République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :
Melle. Wassila BOUBOSSELA

Quelques problèmes de CAUCHY pour les équations différentielles non-linéaires

Encadrant :
Dr.Kheir eddine Biroud
Maître de conférence "A" à l'E.S.M de Tlemcen.

Soutenu en juin 2020

Devant le jury composé de :

Président :	Dr. Hamid KHIAR M.C.A	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Dr. Tawfiq fawzi Mami M.C.A	C.U.B.B.A.T.
Encadreur :	Dr. Kheir eddine Biroud M.C.A	E.S.M de Tlemcen.

"Vivre avec l'espoir est une vie qui en vaut bien d'autres."
Philosophe :Blaise Pascal.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail,

A mon cher père ahmed,
qui est le plus bon père dans ce monde,grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A ma chère mère lahouaria,
en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tout les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accordent et tout l'amour dont elle m'entoure.

A toue ma famille,
pour leur encouragement.

A mes amis(es),
à tous ceux qui me sont chers.

A ma très chère copine Sanaa,
pour leur soutien moral.

A tout les personnes qui sont encouragée, qui ont tant attendu ce jour-là.

M^{elle} ***Wassila***

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courge et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur **Monsieur le docteur Biroud kheir eddine**. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger mon mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

*J'*adresse particulièrement mes remerciements à **Monsieur le docteur KHIAR Hamid**, d'avoir accepté de présider le jury.

Un grand merci aussi à **Monsieur le docteur Mami tawfiq fawzi**, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Mes vifs témoignages, à toute personne, ayant contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce projet.

M^{elle} ***Wassila***

Table des matières

Introduction **v**

1 Préliminaires **3**

1.1 La méthode de la sous et sur solution 3
1.2 Espace de Banach 4
1.3 Fonction convexe 5
1.4 Introduction à l'analyse fonctionnelle 6
1.5 Théorèmes du point fixe 6
1.5.1 Théorème d'Arzéla-Ascoli 6
1.5.2 Théorème du point fixe de type Leray Schauder 7
1.5.3 Théorème du point fixe de Banach 7
1.5.4 Théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii 7

2 Existence des solutions pour certains problèmes aux limites de troisième ordre **9**

2.1 Introduction 9
2.2 Préliminaires 10
2.3 Résultats d'existence 14

3 Solutions positives à un problème aux limites non locales de quatrième ordre **18**

3.1 Introduction 18
3.2 Lemmes fondamentaux 19
3.3 Quelques résultats d'existence 26

Bibliographie **31**

Notations

$\mathbb{R}$	:Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	:Espace euclidien de dimension n .
$\mathbb{K}$	:Un corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E	:Espace vectoriel.
$\mid . \mid$	: Valeur absolue d'un nombre réel .
$\|.\|$	:Norme sur $\mathbb{R}^n$.
I	:Intervalle ,tel que $I = [0, 1]$.
$\overline{\Omega}$	:Fermeture de Ω.
$\partial\Omega$	:La frontière de Ω.
$C([0, 1], \mathbb{R})$	:Espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C^2([0, 1], \mathbb{R})$	:Espace des fonctions de classe 2.
$C(X, Y)$	:Espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Introduction

L'étude des équations différentielles ordinaires se trouve à l'interface de nombreux problèmes scientifiques. En effet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires risque, dans certains cas, d'effacer des événements que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte. Inversement, on peut dire que c'est l'existence de ces phénomènes nouveaux-apparition de chocs, ou de singularités, comportement asymptotique profondément différent de celui des problèmes linéaires-qui rend la théorie difficile et qui conduit à faire appel à un arsenal mathématique très vaste. L'interaction avec le reste de la mathématique se fait aussi en sens inverse, car un certaine nombre de problèmes abstraits se traitent à l'aide des équations différentielles ordinaires (EDO) ou d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires. Les liens avec l'analyse numérique sont continuels, et s'effectuent dans les deux.

L'un des problèmes consiste à l'existence des solutions pour certains problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires non linéaires du troisième et quatrième ordre.

D'une manière générale, Les méthodes existantes sont de plusieurs sortes, nous citerons à titre d'exemples la méthode des sur et sous-solutions [1] et le théorème de point fixe de **Leray Schauder** 1 [2] . D'autre part nous trouvons des théorèmes importants qui donnent l'existence des solutions, par exemple, le théorème de **Krasnosel'skii** 2 [3] .

Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques problèmes de **CAUCHY** pour les équations différentielles non-linéaires, il est composé de trois chapitres :

1. **Juliusz Pawel Schauder**(21 septembre 1899, Lviv, en allemand Lemberg situé alors en Autriche-Hongrie-septembre 1943, Lemberg, Pologne occupée) est un mathématicien polonais.
2. **Mark Alexandrovich Krasnosel'skii**(Le 27 avril 1920, Starokostiantyniv, le 13 févrire 1997, Moscou) est un mathématicien russe. Parmi ses travaux sur l'analyse fonctionnelle non linéaire et ses applications.

Le premier chapitre de ce mémoire porte sur des préliminaires où on rappelons quelques définitions et théorèmes nécessaires pour le développement de notre travail.

Le deuxième chapitre, en utilisant la méthode de sous et sur solution et du théorème de point fixe de schauder pour l'existence des solutions du problèmes aux limites non linéaire du troisième ordre. On considère les problèmes suivants :

$$\begin{cases} u^{'''}(t) + f(t, u(t), u^{''}(t)) = 0, & t \in [0,1] \\ \\ r_1 u(0) - r_2 u^{'}(0) = r_3 u(1) + r_4 u^{'}(1) = u^{''}(0) = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u^{'''}(t) + f(t, u(t), u^{'}(t), u^{''}(t)) = 0, & t \in [0,1] \\ \\ u(0) = u^{'}(1) = u^{''}(0) = 0. \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times R^2 \to R$ est une fonction continue, r_1, r_2, r_3, $r_4 \geqslant 0$ et $\rho = r_2 r_3 + r_1 r_3 + r_1 r_4 > 0$.

Le troisième chapitre, est consacré à l'étude de l'existence d'une ou deux solutions positives pour le problème aux limites non locale de quatrième ordre, donnée par :

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u^{''}(t) = \lambda f(t, u(t), u^{''}(t)), & 0 < t < 1, \\ \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 p(s) u(s) ds, \\ \\ u^{''}(0) = u^{''}(1) = \displaystyle\int_0^1 q(s) u^{''}(s) ds, \end{cases}$$

où $p, q \in L^1[0.1]$, $\lambda > 0$ et $0 < \beta < \pi^2$, $f \in C([0,1] \times [0, \infty) \times (-\infty, 0], [0, \infty))$,

CHAPITRE 1

Préliminaires

Sommaire

1.1 La méthode de la sous et sur solution 3
1.2 Espace de Banach 4
1.3 Fonction convexe 5
1.4 Introduction à l'analyse fonctionnelle 6
1.5 Théorèmes du point fixe 6
1.5.1 Théorème d'Arzéla-Ascoli 6
1.5.2 Théorème du point fixe de type Leray Schauder 7
1.5.3 Théorème du point fixe de Banach 7
1.5.4 Théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii 7

Ce mémoire est consacré à l'étude de certains types de problèmes aux limites non-linéaires ,en utilisant notamment quelques méthodes connues et des théorèmes importants.

1.1 La méthode de la sous et sur solution

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$,

$$I = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leqslant t \leqslant b\},$$

$$I^{'} =]a, b[= \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\},$$

Notre objectif est d'étendre le domaine d'application de la méthode de sous-sur solutions à la classe de problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} u^{''}(t) = f(t, u(t)), \quad \forall t \in I, \\ \\ g_1(u(a), u^{'}(a)) = 0 = g_2(u(b), u^{'}(b)), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et g_1 et g_2 sont des applications continues qui vérifient respectivement :

(H_1) :$\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $y \longrightarrow g_1(x, y)$ est décroissante,

(H_2) :$\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $y \longrightarrow g_1(x, y)$ est croissante.

Définition 1.1.1. **1)** *Une fonction $\alpha \in C^{I'} \cap C^1(I)$ est une sous-solution de* (1.1) *si :*

(i) $\forall t \in I', \quad \alpha''(t) \geqslant y \; \forall y \in f(t, \alpha(t))$;

(ii) $g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leqslant 0, \quad g_2(\alpha(b), \alpha'(b)) \leqslant 0.$

2) *Une fonction $\beta \in C^{I'} \cap C^1(I)$ est une sur-solution de* (1.1) *si :*

(i) $\forall t \in I', \quad \beta''(t) \leqslant y \; \forall y \in f(t, \beta(t))$;

(ii) $g_1(\beta(a), \beta'(a)) \geqslant 0, \quad g_2(\beta(b), \beta'(b)) \geqslant 0.$

3) *Une solution de* (1.1) *est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie* (1.1).

Lorsque l'application l'application f admet une application continue, nous pouvons envisager la recherche de solutions de classe $C^2(I)$.

Théorème 1.1.1. *[4] On suppose que f admet une application continue et qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (1.1) *telles que*

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Alors le problème (1.1) *admet au moins une solutions $u \in C^2(I)$ vérifiant*

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

1.2 Espace de Banach

Cette section est consacrée à quelques définitions sur les espaces de Banach. On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1.2.1. *(Espace normé). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) *(séparation)* $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(ii) *(homogénéité)* $\forall \lambda \in K, \forall x \in E : N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$

(iii) *(inégalité triangulaire)* $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Une norme est généralement notée $\|.\|$ et le couple $(E, \|.\|)$ est dite l'espace vectoriel normé.

Exemple 1.2.1. *On définit une norme sur l'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbb{R})$ de la manière suivante*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Dans toute la suite on suppose que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.2.2. *(Suites convergentes). Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de E converge dans E s'il existe* $x \in E$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

c'est -à-dire pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geqslant n_0 \ \ \textit{implique} \ \ \|x_n - x\| \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors $x_n \to x$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$*.*
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge si elle ne converge pas.*

Définition 1.2.3. *(Suite de Cauchy). Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de E est une suite de Cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$m, n \geqslant n_0 \ \ \textit{implique} \ \ \|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.2.4. *(Espace de Banach). Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé est appelé espace de Banach sur E, si toute suite de Cauchy converge dans E.*

Exemple 1.2.2. *L'espace* $C([a, b], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.2.5. *Une sous-ensemble A d'un espace vectoriel E est dit convexe si et seulement si*

$$\textit{pour tout } x, y \in A, \quad \lambda \in [0, 1], \qquad \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Définition 1.2.6. *(Cône). [5] Un sous-ensemble K d'un espace vectoriel E est dit cône de sommet* x_0 *si et seulement s'il est stable par les homothéties de centre* x_0*, c-à-dire*

$$\textit{pour tout } x \in K, \quad \lambda > 0, \qquad x_0 + \lambda(x - x_0) \in K.$$

Remarque 1.2.1. **(i)** *Si on ne précise pas le sommet* x_0*, ce sera 0.*

(ii) *K est un cône si et seulement si,* $\lambda K \subset K$*, pour tout* $\lambda > 0$*.*

1.3 Fonction convexe

Définition 1.3.1. *(Fonction convexe).[5] On dit qu'une fonction* f *est convexe sur un intervalle I si et seulement si :*

$$\textit{pour tout } x, y \in I, \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lemme 1.3.1. *Soit* f *une fonction deux fois continument dérivable sur un intervalle I, alors*

i) Si $f''(x) \geqslant 0$*, pour tout* $x \in I$*, alors la fonction* f *est convexe sur I.*

1.4 Introduction à l'analyse fonctionnelle

Dans la suite $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent des espaces de Banach.

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application. On dit que $\mathcal{F}$ est bornée si elle envoie les parties bornées de E a des parties bornées de F c'est -à-dire l'image d'un borné est un borné.*

Remarque 1.4.1. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application bornée, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\text{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leqslant \varepsilon \Longrightarrow \|\mathcal{F}(x)\|_F \leqslant \delta.$$

Définition 1.4.2. *Soient $b \in E$ et $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. On dit que $\mathcal{F}$ est continue au point b si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour $x \in E$, on a*

$$\|x - b\|_E < \varepsilon \Longrightarrow \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(b)\|_F < \delta.$$

proposition 1.4.1. *Une application $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est continue au point x, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ converge vers x dans E, alors $(\mathcal{F}(x_n))_n$ converge vers $\mathcal{F}(x)$ dans F.*

Définition 1.4.3. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. L'application $\mathcal{F} : E \to F$ est dit compacte s'il transforme tout ensemble borné de E à un ensemble relativement compacte de F.*

Définition 1.4.4. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. L'application $\mathcal{F} : E \to F$ est dite complètement continue si :*

i) $\mathcal{F}$ est continue sur E.

ii) Pour tout sous-ensemble borné de A de E, implique que $\mathcal{F}(A)$ est relativement compacte dans F.

1.5 Théorèmes du point fixe

Définition 1.5.1. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application. Un élément x_0 de E est un point fixe de E si :*

$$\mathcal{F}(x_0) = x_0.$$

1.5.1 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Définition 1.5.2. *(Equicontinuité). Soit $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ espaces normés et $\mathcal{H}$ une partie de $C(E, F)$. On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que*

$$\forall x \in E, \ \ \|x - x_0\|_E < \eta \quad implique \quad \|f(x) - f(x_0)\|_F < \epsilon, \ \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.

Théorème 1.5.1. *(Arzéla-Ascoli).[6] Soit K un sous-ensemble compacte dans E et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $C(K, F)$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $C(K, F)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *$\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue.*

(ii) *$\forall x \in K, \mathcal{H}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ est bornée dans F.*

1.5.2 Théorème du point fixe de type Leray Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compacte admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.5.2. *(Schauder).[2] Soient E un espace de Banach et M un sous ensemble convexe fermé et borné de E. Supposons que et $T : E \to E$ est complètement continu et $T(M) \subset M$, alors T admet un point fixe dans M.*
Plus généralement, si M est un compact convexe de E alors toute fonction continue de $T(M) \subset M$ vers E tel que $T(M) \subset M$, fixe alors T possède un point fixe dans M.

1.5.3 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.5.3. *(Principe de contraction de Banach).[2] Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $\mathcal{F} : E \to E$ une contraction, s'il existe $0 \leqslant k < 1$, tel que :*

$$\forall \ y_1, y_2 \in E, \ \ \|\mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2)\|_E \leqslant k\|y_1 - y_2\|_E$$

alors l'opérateur $\mathcal{F}$ admet un point fixe unique $x \in E$.

1.5.4 Théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii

Le théorème classique de **BROUWER-SCHAUDER** qui dite aussi le théorème du point fixe est un outil important dans l'étude de l'existence des solutions pour des différents problèmes mathématique. En 1960, un autre théorème du point fixe apparut c'est celui de Krasnoselskii, et sa version générale est outil pour obtenir un ordre de multiplicité pour les solutions positives pour des problèmes aux limites différents, notamment dans les équations différentielles ordinaires et leurs versions discrètes.

Théorème 1.5.4. *(Krasnoselskii).[3] Soit K un cône défini dans un espace de Banach $(E, \|.\|_E)$. Supposons que Ω_1 et Ω_2 deux sous ensembles ouverts non vide de E. Avec*

$$0 \in \Omega_1, \quad \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2.$$

Soit $A : K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$ *une application complètement continue telle que*

(1) $\|Au\| \leqslant \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \geqslant \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_2$, *ou bien*

(2) $\|Au\| \geqslant \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \leqslant \|u\|$, *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors l'application A *possède un point fixe dans* $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

CHAPITRE 2

Existence des solutions pour certains problèmes aux limites de troisième ordre

Sommaire

2.1 **Introduction** 9
2.2 **Préliminaires** 10
2.3 **Résultats d'existence** 14

2.1 Introduction

Récemment, des problèmes aux limites de troisième ordre ont été examinés dans de nombreux articles. Certains problèmes de régulation et de contrôle de certaines actions par un niveau de contrôle ou par un signal se réduisent à résoudre les équations du troisième ordre. D'autres applications des équations différentielles du troisième ordre sont rencontrées dans le contrôle d'un appareil volant dans l'espace cosmique, la déviation du faisceau sandwich et l'étude des écoulements de drainage et de revêtement. Pour plus de détails voir **BAI** [7] .

Comme le soulignent **Anderson et J.M.Davis** [8] , une grande partie de la littérature sur la solution des problèmes aux limites d'ordre supérieur semble être liée aux travaux de **Krasnosel'skii** sur les équations d'opérateurs non linéaires ainsi que sur d'autres théorèmes de point fixe.

La méthode de sur et sous solutions est largement développée pour les équations d'ordre inférieur avec des conditions aux limites linéaires et non linéaires. Mais il n'y a que quelques applications aux équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur. Pour les applications à des EDO d'ordre supérieur, nous renvoyons le lecteur à **Ehme** [13] , **Klaasen** [14] et les références qui s'y trouvent. En particulier, dans **Cabada** [10] et **Yao** [32] , la méthode de sur et de sous solution est utilisée pour avoir des résultats d'existence de certains problèmes aux limites du troisième ordre avec un terme non linéaire monotone ou quasi monotone c'est à dire qui ne dépend d'aucune dérivés d'ordre inférieur.

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions pour deux problèmes aux limites non linéaires du troisième ordre suivants :

$$u^{'''}(t) + f(t, u(t), u^{''}(t)) = 0, \quad pour \quad tout \quad t \in [0, 1], \tag{2.1}$$

$$r_1 u(0) - r_2 u^{'}(0) = r_3 u(1) + r_4 u^{'}(1) = u^{''}(0) = 0, \tag{2.2}$$

et

$$u^{'''}(t) + f(t, u(t), u^{'}(t), u^{''}(t)) = 0, \quad pour \quad tout \quad t \in [0, 1], \tag{2.3}$$

$$u(0) = u^{'}(1) = u^{''}(0) = 0. \tag{2.4}$$

La méthode utilisée ici n'est pas basée sur le théorème du point fixe de **Krasnosel'skii** ou des opérateurs monotones, il est plutôt basé sur le théorème de point fixe de **Schauder** et la méthode de sur et sous solution.

2.2 Préliminaires

Dans cette section , nous considérons (2.1)-(2.2), en supposant que $f : [0, 1] \times R^2 \to R$ est une fonction continue, $r_1, r_2, r_3, r_4 \geqslant 0$ et $\rho = r_2 r_3 + r_1 r_3 + r_1 r_4 > 0$. Nous donnons quelques lemmes qui indiquent certaines restrictions sur le terme non linéaire qui nous permettre de construire de sur et sous solutions .

Définition 2.2.1. *On dit que α et β de $C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1)$ sont de sur et sous solutions du problème* (2.1)-(2.2)*, respectivement, si*

$$\begin{cases} \alpha^{'''}(t) + f(t, \alpha(t), \alpha^{''}(t)) \geqslant 0, \quad 0 < t < 1, \\ \\ r_1 \alpha(0) - r_2 \alpha^{'}(0) = r_3 \alpha(1) + r_4 \alpha'(1) = 0, \quad \alpha''(0) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^{'''}(t) + f(t, \beta(t), \beta^{''}(t)) \leqslant 0, \quad 0 < t < 1, \\ \\ r_1 \beta(0) - r_2 \beta^{'}(0) = r_3 \beta(1) + r_4 \beta'(1) = 0, \quad \beta''(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

avec : $\alpha(t) = \int_0^1 G(t, s) N s \mathrm{d}s, \beta(t) = \int_0^1 G(t, s) M s \mathrm{d}s$.
Notons $G(t, s)$ la fonction de Green de

$$-u^{''}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2.5}$$

$$r_1 u(0) - r_2 u^{'}(0) = r_3 u(1) + r_4 u^{'}(1) = 0,$$

ensuite

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}x(t)y(s), & 0\leqslant s<t\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}x(s)y(t), & 0\leqslant t<s\leqslant 1,\end{cases}\tag{2.6}$$

où $x(t)=r_3+r_4-r_3t$ *et* $y(t)=r_2+r_1t$, *pour* $t\in[0,1]$, $\rho=r_2r_3+r_1r_3+r_1r_4$.
Clairement, $G(t,s)\geqslant 0$ *pour* $0\leqslant t,\ s\leqslant 1$.

Le lemme suivant vient de **Lian**[15] avec une petite modification.

Lemme 2.2.1. *[15] . Pour G(t,s) défini par* (2.6), *les conditions suivantes sont satisfaites :*

(R1) $\dfrac{G(t,s)}{G(s,s)}\leqslant 1$ *pour* $t,s\in(0,1)$,

(R2) $\dfrac{G(t,s)}{G(s,s)}\geqslant C=\min\{\dfrac{r_4}{r_3+r_4},\ \dfrac{r_2}{r_1+r_2}\}\geqslant 0$, *pour* $t,s\in(0,1)$.

Preuve. *Soit*

$$x(t)=r_3+r_4-r_3t,$$

et

$$y(t)=r_2+r_1t,\quad pour\ t\in[0,1].$$

ensuite

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}x(t)y(s), & 0\leqslant s<t\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}x(s)y(t), & 0\leqslant t<s\leqslant 1,\end{cases}$$

Ce qui implique

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{\rho}x(t)y(s)}{\frac{1}{\rho}x(s)y(s)}, & 0\leqslant s<t\leqslant 1,\\[3ex] \dfrac{\frac{1}{\rho}x(s)y(t)}{\frac{1}{\rho}x(s)y(s)}, & 0\leqslant t<s\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\dfrac{x(t)}{x(s)}, & 0\leqslant s<t\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{y(t)}{y(s)}, & 0\leqslant t<s\leqslant 1,\end{cases}$$

Par conséquent, nous obtenons les résultats souhaités suivants

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}\leqslant 1\quad pour\ t\in[0,1],$$

et

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \begin{cases} \dfrac{r_3 + r_4 - r_3 t}{r_3 + r_4 - r_2 s}, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ \\ \dfrac{r_2 + r_1 t}{r_2 + r_1 s}, & 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} \geqslant \begin{cases} \dfrac{r_4}{r_3 + r_4} \geqslant C, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ \\ \dfrac{r_2}{r_2 + r_1} \geqslant C, & 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \end{cases}$$

avec : $C = \min\{\dfrac{r_4}{r_3 + r_4}, \quad \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}\} \geqslant 0$ □

Soit $\eta = \displaystyle\int_0^1 G(s,s)s\mathrm{d}s > 0$. Nous avons les résultats suivants.

Lemme 2.2.2. *S'il existe une constante* $M \geqslant 0$ *telle que*

$$f(t,s,r) \leqslant M, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \eta MC \leqslant s \leqslant \eta M, \quad -M \leqslant r \leqslant 0,$$

alors le problème (2.1) *et* (2.2) *admet une sur solution.*

Preuve. *Si* $v(t) = -u''(t)$*, le Problème* (2.1)-(2.2) *est équivalent à*

$$v'(t) = f(t, (Av)(t), -v(t)), \quad 0 < t < 1. \tag{2.7}$$

$$v(0) = 0, \tag{2.8}$$

où $(Av)(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)v(s)\mathrm{d}s$ *et* $G(t,s)$ *est défini par* (2.6)*. Il est clair que la restriction sur* f *garantie que* $\psi(t) = Mt$ *satisfait*

$$\begin{cases} \psi'(t) - f(t, (A\psi)(t), -\psi(t)) \geqslant 0, & 0 < t < 1, \\ \psi(0) \geqslant 0. \end{cases}$$

Cela montre que $\beta(t) = (A\psi)(t)$ *est une sur solution du problème*(2.1)-(2.2). □

Lemme 2.2.3. *S'il existe une constante* $N \leqslant 0$ *telle que*

$$f(t,s,r) \geqslant N, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \eta N \leqslant s \leqslant \eta NC, \quad 0 \leqslant r \leqslant -N$$

alors le problème (2.1)-(2.2) *admet une sous solution.*

Preuve. *Si* $v(t) = -u''(t)$*,le problème* (2.1)-(2.2) *est équivalent à*

$$v'(t) = f(t, (Av)(t), -v(t)), \quad 0 < t < 1 \tag{2.9}$$

$$v(0) = 0, \tag{2.10}$$

où $(Av)(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)\mathrm{d}s$ *et* $G(t,s)$ *est défini par* (2.6). *Il est clair que la restriction sur* f *garantie que* $\varphi(t) = Nt$ *satisfait*

$$\begin{cases} \varphi'(t) - f(t,(A\varphi)(t), -\varphi(t)) \leqslant 0, \quad 0 < t < 1, \\ \varphi(0) \leqslant 0. \end{cases}$$

Cela montre que $\alpha(t) = (A\varphi)(t)$ *est une sous solution du problème* (2.1)-(2.2). □

Remarque 2.2.1. *Nous avons*

$$\alpha(t) = \int_0^1 G(t,s)Ns\mathrm{d}s, \beta(t) = \int_0^1 G(t,s)Ms\mathrm{d}s.$$

En effet, nous pouvons écrire explicitement la sur solution $\beta(t)$ *et sous solution* $\alpha(t)$. *En particulier, si* $r_1, r_3 \neq 0$ *et* $r_2 = r_4 = 0$, *alors :*

$$\begin{cases} -u''(t) = v(t) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

où $(Av)(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)\mathrm{d}s$.
alors :

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \int_0^1 G(t,s)Ms\mathrm{d}s. \\ &= \int_0^t G(t,s)Ms\mathrm{d}s + \int_t^1 G(t,s)Ms\mathrm{d}s. \\ &= \frac{1}{\rho}\int_0^t x(t)y(s)Ms\mathrm{d}s + \frac{1}{\rho}\int_t^1 x(s)y(t)Ms\mathrm{d}s. \\ &= -\frac{Mt^3}{6} + \frac{Mt}{6}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_0^1 G(t,s)Ns\mathrm{d}s. \\ &= \int_0^t G(t,s)Ns\mathrm{d}s + \int_t^1 G(t,s)Ns\mathrm{d}s. \\ &= \frac{1}{\rho}\int_0^t x(t)y(s)Ns\mathrm{d}s + \frac{1}{\rho}\int_t^1 x(s)y(t)Ns\mathrm{d}s. \\ &= -\frac{Nt^3}{6} + \frac{Nt}{6}. \end{aligned}$$

donc $\beta(t) = -\frac{M}{6}t^3 + \frac{M}{6}t$ *et* $\alpha(t) = -\frac{N}{6}t^3 + \frac{N}{6}t$ *sont sur et sous solutions du problème* (2.1)-(2.2).

2.3 Résultats d'existence

Dans cette section, nous donnons quelques résultats d'existence pour les problèmes (2.1)-(2.2) et (2.3)-(2.4).

Théorème 2.3.1. *Supposons qu'il existe deux constantes* $M \geqslant 0 \geqslant N$, $M \geqslant |N|$ *tel que*

$$f(t,s,r) \leqslant M, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \eta MC \leqslant s \leqslant \eta M, \quad -M \leqslant r \leqslant 0, \tag{2.11}$$

$$f(t,s,r) \geqslant N, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \eta N \leqslant s \leqslant \eta NC, \quad 0 \leqslant r \leqslant -N, \tag{2.12}$$

Si $f(t,s,r)$ *est augmente en* s, *alors le problème* (2.1)-(2.2) *admet une solutionu*(t) *telle que* $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$, $\beta^{''}(t) \leqslant u^{''}(t) \leqslant \alpha''(t)$, $t \in [0,1]$ *où*

$$\beta(t) = M\int_0^1 G(t,s)sds$$

et

$$\alpha(t) = N\int_0^1 G(t,s)sds.$$

Preuve. *Supposons que les hypothèses* (2.11) *et* (2.12)*, alors la sous solution* $\alpha(t)$ *et la sur solution* $\beta(t)$ *du problème* (2.3) *et* (2.4) *sont assuré par le lemme* (2.2.2) *et le lemme* (2.2.3)*. Posons* $\varphi = -\alpha''$, $\psi = -\beta''$, *puis* $\varphi(t) = Nt \leqslant Mt = \psi(t)$. *En revanche,* $M \geqslant 0 \geqslant N$ *implique* $\alpha''(t) \geqslant \beta''(t)$, *pour* $0 < t < 1$. *En tenant compte de la condition aux limites* (2.2) *et du fait que la fonction de Green* $G(t,s) \geqslant 0$ *donne* $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$, *pour* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Maintenant,Considérons le problème tronqué

$$Lv = Fv, \quad v \in dom(L), \tag{2.13}$$

où $L : domL = \{v \in C^1(0,1) \cap C[0,1] : v(0) = 0\} \longrightarrow C[0,1]$ *est un opérateur différentiel tel que* $(Lv)(t) = v^{'}(t)$, $t \in (0,1)$, *et* $F : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ *est un opérateur continu défini comme*

$$(Fv)(t) = f(t, A[v(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)}, \quad -[v(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)}), \tag{2.14}$$

où $[v]_\varphi^\psi = \min\{\psi, \max\{v,\varphi\}\}$.

Premièrement, nous prouvons que si v^* *est une solution de* (2.13)*, alors* $\varphi(t) \leqslant v^*(t) \leqslant \psi(t)$, $t \in [0,1]$. *Par conséquent,* $v^*(t)$ *est une solution de* (2.7)-(2.8)*. De plus,* $u^*(t) = (Av^*)(t)$ *est une solution de* (2.1)-(2.2) *satisfaisant* $\alpha(t) \leqslant u^*(t) \leqslant \beta(t)$.
En fait, si $\varphi(t) \nleqslant v^*(t)$, *il existe* $\bar{t} \in (0,1)$ *tel que* $v^*(\bar{t}) < \varphi(\bar{t})$. *Comme* $v^*(0) = 0 = -\alpha''(0) = \varphi(0)$, *par la continuité de* v^* *et* φ, *il existe* $t_1 \in [0,\bar{t})$, $t_2 \in (\bar{t},1]$ *telle que* $v^*(t_1) = \varphi(t_1)$ *et* $v^*(t) < \varphi(t)$,

pour $t \in (t_1, t_2)$. *Par conséquent, pour* $t \in [t_1, t_2]$,

$$(Fv^*)(t) = f(t, A[v^*(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)}, -[v^*(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)})$$
$$= f(t, A[v^*(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)}, -\varphi(t)).$$

Soit $p(t) = v^* - \varphi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *compte tenu de la monotonie de* f *et l'ensemble* A, *on a*

$$\varphi^{'}(t) = -\alpha^{'''}(t) \leqslant f(t, \alpha(t), \alpha^{''}(t)) = f(t, A\varphi(t), -\varphi(t)), \quad t \in [0.1]$$
$$v^{*'}(t) = (Fv^*)(t) = f(t, A[v^*(t)]_{\varphi(t)}^{\psi(t)}, -\varphi(t)), \quad t \in [t_1, t_2],$$

donc $p^{'}(t) \geqslant 0$, $t \in [t_1, t_2]$. *Ainsi,* $p(t_1) = 0$ *implique* $p(t) \geqslant 0$,$t \in [t_1, t_2]$. *A savoir* $v^*(t) \geqslant \varphi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. *C'est une contradiction. Ainsi,* $\varphi(t) \leqslant v^*(t)$ *pour* $t \in [0, 1]$.
De façon analogue, nous pouvons prouver que $v^*(t) \leqslant \psi(t)$, $t \in [0, 1]$.

Deuxièmement, nous prouvons que l'équation d'opérateur (2.13) *a une solution. Soit* $T : C[0.1] \longrightarrow C[0, 1]$ *par*

$$(Tv)(t) = \int_0^t (Fv)(s)ds, \quad t \in [0, 1].$$

Il est claire que T *est un opérateur continu et le point fixe de* T *est une solution du problème* (2.13). *L'ensemble* $B_M = \{w \in C[0, 1] : \|w\| \leqslant M\}$, *en tenant compte du fait que* $|N| = \|\varphi\| \leqslant \|\psi\| = M$, *alors on déduit que* $\varphi, \psi \in B_M$. *Maintenant à partir de la condition* (2.11), *on a*

$$\|Tv\| \leqslant M, \quad v \in B_M$$
$$|(Tv)(t) - (Tv)(s)| = \left| \int_s^t (Fv)(r)dr \right| \leqslant M|t - s|.$$

C'est, $\{T(B_M)\}$ *est équi-continu et uniformément borné. D'après le théorème* ***Arzela-Ascoli****, nous affirmons que* $T : B_M \longrightarrow B_M$ *est un opérateur complètement continu, Autrement dit, théorème de point fixe de* **schauder** *garantie que* T *est admet une point de fixe* $v^* \in B_M$.
Par conséquent,

$$u^*(t) = \int_0^1 G(t, s)v^*(s)ds$$

est une solution du problème (2.1)-(2.2) *en* $C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1)$ *tels que* $\alpha(t) \leqslant u^*(t) \leqslant \beta(t)$, $\beta^{''}(t) \leqslant u^*(t) \leqslant \alpha^{''}(t)$, $t \in [0, 1]$.

□

Remarque 2.3.1. *On observe que l'existence de la constante* $M > 0$ *nous a permet non seulement de construire une sur solution du problème* (2.1)-(2.2), *mais aussi d'assuré que l'opérateur* $T : B_M \longrightarrow B_M$ *est complètement continu.*

Remarque 2.3.2. *Si le terme non linéaire* f *satisfait*

$$\overline{f}_{\infty} = \lim_{u \longmapsto +\infty} \sup \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{f(t, \eta u, -u)}{u} \leqslant 1$$

alors il existe $M > 0$ telle que $\beta(t) = \int_0^1 G(t,s)Msds$ *est un sur solution de* (2.1)-(2.2).
Si le terme non linéaire f satisfait

$$\underline{f}_{\infty} = \lim_{u \longmapsto -\infty} \inf \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{f(t, \eta u, -u)}{u} \leqslant 1$$

alors il existe $N < 0$ tel que $\alpha(t) = \int_0^1 G(t,s)Nsds$ *est une sous solution de* (2.1)-(2.2)

Exemple 2.3.1. *Considérons le problème*

$$u'''(t) + \frac{1}{3}[t + ln(1 + u(t)) - u''(t)] = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{2.15}$$

$$r_1 u(0) - r_2 u'(0) = r_3 u(1) + r_4 u'(1) = u''(0) = 0 \tag{2.16}$$

Soit $f(t,s,r) = \frac{1}{3}[t + ln(1+s) - r]$, *Il est facile de vérifier que $M = 1$ et $N = 0$ satisfont les conditions* (2.11) *et* (2.12), *respectivement et par conséquent ,*

$$\alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = \int_0^1 G(t,s)sds$$

sont des sur et sous solutions de (2.15)-(2.16). *Par le théorème* (2.3.1), *le problème* (2.15)-(2.16) *admet une solution positive u^* telle que* $0 \leqslant u^*(t) \leqslant \int_0^1 G(t,s)sds$.

Nous donnons maintenant quelques conditions suffisantes avec lesquelles il existe au moins une solution pour (2.3)-(2.4). *Dans la suit, nous supposons que* $f : [0,1] \times R^3 \to R$ *est continue. Il n'est pas difficile de voir que* (2.3)-(2.4) *est équivalent à*

$$v'(t) = f(t, (Av)(t), (Bv)(t), -v(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{2.17}$$

$$v(0) = 0, \tag{2.18}$$

où $(Av)(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds$, $(Bv)(t) = \int_t^1 v(s)ds$.
Soit

Lemme 2.3.1. *S'il existe une constante $M \geqslant 0$ et $M \geqslant |N|$ telle que*

$$f(t,s,r) \leqslant M, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \eta MC \leqslant s \leqslant \eta M, \quad -M \leqslant r \leqslant 0,$$

alors le problème (2.3) *et* (2.4) *admet une sur solution.*

et

Lemme 2.3.2. *S'il existe une constante $N \leqslant 0$ et $M \geqslant |N|$ telle que*

$$f(t,s,r) \geqslant N, \quad pour\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \eta N \leqslant s \leqslant \eta NC, \quad 0 \leqslant r \leqslant -N,$$

alors le problème (2.3)-(2.4) *admet une sous solution.*

les lemmes (2.3.1)*et*(2.3.2)*peuvent être obtenu de manière analogue et sont donc omis.*

Un argument similaire à celui du théorème (2.3.1)*fournit le résultat suivant concernant le problème* (2.3)-(2.4).

Théorème 2.3.2. *Supposons qu'il existe deux constantes $M \geqslant 0 \geqslant N$, $M \geqslant |N|$ tel que*

$$f(t,s,l,r) \leqslant M, pour \;\; t \in [0,1], \frac{s}{\eta}, 2l \in [0,M], \quad r \in [-M,0], \tag{2.19}$$

$$f(t,s,l,r) \geqslant N, pour \;\; t \in [0,1], s \in [\eta N, 0], 2l, \quad r \in [0,-N], \tag{2.20}$$

Si $f(t,s,l,r)$ augmente dans chacun de s et l, alors (2.3)-(2.4) *a une solution $u(t)$ telle que $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$, $\beta''(t) \leqslant u''(t) \leqslant \alpha''(t)$, $t \in [0,1]$, où $\beta(t) = M\int_0^1 G(t,s)sds$, $\alpha(t) = N\int_0^1 G(t,s)sds$, $\eta = \frac{1}{3}$.*

Exemple 2.3.2. *Considérons le problème*

$$u'''(t) + \frac{1}{4}[t + |e^{u(t)}| + (u'(t))^2 + u''(t)] = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2.21}$$

$$u(0) = u'(1) = u''(0) = 0. \tag{2.22}$$

On peut vérifier que $M = 2$, $N = 0$ satisfont (2.19),(2.20)*, respectivement, donc*

$$\alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = 2\int_0^1 G(t,s)s\,ds$$

sont des sur et sous solutions de (2.21)-(2.22)*. D'après le théorème* (2.3.2)*, le problème* (2.21)-(2.22) *a une solution positive u^* telle que $0 \leqslant u^*(t) \leqslant 2\int_0^1 G(t,s)s\,ds$.*

CHAPITRE 3

Solutions positives à un problème aux limites non locales de quatrième ordre

Sommaire

3.1 Introduction **18**

3.2 Lemmes fondamentaux **19**

3.3 Quelques résultats d'existence **26**

3.1 Introduction

La déformation d'une poutre élastique à l'équilibre, dont les deux extrémités sont simplement supportées, peut être décrite par un problème aux limiteS d'équation ordinaire de quatrième ordre. En raison de son importance en physique, il a été étudié par de nombreux auteurs en utilisant des alternatives non linéaires de **Leray- Schauder**, la théorie de l'indice à point fixe et la méthode de la sous et sur solution, voir par exemple [19] -[22] ,[24] –[34] .

Récemment, une grande attention a été accordée à la question de la solution positive d'une équation différentielle du quatrième ordre avec un ou deux paramètres. Par exemple, **Li** [24] a étudié l'existence de solutions positives pour le problème aux limites de quatrième ordre

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) - \alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < t < 1, \\ \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

sous les hypothèses :

(J1) $f : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue,

(J2) $\beta < 2\pi^2,\ \alpha \geqslant -\beta^2/4, \alpha/\pi^4 + \beta/\pi^2 < 1.$

Chai [21] a étudié la forme généralisant ci-dessus avec des paramètres variables. Tous les résultats ne considèrent qu'une équation avec une condition aux limites à deux points. Plus récemment, **Ma** [27] a étudié l'existence de symétriques solutions positives de problème aux limites non locale de quatrième ordre

$$\begin{cases} u''''(t) = h(t)f(t,u), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 p(s)u(s)ds, \\ u''(0) = u''(1) = \displaystyle\int_0^1 q(s)u(s)ds. \end{cases}$$

Motivés par les articles ci-dessus, nous considérons les éléments non locaux suivants problème aux limites

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) = \lambda f(t,u(t),u''(t)), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 p(s)u(s)ds, \\ u''(0) = u''(1) = \displaystyle\int_0^1 q(s)u''(s)ds. \end{cases} \tag{3.2}$$

Nous supposons les conditions suivantes :

(A1) $\lambda > 0$ et $0 < \beta < \pi^2$.

(A2) $f \in C([0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,0],[0,\infty))$, $p,q \in L^1[0,1]$, $p(s) \geqslant 0, q(s) \geqslant 0$,
$$\int_0^1 p(s)ds < 1, \int_0^1 q(s)sin\sqrt{\beta}sds + \int_0^1 q(s)sin\sqrt{\beta}(1-s)ds < sin\sqrt{\beta}.$$

3.2 Lemmes fondamentaux

Posons $\lambda_1 = 0$ et $0 > \lambda_2 = -\beta > -\pi^2$. Étant donné $m \in L[0,1]$, soit

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1 - \int_0^1 m(x)dx, \\ \delta_2 &= \sin\sqrt{\beta} - \int_0^1 m(s)\sin\sqrt{\beta}sds - \int_0^1 m(s)\sin\sqrt{\beta}(1-s)ds. \end{aligned}$$

Par **(A1) et (A2)**, on a $\delta_i \neq 0, i = 1,2$. Notons $H_i(t,s), i = 1,2$ les fonctions de Green du problèmes suivants

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda_i u(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 m(s)u(s)ds. \end{cases}$$

Par calcul standard, on obtient

$$H_1(t,s) = G_1(t,s) + \frac{1}{\delta_1}\int_0^1 G_1(s,x)m(x)dx;$$

$$G_1(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \\ s(1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$H_2(t,s) = G_2(t,s) + \frac{\sin\sqrt{\beta}t + \sin\sqrt{\beta}(1-t)}{\delta_2}\int_0^1 G_2(s,x)m(x)dx;$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\beta}t \sin\sqrt{\beta}(1-s)}{\sqrt{\beta}\sin\sqrt{\beta}}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \\ \dfrac{\sin\sqrt{\beta}s \sin\sqrt{\beta}(1-t)}{\sqrt{\beta}\sin\sqrt{\beta}}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

On note

$$\rho_1 = \frac{1}{1-\displaystyle\int_0^1 p(x)dx},$$

$$\rho_2(t) = \frac{\sin\sqrt{\beta}t + \sin\sqrt{\beta}(1-t)}{\sin\sqrt{\beta} - \displaystyle\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{\beta}x dx - \int_0^1 q(x)\sin\sqrt{\beta}(1-x)dx}.$$

Lemme 3.2.1. *Supposons que (A1) et (A2) sont satisfaites, alors pour toute $g \in C[0,1]$, u résout le problème*

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) = g(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 p(s)u(s)ds, \\ u''(0) = u''(1) = \displaystyle\int_0^1 q(s)u''(s)ds, \end{cases} \tag{3.3}$$

Si et seulement si

$$u(t) = \int_0^1\int_0^1 K_1(t,s)K_2(s,\tau)g(\tau)d\tau ds,$$

Où

$$\begin{aligned} K_1(t,s) &= G_1(t,s) + \rho_1 \int_0^1 G_1(s,x)p(x)dx, \\ K_2(s,\tau) &= G_2(s,\tau) + \rho_2(s) \int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)dx. \end{aligned}$$

Preuve. **(i)** *Soit* $v = u''$, *alors* (3.3) *devient,*

$$\begin{cases} -v''(t) + \lambda_2 v(t) = -g(t), \quad 0 < t < 1, \\ v(0) = v(1) = \displaystyle\int_0^1 q(s)v(s)ds, \end{cases}$$

alors

$$v(t) = -\int_0^1 K_2(t,s)g(s)ds. \tag{3.4}$$

De même, à partir de

$$\begin{cases} -u''(t) = -v(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 p(s)u(s)ds, \end{cases}$$

On obtient

$$u(t) = -\int_0^1 K_1(t,s)v(s)ds. \tag{3.5}$$

De (3.4) *et* (3.5)*, nous obtenons*

$$u(t) = -\int_0^1 K_1(t,s)\left[-\int_0^1 K_2(s,\tau)g(\tau)d\tau\right]ds = \int_0^1\int_0^1 K_1(t,s)K_2(s,\tau)g(\tau)d\tau ds.$$

D'ou le résultat.

(ii) *Soit*

$$v(s) = -\int_0^1 K_2(s,\tau)g(\tau)d\tau. \tag{3.6}$$

Par hypothèse, on a $u(t) = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 K_1(t,s)K_2(s,\tau)g(\tau)d\tau ds$*, il s'en suit que*

$$u(t) = -\int_0^1 K_1(t,s)v(s)ds. \tag{3.7}$$

Selon la définition de K_1 *et* (3.6), $v(\tau)$ *est une solution du problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -v''(t) + \lambda_2 v(\tau) = -g(\tau), \quad 0 < \tau < 1, \\ \\ v(0) = v(1) = \displaystyle\int_0^1 q(\tau)v(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{3.8}$$

De même, avec (3.7) *on a* $u(t)$ *est une solution du problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -u''(t) = -v(t), \quad 0 < t < 1, \\ \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 p(s)u(s)ds, \end{cases} \tag{3.9}$$

De (3.8) *et* (3.9), *nous obtenons que* u *est une solution de* (3.3). □

Soit $Y = C[0,1]$, l'espace de Banach équipé de la norme $\|u\|_0 = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|$. Posons

$$X = \left\{ u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = \int_0^1 p(s)u(s)ds, u''(0) = u''(1) = \int_0^1 q(s)u''(s)ds \right\},$$

$$\|u\|_1 = \|u''\|_0, \|u\|_2 = \|u\|_0 + \|u\|_1 \quad pour \quad u \in X.$$

Il est clair que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ sont normes sur X.

Lemme 3.2.2. $(X, \|.\|_2)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. *Tout abord, prouvons* $\|.\|_1$ *est équivalente à* $\|.\|_2$.

Pour $u \in X$, *on a* $u(0) = u(1)$, *ceci implique* $\|u'\|_0 \leqslant \|u''\|_0 = \|u\|_1$. *Par hypothèse on a* $u(0) = \int_0^1 p(s)u(s)ds$, *alors* $u(t) = \int_0^t u'(s)ds + \int_0^1 p(s)u(s)ds$, *il s'en suit que*

$$|u(t)| \leqslant \int_0^1 |u'(s)|ds + \int_0^1 p(s)|u(s)|ds \leqslant \|u'\|_0 + \|u\|_0 \int_0^1 p(s)ds.$$

De (A2), on sait que $1 - \int_0^1 p(s)ds > 0$, *donc*

$$\|u\|_0 \leqslant \frac{1}{1 - \int_0^1 p(s)ds} \|u'\|_0 \leqslant \frac{1}{1 - \int_0^1 p(s)ds} \|u\|_1.$$

Selon la définition de $\|u\|_2$, *nous avons*

$$\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 = \|u\|_0 + \|u\|_1 \leqslant \left(1 + \frac{1}{1 - \int_0^1 p(s)ds} \right) \|u\|_1,$$

c'est-à-dire que la norme $\|.\|_1$ *est équivalente à* $\|.\|_2$.

Deuxièmement, on montre que $(X, \|.\|_1)$ *est un espace de Banach.*

soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans $(X, \|.\|_1)$, c'est-à-dire que

$$\|u_n^{''} - u_m^{''}\|_0 = \|u_n - u_m\|_1 \to 0, (n, m \to \infty).$$

en prenant en considération $\|u\|_0 \leqslant \dfrac{1}{1 - \int_0^1 p(s)ds}\|u\|_1$, *on aura*

$$\|u_n - u_m\|_0 \to 0, (n, m \to \infty).$$

Donc, puis Y est un espace de Banach, il existe $u, v \in Y$ avec $\|u_n - u\|_0 \to 0$, $\|u_n^{''} - v\|_0 \to 0$, comme $n \to \infty$. D'autre part on $u_n \in X$, alors nous avons $u_n(0) = u_n(1) = \int_0^1 p(s)u_n(s)ds$ et

$$u_n(t) = -\int_0^1 K_1(t, s)u_n^{''}(s)ds. \tag{3.10}$$

En faisant tendre $(n \to \infty)$ dans (3.10), *on obtient $u(t) = -\int_0^1 K_1(t, s)v(s)ds$ et $u^{''} = v$. $u \in X$, $\|u_n - u\|_1 \to 0$ et $(X, \|.\|_1)$ est un espace de Banach. Il s'en suit que $(X, \|.\|_2)$ est un espace de Banach, aussi* □

Lemme 3.2.3. *[24] . Supposons que $(A1)$ et $(A2)$ sont satisfaites. Alors on a*

(i) $H_i(t, s) \geqslant 0, \quad pour \ \ t, s \in [0, 1]; H_i(t, s) > 0, \quad pour \ \ t, s \in (0, 1);$

(ii) $G_i(t, s) \geqslant b_iG_i(t, t)G_i(s, s), G_i(t, s) \leqslant C_iG_i(s, s), \quad pour \ \ t, s \in [0, 1],$

où $C_1 = 1$ et $b_1 = 1$,$C_2 = \dfrac{1}{\sin\sqrt{\beta}}$, $b_2 = \sqrt{\beta}\sin\sqrt{\beta}$.

On note $d_i = \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} b_iG_i(t, t) (i = 1, 2)$, $\xi = \dfrac{\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \rho_2(t)}{\max_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \rho_2(t)}$. Les calculs donnent les résultats suivants.

Lemme 3.2.4. *Supposons que (A1)et(A2) sont satisfaites. Alors pour $\rho_2(t)$, d_i et ξ, sont données comme ci-dessus, on obtient les propriétés suivantes*

(i) $\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho_2(t) = \rho_2(\frac{1}{2})$;

(ii) $0 < d_i < 1, 0 < \xi < 1$.

Posons

$$P = \{u \in X : u \geqslant 0, u^{''} \leqslant 0, min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}u(t) \geqslant d_1\|u\|_0, max_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}u^{''}(t) \leqslant -\frac{d_2\xi}{C_2}\|u^{''}\|_0\}.$$

il est clair que, P est un cône en X.

Prenons $\theta = min\{d_1, \frac{d_2\xi}{C_2}\}$, par Lemme (3.2.4), $0 < \theta < 1$. *Pour tout $u \in P$, il y a*

$$|u(t)| + |u^{''}(t)| \geqslant \theta\|u\|_2, t \in [1/4, 3/4]. \tag{3.11}$$

Définir

$$(Tu)(t) := \lambda \int_0^1 \int_0^1 K_1(t,s)K_2(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau ds, \quad t \in [0,1]. \tag{3.12}$$

Par les arguments ci-dessus, nous savons que pour tout $u \in X$, $Tu \in X$ et

$$(Tu)''(t) = -\lambda \int_0^1 K_2(t,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau. \tag{3.13}$$

Lemme 3.2.5. *Supposons que (A1) et (A2) sont satisfaites. Alors $T : P \to P$ est complètement continu.*

Preuve. *Pour $u \in P$, par* (3.12) *et* (3.13)*, il y a $Tu \geqslant 0$, $(Tu)'' \leqslant 0$. Avec le lemme* (3.2.3)*, il y a $C_1 = 1$, $C_2 > 1$, donc*

$$\|Tu\|_0 \leqslant \lambda \int_0^1 \int_0^1 \left[G_1(s,s) + \rho_1 \int_0^1 G_1(s,x)p(x)dx\right] K_2(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau ds, \tag{3.14}$$

$$\|Tu\|_1 \leqslant \lambda C_2 \int_0^1 \left[G_2(\tau,\tau) + \rho_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 G_1(\tau,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau. \tag{3.15}$$

Par le lemme (3.2.4), (3.14) *et* (3.15)*, nous avons*

$$\begin{aligned}
\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} (Tu)(t) &= \lambda \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \int_0^1 \int_0^1 K_1(t,s)K_2(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau ds \\
&\geqslant \lambda \int_0^1 \int_0^1 \left[d_1 G_1(s,s) + \rho_1 \int_0^1 G_1(s,x)p(x)dx\right] K_2(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau ds \\
&\geqslant d_1\lambda \int_0^1 \int_0^1 \left[G_1(s,s) + \rho_1 \int_0^1 G_1(s,x)p(x)dx\right] K_2(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau ds \\
&\geqslant d_1\|Tu\|_0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}(Tu)''(t) &= -\lambda \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \int_0^1 K_2(t,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \\
&\leqslant -\lambda \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \int_0^1 \left[d_2G_2(\tau,\tau)+\rho_2(t)\int_0^1 G_2(s,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \\
&\leqslant -d_2\lambda \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \int_0^1 \left[G_2(\tau,\tau)+\rho_2(t)\int_0^1 G_2(s,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \\
&= -d_2\lambda \int_0^1 \left[G_2(\tau,\tau)+\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}\rho_2(t)\int_0^1 G_2(s,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \\
&= -d_2\lambda \int_0^1 \left[G_2(\tau,\tau)+\xi\max_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}\rho_2(t)\int_0^1 G_2(s,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \\
&\leqslant -d_2\lambda\xi \int_0^1 \left[G_2(\tau,\tau)+\rho_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 G_2(s,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \leqslant -\frac{d_2\xi}{C_2}\|(Tu)''\|_0.
\end{aligned}$$

On peut donc obtenir $T(P) \subset P$. En utilisant le théorème d'Arzéla-Ascoli, une preuve standard donne $T : P \to P$ est complètement continu. □

le théorème du point fixe suivant est fondamental dans les preuves de nos quelques résultats d'existence.

Lemme 3.2.6. *[23] . Soit E un espace de Banach, $P \subseteq E$ un cône et Ω_1 et Ω_2 deux ensembles ouverts bornées de E avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Supposons que $\mathcal{A} : P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ est un opérateur complètement continu tel que*

(i) $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|x\|$, $x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|\mathcal{A}x\| \geqslant \|x\|$, $x \in P \cap \partial\Omega_2$, *ou*

(ii) $\|\mathcal{A}x\| \geqslant \|x\|$, $x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|x\|$, $x \in P \cap \partial\Omega_2$,

sont satisfaites. Alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

3.3 Quelques résultats d'existence

Supposons que K_1, K_2, G_2, ρ_2, C_2, défini dans la section précédente. Nous introduisons quelques notations comme suit :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \int_0^1 K_1(s,s)K_2(s,\tau)d\tau ds,\\
B &= \int_0^1 \left[G_2(s,s) + \rho_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 G_2(s,x)q(x)dx\right]ds,\\
\eta_0 &= \frac{1}{A + C_2 B}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\theta \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K_2(\frac{1}{2},\tau)d\tau},\\
\overline{f}_0 &= \lim_{|u|+|v|\to 0} \sup \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u,v)}{|u|+|v|}, \quad \underline{f}_0 = \lim_{|u|+|v|\to 0} \inf \min_{t\in[1/4,3/4]} \frac{f(t,u,v)}{|u|+|v|},\\
\overline{f}_\infty &= \lim_{|u|+|v|\to +\infty} \sup \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u,v)}{|u|+|v|}, \quad \underline{f}_\infty = \lim_{|u|+|v|\to +\infty} \inf \min_{t\in[1/4,3/4]} \frac{f(t,u,v)}{|u|+|v|},
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. *Supposons que* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites. Le problème* (3.2) *admet au moins une solution positive, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée.*

(i) $\overline{f}_0 < \frac{1}{\lambda}\eta_0$, $\underline{f}_\infty > \frac{1}{\lambda}\eta_1$,

(ii) $\underline{f}_0 > \frac{1}{\lambda}\eta_1$, $\overline{f}_\infty < \frac{1}{\lambda}\eta_0$.

Preuve. **(i)** *Puisque* $\overline{f}_0 < \frac{1}{\lambda}\eta_0$, *et par la définition de* $\overline{f}_0$, *il existe* $r_1 > 0$ *tel que*

$$\max_{\substack{0\le t\le 1,\\ |u(t)|+\left|u''(t)\right|\le r_1}} f(t,u(t),u''(t)) \leqslant \frac{r_1}{\lambda}\eta_0.$$

Posons $\Omega_{r_1} = \{u \in P : \|u\|_2 < r_1\}$ *alors, on a*

$$f(t,u(t),u''(t)) \leqslant \frac{r_1}{\lambda}\eta_0, \quad pour \quad u \in \partial\Omega_{r_1}, t \in [0,1]. \tag{3.16}$$

Par conséquent de (3.14) *et* (3.15) *on obtient*

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_0 &= \lambda\left\|\int_0^1 \int_0^1 K_1(t,s)K_2(s,\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau ds\right\|_0 \leqslant \lambda\frac{r_1\eta_0}{\lambda}\int_0^1\int_0^1 K_1(s,s)K_2(s,\tau)d\tau ds \leqslant A\eta_0 r_1,\\
\|Tu\|_1 &\leqslant \lambda C_2 \int_0^1 \left[G_2(\tau,\tau) + \rho_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 G_2(\tau,x)q(x)dx\right] f(\tau,u(\tau),u''(\tau))d\tau \leqslant C_2 B\eta_0 r_1.
\end{aligned}$$

D'où pour $u \in \partial\Omega_{r_1}$

$$\|Tu\|_2 = \|Tu\|_0 + \|Tu\|_1 \leqslant (A + BC_2)\eta_0 r_1 = r_1 = \|u\|_2. \tag{3.17}$$

D'autre part, puisque $\underline{f}_{\infty} > \frac{1}{\lambda}\eta_1$ *alors il existe* $r_2' > r_1 > 0$ *tel que*

$$\min_{\substack{1/4\leq t\leq 3/4,\\ \theta|u(t)|+\left|u''(t)\right|\geqslant r_2'}} \frac{f(t, u(t), u''(t))}{|u(t)| + |u''(t)|} \geqslant \frac{1}{\lambda}\eta_1.$$

Choisissons $r_2 > \frac{1}{\theta}r_2'$ *et soit* $\Omega_{r_2} = \{u \in P : \|u\|_2 < r_2\}$.
Pour $u \in \partial\Omega_{r_2}$ *et par* (3.11)*, pour* $1/4 \leqslant t \leqslant 3/4$*, on obtient* $r_2' \leqslant \theta r_2 \leqslant |u(t)| + |u''(t)| \leqslant r_2$.
Il s'en suit que

$$f(t, u(t), u''(t)) \geqslant \frac{\theta r_2}{\lambda}\eta_1, \text{pour} u \in \partial\Omega_{r_2}, t \in [1/4, 3/4] \tag{3.18}$$

D'autre part de (3.13) *on obtient*

$$\begin{aligned} \left|(Tu)''\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \lambda\int_0^1 K_2\left(\frac{1}{2}, \tau\right) f(\tau, u(\tau), u''(\tau))d\tau \\ &\geqslant \lambda\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K_2\left(\frac{1}{2}, \tau\right) f(\tau, u(\tau), u''(\tau))d\tau \\ &\geqslant \eta_1\theta r_2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K_2\left(\frac{1}{2}, \tau\right) d\tau \\ &= r_2. \end{aligned}$$

Donc, pour $u \in \partial\Omega_{r_2}$,

$$\|Tu\|_2 \geqslant \left|(Tu)''\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geqslant r_2 = \|u\|_2. \tag{3.19}$$

En utilisant le théorème du point fixe de Krasnosel'skii, alors il existe $u_0 \in \overline{\Omega}_{r_2}\backslash\Omega_{r_1}$ *tel que* $Tu_0 = u_0$*, c'est -à-dire* u_0 *est une solution pour le Problème* (3.2) *avec*
$u_0 \geqslant 0, u_0'' \leqslant 0, \quad r_1 \leqslant \|u_0\|_2 \leqslant r_2$.

(ii) *Supposons que* $\underline{f}_{0} > \frac{1}{\lambda}\eta_1$*, alors par la définition de* $\underline{f}_{0}$*, il existe* $r_3 > 0$ *tel que*

$$\min_{\substack{1/4\leqslant t\leqslant 3/4,\\ |u(t)|+\left|u''(t)\right|<r_3}} \frac{f(t, u(t), u''(t))}{|u(t)| + |u''(t)|} \geqslant \frac{1}{\lambda}\eta_1.$$

Soit $\Omega_{r_3} = \{u \in P : \|u\|_2 < r_3\}$*, il s'en suit que*

$$f(t, u(t), u''(t)) \geqslant \frac{\theta r_3}{\lambda}\eta_1, \quad pour \;\; u \in \partial\Omega_{r_3}, t \in [1/4, 3/4]. \tag{3.20}$$

D'autre part, puisque $\overline{f}_\infty < \frac{1}{\lambda}\eta_0$*, il existe* $r_4' > 0$ *tel que*

$$\max_{\substack{0\leqslant t\leqslant 1,\\ |u(t)|+|u''(t)|>r_4'}} \frac{f(t, u(t), u''(t))}{|u(t)| + |u''(t)|} \geqslant \frac{1}{\lambda}\eta_0,$$

Ceci implique

$$f(t, u(t), u''(t)) \leqslant \frac{r_4'}{\lambda}\eta_0, \quad pour \;\; t \in [0, 1], |u(t)| + |u''(t)| \geqslant r_4'. \tag{3.21}$$

Par ailleurs, de la continuité de f*, il existe* $r_4'' > 0$ *tel que*

$$f(t, u(t), u''(t)) \leqslant \frac{r_4''}{\lambda}\eta_0, \quad pour \;\; t \in [0, 1], |u(t)| + |u''(t)| \geqslant r_4''. \tag{3.22}$$

Choisissons $r_4 = \max\{r_4', r_4''\}$ *et posons* $\Omega_{r_4} = \{u \in P : \|u\|_2 < r_4\}$.
Par (3.21) *et* (3.22)*, on conclut que*

$$f(t, u(t), u''(t)) \leqslant \frac{r_4}{\lambda}\eta_0, \quad pour \;\; t \in [0, 1], |u(t)| + |u''(t)| \geqslant r_4. \tag{3.23}$$

Le reste de la preuve est similaire à (i) *et comme conséquence on a le résultat d'existence.* □

Corollaire 3.3.1. *Supposons que (A1)et (A2) sont satisfaites. Alors le problème*(3.2) *admet au moins deux solutions positives si f vérifié les hypothèses suivantes :*

(i) $\overline{f}_0 < \frac{\eta_0}{\lambda}, \overline{f}_\infty < \frac{\eta_0}{\lambda}$;

(ii) *il existe* $R_0 > 0$ *tel que*

$$f(t, u, v) \geqslant \frac{\theta R_0 \eta_1}{\lambda}, \quad pour \;\; t \in [1/4, 3/4], |u| + |v| \geqslant \theta R_0.$$

Corollaire 3.3.2. *Supposons que (A1) et (A2) sont satisfaites. Alors le Problème* (3.2) *présente admet au moins deux solutions positives si* f *vérifié les hypothèses suivantes :*

(i) $\underline{f}_0 < \frac{\eta_1}{\lambda}, \underline{f}_\infty < \frac{\eta_1}{\lambda}$;

(ii) *il existe* $R_0 > 0$ *tel que*

$$f(t, u, v) \geqslant \frac{\theta R_0 \eta_0}{\lambda}, \quad pour \;\; t \in [0, 1], |u| + |v| \leqslant R_0.$$

Exemple 3.3.1. *Considérons le problème aux limite suivant*

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \frac{\pi^2}{4}u''(t) = \pi^2\left[18(u(t) - u''(t)) - 17.9\sin(u(t) - u''(t))\right], \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = \displaystyle\int_0^1 su(s)ds, \\ u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

Dans ce problème, on sait que $\beta = \dfrac{\pi^2}{4}$, $p(t) = t$, $q(t) = 0$, $\lambda = \pi^2$, *alors nous pouvons obtenir* $C_1 = 1$, $C_2 = 1$,$\rho_1 = 2$,$\rho_2 = \sqrt{2}$. *de plus, on obtient* $A = \dfrac{48 - 13\pi^2}{\pi^3}$, $B = \dfrac{2}{\pi^2}$ *puis* $\eta_0 = \dfrac{\pi^3}{48 - 11\pi}$, $\eta_1 = \dfrac{4\pi^2}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} - 1}$, *donc*

$$\overline{f}_0 = 0.1 < \frac{1}{\pi^2} \times \eta_0 \approx 0.23, \quad \underline{f}_\infty = 18 > \frac{1}{\pi^2}\eta_1 \approx 13.3.$$

Ainsi, β, $p(t)$, $q(t)$ *et* f *satisfont aux conditions du théorème* (3.3.1)*, il existe donc une solution positive au problème ci-dessus.*

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié quelques problèmes de CAUCHY pour les équations différentielles non-linéaires.
On a commencé par l'étude d 'un problème aux limites non linéaire de troisième ordre et grâce à la méthode de sur et sous solutions et le Théorème du point fixe de Schauder on a trouver quelques résultats d'existence.Dans le chapitre 3 on a utilisé le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour prouver quelques résultat d'existence du problème aux limites du quatrième ordre.

Bibliographie

[1] C.DE COSTER and P.HABETS :*Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary values problems :classical and recebt results,Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*,F.ZANOLIN,ed,CISM Courses and Lectures,Vol 371,Springer-Verlag,New York(1996),1-79.

[2] A.GRANAS ,AND J.DUGUNDJI :*Fixed point theory* .Springer Science and Busines Media,(2013).

[3] M.A.KRASNOSEL'SKII :*Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators*,Soviet Mathematics,Doklady,1(1960),pp :1285-1288.

[4] K.REMY AHOULOU and ASSOHOUN ADJE : *Existence of solutions of a differential inclusion with nonlinear boundary conditions by the lower and upper solutions method*,Far East J.Appl.Math.26(2)(2007),281-287.

[5] D.R.ANDERSON :*Nonlinear triple-point problems on time scales*,Ele.J.Diff.Equ,47(2004),pp.1-12.

[6] S.LANG :*Analyse réelle*.Cours .Mathématiques.Inter-Editions,(1977).

[7] ZHANBING BAI : *The existence of solutions for some third-order boundary-value problems*,Electronic Journal of Differential Equations,Vol.2008(2008),No.25,pp.1-6.

[8] D.R.Anderson and J.M.Davis : *Multiple solutions and cigenvalues for third order right focal boundary-value problems*, J.Math.Anal.Appl.267(2002),135-157.

[9] F.Bernis and L.A.Peletier :*Two problems from draining flows involving third-order differential equations*,SIMA.J.Math.Anal.27(1996),515-527.

[10] A.Cabada : *The method of lower and upper solutions for second,third,fourth and higher order boundary-value problems*, J.Math.Anal.Appl.185(1994),302-320.

[11] Z.J.Du,W.G.Ge and X.J.Lin : *Existence of solutions for a class of third-order non linear boundary-value problems*,J.Math.Anal.Appl.294(2004),104-112.

[12] Z.J.Du,W.G.Ge and M.R.Zhou : *Singular perturbations for third -order non linear multipoint boundary-value problem*,J.Differential Equations 218(2005),69-90.

[13] J.Ehme,P.W.Eloe,and J.Henderson : *Upper and lower solution methods forfully non linear boundary-value problems*,J.Differential Equations 180(2001),51-64.

[14] G.A.Klaason : *Differential inequalities and existence theorems for second and third order boundary-value problems* ,J.Differential Equations 10(1971),529-537.

[15] W.C.Lian,F.H.Wong,and C.C.Yeh : *On the positive solution of nonlinear second order differential equations*, Proc.Amer .Math.Soc.124(1996), 1117-1126.

[16] E.Rovderova : *On the number of solutions of a third -order boundary-value problem*,Tran .Amer.Math.Soc.347(1995),3079-3092.

[17] W.C.Troy : *Solutionof third-order differential equation relevant to draining and some coating flows*,SIMA J.Math.Anal.24(1993),155-171.

[18] Q.L.Yao and Y.Q.Feng : *The existence of a third-order two-point boundary-value problem*,Appl.Math.Lett.15(2002),227-232.

[19] Z.B.Bai : *The method of lower and upper solution for a bending of an elastinc beam equation*,J.Math.Anal.Appl.248(2000),195-202.

[20] Z.B.Bai : *The method of lower and upper solution for some fourth-order boundary value problems*,Nonlinear Anal.67(2007),1704-1709.

[21] G.Q.Chai :*Existence of positive solutions for fourth-order boundary value problem with variable parameters*,Nonlinear Anal.66(2007),870-880.

[22] H.Y.Feng,D.H.Ji,W.G.Ge :*Existence and uniqueness of solutions for a fourth-order boundary value problem*,Nonlinear Anal.70(2009),3564-3566.

[23] D.Guo,V.Lakshmikantham :*Nonlinear Problems in Abstract Cones*,Academic Press,New york,1988.

[24] Y.X.Li :*Positive solution of fourth-order boundary value problems with two parameters*,J.Math.Anal.Appl.281(2003),477-484.

[25] Y.X.Li :*Positive solution of fourth-order periodic boundary value problems*,Nonlinear Anal.54(2003),1069-1078.

[26] X.L.Liu,W.T.Li :*Existence and multiplicity of solutions of fourth-order boundary value problems with three parameters*,Math.Comput.Model.46(2007),525-534.

[27] H.L.Ma :*Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth-order* ,Nonlinear Anal.68(2008),645-651.

[28] R.Y.Ma :*Existence of positive solutions of a fourth-order boundary value problem*, Appl.Math.Comput.168(2005),1219-1231.

[29] C.C.Pang,W.Dong,Z.L.Wei :*Multiple solutions for fourth-order boundary value problem*,J.Math.Anal.Appl.314(2006),464-476.

[30] Z.L.Wei,C.C.Pang :*Positive solutions and multiplicity of fourth-order m-point boundary value problems with two parameters*,Nonlinear Anal.67(2007),1586-1598.

[31] Y.Yang,J.H.Zhang :*Existence of solutions for some fourth-order boundary value problems with parameters*,Nonlinear Anal.69(2008),1364-1375.

[32] Q.L.Yao,Z.B.Bai :*Existence of positive solutions for the boundary value problem* $u^4(t) - \lambda h(t)f(u(t)) = 0$,Chin.Ann.Math.20A(1999),575-578.

[33] Q.L.Yao :*Local existence of multiple positive solutions to a singular cantilever beam equation*,J.Math.Anal.Appl.363(2010),138-154.

[34] J.F.Zhao,W.G.Ge :*Positive solutions for a higher-order four-point boundary value problem with a p-Laplacian* ,Comput.Math.Appl.58(2009),1103-1112.

[35] ZHANBING BAI : *Posiyive solutions of some nonlocal fourth-order boundary-value problem*,Applied Mathematics and Computation.215(2010),4191-4197.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence de solutions pour un problème aux limite non linéaire d'équations différentielles du troisième et quatrième ordre en utilisant la méthode de sous et sur solution et certaine théorèmes de point fixe comme théorème de Leray Schauder et le théorème de Guo-Krasnoselskii et de compression d'un cône .

Mots-clés: Equations différentielles ordinaires ,Problèmes aux limites, Sous et sur solutions, Solutions positives, Points fixes,Cône.

Abstract

In this memory,we focus on the existence of solution for a nonlinear boundary problem of third and fourth differential equations using the method of upper and lower solutions and some fixed point theorems like Larey Schauder theorem and Guo-Krasnosel'skii and expansion of cones. .

Keywords: Ordinary differential equaion, Boundary value problems,Lower and upper solutions, Positive solution, Fixed point, Cone.

ملخص

هذه المذكرة ،تهتم بوحدانية الحلول للمعدلات التفاضلية من الدرجة الثالثة والرابعة باستعمال الحل الفوقي و الحل التحتى مع نظريات النقطة الثابتة كنظرية لزاي شادر و نظرية جيو كغنسوسكي التي تعتمد على المخروط ..

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية، مشكلة قيمة الحدود،الحل الفوقي و الحل التحتى ، حلول موجبة ، النقطة الصامدة ، مخروط .