac{h_{30}}{6} v^3 + \frac{h_{21}}{2} v^2 \bar{v} + \frac{h_{12}}{2} v \bar{v}^2 + \frac{h_{03}}{2} \bar{v}^3 \quad (2.30)$$

à une équation différentielle sans termes cubiques :

$$\dot{v} = \lambda v + c_1 v^2 \bar{v} + \Theta(|v|^4) \quad (2.31)$$

où h_{30} , h_{21} , h_{12} , h_{03} et $c_1 = c_1(\lambda)$ seront déterminés après.

Preuve :

La transformation inverse de l'équation (2.30) est donnée par :

$$v = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + \Theta(|z|^4) \quad (2.32)$$

dérivons l'équation (2.32) :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} \\ &= \mu z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \mu \frac{h_{30}}{2}\right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \mu h_{21} - \bar{\mu} \frac{h_{21}}{2}\right) z^2 \bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \mu \frac{h_{12}}{2} - \bar{\mu} h_{30}\right) z \bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\mu} \frac{h_{03}}{2}\right) \bar{z}^3 \\ &= \mu v + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\mu h_{30}) v^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\mu - \bar{\mu}) h_{21}) v^2 \bar{v} + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\mu} h_{12}) v \bar{v}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} (g_{03} + (\mu - 3\bar{\mu}) h_{03}) \bar{v}^3 + \theta(|v|^4) \end{aligned}$$

Pour :

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\mu}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\mu}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\mu} - \mu}, \quad h_{21} = \frac{g_{21}}{\mu + \bar{\mu}}$$

le fait que : $h_{21} = \frac{g_{21}}{\mu + \bar{\mu}}$, ce terme est possible pour $\lambda \neq 0$, mais quand $\lambda = 0$, ce qui donne un terme n'est pas défini, pour cette raison on prendra $h_{21} = 0$, donc nous défini c_1 par :

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}$$

On aura :

$$\dot{v} = \lambda v + c_1 v^2 \bar{v} + \Theta(|v|^4) \quad (2.33)$$

Lemme 2.5.4 : (Forme normale de P-A-H)

Considérons l'équation suivante :

$$\dot{z} = \mu z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \Theta(|z|^4) \quad (2.34)$$

où $\mu = \mu(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)$, $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) \neq 0$ et $g_{ij} = g_{ij}(\lambda)$.

L'équation (2.34) peut être transformée par le changement inversible suivant :

$$z = v + \frac{h_{20}}{2} v^2 + h_{11} v \bar{v} + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}^2 + \frac{h_{30}}{6} v^3 + \frac{h_{12}}{2} v \bar{v}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{v}^3 \quad (2.35)$$

à une équation différentielle sans termes cubiques :

$$\dot{v} = \mu v + c_1 v^2 \bar{v} + \Theta(|v|^4) \quad (2.36)$$

où : $c_1 = c_1(\lambda)$, sera déterminé après.

Preuve :

Soit la transformation suivante :

$$z = v + \frac{h_{20}}{2} v^2 + h_{11} v \bar{v} + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}^2 \quad (2.37)$$

remplacons l'équation (2.37) dans l'équation (2.34) :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mu\left(v + \frac{h_{20}}{2}v^2 + h_{11}v\bar{v} + \frac{h_{02}}{2}\bar{v}^2\right) \\ &+ \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} \left(v + \frac{h_{20}}{2}v^2 + h_{11}v\bar{v} + \frac{h_{02}}{2}\bar{v}^2\right)^k \left(\bar{v} + \frac{h_{20}}{2}\bar{v}^2 + h_{11}\bar{v}v + \frac{h_{02}}{2}v^2\right)^l + \Theta(|v|^4, |\bar{v}|^4) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Puis dérivons l'équation (2.37) on obtient :

$$\dot{z} = \dot{v} + h_{20}\dot{v}v + h_{11}(\dot{v}\bar{v} + \dot{\bar{v}}v) + h_{02}\dot{\bar{v}} \quad (2.39)$$

remplacons \dot{v} de l'équation (2.36) et $\dot{\bar{v}}$ dans l'équation (2.39) :

$$\dot{z} = \mu v + c_1 v^2 \bar{v} + h_{20}(\mu v + c_1 v^2 \bar{v})v + h_{11}((\mu v + c_1 v^2 \bar{v})\bar{v} + (\bar{\mu}\bar{v} + \bar{c}_1 \bar{v}^2 v)v) + h_{02}(\bar{\mu}\bar{v} + \bar{c}_1 \bar{v}^2 v)^2 \quad (2.40)$$

En fait la comparaison entre les coefficients des termes quadratiques dans (2.38) et (2.40) qui donne :

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mu}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\mu}}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\mu} - \mu} \quad (2.41)$$

puis en égalisant tous les coefficients devant le terme $v^2\bar{v}$ qui conduit à :

$$c_1(\lambda) = \frac{g_{20}g_{11}(2\mu - \bar{\mu})}{2|\mu|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\mu} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\mu - \bar{\mu})} + \frac{g_{21}}{2} \quad (2.42)$$

avec :

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

pour (2.41) et (2.42), on aura

$$\dot{v} = \mu v + c_1 v^2 \bar{v} + \Theta(|v|^4)$$

Proposition 2.5.3 :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt}(t) = \alpha(\lambda)v_1 - \omega(\lambda)v_2 + (a(\lambda)v_1 - b(\lambda)v_2)(v_1^2 + v_2^2) + \theta(|v_1^2|, |v_2^2|) \\ \frac{dv_2}{dt}(t) = \omega(\lambda)v_1 + \alpha(\lambda)v_2 + (a(\lambda)v_1 - b(\lambda)v_2)(v_1^2 + v_2^2) + \theta(|v_1^2|, |v_2^2|) \end{cases} \quad (2.43)$$

où $a(\lambda) + ib(\lambda) = c_1(\lambda)$, avec $a(0) \neq 0$ est dite le premier exposant de Lyapunov (1.8.1).

Pour un changement de coordonnées :

$$\begin{cases} v_1 = r \cos(\theta) \\ v_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.44)$$

Le système (2.43) devient :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt}(t) = \alpha(\lambda)r + a(\lambda)r^3 \\ \frac{d\theta}{dt}(t) = \omega(\lambda) + b(\lambda)r^2 \end{cases} \quad (2.45)$$

Par le développement limité de r et θ au voisinage de $\lambda = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt}(t) = \frac{d\alpha}{d\lambda}(0)\lambda r + a(0)r^3 \\ \frac{d\theta}{dt}(t) = \omega(0) + \frac{d\omega}{d\lambda}(0)\lambda + b(0)r^2 \end{cases} \quad (2.46)$$

Pour $-\infty < \frac{\lambda M}{a(0)} < 0$, pour λ suffisamment petit la solution de (2.46) est donné par :

$$\left(r(t), \theta(t) \right) = \left(\sqrt{\frac{-\lambda M}{a(0)}}, \left[\omega(0) + \left(\frac{d\omega}{d\lambda}(0) - \frac{bM}{a(0)} \right) \lambda \right] t + \theta_0 \right) \quad (2.47)$$

où $M = \frac{d\alpha}{d\lambda}(0)$.

Théorème 2.5.1 (Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf)[4]

Considérons l'équation différentielle (2.46), supposons les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha(0) = 0 \\ \omega(0) \neq 0 \\ \frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

on a :

1. pour $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) > 0$ alors :

(a) $a(0) > 0$ dans ce cas l'origine est un point d'équilibre instable pour $\lambda > 0$, et un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $\lambda < 0$, avec une orbite périodique (cycle limite) instable pour $\lambda < 0$. voir la figure (2.10)

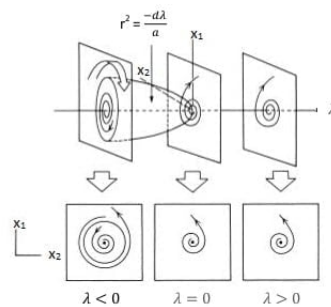


FIGURE 2.10

(b) $a(0) < 0$ dans ce cas l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $\lambda < 0$, et un point d'équilibre instable pour $\lambda > 0$, avec une orbite périodique asymptotiquement stable pour $\lambda > 0$. voir la figure (2.11)

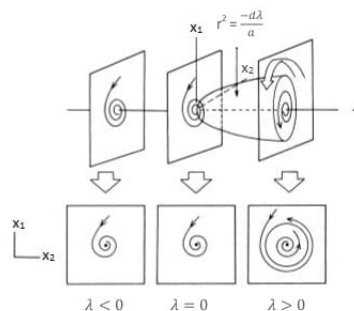


FIGURE 2.11

2. pour $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) < 0$ alors :

(a) $a(0) > 0$ dans ce cas l'origine est un point d'équilibre instable pour $\lambda < 0$, et un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $\lambda > 0$, avec une orbite périodique (cycle limite) instable pour $\lambda > 0$. voir la figure (2.12)

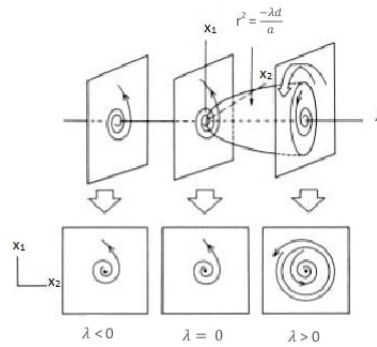


FIGURE 2.12

(b) $a(0) < 0$ dans ce cas l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $\lambda > 0$, et un point d'équilibre instable pour $\lambda < 0$, avec une orbite périodique instable pour $\lambda < 0$. voir la figure (2.13)

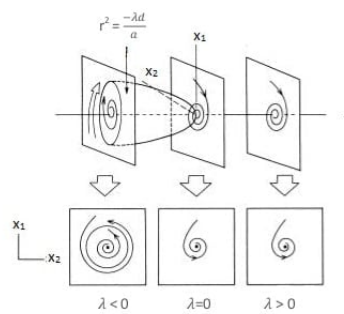


FIGURE 2.13

Remarque 2.5.1 La bifurcation dans le cas $a(0) < 0$ est appelé **Bifurcation super critique**, et dans le cas $a(0) > 0$ est appelé **Bifurcation sous critique**.

Remarque 2.5.2 :

Lorsque $\lambda = 0$, s'il existe des trajectoires concentriques autour de $(0,0)$, le point d'équilibre $(0,0)$ correspond alors à des centres, on parle de **Bifurcation de Hopf dégénérée**

Exemple 2.5.1 Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + \lambda y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (2.49)$$

le système admet un seul point d'équilibre $(0,0)$

calculons la matrice jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & \lambda - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne au point $(0,0)$ devient :

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice J_0 sont complexes conjuguées.

$$\mu_1 = \lambda + i, \mu_2 = \lambda - i$$

Posons :

$$\alpha(\mu_{1,2}) = \lambda, \omega(\mu_{1,2}) = 1$$

1. $\lambda < 0$, alors $\alpha(\mu_{1,2}) < 0$ donc le point $(0,0)$ est un foyer stable.
2. $\lambda > 0$, alors $\alpha(\mu_{1,2}) > 0$ donc le point $(0,0)$ est un foyer instable.

lorsque $\lambda = 0$ la matrice jacobienne devient :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$\det(J_0) = 1 \quad \text{et} \quad \text{tra}(J_0) = 0$$

Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

la dérivée \dot{V} est :

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)$$

\dot{V} est strictement négative sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, par le théorème de Lyapunov nous concluons que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $\lambda = 0$.

passant aux coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Le système (2.49) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

la seconde équation admet la solution suivante :

$$\theta(t) = -t + \theta(0)$$

On va étudier la première équation selon le signe du paramètre λ .

on a :

$$\begin{aligned} f(r, \lambda) &= r(\lambda - r^2) \\ \frac{\partial f}{\partial r}(r, \lambda) &= \lambda - 3r^2 \end{aligned}$$

1. $\lambda \leq 0$

l'équation admet un seul point d'équilibre $r_1 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial r}(r_1, \lambda) = \lambda < 0$ alors r_1 est asymptotiquement stable

2. $\lambda > 0$ l'équation admet deux points d'équilibres $r_1 = 0$ et $r_2 = \sqrt{\lambda}$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_1, \lambda) = \lambda > 0 \text{ alors } r_1 \text{ est instable}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_2, \lambda) = -2\lambda < 0 \text{ alors } r_2 \text{ est asymptotiquement stable .}$$

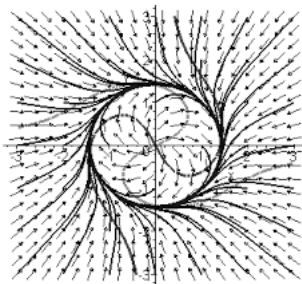


FIGURE 2.14 – portrait de phase de la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf (cycle limite asymptotiquement stable)

donc on a une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique (car on a un cycle limite asymptotiquement stable à la valeur de bifurcation $\lambda^* = 0$)

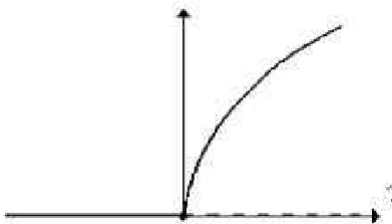


FIGURE 2.15 – le diagramme du bifurcation P-A-H super-critique

2.6 Bifurcation cusp

2.6.1 La forme normale de bifurcation cusp

Dans cette partie nous allons appeler au référence [4]

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = g(x, \lambda) \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

avec $g(x, \lambda)$ est une fonction régulière, supposons que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non hyperbolique c-à-d :

$$g(0, 0), \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

De plus :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

Posons :

$$g_0(\lambda) = g(0, \lambda) \quad , \quad g_1(\lambda) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, \lambda) \quad , \quad g_2(\lambda) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, \lambda) \quad , \quad g_3(\lambda) = \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, \lambda)$$

Par un développement limité de g au voisinage de $(0, \lambda)$ on obtient :

$$g(x, \lambda) = g_0(\lambda) + g_1(\lambda)x + g_2(\lambda)x^2 + g_3(\lambda)x^3 + \theta(x^4) \quad (2.50)$$

Par le changement de variable :

$$\xi = x + \delta(\lambda)$$

L'équation différentielle (2.50) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}(t) = & \left(g_0(\lambda) - g_1(\lambda)\delta + \delta^2\varphi(\lambda, \delta) \right) + \left(g_1(\lambda) - 2g_2(\lambda)\delta + \delta^2\phi(\lambda, \delta) \right)\xi \\ & + \left(g_2(\lambda) - 3g_3(\lambda)\delta + \delta^2\psi(\lambda, \delta) \right)\xi^2 + \left(g_3(\lambda) + \delta\omega(\lambda, \delta) \right)\xi^3 + \theta(\xi^4) \end{aligned} \quad (2.51)$$

où φ , ϕ , ψ , ω sont des fonction régulière.

Posons :

$$G(\lambda, \delta) = g_2(\lambda) - 3g_3(\lambda)\delta + \delta^2\psi(\lambda, \delta)$$

Puisque :

$$G(0, 0) = g_2(0) - 3g_3(0)\delta + \delta^2\psi(0, 0) = 0$$

et posons $g_3(0, 0) \neq 0$ alors :

$$\frac{\partial G}{\partial \delta}(0, 0) = -3g_3(0, 0) \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites donne l'existence et l'unicité d'une fonction $\delta = \delta(\lambda)$ tel que $\delta(0) = 0$ et $G(\lambda, \delta(\lambda)) = 0$, alors (2.51) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}(t) = & \left(g_0(\lambda) - g_1(\lambda)\delta(\lambda) + \delta(\lambda)^2\varphi(\lambda, \delta) \right) + \left(g_1(\lambda) - 2g_2(\lambda)\delta(\lambda) + \delta(\lambda)^2\phi(\lambda, \delta) \right)\xi \\ & + \left(f_3(\lambda) + \delta(\lambda)\omega(\lambda, \delta) \right)\xi^3 + \theta(\xi^4) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous pouvons maintenant introduire deux nouveaux paramètres $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ définissent :

$$\begin{cases} \mu_1(\lambda) = \left(g_0(\lambda) - g_1(\lambda)\delta(\lambda) + \delta(\lambda)^2\varphi(\lambda, \delta) \right) \\ \mu_2(\lambda) = \left(g_1(\lambda) - 2g_2(\lambda)\delta(\lambda) + \delta(\lambda)^2\phi(\lambda, \delta) \right) \end{cases} \quad (2.53)$$

le paramètre μ est bien défini si le déterminant de la matrice jacobienne du système (2.53) au $\lambda = 0$ n'égal pas à 0 c-à-d :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \lambda_1}(0, 0) & \frac{\partial g}{\partial \lambda_2}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_1^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_2^2}(0, 0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.54)$$

Le théorème d'inversion locale implique qu'il existe unique fonction inversible continue $\lambda = \lambda(\mu)$ avec $\lambda(0) = 0$.

Alors l'équation (2.52) devient :

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = \mu_1 + \mu_2\xi + c(\mu)\xi^3 + \theta(\xi^4) \quad (2.55)$$

où :

$$c(\mu) = g_3(\lambda) + \delta(\lambda(\mu))\omega(\lambda(\mu), \delta(\lambda(\mu)))$$

et

$$c(0) = g_3(0) = \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$$

enfin on prend le dernier changement de variable :

$$\eta = \frac{\xi}{|c(\mu)|}$$

donc l'équation (2.55) devient :

$$\frac{d\eta}{dt}(t) = \beta_1 + \beta_2\eta + s\eta^3 \quad (2.56)$$

où :

$$\beta_1 = \frac{\mu_1}{|c(\mu)|} \quad , \quad \beta_2 = \frac{\mu_2}{|c(\mu)|} \quad , \quad s = \text{sing } c(0) = \pm 1$$

Exemple 2.6.1 :

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = c + x - x^3 \quad (2.57)$$

Pour trouver les points d'équilibres il faut résoudre l'équation suivante :

$$c + x - x^3 = 0 \implies x - x^3 = -c \quad (2.58)$$

On va dessiner la courbe $G(x) = x - x^3$, on obtient la courbe (2.16).

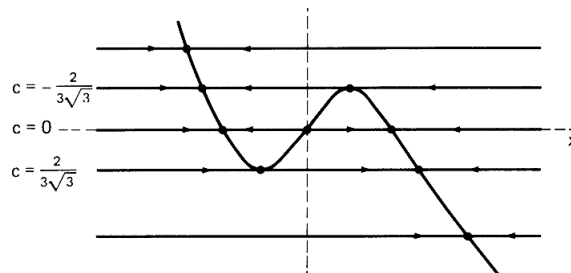


FIGURE 2.16 – Portrait de phase de l'équation (2.57)

1. Si $c > c_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, l'équation (2.57) admet un seul point d'équilibre positif stable.
2. Si $c = c_1$, l'équation (2.57) admet deux points d'équilibres un positif stable et l'autre négatif instable.
3. $c \in] -c_1; c_1[$ l'équation (2.57) admet trois points d'équilibres un point instable entouré de deux points stables.
4. Si $c = -c_1$, l'équation (2.57) admet deux points d'équilibres un négatif stable et l'autre positif instable.

5. Si $c < -c_1$, l'équation (2.57) admet un seul point d'équilibre négatif stable.

Le diagramme de la bifurcation de l'équation (2.57) est illustré à la figure(2.17)

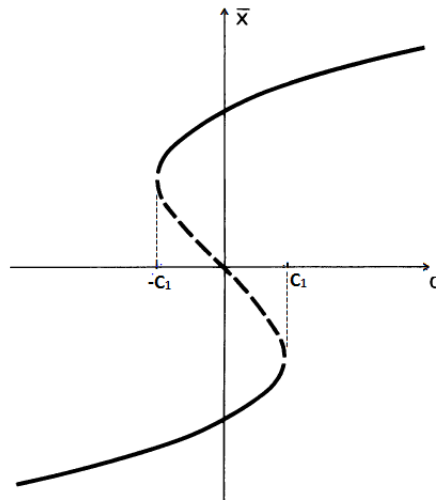


FIGURE 2.17 – diagramme de bifurcation de l'équation (2.57) où $\bar{x} = x$

La bifurcation appliquée aux quelques modèles mathématiques en sciences

Dans ce chapitre on a appliqué la théorie de bifurcation sur quelques modèles mathématiques scientifiques.

3.1 Modèle génétique

Le système suivant a été discuté par Griffith (1971) comme un modèle pour un système de contrôle génétique, L'activité d'un certain gène est supposée être directement induite par deux copies de la protéine pour laquelle il code. voir [6].

soit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= -ax + y \\ \frac{dy}{dt}(t) &= \frac{x^2}{1+x^2} - by \end{cases} \quad (3.1)$$

où les paramètres a, b sont strictement positifs, avec $a \leq \frac{1}{2b}$.

3.1.1 Interprétation

- $x(t)$: Concentrations de la protéine .
- $y(t)$: Concentrations de l'ARN messager.
- a : Le taux de dégradation de $x(t)$.
- b : Le taux de dégradation de $y(t)$.

Supposons maintenant que nous varions a et laisser b fixes.

3.1.2 Les points d'équilibres

Cherchons les points d'équilibres du système (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ax + y = 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} - by = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\cdot \Rightarrow \begin{cases} y = ax \\ \frac{x^2}{1+x^2} - bax = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La seconde équation de système (3.3) devient :

$$x(ba + bax^2 - x) = 0 \quad (3.4)$$

Le fait que :

$$a < \frac{1}{2b}$$

Alors $1 - 4b^2a^2 > 0$. Ainsi le système (3.1) admet trois points d'équilibres soient :

$$(x_1^*, y_1^*) = (0, 0), (x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4b^2a^2}}{2ab}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4b^2a^2}}{2b} \right), (x_3^*, y_3^*) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4b^2a^2}}{2ab}, \frac{1 - \sqrt{1 - 4b^2a^2}}{2b} \right)$$

Remarque 3.1.1 :

Si $a = \frac{1}{2b}$ le système (3.1) admet deux points d'équilibres $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ et $(x_2^*, y_2^*) = (1, b)$.

Notre valeur de bifurcation sera $a^* = \frac{1}{2b}$.

3.1.3 La stabilité des points d'équilibres

La matrice jacobienne du système (3.1) est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}$$

Nous avons étudié la stabilité des points d'équilibres quand $a < \frac{1}{2b}$.

* Le point d'équilibre $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Calculons le déterminant et la trace de la matrice $J(0, 0)$:

$$\text{tra}(J(0, 0)) = -(a + b)$$

$$\det(J(0, 0)) = ab$$

Cherchons les valeurs propres de la matrice $J(0, 0)$:

Soit

$$P(\mu) = \mu^2 - \text{tra}(J(0, 0))\mu + \det(J(0, 0))$$

Le polynôme caractéristique de $J(0, 0)$, calculons le discriminant de $P(\mu)$:

$$\Delta = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 > 0$$

La matrice jacobienne $J(0, 0)$ admet deux valeurs propres négatives $\mu_1 = -a$ et $\mu_2 = -b$, donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est un nœud stable.

* Le point d'équilibre $(x^*, y^*) = (x_{2,3}^*, y_{2,3}^*)$:

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x^*}{(1+(x^*)^2)^2} & -b \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant et la trace de la matrice $J(x^*, y^*)$:

$$\text{tra}J(x^*, y^*) = -(a + b) < 0$$

$$\det J(x^*, y^*) = ab \left(\frac{(x^*)^2 - 1}{1 + (x^*)^2} \right)$$

Cherchons les valeurs propres de la matrice $J(x^*, y^*)$:

Soit :

$$P(\mu) = \mu^2 - \text{tra}(J(x^*, y^*))\mu + \det(J(x^*, y^*))$$

Le polynôme caractéristique de $J(x^*, y^*)$, calculons le discriminant de $P(\mu)$:

$$\begin{aligned}\Delta^* &= (a+b)^2 - 4\left(ab - \frac{(x^*)^2 - 1}{(x^*)^2 + 1}\right) \\ &> (a+b)^2 - 4ab\end{aligned}$$

Donc $\Delta^* > (a-b)^2 > 0$, alors la matrice $J(x^*, y^*)$ admet deux valeurs propres réelles.

Nous discutons les différents cas :

- Si $x^* < 1$ alors $\det(J(x^*, y^*)) < 0$, donc le point d'équilibre (x^*, y^*) est un point selle .
- si $x^* > 1$ alors $\det(J(x^*, y^*)) > 0$, donc le point d'équilibre (x^*, y^*) est un point nœud stable.

Maintenant nous avons étudié la stabilité des points d'équilibres où $a = \frac{1}{2b}$.

* Le point d'équilibre $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

la matrice (3.6) admet deux valeurs propres négatifs $\mu_1 = -a$ et $\mu_2 = -b$, donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est un nœud stable.

* Le point d'équilibre $(1, b)$:

$$J(1, b) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{1}{4} & -b \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant et la trace de la matrice $J(1, b)$:

$$\begin{aligned}\text{tra}J(1, b) &= -(a+b) < 0 \\ \det J(1, b) &= a*b - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0\end{aligned}$$

Donc le point d'équilibre $(1, b)$ est stable.

Alors le système (3.1) admet une bifurcation nœud-selle au point de bifurcation $(x, y, a) = (1, b, \frac{1}{2b})$

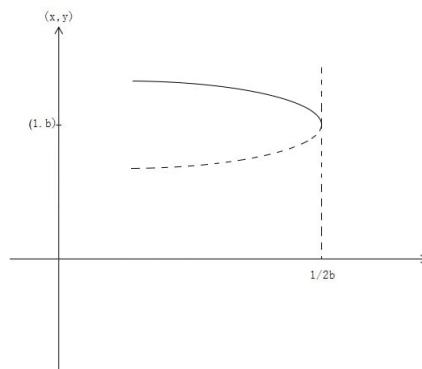


FIGURE 3.1 – Le diagramme de la bifurcation du modèle génétique.

3.2 Modèle proie prédateur

Dans cette partie on s'intéresse au modèle de Benddigton :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \gamma x - \frac{axy}{1+bx+cy} \\ \frac{dy}{dt}(t) = -\beta y + \frac{eaxy}{1+bx+cy} \end{cases} \quad (3.7)$$

où les paramètres γ , β , a , e , b , c sont strictement positifs, avec $a - rc > 0$, $\frac{c\beta}{a} < 1$, $ac\gamma < 1$ et $\frac{b}{c} < (4a + c)$.

3.2.1 Interprétation

- $x(t)$: La population proie.
- $y(t)$: La population prédateur.
- $\frac{ax}{1+bx+cy}$: La fonction de réponse de Benddigton.
- γ : Le taux de croissance de proie $x(t)$.

- β : Le taux de mortalité naturelle de prédateur $y(t)$.
- a : Le taux de prédation.
- e : Le taux de conversion de la biomasse proie à la biomasse de prédateur.
- $\frac{axy}{1+bx+cy}$: L'interaction entre les deux populations (proie et prédateur)

3.2.2 Les points d'équilibres

Cherchons les points d'équilibres du système (3.7) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma x - \frac{axy}{1+bx+cy} = 0 \\ -\beta y + \frac{eaxy}{1+bx+cy} = 0 \end{cases}$$

Donc le système (3.7) admet $(0, 0)$ comme un point d'équilibre, et le deuxième point d'équilibre qui vérifie :

$$\begin{cases} \gamma - \frac{ay}{1+bx+cy} = 0 \\ -\beta + \frac{eay}{1+bx+cy} = 0 \end{cases}$$

est $(x^*, y^*) = (x^*, \frac{e\gamma}{\beta}x^*)$, avec $x^* = \frac{\beta}{ae-b\beta-e\gamma c}$, biologiquement, il faut que ce point d'équilibre soit strictement positif, pour cela supposons : :

$$ae - b\beta - e\gamma c > 0$$

3.2.3 La stabilité des points d'équilibres

La matrice jacobienne du système (3.7) est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \gamma - \frac{ay(1+cy)}{(1+bx+cy)^2} & \frac{-ax(1+bx)}{(1+bx+cy)^2} \\ \frac{eay(1+cy)}{(1+bx+cy)^2} & -\beta + \frac{eax(1+bx)}{(1+bx+cy)^2} \end{pmatrix}$$

Nous avons étudié la nature des points d'équilibres :

- * Le point d'équilibre $(0, 0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

La matrice $J(0,0)$ admet deux valeurs propres $\mu_1 = \gamma > 0$ et $\mu_2 = -\beta < 0$, donc $(0,0)$ est un point instable (selle)

* Le point d'équilibre (x^*, y^*) :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \gamma - \frac{ay^*(1+cy^*)}{(1+bx^*+cy^*)^2} & \frac{-ax^*(1+bx^*)}{(1+bx^*+cy^*)^2} \\ \frac{eay^*(1+cy^*)}{(1+bx^*+cy^*)^2} & -\beta + \frac{eax^*(1+bx^*)}{(1+bx^*+cy^*)^2} \end{pmatrix}$$

$$J(x^*, y^*) = \frac{1}{(1+bx^*+cy^*)^2} \begin{pmatrix} \gamma(1+bx^*+cy^*)^2 - ay^*(1+cy^*) & -ax^*(1+bx^*) \\ -\beta(1+bx^*+cy^*)^2 + eay^*(1+cy^*) & -acex^*y^* \end{pmatrix}$$

Par ces deux changements :

$$\begin{aligned} \gamma(1+bx^*+cy^*)^2 - ay^*(1+cy^*) &= \gamma \frac{a^2}{\gamma^2} (y^*)^2 - ay^* - ac(y^*)^2 \\ &= ay^*(1+bx^*+cy^* - cy^* - 1) \\ &= abx^*y^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(1+bx^*+cy^*)^2 - eay^*(1+cy^*) &= \beta \frac{(ae)^2}{\beta^2} (x^*)^2 - eay^* - ace(x^*)^2 \\ &= ay^*(1+bx^*+cy^* - bx^* - 1) \\ &= -acex^*y^* \end{aligned}$$

$J(x^*, y^*)$ devient :

$$J(x^*, y^*) = \frac{1}{(1 + bx^* + cy^*)^2} \begin{pmatrix} abx^*y^* & -ax^*(1 + bx^*) \\ eay^*(1 + cy^*) & -acex^*y^* \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Calculons le déterminant et la trace de la matrice $J(x^*, y^*)$:

$$\begin{aligned} \det(J(x^*, y^*)) &= \frac{a^2 ex^* y^*}{1 + bx^* + cy^*} > 0 \\ \text{tra}(J(x^*, y^*)) &= \frac{1}{1 + bx^* + cy^*} (axy(b - ce)) \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs propres de $J(x^*, y^*)$:

Soit :

$$P(\mu) = \mu^2 - \text{tra}J(x^*, y^*)\mu + \det J(x^*, y^*)$$

Le polynôme caractéristique de $J(x^*, y^*)$, calculons le discriminant de $P(\mu)$

$$\begin{aligned} \Delta^* &= (\text{tra}J(x^*, y^*))^2 - 4\det J(x^*, y^*) \\ &= \frac{1}{1 + bx^* + cy^*} (axy(b - ce))^2 - 4 \frac{a^2 ex^* y^*}{1 + bx^* + cy^*} \end{aligned}$$

le fait que :

$$\frac{b}{e} < (4a + c)$$

Alors $\Delta^* < 0$.

Ainsi $P(\mu)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\mu_1 = \frac{\text{tra}J(x^*, y^*)}{2} + i \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\text{tra}J(x^*, y^*)}{2} - i \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}$$

posons :

$$\alpha(b) = \frac{\text{tra}J(x^*, y^*)}{2} \quad \text{et} \quad \omega(b) = \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}$$

- Si $b < ce$, alors $\alpha(b) < 0$, donc le point d'équilibre (x^*, y^*) est un foyer stable.
- Si $b > ce$, alors $\alpha(b) > 0$, donc le point d'équilibre (x^*, y^*) est un foyer instable
- Si $b = ce$, alors $\alpha(b) = 0$, donc on peut rien conclure.

Notre valeur de bifurcation sera $b^* = ce$.

3.2.4 Existence de P-A-H

(a) La matrice (3.8) admet deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\mu_1 = \frac{\text{tra}J(x^*, y^*)}{2} + i \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\text{tra}J(x^*, y^*)}{2} - i \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}$$

posons :

$$\alpha(b) = \frac{\text{tra}J(x^*, y^*)}{2} \quad \text{et} \quad \omega(b) = \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}$$

(b) Montrons que $\alpha(b^*) = 0$ et $\omega(b^*) \neq 0$, en effet :

$$\begin{aligned} \alpha(b^*) &= \frac{1}{1 + b^*x^* + cy^*} (ax^*y^*(b^* - ce)) = 0 \quad \text{et} \\ \omega(b^*) &= \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2} = \sqrt{\frac{a^2ex^*y^*}{1 + bx^* + cy^*}} \neq 0 \end{aligned}$$

(c) Montrons que $\frac{d\alpha}{db}(b^*) \neq 0$, en effet :

$$\frac{d\alpha}{db}(b^*) = \frac{ax^*y^*}{1 + b^*x^* + cy^*} \neq 0$$

Donc il s'agit d'une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf quand $b^* = ec$.

3.2.5 La nature de bifurcation de P-A-H

On propose H une fonction définie par :

$$H(x, y) = \frac{a}{c} \ln(1 + bx + cy) - \beta \ln(x) - \gamma \ln(y)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(x, y) &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{ab}{c(1 + by + cx)} - \frac{\beta}{x} \right) \left(\gamma x - \frac{axy}{1 + bx + cy} \right) \\ &\quad + \left(\frac{a}{1 + bx + cy} - \frac{\gamma}{y} \right) \left(-\beta y + \frac{aexy}{1 + bx + cy} \right) \\ &= \frac{ab\gamma x}{c(1 + bx + cy)} - \frac{ae\gamma x}{1 + bx + cy} \end{aligned}$$

Le fait que $b = ce$, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, y) = 0$$

Donc $H(x, y)$ est une intégrale première pour (3.7).

Par le développement limité de H au voisinage de (x^*, y^*) on a :

$$\begin{aligned} H(x, y) &= H(x^*, y^*) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial H}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*, y^*)(x - x^*)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x^*, y^*)(y - y^*)^2 + \Theta(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

où :

$$\begin{aligned} H(x^*, y^*) &= \frac{a}{c} \ln(1 + bx^* + cy^*) - \beta \ln(x^*) - \gamma \ln(y^*) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y^*) &= \frac{\beta b}{ecx^*} - \frac{\beta}{x^*} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x^*, y^*) &= \frac{\gamma ca}{cay^*} - \frac{\gamma}{y^*} = 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*, y^*) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c\beta^2}{a(x^*)^2} + \frac{\beta}{(x^*)^2} \right) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x^*, y^*) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{ac\gamma^2}{(y^*)^2} + \frac{\gamma}{(y^*)^2} \right) \end{aligned}$$

Donc l'équation (3.9) devient :

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*, y^*)(x - x^*)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x^*, y^*)(y - y^*)^2 + \Theta(x^2 + y^2) \quad (3.10)$$

le fait que :

$$\frac{c\beta}{a} < 1 \text{ et } ac\gamma < 1$$

Alors :

$$H(x, y) > H(x^*, y^*)$$

Donc il existe des centres conservés autour de point d'équilibre $(x^*(b^*), y^*(b^*))$ alors on peut conclure qu'il s'agit d'une bifurcation de Hopf dégénérée.

Le portrait de phase

(a) Les isoclines verticales

$$\gamma x - \frac{axy}{1 + bx + cy} = 0$$

$x = 0$ ou $y = \frac{\gamma(1+bx)}{a-\gamma c}$, Il s'agit d'une droite.

(b) Les isoclines horizontales

$$-\beta y + \frac{eaxy}{1 + bx + cy} = 0$$

$y = 0$ ou $y = \frac{(ae-b\beta)x-\beta}{c\beta}$, Il s'agit d'une droite.

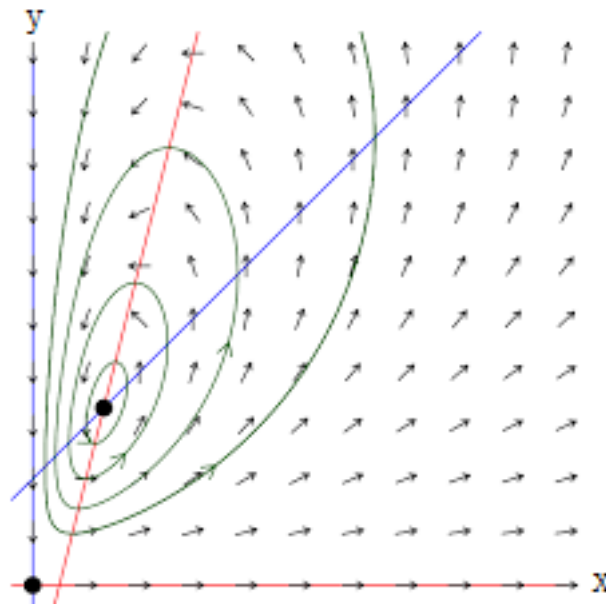


FIGURE 3.2 – Le portrait de phase de l'équation (3.7)

3.3 Modèle de Rayleigh

Dans cette partie nous allons appeler au référence [1]

Considérons l'équation de second ordre suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^3 - 2\lambda \frac{dy}{dt}(t) + y = 0 \quad (3.11)$$

où $\lambda \in]-1;1[$.

Posons : $\frac{dy}{dt}(t) = x(t)$ alors $\frac{d^2y}{dt^2}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Ainsi l'équation (3.11) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 2\lambda x - x^3 - y \\ \frac{dy}{dt}(t) = x \end{cases} \quad (3.12)$$

3.3.1 Les points d'équilibres

Cherchons les points d'équilibres du système (3.12) :

$$\begin{cases} 2\lambda x - x^3 - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc le système (3.12) admet $(0,0)$ comme un point d'équilibre.

3.3.2 La stabilité des points d'équilibres

La matrice jacobienne du système (3.12) est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2\lambda - 3x^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Nous avons étudié la nature de point d'équilibre $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Calculons le déterminant et la trace de la matrice $J(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \det(J(0, 0)) &= 1 \\ \operatorname{tra}(J(0, 0)) &= 2\lambda \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs propres de $J(0, 0)$:

Soit :

$$P(\mu) = \mu^2 - \operatorname{tra}(J(0, 0))\mu + \det(J(0, 0))$$

Le polynôme caractéristique de $J(0, 0)$, calculons le discriminant de $P(\mu)$:

$$\Delta^0 = (\operatorname{tra}(J(0, 0)))^2 - 4\det(J(0, 0)) = 1 - \lambda^2$$

Le fait que :

$$\lambda \in]-1; 1[$$

Alors : $\Delta^0 < 0$.

Ainsi $P(\mu)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\mu_1(\lambda) = \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \mu_2 = \lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2}$$

Posons :

$$\alpha(\lambda) = \lambda \text{ et } \omega(\lambda) = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

1. Si $0 < \lambda < 1$ alors $\alpha(\lambda) > 0$, donc $(0, 0)$ est un foyer instable.
2. Si $-1 < \lambda < 0$ alors $\alpha(\lambda) < 0$, donc $(0, 0)$ est un foyer stable.
3. Si $\lambda = 0$ alors $\alpha(\lambda) = 0$, donc on peut rien dire.

Notre valeur de bifurcation sera : $\lambda^* = 0$.

3.3.3 Existence de P-A-H

1. La matrice jacobienne (3.14) admet deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\mu_1(\lambda) = \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}, \mu_2 = \lambda - i\sqrt{1 + \lambda^2}$$

Posons :

$$\alpha(\lambda) = \lambda \text{ et } \omega(\lambda) = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

2. Montrons que $\alpha(\lambda^*) = 0$ et $\omega(\lambda^*) \neq 0$, en effet :

$$\alpha(\lambda^*) = \lambda^* = 0$$

$$\omega(\lambda^*) = 1 \neq 0$$

3. Montrons que $\frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda^*) \neq 0$, en effet :

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda^*) = 1 \neq 0$$

Donc il s'agit d'une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf quand $\lambda^* = 0$.

3.3.4 La nature de bifurcation de P-A-H

Déterminons le premier exposant de Lyapunov du système (3.12) :

Posons :

$$f(x, y) = 2\lambda x - x^3 - y \text{ et } g(x, y) = x$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}(0, 0) = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) &= -6 \end{aligned}$$

Alors :

$$a(0) = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} < 0.$$

Alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour $\lambda < 0$, et un point d'équilibre instable pour $\lambda > 0$, avec un orbite périodique asymptotiquement stable pour $\lambda > 0$.

Donc le système (3.12) admet une bifurcation de P-A-H super critique.

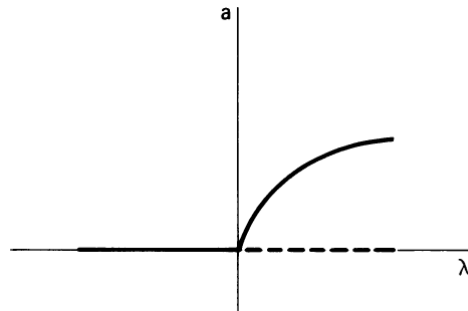
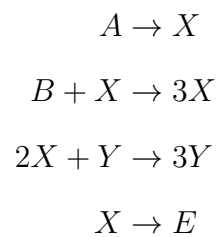


FIGURE 3.3 – Le diagramme de la bifurcation de Modelé Rayleigh (où $a = (x, y)$)

3.4 Oscillation dans les réactions chimiques

Dans cette partie nous allons appeler au référence [1].

Pour illustrer la possibilité d'oscillations dans une réaction chimique, considérons le système suivant :



où les concentrations initiales et finales des produits chimiques A , B , D et E sont constants, $(-r^2 + b - 1)^2 < 4r^2$ et les concentrations de X et Y satisfont au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = r - (b+1)X + X^2Y \\ \frac{dY}{dt}(t) = bX - X^2Y \end{cases} \quad (3.15)$$

3.4.1 Les points d'équilibres

Cherchons les points des équilibres du système (3.15) :

$$\begin{cases} r - (b + 1)X + X^2Y = 0 \\ bX - X^2Y = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

donc le système (3.15) admet $(X^*, Y^*) = (r, \frac{b}{r})$ comme un point d'équilibre.

3.4.2 La stabilité des points d'équilibres

La matrice jacobienne du système (3.15) est :

$$J(X, Y) = \begin{pmatrix} -(b + 1) + 2XY & X^2 \\ b - 2XY & -X^2 \end{pmatrix}$$

Nous avons étudié la nature de point d'équilibre $(r, \frac{b}{r})$:

$$J(r, \frac{b}{r}) = \begin{pmatrix} b - 1 & r^2 \\ -b & -r^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Calculons le déterminant et la trace de la matrice $J(r, \frac{b}{r})$:

$$\begin{aligned} \det(J(r, \frac{b}{r})) &= r^2 \\ \text{tra}(J(r, \frac{b}{r})) &= b - 1 - r^2 \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs propres de $J(r, \frac{b}{r})$:

Soit :

$$P(\mu) = \mu^2 - \text{tra}(J(r, \frac{b}{r}))\mu + \det(J(r, \frac{b}{r}))$$

Le polynôme caractéristique de $J(r, \frac{b}{r})$, calculons le discriminant de $P(\mu)$:

$$\Delta^* = (b - 1 - r^2)^2 - 4r^2$$

le fait que :

$$(-r^2 + b - 1)^2 < 4r^2$$

Alors : $\Delta^* < 0$.

Ainsi $P(\mu)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\mu_1 = \frac{b - 1 - r^2 + i\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b - 1)^2}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b - 1 - r^2 - i\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b - 1)^2}}{2}$$

Posons :

$$\alpha(\mu) = \frac{b - 1 - r^2}{2} \quad \text{et} \quad \omega(\mu) = \frac{\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b - 1)^2}}{2}$$

1. si $b < 1 + r^2$ alors $\alpha(\mu) < 0$ donc $(r, \frac{b}{r})$ est un foyer stable.
2. si $b > 1 + r^2$ alors $\alpha(\mu) > 0$ donc $(r, \frac{b}{r})$ est un foyer instable.
3. si $b = r^2 + 1$ alors $\alpha(\mu) = 0$ donc on peut rien conclure.

Notre valeur de bifurcation sera $b^* = r^2 + 1$.

3.4.3 Existence de bifurcation de P-A-H

1. La matrice jacobienne (3.17) admet deux valeurs propres complexes :

$$\mu_1 = \frac{b - 1 - r^2 + i\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b - 1)^2}}{2}$$

$$\mu_2 = \frac{b - 1 - r^2 - i\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b - 1)^2}}{2}$$

Posons :

$$\alpha(\mu) = \frac{b - 1 - r^2}{2}, \quad \omega(\mu) = \frac{\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b - 1)^2}}{2}$$

2. Montrons que : $\alpha(b^*) = 0$ et $\omega(b^*) \neq 0$, en effet :

$$\alpha(b^*) = b^* - 1 - r^2 = 0$$

$$\omega(b^*) = \frac{\sqrt{4r^2 + (-r^2 + b^* - 1)^2}}{2} = r \neq 0$$

3. Montrons que $\frac{d\alpha}{db}(b^*) \neq 0$, en effet :

$$\frac{d\alpha}{db}(b^*) = \frac{1}{2} \neq 0$$

par un changement de variable de type :

$$x = X - r, y = Y - \frac{b}{r}$$

le système (3.15) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = r - (b+1)(x+r) + (x+r)^2(y + \frac{b}{r}) \\ \frac{dy}{dt}(t) = b(x+r) - (x+r)^2(y + \frac{b}{r}) \end{cases} \quad (3.18)$$

Alors le système (3.18) admet $(0,0)$ comme point d'équilibre.

Soit q_1 le vecteur propre associé à $\mu_1(b^*) = ir$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

donc la matrice de passage P défini par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & -1 \end{pmatrix}$$

Soit les coordonnées (u, w) défini par :

$$\begin{cases} u = rx + ry \\ w = x \end{cases}$$

Alors le système (3.18) devient :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = r^2 - (w+r)r \\ \frac{dw}{dt}(t) = r - (b+1)(w+r) + (w+r)^2(\frac{1}{r}u - w + \frac{b}{r}) \end{cases} \quad (3.19)$$

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne du système (3.19) au point d'équilibre $(0, 0)$ et au valeur de bifurcation $b^* = r^2 + 1$.

3.4.4 La nature de bifurcation de P-A-H

Déterminons le premier exposant de Lyapunov associé à l'équation (3.19) :

$$a(0) = \frac{-2r^2 - 4}{16r^2} < 0$$

donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $b < r^2 + 1$, et un point d'équilibre instable pour $b > r^2 + 1$, avec un orbite périodique asymptotiquement stable pour $b > r^2 + 1$.

Donc le système (3.15) admet une bifurcation de P-A-H super critique.

conclusion

Ce mémoire a pour but de donner les notions de base relatives à la théorie des bifurcations, et de donner quelques exemples concrets d'applications de cette théorie, les bifurcations sont incontournables dès que l'on s'intéresse aux systèmes dynamiques, elles trouvent des applications en physique, en chimie, en architecture, en mécanique, en écologie et en épidémiologie...

Bibliographie

- [1] J.Hale & H.Kocak. *Dynamics and Bifurcations* Springer-Verlag New York, 1991.
- [2] J.C. Poggiale & C.Lett & P. Auger. *Modélisation mathématique en écologie*. Dunod, Paris, 2010.
- [3] Y.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition..* Springer-Verlag New York 1995 1998.
- [4] S.Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos..* Springer-Verlag New York 2003, 1990.
- [5] J.P. Francoise. *Oscillations en biologie Analyse qualitative et modèles* . Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.
- [6] S.H. Strogatz. *NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS* . by Perseus Books Publishing, L.L.C. 1994.
- [7] S.Guo & J. Wu. *Bifurcation Theory of Functional Differential Equations* . Springer Science+Business Media New York 2013.
- [8] V.Pata. *Fixed Point Theorems and Applications*, Springer Nature Switzerland AG 2019.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est l'étude théorique et qualitative des modèles mathématiques appliquée aux sciences, ont utilisant quelque type de bifurcation, on s'intéresse examiné la bifurcation P-A-H et bifurcation cusp théoriquement.

Mots clés : Théorème des fonctions implicites, stabilité, valeur propre, vecteur propre, matrice jacobienne, fonction de lyapunov.

Abstract :

The objective of this thesis is the theoretical and qualitative study of mathematical models applied to science, using some type of bifurcation, we are interested in examining the bifurcation P-A-H and bifurcation cusp theoretically.

Keywords : The implicit function theorem, Stability, eigenvalues, eigenvectors, Jacobian matrix, Liapunov Function.