République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Équations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

Bendahmane Mohammed

CALCUL $\nabla-$FRACTIONNAIRE CONFORMABLE SUR LES ÉCHELLES DE TEMPS

Encadreur :

Ahmed Hammoudi

Professeur à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le : 21/09/2020

Devant le jury composé de :

Présidente :	Mme. TCHOUAR fatima zohra	(M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Mr. BENIANI Abderrahmane	(M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadreur :	Mr. HAMMOUDI Ahmed	(Professeur)	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2019 - 2020

Remerciements

*Tout d'abord je remercie **Allah** qui m'a guidé et*
m'a donné la puissance pour terminer ce mémoire .
*Je remercier mon encadreur le professeur **Mr. Ahmed Hammoudi** pour m'avoir proposé ce*
sujet , et d'avoir accepté de diriger mon travail .
*Je remercie **Mr. Beniani Abderrahmane** , pour le*
temps qu'il a consacré à examiner ce mémoire .
*Je remercie aussi **Mme. Tchouar fatima zohra** qui*
m'a fait l'honneur de présider le jury de ce travail .
*Je voudrais également remercier **ma mère** , **mon père***
***ma sœur** , toute **ma famille** qui m'ont toujours aidé .*
Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde affection .
Également , un remerciement à tous mes collègues pour
les bons moments qui nous avons passé ensemble .
Finalement , je remercie tous ceux qui se sont
intéressés de prés ou de loin à ce mémoire .

Table des matières

Notations générales

$[a,b]_{\mathbb{T}}$	$[a,b] \cap \mathbb{T}$.
$\mathbb{T}_0$	$\mathbb{T}\backslash\{a\}$ avec $a = \min \mathbb{T}$.
p.p.	Presque partout .
$(.,.)$	Produit scalaire .
$f^{(\alpha)}(t)$	La dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en $t \geq 0$.
$f^{(\alpha)}_{\Delta}(t)$	La $\Delta-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en $t \in \mathbb{T}^k$.
$f^{(\alpha)}_{\nabla}(t)$	La $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en $t \in \mathbb{T}_k$.
$\|.\|_X$	Norme dans l'espace X .
μ_L	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
μ_{∇}	$\nabla-$mesure de Lebesgue .
$\lvert x\rvert$	Valeur absolue de x .
$L^p([a,b],\mathbb{R})$	$\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R} : f \text{ est mesurable }, \int_a^b \lvert f(t)\rvert^p dt < \infty\right\}$, $1 \leq p < \infty$.
$\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions n-fois continûment différentiables .
$\mathcal{C}^{\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$	$\{f:[a,b]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$, f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et $f^{(\alpha)}_{\nabla}(t) \in \mathcal{C}([a,b]_{\mathbb{T}})\}$.
$\mathcal{C}^{\alpha}_{ld}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$	$\{f:[a,b]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$, f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et $f^{(\alpha)}_{\nabla}(t) \in \mathcal{C}_{ld}([a,b]_{\mathbb{T}})\}$.

Introduction générale

Historique

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non entiers (réels ou complexes). Son histoire remonte à L'Hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$.
Ensuite , Fourier , Abel , Liouville , Riemann , Weyl , Riez , Marchaud et Caputo , entre autres , ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et les intégrales non entières .

Récemment , Khalil et al. [41] ont introduit une nouvelle dérivée fractionnaire qui s'appelle « la dérivée fractionnaire conformable » . Cette nouvelle notion est très intéressant , voir [32, 54] . Pour les résultats récents sur les dérivées fractionnaires conformables, nous renvoyons aux [50, 22, 23, 29, 40, 35, 6, 54, 53, 41, 8, 34, 16, 51, 20] .
Plus tard , cette théorie est développée par T. Abdeljawad dans [50] , qui a donné les définitions des dérivées conformables à gauche et à droite d'ordre supérieur , les fonctions exponentielles , l'inégalité de Gronwall , transformation de Laplace pour le calcul fractionnaire conformable , etc...
En particulier , Benkhettou et al. [32] ont introduit un calcul fractionnaire conformable sur une échelle de temps arbitraire , qui est une extension naturelle du calcul fractionnaire conformable . La théorie d'échelle de temps a été développé en 1988 par S. Hilger [48] dans sa thèse de doctorat et dirigé par B. Auldbach afin d'unifier l'analyse continue et discrète .

De plus , dans [18] , l'auteur a prouvé le théorème de la moyenne pour le calcul fractionnaire conformable sur des échelles de temps arbitraires . Dans [55] , les auteurs ont développé les espaces de Sobolev fractionnaires par des calculs fractionnaires conformables sur les échelles de temps . Dans [52] , les auteurs ont prouvé certains théorèmes de base pour le système fractionnaire conformable de Dirac sur les échelles de temps .

Organisation du mémoire

Ce mémoire se décompose de trois chapitres :

• **Premier chapitre :**

Dans ce chapitre , nous présentons quelques préliminaires sur le calcul des échelles de temps utilisées dans ce mémoire , puis nous introduisons la $\Delta-$dérivée , $\nabla-$dérivée et la relation entres les deux , quelques définitions et propriétés sur l'échelle de temps . Et nous rappelons aussi quelques notions fondamentales de la théorie de la $\nabla-$mesure et $\nabla-$intégration de Lebesgue où nous donnons une relation entres la mesure μ_∇ sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue μ_L sur $\mathbb{R}$.

• **Deuxième chapitre :**

Dans ce chapitre , nous introduisons tout d'abord la notion de calcul fractionnaire , ensuite on donne une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \text{pour tout } t > 0. \tag{1}$$

Elle est définie en $t = 0$ par :

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(0) = \lim_{t\to 0} \mathcal{T}_\alpha(f)(t).$$

On définit aussi l'intégrale fractionnaire conformable et leurs propriétés . Enfin , on généralise cette nouvelle dérivée sur l'échelle de temps .

• **Troisième chapitre :**

Dans dernière chapitre , on définit la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre α $\alpha \in]0,1]$ et $\nabla-$intégrale fractionnaire conformable sur les échelles de temps , et nous étudions leurs propriétés . On démontre le théorème de la moyenne et théorème de la moyenne généralisé , et nous définissons la fonction absolument continue , et on introduit les espaces de Lebesgue $L^p_\nabla(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $L^p_{\alpha,\nabla}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, et on adapte cela à des fonctions à valeurs vectorielles .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous introduisons quelques définitions et propriétés sur les échelles de temps que nous utiliserons dans ce mémoire et nous présentons également des résultats principaux sur la différentiabilité et l'intégration sur les échelles de temps .
La plupart de ces résultats seront énoncées sans preuve . Pour plus de détails , on peut consulter [26] , [25] et [46] .

1.1 Calculs sur les échelles de temps

Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble fermé non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$, i.e. les nombres entiers relatifs , les entiers naturels sont des exemples d'échelles de temps .

Définition 1.1.1. [26, 25] *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps . Pour $t \in \mathbb{T}$, on définit l'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par :*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

et l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par :

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Par convention , on supposera que :

- $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (*i.e* $\sigma(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* t) ,
- $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (*i.e* $\rho(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* t) .

Définition 1.1.2. [26, 46] *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps , $t \in \mathbb{T}$. On dira que :*

1) t *est dispersé à droite si* $\sigma(t) > t$.

2) t *est dispersé à gauche si* $\rho(t) < t$.

3) t *est isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche . (ie.,* $\rho(t) < t < \sigma(t)$) .

4) t *est dense à droite si* $\sigma(t) = t$ *et* $t < \sup \mathbb{T}$.

5) t *est dense à gauche si* $\rho(t) = t$ *et* $t > \inf \mathbb{T}$.

6) t *est dense s'il est simultanément dense à droite et dense à gauche . (ie.,* $\rho(t) = t = \sigma(t)$) .

Définition 1.1.3. [26] *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps .*

• *Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche , alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

• *Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droite , alors on pose $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.1.4. [26] *La fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

La fonction de granulation en arrière $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ est définie par :

$$\gamma(t) := t - \rho(t).$$

Définition 1.1.5. [26] *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction , on définit la fonctions $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :*

$$f^\sigma(t) := (fo\sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

et la fonctions $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$f^\rho(t) := (fo\rho)(t) = f(\rho(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

1.2 Différentiabilité sur les échelles de temps

1.2.1 Delta différentiabilité

Définition 1.2.1. [46] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.*
On dira que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t où

$$|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t . Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.2.1. [46] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.*

i) Si f est $\Delta-$différentiable en t , alors f est continue en t .

ii) Si f est continue en t et si t est dispersé à droite , alors f est Δ-différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

iii) Si t est dense à droite , alors f est $\Delta-$différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad \textit{existe et finie.}$$

Dans ce cas ,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

iv) Si f est $\Delta-$différentiable en t , alors

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

1.2.2 Nabla différentiabilité

Définition 1.2.2. [13] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}_k$.*
On dira que f est ∇-différentiable en t s'il existe un nombre $f^{\nabla}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de t où

$$|f^{\rho}(t) - f(s) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{V}.$$

On appelle $f^{\nabla}(t)$ la $\nabla-$dérivée de f en t .
Si f est $\nabla-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}_k$, alors $f^{\nabla} : \mathbb{T}_k \to \mathbb{R}$ est appelée la $\nabla-$dérivée de f sur $\mathbb{T}_k$.

Théorème 1.2.2. [15] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}_k$.*

(i) Si f est $\nabla-$différentiable en t , alors f est continue en t .

(ii) Si f est continue en t et si t est dispersé à gauche , alors f est $\nabla-$différentiable en t et

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)}.$$

(iii) Si t est dense à gauche , alors f est $\nabla-$différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \quad \textit{existe et finie.}$$

Dans ce cas ,

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

(iv) Si f est $\nabla-$différentiable en t , alors

$$f^{\rho}(t)=f(t)-\gamma(t)f^{\nabla}(t).$$

Démonstration.

i) Supposons que f est $\nabla-$différentiable en t , alors , pour tout $\varepsilon>0$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de t tel que :

$$\left|(f^{\rho}(t)-f(s))-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)\right|\leq\varepsilon^{*}|\rho(t)-s|,\quad \text{pour tout } s\in\mathcal{V}.$$

Où ,

$$\varepsilon^{*}=\frac{\varepsilon}{1+2\gamma(t)+|f^{\nabla}(t)|}.$$

Par conséquent , nous avons , pour tout $s\in\mathcal{V}_t\cap\,]t-\varepsilon^{*},t+\varepsilon^{*}[$,

$$\begin{aligned}|f(t)-f(s)| &= \big|(f(\rho(t)-f(s))-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)\\ &\quad -\big[(f(\rho(t)-f(t))-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-t)\big]+f^{\nabla}(t)(t-s)\big|\\ &\leq \varepsilon^{*}\,|(\rho(t)-s)|+\varepsilon^{*}\,|(\rho(t)-t)|+\big|f^{\nabla}(t)(t-s)\big|\\ &\leq \varepsilon^{*}\left\{\gamma(t)+|s-t|+\gamma(t)+|f^{\nabla}(t)|\right\}\\ &\leq \varepsilon^{*}\left\{1+2\gamma(t)+|f^{\nabla}(t)|\right\}\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc , f continue en t .

iv) Si t est dense à gauche , alors $\gamma(t)=0$, et

$$f(\rho(t))=f(t)-\gamma(t)f^{\nabla}(t)=f(t).$$

D'autre part , si t est dispersé à gauche . Donc d'après la propriété (ii) du théorème (1.2.2) on a

$$\begin{aligned} f(\rho(t)) &= f(t) + \gamma(t) \cdot \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)} \\ &= f(t) - \gamma(t) \cdot \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)} \\ &= f(t) - \gamma(t) f^{\nabla}(t). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.3. [15, 26] *Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont $\nabla-$différentiables en $t \in \mathbb{T}_k$, alors*

(i) *$f + g$ est $\nabla-$différentiable en t et*

$$(f+g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t).$$

(ii) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est $\nabla-$différentiable en t et*

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t).$$

(iii) *fg est $\nabla-$différentiable en t et*

$$\begin{aligned} (fg)^{\nabla}(t) &= f^{\nabla}(t)g(t) + f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t). \\ &= f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g^{\rho}(t). \end{aligned}$$

(iv) *Si $g(t)g^{\rho}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est $\nabla-$différentiable en t et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)g(t) - f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}.$$

(v) *Si $f(t)f^{\rho}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est $\nabla-$différentiable en t et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = -\frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)f^{\rho}(t)}.$$

Définition 1.2.3. [27] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $t \in (\mathbb{T}_k)_k = \mathbb{T}_{k^2}$.*
On définit la $\nabla-$dérivée seconde de f en t par :

$$f^{\nabla\nabla} = (f^{\nabla})^{\nabla} : \mathbb{T}_{k^2} \to \mathbb{R}.$$

De la même manière , on définit la $\nabla-$dérivée d'ordre n de f par :

$$f^{\nabla^n} : \mathbb{T}_{k^n} \to \mathbb{R}, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans le théorème suivant , nous donnons une relation entre la $\nabla-$dérivée et la $\Delta-$dérivée .

Théorème 1.2.4. [39]

i) Supposons $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\Delta-$différentiable sur $\mathbb{T}^k$, alors f est $\nabla-$différentiable en t et

$$f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}(\rho(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

tel que $\sigma(\rho(t)) = t$ si , en plus , f^{Δ} est continue sur $\mathbb{T}^k$ alors f est différentiable en t .

ii) Supposons $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\nabla-$différentiable sur $\mathbb{T}_k$, alors f est $\Delta-$différentiable en t et

$$f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(\sigma(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

tel que $\rho(\sigma(t)) = t$ si , en plus , f^{∇} est continue sur $\mathbb{T}_k$ alors f est différentiable en t .

DÉMONSTRATION.

La démonstration est similaire à celle donnée par les théorèmes (3.3.9) et (3.3.10) . □

Théorème 1.2.5. [26] *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\nabla-$différentiable . Alors $f \circ g$ est $\nabla-$différentiable et on a :*

$$(f \circ g)^{\nabla}(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) - h\gamma(t) g^{\nabla}(t)) dh \right\} g^{\nabla}(t).$$

DÉMONSTRATION.

La démonstration est similaire à celle donnée par le théorème (3.2.5) . □

Théorème 1.2.6. [26] *Supposons que $\upsilon : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et $\widetilde{\mathbb{T}} := \upsilon(\mathbb{T})$ est une échelle de temps . Soit $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, si $\upsilon^{\nabla}(t)$ et $w^{\widetilde{\nabla}}(\upsilon(t))$ existent pour $t \in \mathbb{T}_k$, alors*

$$(w \circ \upsilon)^{\nabla}(t) = \left[(w^{\widetilde{\nabla}} \circ \upsilon)\upsilon^{\nabla} \right](t), \quad \textit{pour } t \in \mathbb{T}_k.$$

Exemple 1.2.1. Soit $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ et $\upsilon(t) = 4t + 1$.

$$\widetilde{\mathbb{T}} = \upsilon(\mathbb{T}) = \{4n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, \cdots\}.$$

Soit $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est définie par : $w(t) = t^2$. Alors

$$(w \circ \upsilon)^{\nabla}(t) = (4t+1)^2 - \big[4(t-1)+1\big]^2 = 32t - 8.$$

Maintenant , on calcul $\upsilon^{\nabla}(t)$ et $w^{\widetilde{\nabla}}(t)$

$$\upsilon^{\nabla}(t) = 4t \text{ , et } w^{\widetilde{\nabla}}(t) = \frac{w(t) - w(\widetilde{\rho}(t))}{t - \widetilde{\rho}} = 2t - 4 \, .$$

Par conséquent ,

$$(w^{\widetilde{\nabla}} \circ \upsilon)(t) = w^{\widetilde{\nabla}}(\upsilon(t)) = 2(4t+1) - 4 = 8t - 2.$$

Donc ,

$$\Big[(w^{\widetilde{\nabla}} \circ \upsilon)\upsilon^{\nabla}\Big](t) = (8t-2)4 = 32t - 8 = (w \circ \upsilon)^{\nabla}(t).$$

1.3 L'intégration sur les échelles de temps

1.3.1 Delta Intégration

Définition 1.3.1. [26] *Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régulière si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Définition 1.3.2. [45] *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont $\Delta-$différentiables et ses $\Delta-$dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ sera noté par : $\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Définition 1.3.3. [44] *Une fonction continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est pré-différentiable avec domaine différentiabilité $\mathcal{D}$, tel que $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^k, \mathbb{T}^k \backslash \mathcal{D}$ est dénombrable et ne contient que des points dispersés à droite dans $\mathbb{T}$ et f est $\Delta-$différentiable pour tout $t \in \mathcal{D}$.*

Le théorème suivant garantit l'existence de pré-antidérivée .

Théorème 1.3.1. [26] *Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ régulière . Alors il existe une fonction F pré-différentiable avec de domaine $\mathcal{D}$ telle que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \text{ pour tout } t \in \mathcal{D}.$$

Toute fonction F s'appelle pré-antidérivée de f .

Définition 1.3.4 (antidérivée [2]).
Une fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée antidérivée de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}.$$

Théorème 1.3.2. [2] *Toute fonction rd-continue possède une antidérivée .*

1.3.2 Nabla Integration

Définition 1.3.5. [33] *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite ld-continue si elle est continue en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$ et si sa limite à droite existe et est finie en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$.*
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont ld-continues sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{ld} = \mathcal{C}_{ld}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont $\nabla-$différentiables et ses $\nabla-$dérivées sont ld-continues sur $\mathbb{T}$ sera noté par :

$$\mathcal{C}^1_{ld} = \mathcal{C}^1_{ld}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Définition 1.3.6 (antidérivée[33]). *Une fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée $\nabla-$antidérivée de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si*

$$F^{\nabla}(t) = f(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{k}.$$

Théorème 1.3.3. [2] *Toute fonction ld-continue possède une $\nabla-$antidérivée .*

Définition 1.3.7. [2] *Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ régulière . Nous définissons $\nabla-$intégrale de Cauchy par :*

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a), \quad \text{pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

1.4 $\nabla-$intégrale de Lebesgue sur les échelles de temps

Dans cette section on rappelle seulement les notions fondamentales de la mesure et l'intégration pour définir la $\nabla-$mesure et la $\nabla-$intégrabilité sur l'échelle de temps bornée $\mathbb{T}$ où $\min \mathbb{T} = a < b = \max \mathbb{T}$.

Pour les notions de la $\Delta-$mesure et la $\Delta-$intégrabilité on peut trouver dans [5] .

1.4.1 Notion de mesure sur les échelles de temps

Définition 1.4.1. [24] *Soit $\mathcal{F}_1$ une famille d'intervalles fermés à droite et ouverts à gauche de $\mathbb{T}$ de la forme*

$$(c, d] = \{t \in \mathbb{T} : c < t \leq d\}.$$

où $c, d \in \mathbb{T}$ et $c \leq d$.

Définition 1.4.2. [9] *On définit une mesure additive $m_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}^+$ par*

$$m_1(]c, d]) = d - c.$$

Une mesure extérieure $m_1^* : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{T}$ est définie par :

$$m_1^*(E) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{k=m} (d_k - c_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{k=m}]c_k, d_k] \quad \textit{avec} \quad]c_k, d_k] \in \mathcal{F}_1 \right\} & si \quad a \notin E, \\ +\infty & si \quad a \in E. \end{cases}$$

Définition 1.4.3. [9] *Un ensemble $A \subset \mathbb{T}$ est ∇-mesurable si la relation*

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap (\mathbb{T} \setminus A)).$$

est vérifiée pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$.

Maintenant , on considère la famille

$$\mathcal{M}_\nabla(m_1^*) = \{A \subset \mathbb{T} : A \text{ est } \nabla - \textit{mesurable} \}$$

La $\nabla-$mesure de Lebesgue notée μ_∇ comme étant la restriction de m_1^* sur l'ensemble $\mathcal{M}_\nabla(m_1^*)$. Nous présentons plusieurs concepts de la mesure générale et de l'intégration appliqués à l'espace mesurable complet avec le triplet $(\mathbb{T}, \mathcal{M}_\nabla, \mu_\nabla)$. Cet espace mesuré est utilisé pour définir la $\nabla-$mesurabilité et la $\nabla-$intégrabilité des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

1.4.2 Les ensembles mesurables sur les échelles de temps

Lemme 1.4.1. [9] *L'ensemble de tous les points dispersés à gauche de $\mathbb{T}$ est dénombrable , c'est-à-dire , il existe $J \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i\in J} \subset \mathbb{T}$ tels que*

$$\mathcal{L}_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : \rho(t) < t\} = \{t_i\}_{i\in J}.$$

Théorème 1.4.1. [47, 24] *Pour tout $t_0 \in \mathbb{T}_0$, la $\nabla-$mesure d'ensemble $\{t_0\}$ donnée par :*

$$\mu_\nabla(\{t_0\}) = t_0 - \rho(t_0).$$

Voici une correspondance intéressante qui existe entre la mesure μ_∇ sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue μ_L sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.4.2. [37] *Soit $A \subset \mathbb{T}$. Alors A est $\nabla-$mesurable si et seulement si A est mesurable pour la mesure de Lebesgue . Dans ce cas si $a \notin A$, nous avons la propriété suivante :*

$$\mu_\nabla(A) = \mu_L(A) + \sum_{i\in J_A} \gamma(t_i).$$

Pour $A \subset \mathbb{T}$, nous définissons

$$J_A := \{i \in J : t_i \in A \cap \mathcal{L}_{\mathbb{T}}\},$$

avec $J \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i\in J} \subset \mathbb{T}$.

Corollaire 1.4.1. [12] *Soit E est $\nabla-$mesurable . Alors $\mu_\nabla(E) = \mu_L(E)$ si et seulement si $a \notin E$ et E n'a pas des points dispersé à gauche .*

Lemme 1.4.2. [47]

1. *Si $c, d \in \mathbb{T}$ et $c \leq d$, Alors*

$$\mu_\nabla\big(]c, d]\big) = d - c, \qquad \mu_\nabla\big(]c, d[\big) = \rho(d) - c.$$

2. *Si $c, d \in \mathbb{T}_0$ et $c \leq d$, Alors*

$$\mu_\nabla\big([c, d[\big) = \rho(d) - \rho(c), \qquad \mu_\nabla\big([c, d]\big) = d - \rho(c).$$

1.4.3 $\nabla-$mesurabilité et $\nabla-$intégrabilité des fonctions sur les échelles de temps

Définition 1.4.4. [12] *Une fonction* $f:\mathbb{T}\to\overline{\mathbb{R}}$ *est* $\nabla-$*mesurable si pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$ *, l'ensemble* $f^{-1}([-\infty,\alpha))=\{t\in\mathbb{T}: f(t)<\alpha\}$ *est* $\nabla-$*mesurable .*

Définition 1.4.5. [12] *Soit une fonction* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *, nous avons besoin d'une fonction auxiliaire qui prolonge* $\tilde{f}$ *à l'intervalle* $[a,b]$ *,* $\tilde{f}(t):[a,b]\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\tilde{f}(t):=\begin{cases} f(t) & si \quad t\in\mathbb{T},\\ f(t_i) & si \quad t\in(\rho(t_i),t_i),\ \text{pour}\ i\in J_{\mathbb{T}}.\end{cases}$$

Proposition 1.4.1. [37] *Soient* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *et* $\tilde{f}$ *son extention sur* $[a,b]$ *. Alors ,* f *est* $\nabla-$*mesurable si et seulement si ,* $\tilde{f}$ *est mesurable au sens de Lebesgue .*

Théorème 1.4.3. [9]

Soient $E\subset\mathbb{T}$ *un ensemble* $\nabla-$*mesurable tel que* $a\notin E$ *et* $\tilde{E}=E\cup\bigcup_{i\in J_E}(\rho(t_i),t_i)$ *. Soient* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *une fonction* $\nabla-$*mesurable et* $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ *son extention sur* $[a,b]$ *. Alors ,* f *est* $\nabla-$*intégrable sur* E *si et seulement si ,* $\tilde{f}$ *est intégrable au sens de Lebesgue sur* $\tilde{E}$ *. Dans ce cas on a que ,*

$$\int_E f(s)\nabla s=\int_{\tilde{E}}\tilde{f}(s)ds.$$

Nous définissons un deuxième type de prolongement pour une fonction $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *sur* $[a,b]$ *. Soit la fonction*

$$\widehat{f}(t):=\begin{cases} f(t) & si \quad t\in\mathbb{T},\\ f(t_i)+\dfrac{f(t_i)-f^{\rho}(t_i)}{\gamma(t_i)}(t_i-t) & si \quad t\in(\rho(t_i),t_i),\ \text{pour}\ i\in J_{\mathbb{T}}.\end{cases}$$

Définition 1.4.6. [9] *On dira que* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *est absolument continue sur* $\mathbb{T}$ *si pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe un* $\delta>0$ *tel que si* $\{[a_k,b_k[\}_{k=1}^{n}$ *,* $a_k,b_k\in\mathbb{T}$ *est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints satisfaisant*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \quad \text{alors} \quad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

Lemme 1.4.3. [9] *Si* $\widehat{f}$ *est différentiable en* $t\in]a,b]\cap\mathbb{T}$ *alors* f *est* $\nabla-$*différentiable en* t *et* $f^{\nabla}(t)=\widehat{f}'(t)$ *.*

Théorème 1.4.4. [9] *Soient* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *et son extension* $\widehat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ *. On a que* f *est absolument continue sur* $\mathbb{T}$ *si et seulement si* $\widehat{f}$ *l'est sur* $[a,b]$ *.*

1.5 Fonction exponentielle

Dans cette section , nous définissons deux fonctions importantes sur une échelle de temps qui généralisent la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e_p(.,t_0)$ et $\hat{e}_p(.,t_0)$.

Définition 1.5.1. [26] *Soit $h > 0$, on définit les nombres complexes de Hilger par :*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h} \right\}.$$

et l'axe imaginaire de Hilger

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < Im(z) < \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Pour $h = 0$, on pose par définition $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.5.2. [26] *On dit que la fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est μ-régressive si*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

On note l'espace des fonctions rd-continues $\mu-$régressives par :

$$\mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_\mu(\mathbb{T}) = \mathcal{R}_\mu(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Définition 1.5.3. [25] *On dit que la fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est γ-régressive si*

$$1 - \gamma(t)p(t) \neq 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

On note l'espace des fonctions ld-continues $\gamma-$régressives par :

$$\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}_\gamma(\mathbb{T}) = \mathcal{R}_\gamma(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

On munit cet ensemble de l'addition définie pour tous $p, q \in \mathcal{R}_\gamma$ par :

$$(p \oplus_\gamma q)(t) := p(t) + q(t) - \gamma(t)p(t)q(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

Le groupe $(\mathcal{R}_\gamma, \oplus_\gamma)$ est dit groupe régressif . Le conjugué de chaque élément p du groupe $\mathcal{R}_\gamma$ noté par $\ominus_\gamma p$ est donné par :

$$(\ominus_\gamma p)(t) = \frac{-p(t)}{1 - \gamma(t)p(t)}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

Définition 1.5.4. [26] *Soit* $p \in \mathcal{R}_\mu$ *, la fonction* $\Delta-$*exponentielle* $e_p : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est donnée par la formule :*

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour tout } t,s \in \mathbb{T}.$$

où la transformation $\mu-$*cylindrique* $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *est définie par :*

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{h}\log(1+hz) & si \quad h > 0, \\ z & si \quad h = 0. \end{cases}$$

Définition 1.5.5. [15] *Soit* $p \in \mathcal{R}_\gamma$ *, la fonction* $\nabla-$*exponentielle* $\hat{e}_p : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est donnée par la formule :*

$$\hat{e}_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_{\gamma(\tau)}(p(\tau))\nabla\tau\right), \text{ pour tout } t,s \in \mathbb{T}.$$

où la transformation $\gamma-$*cylindrique* $\hat{\xi}_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *est définie par :*

$$\hat{\xi}_h(z) = \begin{cases} -\frac{1}{h}\log(1-hz) & si \quad h > 0, \\ z & si \quad h = 0. \end{cases}$$

Théorème 1.5.1. [15] *Soient* $p \in \mathcal{R}_\gamma$ *et* $t_0 \in \mathbb{T}$ *. Alors la solution unique du problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} y^\nabla(t) = p(t)y(t), \\ y(t_0) = 1. \end{cases}$$

est donnée par :

$$y(t) = \hat{e}_{p(t)}(t,t_0).$$

Théorème 1.5.2. [25] *Soient* $p,q \in \mathcal{R}_\gamma$ *et* $s,t,r \in \mathbb{T}$ *. Alors*

(1) $\hat{e}_0(t,s) = 1$ et $\hat{e}_p(t,t) = 1$.

(2) $\hat{e}_p(\rho(t),s) = (1-\gamma(t)p(t))\hat{e}_p(t,s)$.

(3) $\hat{e}_p(t,s) = \dfrac{1}{\hat{e}_p(s,t)} = \hat{e}_{\ominus_\gamma p}(s,t)$.

(4) $\hat{e}_p(t,r)\hat{e}_p(r,s) = \hat{e}_p(t,s)$ *(Propriété de semi-groupe)* .

(5) $\hat{e}_p(t,s)\hat{e}_q(t,s) = \hat{e}_{p\oplus_\gamma q}(t,s)$.

(6) $\dfrac{\hat{e}_p(t,s)}{\hat{e}_q(t,s)} = \hat{e}_{p\ominus_\gamma q}(t,s)$.

(7) $\left(\dfrac{1}{\hat{e}_p(t,s)}\right)^\nabla = \dfrac{-p(t)}{\hat{e}_p^\rho(t,s)}$.

Exemple 1.5.1.

Supposons que $\frac{7}{t}$, $\frac{2}{t}$ sont deux fonctions $\gamma-$régressives sur $\mathbb{T} \cap (0, \infty)$.

Soit $t_0 \in \mathbb{T} \cap (0, \infty)$. D'après la propriété (iv) du théorème (1.2.3) et la propriété (6) du théorème (1.5.2) , on a

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s\hat{e}^{\rho}_{\frac{2}{s}}(s, t_0)} \cdot \hat{e}_{\frac{7}{s}}(s, t_0)\nabla s &= \frac{1}{5}\int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{\hat{e}_{\frac{2}{s}}(s, t_0)} \cdot \hat{e}_{\frac{7}{s}}(s, t_0)\right]^{\nabla}\nabla s \\ &= \frac{1}{5}\int_{t_0}^{t} \left[\hat{e}_{\frac{7}{s}\ominus_{\gamma}\frac{2}{s}}(s, t_0)\right]^{\nabla}\nabla s \\ &= \frac{1}{5}\left[\hat{e}_{\frac{7}{s}\ominus_{\gamma}\frac{2}{s}}(s, t_0)\right]_{s=t_0}^{s=t} \\ &= \frac{1}{5}\left[\hat{e}_{\frac{7}{t}\ominus_{\gamma}\frac{2}{t}}(t, t_0) - 1\right].\end{aligned}$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire conformable

2.1 Introduction

La théorie des dérivées de l'ordre non-entier n'est pas nouvelle , ces origines remontent à la fin du $17^{\text{éme}}$ siècle , où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégrale . Leibniz a introduit le symbole : $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ pour désigner la $n^{\text{éme}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital , l'Hôpital a répondu : « Que signifie $\frac{d^n}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$ » . Cette lettre de l'Hôpital , écrite en 1695 , est aujourd'hui considère comme le premier pas de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire.

les avantages des dérivées fractionnaires deviennent conséquents dans la modélisation des propriétés mécaniques et électriques des matériaux et dans de nombreux autres domaines .

Il existe plusieurs définitions de la dérivation d'ordre non entier (On a par exemple : Riemann-Liouville , Grunwald-Letnikov , Weyl , Caputo , Marchaud , et Riesz ([17]) , on donne seulement les deux dérivées fractionnaires suivantes :

Définition 2.1.1 (Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville [1]).
Soient $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [n-1,n[$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$\mathcal{D}_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dx.$$

Définition 2.1.2 (Dérivée fractionnaire au sens de Caputo [1]).
Soient $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ $\alpha \in [n-1,n[$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$\mathcal{D}_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dx.$$

Remarques 2.1.1. [41]

i) *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ne satisfait pas* $\mathcal{D}_a^\alpha(1) = 0$ ($\mathcal{D}_a^\alpha(1) = 0$ *pour la dérivée fractionnaire au sens de Caputo) si* α *n'est pas un nombre naturel .*

ii) *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle de produit :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha(fg) = f\mathcal{D}_a^\alpha(g) + g\mathcal{D}_a^\alpha(f).$$

iii) *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle de quotient :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha(f/g) = \frac{g\mathcal{D}_a^\alpha(f) - f\mathcal{D}_a^\alpha(g)}{g^2}.$$

iv) *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle de la composée :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha(f \circ g) = f^{(\alpha)}(g) \cdot g^\alpha.$$

v) *Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas :* $\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta f = \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f$ *en général .*

2.2 Calcul fractionnaire conformable

Dans cette section , nous donnons une nouvelle définition de dérivée fractionnaire et intégrale fractionnaire . La forme de la définition montre que c'est la définition la plus naturelle et la plus fertile . Si $\alpha = 1$, la définition coïncide avec la définition classique de la dérivée première .

2.2.1 Dérivée fractionnaire conformable

Définition 2.2.1. [41] *Soient* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *une fonction , et* $\alpha \in]0, 1]$ *. On définit la dérivée fractionnaire conformable de* f *d'ordre* α *par :*

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{2.1}$$

pour tout $t > 0$ *.*

• *On note :*$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = f^{(\alpha)}(t)$ *.*

• *Si* f *est existe et finie , on dit que* f *est* $\alpha-$*différentiable en* t *.*

• *Si* f *est* $\alpha-$*différentiable dans l'intervalle* $]0, a[$ *,* $a > 0$ *, et* $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ *existe , alors*

La dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en $t = 0$ est définie par :

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0} f^{(\alpha)}(t).$$

Proposition 2.2.1. [36] *Soient $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1]$. Si f est différentiable en $t > 0$, alors on a :*

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f'(t). \tag{2.2}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}} t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Soit $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} t^{1-\alpha} = f'(t) t^{1-\alpha}.$$

Donc ,

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

□

Théorème 2.2.1. [36] *Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) f est différentiable ,

b) f est $\alpha-$différentiable pour $0 < \alpha < 1$.

Démonstration.

$a) \Longrightarrow b)$???

Supposons que f est différentiable , donc d'après la proposition (2.2.1) , nous avons

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

ie., f est $\alpha-$différentiable .

$b) \Longrightarrow a)$???

Inversement , si f est $\alpha-$différentiable , Alors $f'(t) = t^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(t)$.

Donc f est différentiable .

□

Exemples 2.2.1. [41] Soit $t > 0$. On a les dérivées fractionnaires conformables de certains fonctions suivantes :

1) $(t^p)^{(\alpha)} = pt^{p-\alpha}$, pour tout $p \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $t > 0$, d'après la proposition (2.2.1) et le théorème (2.2.1) on a

$$(t^p)^{(\alpha)} = t^{1-\alpha}(t^p)' = t^{1-\alpha}pt^{p-1} = pt^{p-\alpha}.$$

2) $(\lambda)^{(\alpha)} = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $(e^{pt})^{(\alpha)} = pt^{1-\alpha}e^{pt}$, et $(e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha})^{(\alpha)} = pe^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}$, pour tout $p \in \mathbb{R}$.
4) $(\sin(bt))^{(\alpha)} = bt^{1-\alpha}\cos(bt)$, $\forall b \in \mathbb{R}$.
5) $(\cos(bt))^{(\alpha)} = -bt^{1-\alpha}\sin(bt)$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1. [10] *Soient $\alpha \in]0,1]$, $p \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x : t \longmapsto (e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha})$ est une solution unique d'équation différentielle fractionnaire conformable suivant :*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = px(t), & t \geq 0, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Soit $x(t) = e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}$. D'après la définition (2.2.1) nous avons :

• *Pour $t > 0$, on a*

$$x^{(\alpha)}(t) = \left(e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}\right)^{(\alpha)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^\alpha} - e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}}{\varepsilon} = pe^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha} = px(t).$$

• *Pour $t = 0$, on a*

$$x^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0} x^{(\alpha)}(t) = \lim_{t \to 0} pe^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha} = px(0) = p.$$

D'autre part , on a la condition initiale :

$$x(0) = e^0 = 1.$$

Donc , $e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}$ est une solution unique d'équation différentielle fractionnaire conformable (2.3) .

Définition 2.2.2. [41, 36] *Soient $\alpha \in]n, n+1]$, et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction $n-$différentiable en $t > 0$. Alors la dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α est définie par :*

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Où $\lceil \alpha \rceil$: est la partie entière de α .

Remarque 2.2.2. [41, 36] *En conséquence de la définition (2.2.2) , on peut facilement montrer que*

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = t^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} f^{\lceil\alpha\rceil}(t).$$

Où , $\alpha \in]n, n+1]$ *, et* f *est* $(n+1)-$*différentiable en* $t > 0$ *.*

Théorème 2.2.2. [36] *Soit* $\alpha \in]0,1]$ *et on suppose que* $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ *sont* $\alpha-$*différentiables en* $t > 0$ *. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

(1) $(\xi f + \eta g)^{(\alpha)} = \xi f^{(\alpha)} + \eta g^{(\alpha)}$ *, pour tout* $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ *.*

(2) $(fg)^{(\alpha)} = f g^{(\alpha)} + g f^{(\alpha)}$ *.*

(3) $(f/g)^{(\alpha)} = \dfrac{g f^{(\alpha)} - f g^{(\alpha)}}{g^2}$ *.*

Démonstration.

(1) La preuve de cette propriété découle directement du définition (2.2.1) .

(2) D'après la définition (2.2.1) , on a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon}\right] \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \cdot g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right] + f(t) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= f^{(\alpha)}(t) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) g^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

Puisque g continue en t , Alors $\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$.

(3) D'après la proposition (2.2.1) et le théorème (2.2.1) , on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)'(t) \\
&= t^{1-\alpha}\left(\frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}\right) \\
&= \frac{g(t)f^{(\alpha)}(t) - f(t)g^{(\alpha)}(t)}{g^2(t)}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.3. [41] *Si la fonction* $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ *est* $\alpha-$*différentiable en* $t_0 > 0$ *,* $\alpha \in]0,1]$ *alors* f *est continue en* t_0 *.*

Démonstration.

Nous avons $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \dfrac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon$$

Soit $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \left[f(t_0 + h) - f(t_0) \right] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0).$$

Donc f est continue en t_0 . □

2.2.2 Intégrale fractionnaire conformable

Définition 2.2.3. [41] *Soient* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction* , $a \geq 0$ *et* $\alpha \in]0, 1[$.
L'intégrale fractionnaire conformable de f *d'ordre* α *de* a *vers* t *définie par :*

$$\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t) := \mathcal{I}_1^a(t^{\alpha-1} f)(t) = \int_a^t f(s) d_\alpha s := \int_a^t f(s) s^{\alpha-1} ds.$$

L'intégrale considérée est l'intégrale impropre usuelle de Riemann .

Notation 2.2.1.
Soit $0 < a < b$, On note la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} dt$ par ${}_\alpha\mathfrak{I}_a^b[f]$, et on a

$${}_\alpha\mathfrak{I}_a^b[f] = \mathcal{I}_\alpha^a(f)(b).$$

Proposition 2.2.2. [9]
Soit $0 < a < b$. *On suppose que* $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ *, alors* $\left| {}_\alpha\mathfrak{I}_a^b[f] \right| \leq {}_\alpha\mathfrak{I}_a^b\Big[|f|\Big]$.

Démonstration.

Soit $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$, alors $\left| {}_\alpha\mathfrak{I}_a^b[f] \right| = \left| \displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} dt \right| \leq \displaystyle\int_a^b \left| \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} \right| dt = \displaystyle\int_a^b \frac{|f(t)|}{t^{1-\alpha}} dt$.

Par conséquent ,

$$\left| {}_\alpha\mathfrak{I}_a^b[f] \right| \leq {}_\alpha\mathfrak{I}_a^b\Big[|f|\Big] .$$

□

Théorème 2.2.4. [53, 41] *Soient* $a \geq 0, \alpha \in]0, 1[$ *, et* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction continue sur le domaine de* $\mathcal{I}_\alpha^a$ *alors pour tout* $t \geq a$ *on a :*

$$(\mathcal{I}_\alpha^a(f))^{(\alpha)}(t) = f(t).$$

Démonstration.

Puisque f est continue , donc $\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f)$ est différentiable .

D'après la proposition (2.2.1) nous avons

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f))^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f))\\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t}\frac{f(s)}{s^{1-\alpha}}ds\\ &= t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}\\ &= f(t).\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.5. [9] *Si $g \in L^{1}([a,b])$, alors la fonction $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par*

$$x(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + {}_{\alpha}\mathfrak{I}_{a}^{t}\left[\frac{g(s)}{e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^{\alpha}}}\right]\right). \tag{2.5}$$

est une solution du problème

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \frac{1}{a^{\alpha}}x(t) = g(t), & t\in[a,b], \quad a>0,\\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie par (2.5) . D'après les théorèmes (2.2.2) , (2.2.4) et la proposition (2.2.1) , nous avons

$$\begin{aligned}x^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}\alpha t^{\alpha-1}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + {}_{\alpha}\mathfrak{I}_{a}^{b}\left[\frac{g(s)}{e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^{\alpha}}}\right]\right) + e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^{\alpha}}\left(\frac{g(t)}{e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^{\alpha}}}\right)\\ &= -\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{t}{a})^{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + {}_{\alpha}\mathfrak{I}_{a}^{b}\left[\frac{g(s)}{e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^{\alpha}}}\right]\right) + g(t)\\ &= -\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}x(t) + g(t).\end{aligned}$$

Donc ,

$$x^{(\alpha)}(t) + \tfrac{1}{a^{\alpha}}x(t) = g(t).$$

D'autre part ,

$$x(a) = e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{a}{a})^{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + {}_{\alpha}\mathfrak{I}_{a}^{a}\left[\frac{g(s)}{e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{s}{a})^{\alpha}}}\right]\right) = e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\alpha}}x_0 + 0\right) = x_0.$$

□

Proposition 2.2.3. [9] *Si $x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est $\alpha-$différentiable en $t \in [a,b]$, alors*

$$|x(t)|^{(\alpha)} = \frac{x(t)x^{\alpha}(t)}{|x(t)|}.$$

Démonstration.

D'après la définition (2.2.1) , nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t)|^{(\alpha)} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|x(t+\varepsilon t^{1-\alpha})| - |x(t)|}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{x(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^2 - x(t)^2}{\varepsilon\big(|x(t+\varepsilon t^{1-\alpha})| + |x(t)|\big)} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{x(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^2 - x(t)^2}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{|x(t+\varepsilon t^{1-\alpha})| + |x(t)|} \right] \\
&= \left[x(t)^2\right]^{(\alpha)} \cdot \frac{1}{2|x(t)|} \\
&= 2x(t)x^{(\alpha)}(t)\frac{1}{2|x(t)|} \\
&= \frac{x(t)x^{\alpha}(t)}{|x(t)|}.
\end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.2.4. [10, 12] *Soit $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré . Une propriété $\mathcal{P}$ est dite presque partout (p.p) sur E ou presque pour tout (p.p.t) $t \in E$ s'il existe un ensemble $B \subset E$ négligeable tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $E \setminus B$.*

Définition 2.2.5. [10, 12] *Soit A ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue sur I . On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction $\alpha-$intégrable sur A si et seulement si $t^{\alpha-1}f(t)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur A , et on note*

$$\int_A f(t)d_{\alpha}t = \int_A t^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Définition 2.2.6. [12] *Soient $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable , et $\Phi : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable . On dira que $\Phi \in L^1_{\alpha}(E,\mathbb{R})$ si*

$$\int_E \big|\Phi(s)\big|d_{\alpha}s = \int_E \big|\Phi(s)\big|s^{\alpha-1}ds < +\infty.$$

On dira qu'une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}^n$ est dans l'ensemble $L^1_{\alpha}(E,\mathbb{R}^n)$ si

$$\int_E \big\|f(s)\big\|d_{\alpha}s = \int_E \big\|f(s)\big\|s^{\alpha-1}ds < +\infty.$$

ie., $f_i \in L^1_{\alpha}(E,\mathbb{R})$, pour chacune de ces composantes $f_i : E \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$.

Définition 2.2.7. [12]
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dite absolument continue notée $f \in \mathcal{AC}(I, \mathbb{R}^n)$ sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\{[a_k, b_k[\}_{k=1}^{k=m}$ est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints satisfaisant

$$\sum_{k=1}^{k=m} (b_k - a_k) < \delta \quad \textit{alors} \quad \sum_{k=1}^{k=m} \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.2.6. [12] *On suppose que la fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est absolument continue sur I , alors f est fractionnaire conformable différentiable d'ordre α p.p. sur I et on a*

$$f(t) = f(0) + \int_{[0,t]} f^{(\alpha)}(s) d_\alpha s, \qquad \textit{pour tout } t \in I.$$

2.2.3 Applications

Exemple 2.2.1. Soit l'équation différentielle fractionnaire conformable suivante :

$$\begin{cases} y^{(1/2)}(x) + \sqrt{x} y(x) = x e^{-x}, & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

On a

$$y^{(1/2)}(x) + \sqrt{x} y(x) = x e^{-x} \tag{2.7}$$

En multipliant l'équation (2.7) par e^x , on trouve

$$e^x y^{(1/2)}(x) + \sqrt{x} e^x y(x) = x$$

D'après le théorème (2.2.2)

$$\left(e^x y(x)\right)^{(1/2)} = x$$

Par l'intégration , on a

$$e^x y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + c \Longrightarrow y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} e^{-x} + c e^{-x}$$

La condition initiale implique que $c = 1$.

Donc ,

$$y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} e^{-x} + e^{-x}$$

est un solution d'équation différentielle fractionnaire conformable (2.6) .

Exemple 2.2.2. Soit l'équation différentielle fractionnaire conformable suivante :

$$\begin{cases} x^{(1/3)}(t) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}x(t) = \dfrac{e^{-3\left(\frac{s}{2}\right)^{1/3}}}{s^{2/3}\sqrt[3]{2}}, & t \in [2, 10], \\ x(2) = x_0. \end{cases}$$

D'après le théorème (2.2.5) , on a : $\alpha = \frac{1}{3}$, $a = 2$ et $g(t) = \dfrac{e^{-3\left(\frac{t}{2}\right)^{1/3}}}{t^{2/3}\sqrt[3]{2}}$.

$$x(t) = e^{-3\left(\frac{t}{2}\right)^{1/3}} \left(e^{3x_0} + \underbrace{{}_{1/3}\mathfrak{I}_2^t \left[\frac{s^{-2/3}}{\sqrt[3]{2}} \right]}_{\mathcal{I}} \right).$$

En utilisant la définition (2.2.3) pour calculer l'intégrale $\mathcal{I}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_2^t \frac{s^{-2/3}}{\sqrt[3]{2}} \cdot s^{-2/3} ds \\ &= \int_2^t \frac{s^{-4/3}}{\sqrt[3]{2}} ds \\ &= \left[\frac{-3s^{-1/3}}{\sqrt[3]{2}} \right]_{s=2}^{s=t} \\ &= \left[\frac{-3t^{-1/3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} \right]. \end{aligned}$$

Donc ,

$$x(t) = e^{-3\left(\frac{t}{2}\right)^{1/3}} \left(e^{3x_0} + \left[\frac{-3t^{-1/3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} \right] \right).$$

2.3 Calcul fractionnaire conformable sur les échelles de temps

On introduit quelques notions de $\Delta-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre α $0 < \alpha \leq 1$ pour une fonction définie sur l'échelle de temps arbitraire $\mathbb{T}$.

Définition 2.3.1 (Delta dérivée fractionnaire conformable [32]).
Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction , $t \in \mathbb{T}^k$ et $\alpha \in]0, 1]$. Pour $t > 0$, on dira que f est $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t s'il existe un nombre $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ tel que , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta-$voisinage $\mathcal{V}_t \subset \mathbb{T}$ de t , (ie., $\mathcal{V}_t =]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T})$, $\delta > 0$ où ,

$$\left| \left(f^{\sigma}(t) - f(s) \right) t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

On appelle $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ la $\Delta-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre α de f en t .
On définit la $\Delta-$dérivée fractionnaire conformable en 0 par :

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f_{\Delta}^{(\alpha)}(t).$$

Si f est $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f_{\Delta}^{(\alpha)} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la $\Delta-$dérivée fractionnaire conformable de f sur $\mathbb{T}^k$.

Définition 2.3.2. [32] *Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps , $\alpha \in]n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ et f $n-$fois $\Delta-$différentiable en $\mathbb{T}^{k^n}$. On definit la $\Delta-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α par :*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \left(f^{\Delta^n}\right)_{\Delta}^{(\alpha-n)}(t).$$

Théorème 2.3.1. [32] *Soient $\alpha \in]n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$. On a la relation suivante :*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = t^{1+n-\alpha} f^{\Delta^{1+n}}(t). \tag{2.8}$$

Démonstration.
La démonstration est similaire à celle donnée par le théorème (3.2.7) . □

Maintenant, nous introduisons $\Delta-$intégrale fractionnaire conformable (ou $\Delta^{\alpha}-$intégrale fractionnaire) sur l'échelle de temps .

Définition 2.3.3. [32] *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière . Alors la $\Delta^{\alpha}-$intégrale fractionnaire de f , $0 < \alpha \leq 1$, est définie par :*

$$\int f(t)\Delta^{\alpha} t = \int f(t) t^{\alpha-1} \Delta t.$$

Définition 2.3.4. [32] *Supposons que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière .*
On note $\Delta^{\alpha}-$intégrale fractionnaire indéfinie de f d'ordre α , $0 < \alpha \leq 1$ par :

$$F_{\Delta,\alpha}(t) = \int f(t)\Delta^{\alpha} t.$$

Alors , pour tous $a, b \in \mathbb{T}$, on définit $\Delta^{\alpha}-$intégrale fractionnaire de Cauchy par :

$$\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha} t = F_{\Delta,\alpha}(b) - F_{\Delta,\alpha}(a).$$

Théorème 2.3.2. [32] *Soit $\alpha \in]0, 1]$. Alors , pour toute fonction rd-continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $F_{\Delta,\alpha} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tel que $(F_{\Delta,\alpha})_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$.*
La fonction $F_{\Delta,\alpha}$ s'appelle $\Delta^{\alpha}-$antidérivée de f .

Démonstration.

• Si $\alpha = 1$ alors il réduit à la définition (1.3.4) et le théorème (1.3.2) .

• Si $\alpha \in]0,1[$. Supposons que f est *rd-continue* , alors f est une fonction régulière .
Donc , $F_{\Delta,\alpha}(t) = \int f(t)\Delta^{\alpha}t$ est $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable sur $\mathbb{T}^k$.
En utilisant l'égalité (2.8) et la définition (2.3.3) , nous obtenons

$$(F_{\Delta,\alpha})^{(\alpha)}_{\Delta}(t) = t^{1-\alpha}(F_{\Delta,\alpha}(t))^{\Delta} = f(t), \ \ \forall t \in \mathbb{T}^k.$$

□

Définition 2.3.5. [43] *Soit* $(\mathbb{T}, \mathcal{M}_{\Delta}, \mu_{\Delta})$ *un espace mesuré , et soit un ensemble* $E \subset \mathbb{T}$ *. Une propriété* $\mathcal{P}$ *est dite* $\Delta-$*presque partout* ($\Delta-$*p.p) sur* E *ou* $\Delta-$*presque pour tout* ($\Delta-$*p.p.t)* $t \in E$ *s'il existe un ensemble* $B \subset E$ $\Delta-$*négligeable tel que* $\mathcal{P}$ *est vraie sur* $E \setminus B$ *.*

Définition 2.3.6. [32] *Soient* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction ,* A *est un ensemble* $\Delta-$*mesurable de* $\mathbb{T}$ *. On dit que* f *est* $\Delta^{\alpha}-$*intégrable sur* A *si et seulement si* $t^{\alpha-1}f(t)$ *est intégrable sur* A *, et*

$$\int_A f(t)\Delta^{\alpha}t = \int_A t^{\alpha-1}f(t)\Delta t.$$

Chapitre 3

Calcul nabla fractionnaire conformable sur les échelles de temps

3.1 Introduction

En 2014 , Khalil et al. [41] ont défini une nouvelle dérivée fractionnaire qui s'appelle la dérivée fractionnaire conformable (voir la définition (2.2.1)) .
En particulier , Benkhettou et al. [32] ont étendu cette définition sur l'échelle de temps arbitraire , qui est une extension naturelle du calcul fractionnaire conformable (voir la définition (2.3.1)) , qui a été développée plus tard [18, 55] .

Motivé par des résultats dans [32, 18, 55] , dans ce chapitre , nous introduisons les définitions de $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable et $\nabla-$intégrale conformable sur les échelles de temps et nous étudions leurs propriétés importantes .

3.2 $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable

Nous commençons par introduire la notion de $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre $\alpha \in]0,1]$ pour une fonction définie sur l'échelle de temps arbitraire $\mathbb{T}$.

3.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 3.2.1. [11, 12]
Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction , $t \in \mathbb{T}_k$ et $\alpha \in]0,1]$. Pour $t > 0$, on dira que f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t s'il existe un nombre $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t)$ tel que , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta-$voisinage $\mathcal{V}_t \subset \mathbb{T}$ de t , (ie., $\mathcal{V}_t =]t-\delta, t+\delta[\cap \mathbb{T}$) , $\delta > 0$

où ,

$$\left|\left(f^{\rho}(t)-f(s)\right)t^{1-\alpha}-\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t)(\rho(t)-s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t)-s|, \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

On appelle $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t)$ la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre α de f en t .
On définit la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable en 0 par :

$$\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(0)=\lim_{t\to 0^+}\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t).$$

Si f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t pour tout $t \in \mathbb{T}_k$, alors $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f) : \mathbb{T}_k \to \mathbb{R}$ est appelée la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f sur $\mathbb{T}_k$.

Remarque 3.2.1. [11, 12] *Si $\alpha = 1$, et f admet une $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre α alors $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t) = f^{\nabla}(t)$.*

Notations 3.2.1. On note :

- $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$.
- $\mathcal{C}^{\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}) = \{f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t) \in \mathcal{C}([a,b]_{\mathbb{T}})\}$.
- $\mathcal{C}_{ld}^{\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}) = \{f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{T}_{\nabla,\alpha}(f)(t) \in \mathcal{C}_{ld}([a,b]_{\mathbb{T}})\}$.

Certaines propriétés importantes de $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. [11, 12] *Soient $\alpha \in]0,1]$, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}_k$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *Si f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t , alors f est continue en t .*

(ii) *Si f est continue en t et si t est dispersé à gauche , alors f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t et*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}. \tag{3.1}$$

(iii) *Si t est dense à gauche , alors f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t si et seulement si la limite $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}$ existe et finie .*
Dans ce cas ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}. \tag{3.2}$$

(iv) *Si f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t , alors*

$$f^{\rho}(t) = f(t) - \gamma(t)t^{\alpha-1}f_{\nabla}^{(\alpha)}(t). \tag{3.3}$$

Démonstration.

(i) Supposons que f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t , alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t tel que :

$$\left|(f^{\rho}(t) - f(s))t^{1-\alpha} - f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon^{*}|\rho(t) - s|, \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

Où ,

$$\varepsilon^{*} = \frac{\varepsilon}{1 + 2\gamma(t) + |f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)|}t^{1-\alpha}.$$

Par conséquent , nous avons , pour tout $s \in \mathcal{V}_t \cap \,]t - \varepsilon^{*}, t + \varepsilon^{*}[$,

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| &= \Big|(f(\rho(t) - f(s)) - f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)t^{\alpha-1} \\
&\quad -\left[(f(\rho(t) - f(t)) - f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - t)t^{\alpha-1}\right] + f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(t - s)t^{\alpha-1}\Big| \\
&\leq \varepsilon^{*}\left|(\rho(t) - s)t^{\alpha-1}\right| + \varepsilon^{*}\left|(\rho(t) - t)t^{\alpha-1}\right| + \left|f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(t - s)t^{\alpha-1}\right| \\
&\leq \varepsilon^{*}|t^{\alpha-1}|\left\{\gamma(t) + |s - t| + \gamma(t) + |f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)|\right\} \\
&\leq \varepsilon^{*}|t^{\alpha-1}|\left\{1 + 2\gamma(t) + |f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)|\right\} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc , f continue en t .

(ii) Supposons que f est continue en t , et t est dispersé à gauche . Par la continuité ,

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}t^{1-\alpha} = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t}t^{1-\alpha} = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in]0, 1]$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t tel que

$$\left|\frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}t^{1-\alpha} - \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}\right| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

D'où ,

$$\left|(f^{\rho}(t) - f(s))t^{1-\alpha} - \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)}(\rho(t) - s)t^{1-\alpha}\right| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|$$

D'après la définition (3.2.1) on trouve l'égalité (3.1) .

(iii) Supposons que f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t et t dense à gauche .

Soit $\varepsilon > 0$, puisque f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t , donc il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t tel que ,

$$\left|(f^{\rho}(t)-f(s))t^{1-\alpha}-f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t)-s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t)-s|, \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

Parce que $\rho(t)=t$, on a

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}-f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\right| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{V}_t, \text{ tel que } s \neq t,$$

Par conséquent , nous obtenons le résultat (3.2) .

Maintenant , on suppose que la limite à droite de (3.2) existe et est égale à ℓ , et t est dense à gauche .

Alors , il existe $\mathcal{V}_t$ tel que ,

$$\left|(f(t)-f(s))t^{1-\alpha}-\ell(t-s)\right| \leq \varepsilon|t-s|, \qquad \text{pour tout } s \in \mathcal{V}_t,$$

le fait que t est dense à gauche ,

$$\left|\big(f(\rho(t))-f(s)\big)t^{1-\alpha}-\ell(\rho(t)-s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t)-s|.$$

Donc f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t et $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=\ell$.

(iv) Si t est dense à gauche , alors $\gamma(t)=0$, et

$$f(\rho(t))=f(t)-\gamma(t)f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)t^{1-\alpha}=f(t).$$

D'autre part , si t est dispersé à gauche , alors d'après la propriété (ii) du théorème (3.2.1) on a

$$\begin{aligned} f(\rho(t)) &= f(t)-\gamma(t)\cdot\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\gamma(t)} \\ &= f(t)-\gamma(t)t^{\alpha-1}\cdot\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha} \\ &= f(t)-\gamma(t)t^{\alpha-1}f_{\nabla}^{(\alpha)}(t). \end{aligned}$$

Donc , l'égalité (3.3) est vraie . □

Proposition 3.2.1. [11, 12] *Si $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est définie par $f(t)=c$, pour tout $t\in\mathbb{T}$ et $c\in\mathbb{R}$, alors*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=(c)_{\nabla}^{(\alpha)}=0.$$

Démonstration.
Si t dispersé à gauche , alors par la propriété (ii) du théorème (3.2.1) on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=\frac{f(t)-f^{\rho}(t)}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}=0.$$

Autrement , si t dense à gauche , alors par la propriété (iii) du théorème (3.2.1) on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=\lim_{s\to t}\left(\frac{c-c}{t-s}\cdot t^{1-\alpha}\right)=0.$$

□

Proposition 3.2.2. [11, 12] *Si $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est définie par $f(t)=t$ pour tout $t\in\mathbb{T}$, alors*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=(t)_{\nabla}^{(\alpha)}=\begin{cases} t^{1-\alpha} & \textit{si} \quad \alpha\neq 1,\\ 1 & \textit{si} \quad \alpha=1.\end{cases}$$

Démonstration.
• Si $0<\alpha<1$, d'après la propriété (iv) du théorème (3.2.1) , on a

$$\rho(t)=t-\gamma(t)t^{\alpha-1}f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\Longrightarrow\gamma(t)=\gamma(t)t^{\alpha-1}f_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

Si $\gamma(t)\neq 0$, alors $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=t^{1-\alpha}$.
Maintenant on suppose que $\gamma(t)=0$, ie., $\rho(t)=t$. Dans ce cas t est dense à gauche et d'après la propriété (iii) du théorème (3.2.1) on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=\lim_{s\to t}\left(\frac{t-s}{t-s}\cdot t^{1-\alpha}\right)=t^{1-\alpha}.$$

• Si $\alpha=1$, alors $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=1$. □

Exemples 3.2.1.

1) La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en point $t\in\mathbb{R}$ si et seulement si , la limite $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}$ existe et finie.
Dans ce cas ,
$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=f^{(\alpha)}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}. \tag{3.4}$$

Car dans ce cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, tous les points sont dense et il suffit d'appliquer la propriété (iii) du théorème (3.2.1) .

• L'identité (3.4) correspond à la dérivée fractionnaire conformable donnée dans la définition (2.2.1) .

• Si $\alpha = 1$ alors $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f^{\nabla}(t) = f'(t)$.

2) Soit $h > 0$. Si $f : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, alors f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t $\in h\mathbb{Z}$ avec

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(t) - f(t-h)}{h} t^{1-\alpha}.$$

• Si $\alpha = 1$ et $h = 1$, alors

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \nabla f(t) = f(t) - f(t-1), \quad (\text{ où } \nabla \text{ est l'opérateur de différence arrière .})$$

Exemple 3.2.1. Soient $p \in \mathcal{R}_{\gamma}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ et $f(t) = \hat{e}_p(t, t_0)$ pour $t \in \mathbb{T}$ on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} p \hat{e}_p(t, t_0).$$

• **Cas 01** : t est dispersé à gauche , d'après la propriété (ii) du théorème (3.2.1) , on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \left(\hat{e}_p(t, t_0)\right)_{\nabla}^{(\alpha)} = \hat{e}_p^{\nabla}(t, t_0) t^{1-\alpha}.$$

D'après le théorème 12 dans [15] on a

$$\hat{e}_p^{\nabla}(t, t_0) = p \hat{e}_p(t, t_0).$$

Donc ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} p \hat{e}_p(t, t_0).$$

• **Cas 02** : t est dense à gauche , d'après la propriété (iii) du théorème (3.2.1) , on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \left(\hat{e}_p(t, t_0)\right)_{\nabla}^{(\alpha)} = \hat{e}_p^{\nabla}(t, t_0) t^{1-\alpha}.$$

D'après le théorème 12 dans [15] on a

$$\hat{e}_p^{\nabla}(t, t_0) = p \hat{e}_p(t, t_0).$$

Donc ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} p \hat{e}_p(t, t_0).$$

Théorème 3.2.2. [38] *Soient* $\tilde{p}(t) = t^{\alpha-1}p(t)$, $\alpha \in]0,1]$. *Si* $\tilde{p} \in \mathcal{R}_\gamma$, $t_0 \in \mathbb{T}$, *alors la fonction* $\nabla-$*exponentielle* $\hat{e}_{\tilde{p}}(t, t_0)$ *est une solution unique du problème suivant :*

$$\begin{cases} y_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = p(t)y(t), \\ y(t_0) = 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

DÉMONSTRATION.

D'après le théorème (1.5.1) on a la fonction $\nabla-$exponentielle $\hat{e}_p(t, t_0)$ est une solution unique du problème suivant :

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) = p(t)y(t), \\ y(t_0) = 1. \end{cases}$$

D'après l'exemple (3.2.1) , on trouve

$$\left(\hat{e}_{\tilde{p}}(t, t_0)\right)_{\nabla}^{(\alpha)} = t^{1-\alpha}\tilde{p}(t)\hat{e}_{\tilde{p}}(t, t_0) = p(t)\hat{e}_{\tilde{p}}(t, t_0).$$

Donc , la fonction $\hat{e}_{\tilde{p}}(t, t_0)$ est une solution unique du problème (3.5) . □

Théorème 3.2.3. [11, 12] *Supposons que* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *sont* $\nabla-$*fractionnaires conformables différentiables d'ordre* α *alors ,*

(i) *La somme* $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* $\nabla-$ *fractionnaire conformable différentiable et*

$$(f+g)_{\nabla}^{(\alpha)} = f_{\nabla}^{(\alpha)} + g_{\nabla}^{(\alpha)}.$$

(ii) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* $\nabla-$*fractionnaire conformable différentiable et*

$$(\lambda f)_{\nabla}^{(\alpha)} = \lambda f_{\nabla}^{(\alpha)}.$$

(iii) *Si* f *et* g *sont continues alors le produit* $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* $\nabla-$*fractionnaire conformable différentiable et*

$$\begin{aligned}(fg)_{\nabla}^{(\alpha)} &= f_{\nabla}^{(\alpha)} g + f^{\rho} g_{\nabla}^{(\alpha)}. \\ &= f_{\nabla}^{(\alpha)} g^{\rho} + f g_{\nabla}^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

(iv) *Si f est continue alors $\dfrac{1}{f}$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et on a*

$$\left(\frac{1}{f}\right)_{\nabla}^{(\alpha)} = -\frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}}{ff^{\rho}}.$$

Pour tous points $t \in \mathbb{T}$ et $f(t)f^{\rho}(t) \neq 0$.

(v) *Si f et g sont continues alors $\dfrac{f}{g}$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{\nabla}^{(\alpha)} = \frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}g - fg_{\nabla}^{(\alpha)}}{gg^{\rho}}.$$

Pour tous points $t \in \mathbb{T}$ et $g(t)g^{\rho}(t) \neq 0$.

Démonstration. Supposons que f et g sont deux fonctions $\nabla-$fractionnaires conformables différentiables d'ordre α en $t \in \mathbb{T}_k$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux voisinages $\mathcal{V}_t$ et $\mathcal{U}_t$ de t oú ,

$$\left|(f^{\rho}(t) - f(s))t^{1-\alpha} - f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\rho(t) - s|, \quad \text{pour tout s } \in \mathcal{V}_t.$$

$$\left|(g^{\rho}(t) - g(s))t^{1-\alpha} - g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\rho(t) - s|, \quad \text{pour tout s } \in \mathcal{U}_t.$$

Soit $\mathcal{W}_t = \mathcal{V}_t \cap \mathcal{U}_t$. Alors , pour tout $s \in \mathcal{W}_t$,

$$\left|((f+g)^{\rho}(t) - (f+g)(s))t^{1-\alpha} - (f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) + g_{\nabla}^{(\alpha)}(t))(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|,$$

Donc , $f+g$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et

$$(f+g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) + g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\left|(f^{\rho}(t) - f(s))t^{1-\alpha} - f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|, \quad \text{pour tout s } \in \mathcal{V}_t$$

Il s'ensuit que

$$\left|((\lambda f)^{\rho}(t) - (\lambda f)(s))t^{1-\alpha} - \lambda f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\lambda||\rho(t) - s|, \text{ pour tout s } \in \mathcal{V}_t.$$

Par conséquent , λf est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable en t . et

$$(\lambda f)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \lambda f_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

(iii) Si t est dispersé à gauche , alors

$$\begin{aligned}
(fg)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \frac{(fg)(t)-(fg)^{\rho}(t)}{\gamma(t)}t^{1-\alpha} \\
&= \left[\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}\right]g(\rho(t)) + \left[\frac{g(t)-g(\rho(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}\right]f(t) \\
&= f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)g(\rho(t)) + f(t)g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

Si t est dense à gauche , alors

$$\begin{aligned}
(fg)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{(fg)(t)-(fg)(s)}{t-s}t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{s\to t}\left[\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right]g(t) + \left[\frac{g(t)-g(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right]f(s) \\
&= f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)g(t) + g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)f(t).
\end{aligned}$$

Et pour l'autre formule il suffit de permuter f et g .

(iv) D'après la proposition (3.2.1) , on sait que

$$\left(f\cdot\frac{1}{f}\right)_{\nabla}^{(\alpha)} = (1)_{\nabla}^{(\alpha)} = 0.$$

Par conséquent , d'après la propriété (iii) du théorème (3.2.3) ,

$$\left(\frac{1}{f}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}(t)f(\rho(t)) + f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\frac{1}{f(t)} = 0.$$

Puisque on a $f(\rho(t)) \neq 0$, alors

$$\left(\frac{1}{f}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = -\frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)}{f(t)f(\rho(t))}.$$

(v) On utilise les propriétés (iii) et (iv) du théorème (3.2.3) on trouve

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \\
&= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) + f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\frac{1}{g(\rho(t))} \\
&= -\frac{g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}f(t) + f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\frac{g(t)}{g(t)g(\rho(t))} \\
&= \frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)g(t) - f(t)g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g différentiable en t et f différentiable en $g(t)$. Alors

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t). \tag{3.6}$$

L'égalité (3.6) ne satisfait pas dans le calcul fractionnaire (voir la remarque (2.1.1)), et aussi dans le calcul sur les échelles de temps (d'ordre entier ou fractionnaire) voir l'exemple suivant :

Exemple 3.2.2. Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. On suppose que $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sont deux fonctions définies par $f(t) = t^2$, $g(t) = 2t$.
Il est clair que

$$(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)} = 4(2t-1)t^{1-\alpha} \neq (4t-1)(2t)^{1-\alpha}t^{1-\alpha} = f_{\nabla}^{(\alpha)}(g(t))g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

Théorème 3.2.4. [11, 12]
Soit $\alpha \in]0,1]$. On suppose que $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est continue et $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en $t \in \mathbb{T}_k$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable . Alors , il existe c dans l'intervalle $[\rho(t), t]$, avec

$$(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f'(g(c))g_{\nabla}^{(\alpha)}(t). \tag{3.7}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{T}_k$.

- **Cas 01** : Si t dispersé à gauche ,

  Dans ce cas ,
  $$(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(g(t)) - f(g(\rho(t)))}{\gamma(t)} t^{1-\alpha}.$$
  Si $g(\rho(t)) = g(t)$, alors nous obtenons
  $$(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = 0 \text{ et } g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = 0.$$
  Par conséquent , l'égalité (3.7) est vraie pour tout c dans l'intervalle réel $[\rho(t), t]$.
  On suppose maintenant que $g(\rho(t)) \neq g(t)$. Par le théorème de la moyenne , nous avons
  $$(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(g(\rho(t))) - f(g(t))}{g(\rho(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(t) - g(\rho(t))}{\gamma(t)} t^{1-\alpha} = f'(\xi)g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$
  D'oú , ξ entre $g(\rho(t))$ et $g(t)$.
  Puisque $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ continue donc il existe $c \in [\rho(t), t]$ tel que $g(c) = \xi$ qui vérifie l'égalité (3.7) .

- **Cas 02** : Si t dense à gauche ,

  Dans ce cas ,

$$\begin{aligned}(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f(g(t))-f(g(s))}{t-s}t^{1-\alpha} \\ &= \lim_{s\to t}\frac{f(g(t))-f(g(s))}{g(t)-g(s)}\cdot\frac{g(t)-g(s)}{t-s}t^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

  Par le théorème de la moyenne , il existe ξ_s entre $g(\rho(t))$ et $g(t)$ tel que ,

$$(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s\to t}\left\{f(\xi_s)\cdot\frac{g(t)-g(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right\}.$$

  Par la continuité de g nous obtenons , $\lim\limits_{s\to t}\xi_s = g(t)$ alors

$$(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f'(g(t))g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

  Puisque t dense à gauche donc , $c = t = \rho(t)$ qui vérifie l'égalité (3.7) . Donc , il existe $c\in[\rho(t),t]$ qui vérifie l'égalité (3.7) .

$\square$

Exemple 3.2.3. Soit $\mathbb{T}=\mathbb{N}$.

• Pour $t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}$, on a : $\rho(t)=t-1$ et $\gamma(t)=1$.

• Pour $t=0$, on a : $\rho(t)=0$ et $\gamma(t)=0$.

1) On prend $f(t)=t^2$, et $g(t)=t$.

   Le théorème (3.2.4) garantit qu'on peut trouver c dans l'intervalle $[\rho(t),t]$ tel que

$$(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f'(g(c))g_{\nabla}^{(\alpha)}(t). \tag{3.8}$$

   Par le théorème (3.2.1) , on a

$$(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{3}{2}t^{2-\alpha}\,,\ g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} \text{ et } f'(g(c)) = 2c.$$

   D'après l'égalité (3.8) , on a

$$\frac{3}{2}t^{2-\alpha} = 2ct^{1-\alpha}.$$

   Donc ,

$$c = \frac{3}{4}t\in\big[t-1,t\big].$$

2) On prend maintenant $f(t) = g(t) = t^2$ pour tout $t \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Nous obtenons

$$\frac{15}{8}t^{4-\alpha} = (f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f'(g(c))g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = 2c^2 \cdot \frac{3}{2}t^{2-\alpha}.$$

Par conséquent ,

$$c = \sqrt{\frac{5}{8}}t \in \big[t-1, t\big].$$

Théorème 3.2.5. [19, 49] *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable , $\alpha \in]0,1]$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable . Alors $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et on a :*

$$(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \left\{\int_0^1 f'\big(g(t) - h\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\big)dh\right\} g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

Démonstration.

- **Cas 01** : t dense à gauche

$$\begin{aligned}
(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \lim_{s \to t} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(s)}{t-s} t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{s \to t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{t-s} t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{s \to t} \left[\frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t-s}\right] t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{s \to t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \cdot \lim_{s \to t} \frac{g(t) - g(s)}{t-s} t^{1-\alpha} \\
&= f'(g(t)) \cdot g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

D'autre part , puisque $t = \rho(t)$, alors $\gamma(t) = 0$ et on a

$$\begin{aligned}
(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \left\{\int_0^1 f'\big(g(t) - h\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\big)dh\right\} g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \\
&= \left\{\int_0^1 f'(g(t))dh\right\} g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \\
&= f'(g(t)) \cdot g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

- **Cas 02** : t dispersé à gauche

$$\begin{aligned}
(f \circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(\rho(t))}{\gamma(t)} t^{1-\alpha} \\
&= \frac{f(g(t)) - f(g^{\rho}(t))}{\gamma(t)} t^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

D'autre part ,

$$\begin{aligned}
(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \left\{\int_0^1 f'\big(g(t)-h\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\big)dh\right\} g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\\
&= -\frac{1}{\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)}\left\{\Big[f\big(g(t)-h\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\big)\Big]_{h=0}^{h=1}\right\}\cdot g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\\
&= -\frac{1}{\gamma(t)t^{\alpha-1}}\left\{f\big(g(t)-\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\big)-f\big(g(t)\big)\right\}\\
&= -\frac{f\big(g^{\rho}(t)\big)-(f\circ g)(t)}{\gamma(t)t^{\alpha-1}}\\
&= \frac{(f\circ g)(t)-f\big(g^{\rho}(t)\big)}{\gamma(t)t^{\alpha-1}}\\
&= \frac{f(g(t))-f(g^{\rho}(t))}{\gamma(t)}t^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.2.4. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ deux fonctions définies par : $g(t)=t^2$, $f(t)=e^t$, alors

$$g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=(2t-1)t^{1-\alpha}\ \textit{et}\ f'(t)=e^t.$$

D'après le théorème (3.2.5) , on a

$$\begin{aligned}
(f\circ g)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= \left\{\int_0^1 f'\big(g(t)-h\gamma(t)t^{\alpha-1}g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\big)dh\right\} g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\\
&= (2t-1)t^{1-\alpha}\int_0^1 e^{t^2-h(2t-1)}dh\\
&= (2t-1)t^{1-\alpha}e^{t^2}\int_0^1 e^{-h(2t-1)}dh\\
&= (2t-1)t^{1-\alpha}e^{t^2}\left[\frac{-e^{-h(2t-1)}}{2t-1}\right]_{h=0}^{h=1}\\
&= (2t-1)t^{1-\alpha}e^{t^2}\left[\frac{1-e^{1-2t}}{2t-1}\right]\\
&= \big(1-e^{1-2t}\big)t^{1-\alpha}e^{t^2}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.2.6. [31] *Soient c une constante , $m\in\mathbb{N}$ et $0<\alpha\leq 1$.*

1) Si $f(t)=(t-c)^m$, alors

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}(t-c)^{m-1-i}(\rho(t)-c)^i.$$

• *Si* $c=0$, *alors*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=(t^m)_{\nabla}^{(\alpha)}=t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}t^{m-1-i}\rho(t)^i.$$

2) Si $g(t)=\dfrac{1}{(t-c)^m}$, *alors*

$$g_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=-t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(t-c)^{i+1}(\rho(t)-c)^{m-i}}.$$

Avec , $[\rho(t)-c](t-c)\neq 0$.

DÉMONSTRATION.

1) Par récurrence :

• Si $m=1$, alors $f(t)=t-c$. D'après la propriété (i) du théorème (3.2.3) et les propositions (3.2.1) et (3.2.2) , on trouve : $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=t^{1-\alpha}$.

• Maintenant , on suppose que $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=t^{1-\alpha}\sum\limits_{i=0}^{m-1}(t-c)^{m-1-i}(\rho(t)-c)^i$ est vraie .

Avec $f(t)=(t-c)^m$.

• Montrons pour $m+1$, ie.,

$$F_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m}(t-c)^{m-i}(\rho(t)-c)^i.$$

Avec $F(t)=(t-c)^{m+1}=(t-c)f(t)$.

On utilise la propriété (iii) du théorème (3.2.3) , on trouve

$$\begin{aligned}
F_{\nabla}^{(\alpha)}(t)&=\left((t-c)^{m+1}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}\\
&=((t-c)f(t))_{\nabla}^{(\alpha)}\\
&=(t-c)_{\nabla}^{(\alpha)}f(\rho(t))+(t-c)f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)\\
&=t^{1-\alpha}(\rho(t)-c)^m+(t-c)t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}(t-c)^{m-i-1}(\rho(t)-c)^i\\
&=t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m}(t-c)^{m-i}(\rho(t)-c)^i.
\end{aligned}$$

D'où si $c=0$, alors on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=(t^m)_{\nabla}^{(\alpha)}=t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}t^{m-1-i}\rho(t)^i.$$

Dans ce cas , si t est dense à gauche , alors $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=mt^{m-\alpha}$.

2) On a : $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$, par la propriété (iv) du théorème (3.2.3) , nous avons

$$\begin{aligned} g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{1}{f}\right)_{\nabla}^{(\alpha)}(t) &= -\frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)}{f(t)f(\rho(t))} \\ &= -t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(t-c)^{m-1-i}(\rho(t)-c)^{i}}{(t-c)^{m}(\rho(t)-c)^{m}} \\ &= -t^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{(t-c)^{i+1}(\rho(t)-c)^{m-i}}. \end{aligned}$$

□

Nous définissons la ∇−dérivée fractionnaire conformable $(.)_{\nabla}^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in]m, m+1]$, où m est un nombre naturel .

Définition 3.2.2. [11, 12] *Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps , $\alpha \in]m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ et f $m-$fois $\nabla-$différentiable en $\mathbb{T}_{k^m}$. On definit la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α par :*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \left(f^{\nabla^m}\right)_{\nabla}^{(\alpha-m)}(t).$$

Exemple 3.2.5. Soient $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$, on a $f(t) = t^3$ et $\alpha = 2.1$.
Alors par la définition (3.2.2) , nous avons

$$f_{\nabla}^{(2.1)}(t) = \left(f^{\nabla^2}\right)_{\nabla}^{(0.1)}(t).$$

Puisque $\rho(t) = t - h$, et $\gamma(t) = h$, on trouve

$$f_{\nabla}^{(2.1)}(t) = (t^3)_{\nabla}^{(2.1)} = (6t - 6h)_{\nabla}^{(0.1)}.$$

D'aprés la propositions (3.2.1) et les propriétés (i) et (ii) du théorème (3.2.3) nous obtenons

$$f_{\nabla}^{(2.1)}(t) = 6(t)^{(0.1)}.$$

Donc d'après la proposition (3.2.2) on a

$$f_{\nabla}^{(2.1)}(t) = 6(t)^{0.9}.$$

Théorème 3.2.7. [11, 12] *Soient $\alpha \in]m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$. On a la relation suivante :*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1+m-\alpha} f^{\nabla^{m+1}}(t). \tag{3.9}$$

DÉMONSTRATION.

Soit f une fonction $m-fois$ $\nabla-$différentiable . Pour $\alpha \in]m, m+1]$, il existe $\beta \in]0,1]$ tel que $\alpha = m+\beta$. D'après la définition (3.2.2) , on a : $f_{\nabla}^{(\alpha)} = \left(f^{\nabla^m}\right)_{\nabla}^{(\beta)}$.

Par la définition d'ordre supérieur [1] de $\nabla-$dérivée et les propriétés (ii) , (iii) du théorème (3.2.1) , on obtient

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\beta}\left(f^{\nabla^m}\right)^{\nabla}(t).$$

□

Remarque 3.2.2. [11, 12] *Dans l'égalité* (3.9) *quand* $m = 0$ *, nous avons*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f^{\nabla}(t), \quad \alpha \in]0,1].$$

3.3 $\nabla-$intégrale fractionnaire conformable

Dans cette section , nous introduisons la $\nabla-$intégrale fractionnaire conformable (ou $\nabla_\alpha-$intégrale fractionnaire) sur l'échelle de temps .

3.3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 3.3.1. [11, 12]

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction régulière . Alors la* $\nabla_\alpha-$*intégrale fractionnaire de* f *,* $0 < \alpha \leq 1$ *, est définie par :* $\displaystyle\int f(t)\nabla_\alpha t = \int f(t) t^{\alpha-1}\nabla t$ *.*

Notations 3.3.1.

- Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int f(t)\nabla_\alpha t = \int f(t)\nabla t$, est $\nabla-$intégrale indéfinie .
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int f(t)\nabla_\alpha t = \int f(t) t^{\alpha-1} dt$, est l'intégrale fractionnaire conformable indiquée dans la définition (2.2.3) .

Définition 3.3.2. [11, 12] *Supposons que* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est une fonction régulière .*
On note $\nabla_\alpha-$*intégrale fractionnaire indéfinie de* f *d'ordre* α *,* $0 < \alpha \leq 1$ *par :*

$$F_{\nabla,\alpha}(t) = \int f(t)\nabla_\alpha t.$$

Alors , pour tous $a, b \in \mathbb{T}$ *, on définit* $\nabla_\alpha-$*intégrale fractionnaire de Cauchy par :*

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = F_{\nabla,\alpha}(b) - F_{\nabla,\alpha}(a).$$

1. voir la définition (1.2.3) .

Définition 3.3.3. [11, 12] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction , A est un sous-ensemble $\nabla-$mesurable de $\mathbb{T}$. On dit que f est $\nabla_\alpha-$intégrable sur A si et seulement si $t^{\alpha-1}f(t)$ est intégrable sur A , et*

$$\int_A f(t)\nabla_\alpha t = \int_A t^{\alpha-1} f(t)\nabla t.$$

Théorème 3.3.1. [11, 12] *Soit $\alpha \in]0, 1]$. Alors , pour toute fonction ld-continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $F_{\nabla,\alpha} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $(F_{\nabla,\alpha})^{(\alpha)}_{\nabla}(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}_k$.*
La fonction $F_{\nabla,\alpha}$ s'appelle $\nabla_\alpha-$antidérivée de f .

Démonstration.

- Si $\alpha = 1$ alors il réduit à la définition (1.3.6) et le théorème (1.3.3) .
- Si $\alpha \in]0, 1[$. Supposons que f est *ld-continue* , alors f est une fonction régulière .

Donc ,

$$F_{\nabla,\alpha}(t) = \int f(t)\nabla_\alpha t$$

est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable sur $\mathbb{T}_k$.

En utilisant l'égalité (3.9) et la définition (3.3.1) , nous obtenons

$$(F_{\nabla,\alpha})^{(\alpha)}_{\nabla}(t) = t^{1-\alpha}(F_{\nabla,\alpha}(t))^{\nabla} = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_k.$$

□

Théorème 3.3.2. [11, 12] *Soient $\alpha \in]0, 1]$, $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions ld-continues alors*

(1) $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(t) + \beta g(t)]\nabla_\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\nabla_\alpha t + \beta \int_a^b g(t)\nabla_\alpha t$.

(2) $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = -\int_b^a f(t)\nabla_\alpha t$.

(3) $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \int_a^c f(t)\nabla_\alpha t + \int_c^b f(t)\nabla_\alpha t$.

(4) $\displaystyle\int_a^a f(t)\nabla_\alpha t = 0$.

(5) *S'il existe $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ avec $|f(t)| \le g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t\right| \le \int_a^b g(t)\nabla_\alpha t .$$

(6) *Si $f(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t \ge 0$.

Démonstration.

Comme f et g sont deux fonctions *ld-continues* donc d'après le théorème (3.3.1) , f possède une $\nabla_\alpha-$antidérivée F , et g possède une $\nabla_\alpha-$antidérivée G , telles que

$$F_\nabla^{(\alpha)}(t)=f(t) \quad \text{et} \quad G_\nabla^{(\alpha)}(t)=g(t) \quad \text{pour tout } t\in\mathbb{T}_k.$$

(1) Pour tout $t\in\mathbb{T}_k$, nous avons ,

$$\big(\lambda F+\beta G\big)_\nabla^{(\alpha)}(t)=\lambda F_\nabla^{(\alpha)}(t)+\beta G_\nabla^{(\alpha)}(t)=\lambda f(t)+\beta g(t).$$

donc ,

$$\begin{aligned}\int_a^b\big[\lambda f(t)+\beta g(t)\big]\nabla_\alpha t&=\int_a^b\big(\lambda F+\beta G\big)_\nabla^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t\\&=\big[\lambda F+\beta G\big](b)-\big[\lambda F+\beta G\big](a)\\&=\lambda F(b)-\lambda F(a)+\beta G(b)-\beta G(a)\\&=\lambda\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t+\beta\int_a^b g(t)\nabla_\alpha t.\end{aligned}$$

(2) Nous avons ,

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t=F(b)-F(a)=-\big[F(a)-F(b)\big]=-\int_b^a f(t)\nabla_\alpha t.$$

(3) Nous avons ,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t&=F(b)-F(a)\\&=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)\\&=\int_a^c f(t)\nabla_\alpha t+\int_c^b f(t)\nabla_\alpha t.\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_a^a f(t)\nabla_\alpha t=F(a)-F(a)=0$.

(5) On note que

$$|F_{\nabla,\alpha}(t)|\le G_{\nabla,\alpha}(t) \textit{ sur } [a,b]$$

implique que

$$|F(b)-F(a)|\le G(b)-G(a)$$

ie.,

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t\right| \leq \int_a^b g(t)\nabla_\alpha t.$$

(6) La preuve de cette propriété est donnée directement par la propriété (5) .

□

Théorème 3.3.3. [49] *Soient* $a, b \in \mathbb{T}$ *, où* $a < b$ *,* $\alpha \in]0,1]$ *et* f, g *sont deux fonctions* $\nabla-$*fractionnaires conformables différentiables , alors*

(1) $\displaystyle\int_a^b f^\rho(t) g_\nabla^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f_\nabla^{(\alpha)}(t)g(t)\nabla_\alpha t$.

(2) $\displaystyle\int_a^b f(t) g_\nabla^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f_\nabla^{(\alpha)}(t)g^\rho(t)\nabla_\alpha t$.

Démonstration.

(1) D'après la propriété (iii) du théorème (3.2.3) , On a

$$f(\rho(t))g_\nabla^{(\alpha)}(t) = (fg)_\nabla^{(\alpha)}(t) - f_\nabla^{(\alpha)}(t)g(t).$$

Si f, g sont deux fonctions $\nabla-$fractionnaires conformables différentiables , Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\rho(t))g_\nabla^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t &= \int_a^b (fg)_\nabla^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t - \int_a^b f_\nabla^{(\alpha)}(t)g(t)\nabla_\alpha t \\ &= (fg)(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f_\nabla^{(\alpha)}(t)g(t)\nabla_\alpha t \\ &= (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f_\nabla^{(\alpha)}(t)g(t)\nabla_\alpha t.\end{aligned}$$

(2) Même chose pour la deuxième propriété .

□

Théorème 3.3.4. [11, 12] *Si* $f : \mathbb{T}_k \to \mathbb{R}$ *est une fonction ld-continue et* $t \in \mathbb{T}_k$ *, alors*

$$\int_{\rho(t)}^t f(s)\nabla_\alpha s = \gamma(t)f(t)t^{\alpha-1}.$$

Démonstration.

Soit f une fonction *ld-continue* sur $\mathbb{T}_k$. Alors f est une fonction régulière .

Par la définition (3.3.2) et le théorème (3.3.1) , il existe une $\nabla_\alpha-$antidérivée de f satisfaisant

$$\int_{\rho(t)}^t f(s)\nabla_\alpha s = F_{\nabla,\alpha}(t) - F_{\nabla,\alpha}(\rho(t)) = \left(F_{\nabla,\alpha}\right)_\nabla^{(\alpha)}(t)\gamma(t)t^{\alpha-1} = \gamma(t)f(t)t^{\alpha-1}.$$

□

Théorème 3.3.5. [11, 12] *Soient* $a, b \in \mathbb{T}$,$\alpha \in [0,1]$ *et* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est une fonction ld-continue .*

Nous avons :

(i) *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \int_a^b f(t)t^{\alpha-1}dt$ *(où l'intégrale à droite est l'intégrale fractionnaire conformable*[2] *) .*

Si $\alpha = 1$ *alors elle se réduit à l'intégrale usuelle de Riemann .*

(ii) *Si* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *ne contient que des points isolés , alors*

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \begin{cases} \sum_{t\in]a,b]_{\mathbb{T}}} \gamma(t)t^{\alpha-1}f(t) & si \quad a < b, \\ 0 & si \quad a = b, \\ -\sum_{t\in]b,a]_{\mathbb{T}}} \gamma(t)t^{\alpha-1}f(t) & si \quad a > b. \end{cases}$$

(iii) *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ *tel que* $h > 0$ *alors*

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} h(kh)^{\alpha-1}f(kh) & si \quad a < b, \\ 0 & si \quad a = b, \\ \displaystyle -\sum_{k=\frac{b}{h}+1}^{\frac{a}{h}} h(kh)^{\alpha-1}f(kh) & si \quad a > b. \end{cases}$$

(iv) *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *alors*

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t=a+1}^{b} t^{\alpha-1}f(t) & si \quad a < b, \\ 0 & si \quad a = b, \\ \displaystyle -\sum_{t=b+1}^{a} t^{\alpha-1}f(t) & si \quad a > b. \end{cases}$$

Démonstration.

(i) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors $f_\nabla^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t) = \lim\limits_{s\to t} \dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}$. (d'après l'exemple (3.2.1)) .

$$\begin{aligned} \int_a^b f_\nabla^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t &= \int_a^b f^{(\alpha)}(t)\nabla_\alpha t \\ &= f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b f^{(\alpha)}(t)d_\alpha t \\ &= \int_a^b f^{(\alpha)}(t)t^{\alpha-1}dt. \end{aligned}$$

2. voir la définition (2.2.3) .

(ii) $[a,b]_{\mathbb{T}}$ ne contient que des points isolés donc on supposera que $[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ tels que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

• Si $a < b$, alors d'après la propriété (3) du théorème (3.3.2) on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\nabla_\alpha t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\rho(t_{i+1})}^{t_{i+1}} f(t)\nabla_\alpha t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \Big[F_{\nabla,\alpha}(t_{i+1}) - F_{\nabla,\alpha}\big(\rho(t_{i+1})\big) \Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \big(F_{\nabla,\alpha}\big)_{\nabla}^{(\alpha)}(t_{i+1})\gamma(t_{i+1})t_{i+1}^{\alpha-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(t_{i+1})f(t_{i+1})t_{i+1}^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \sum_{t\in]a,b]_{\mathbb{T}}} \gamma(t)t^{\alpha-1}f(t).$$

• Si $a > b$, alors en utilisant la propriété (2) du théorème (3.3.2) , on obtient le résultat .

• Si $a = b$, alors en utilisant la propriété (4) du théorème (3.3.2) , on obtient le résultat .

(iii) Soient $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$. Si $a < b$, alors

Soit $a \in h\mathbb{Z}$, alors $\exists\, k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $a = hk_1 \Longrightarrow k_1 = \dfrac{a}{h}$.

Soit $b \in h\mathbb{Z}$, alors $\exists\, k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $b = hk_2 \Longrightarrow k_2 = \dfrac{b}{h}$.

Soit $t \in h\mathbb{Z}$, alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = hk$.

$$\begin{aligned}
\text{Soit } t \in]a,b] &\Longrightarrow hk \in]hk_1, hk_2] \\
&\Longrightarrow k \in]k_1, k_2] \\
&\Longrightarrow k \in [k_1+1, k_2] \\
&\Longrightarrow k \in \left[\frac{a}{h}+1, \frac{b}{h}\right].
\end{aligned}$$

Donc ,

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} h(kh)^{\alpha-1}f(kh).$$

Si $a > b$, alors en utilisant la propriété (2) du théorème (3.3.2) , on obtient le résultat .

Si $a = b$, alors en utilisant la propriété (4) du théorème (3.3.2) , on obtient le résultat .

(iv) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, c'est une cas particulière de (iii) .

$\square$

Exemples 3.3.1.

1) Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t) = ct^{1-\alpha}$, $c \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = c(b-a).$$

2) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t) = \sqrt{t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \int_a^b t^{\alpha-\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{2\alpha+1}\big(b^{\alpha+\frac{1}{2}} - a^{\alpha+\frac{1}{2}}\big).$$

3) Si $f : \frac{1}{2}\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t) = 2^t$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}\int_a^b 2^t \nabla_{\frac{1}{2}} t &= \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{6} 2^{\frac{k}{2}}\sqrt{\frac{2}{k}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}2^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}2^2 + \sqrt{\frac{2}{5}}2^{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}2^3\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Lemme 3.3.1. [11, 12] *Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps , $a, b \in \mathbb{T}$ avec $a < b$.*
Si $f_\nabla^{(\alpha)}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]_\mathbb{T}$, alors f est une fonction croissante sur $[a,b]_\mathbb{T}$.

Démonstration.

Supposons que $f_\nabla^{(\alpha)}$ existe sur $[a,b]_\mathbb{T}$ et $f_\nabla^{(\alpha)}(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a,b]_\mathbb{T}$, alors par la propriété (i) du théorème (3.2.1) , $f_\nabla^{(\alpha)}$ est continue sur $[a,b]_\mathbb{T}$ et d'après la propriété (6) du théorème (3.3.2) , on a

$$\int_s^t f_\nabla^{(\alpha)}(\xi)\nabla_\alpha \xi \geq 0, \qquad a \leq s \leq t \leq b \ , \ \forall s,t.$$

D'après la définition (3.3.2) , on trouve

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f_\nabla^{(\alpha)}(\xi)\nabla_\alpha \xi \geq f(s).$$

$\square$

Théorème 3.3.6 (Théorème de Rolle [18]). *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$, qui est $\nabla-$fractionnaire différentiable conformable d'ordre α sur $]a,b]_{\mathbb{T}}$ et satisfait $f(a) = f(b)$. Alors $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in]a,b]_{\mathbb{T}}$ tels que*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_1) \leq 0 \leq f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_2).$$

Démonstration.

Puisque f est une fonction continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$, On suppose que f possède un minimum m et un maximum M . Par conséquent , $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que

$$m = f(\xi_1) \qquad \textit{et} \qquad M = f(\xi_2)$$

Puisque $f(a) = f(b)$, On suppose que $\xi_1, \xi_2 \in]a,b]_{\mathbb{T}}$.

1. Soit $\rho(\xi_2) < \xi_2$. Alors

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_2) = \frac{f(\xi_2) - f(\rho(\xi_2))}{\xi_2 - \rho(\xi_2)} t^{1-\alpha} \geq 0.$$

2. Soit $\rho(\xi_2) = \xi_2$. Alors

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_2) = \lim_{t \to \xi_2} \frac{f(\xi_2) - f(t)}{\xi_2 - t} t^{1-\alpha} \geq 0.$$

3. Soit $\rho(\xi_1) < \xi_1$. Alors

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_1) = \frac{f(\xi_1) - f(\rho(\xi_1))}{\xi_1 - \rho(\xi_1)} t^{1-\alpha} \leq 0.$$

4. Soit $\rho(\xi_1) = \xi_1$. Alors

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_1) = \lim_{t \to \xi_1} \frac{f(\xi_1) - f(t)}{\xi_1 - t} t^{1-\alpha} \leq 0.$$

Donc ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_1) \leq 0 \leq f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_2).$$

□

Exemple 3.3.1. Soit $\mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $f(t) = t^2 - 3t + 5$. On va trouver $\xi_1, \xi_2 \in]0,3[\cap \mathbb{T}$ tel que

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_1) \leq 0 \leq f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_2).$$

On a :

$$f(0) = f(3) = 5.$$

• Pour $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$, on a : $\rho(t) = t - \frac{1}{2}$.

• Pour $t = 0$, on a : $\rho(t) = 0$.

Alors ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = (\rho(t) + t - 3)t^{1-\alpha} = \left(2t - \frac{7}{2}\right) \cdot t^{1-\alpha}$$

Par conséquent ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_1) = \left(2\xi_1 - \frac{7}{2}\right) \cdot \xi_1^{1-\alpha} \leq 0 \quad \text{pour} \quad \xi_1 = \{1/2, 1, 3/2\}.$$

et

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi_2) = \left(2\xi_2 - \frac{7}{2}\right) \cdot \xi_2^{1-\alpha} \geq 0 \quad \text{pour} \quad \xi_2 = \{2, 5/2\}.$$

Théorème 3.3.7 (Théorème des accroissements finis [18]).

Soient $0 < a < b$, f est une fonction continue sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ qui est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $]a, b]_{\mathbb{T}}$. Alors il existe $\xi, \eta \in]a, b]_{\mathbb{T}}$ tel que

$$\xi^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \eta^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta).$$

Démonstration.

D'après le théorème (3.2.7) on a

$$(t)_{\nabla}^{(\alpha)} = \begin{cases} t^{1-\alpha} & si \quad 0 < \alpha < 1, \\ 1 & si \quad \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit $h(t) = f(t) - f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - b)$. Alors la fonction h est continue sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ qui est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $]a, b]_{\mathbb{T}}$ et $h(a) = h(b)$.

Nous combinons la propriété (i) du théorème (3.2.3) avec l'égalité (3.10) , on trouve

$$h_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} t^{1-\alpha} & si \quad 0 < \alpha < 1, \\ \\ f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} & si \quad \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

On applique le théorème (3.3.6) à la fonction h .

$\exists\, \xi, \eta \in]a, b]_{\mathbb{T}}$ tel que $h_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi) \leq 0 \leq h_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta)$. On trouve

$$\xi^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \eta^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta).$$

$\square$

Exemple 3.3.2. Soient $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}} \cup \{0\}$ et $f(t) = e^t$. Alors , pour tout $t > 0$, nous avons $\rho(t) = \frac{t}{2}$ si $t \neq 1$ et $\rho(t) = 0$ si $t = 1$, et

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(t) - f^{\rho}(t)}{t - \rho(t)} t^{1-\alpha} = \frac{e^t - e^{t/2}}{t - \frac{t}{2}} t^{1-\alpha} = \frac{2}{t}\big(e^t - e^{t/2}\big) t^{1-\alpha}.$$

Par conséquent , pour tout $t > 1$, $\exists\, \xi, \eta \in]0, t]_{\mathbb{T}}$ tels que

$$\xi^{\alpha-1}\frac{2}{\xi}\big(e^{\xi} - e^{\xi/2}\big)\xi^{1-\alpha} \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq \eta^{\alpha-1}\frac{2}{\eta}\big(e^{\eta} - e^{\eta/2}\big)\eta^{1-\alpha}.$$

Donc ,

$$\frac{2}{\xi}\big(e^{\xi} - e^{\xi/2}\big) \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq \frac{2}{\eta}\big(e^{\eta} - e^{\eta/2}\big).$$

Corollaire 3.3.1. [18] *Soit f une fonction continue sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ et $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable sur $]a, b]_{\mathbb{T}}$. Si $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = 0$ pour tout $t \in]a, b]_{\mathbb{T}}$, alors f est une fonction constante sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$.*

Corollaire 3.3.2. [18] *Soit f une fonction continue sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ et $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable sur $]a, b]_{\mathbb{T}}$. Alors f est dite croissante , décroissante , strictement croissante et strictement décroissante sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ si $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \geq 0$, $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \leq 0$, $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) > 0$ et $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) < 0$ pour tout $t \in]a, b]_{\mathbb{T}}$, respectivement .*

Maintenant , nous présentons le théorème des accroissements finis généralisé qui généralise le théorème (3.3.7) , en prenant $g(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Théorème 3.3.8 (Théorème des accroissements finis généralisé [18]).
Soient $0 < a < b$, f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ qui sont $\nabla-$fractionnaires conformables différentiables d'ordre α sur $]a, b]_{\mathbb{T}}$. On suppose que $g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b]_{\mathbb{T}}$ Alors il existe $\xi, \eta \in]a, b]_{\mathbb{T}}$ tels que

$$\frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi)}{g_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \leq \frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta)}{g_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta)}.$$

Démonstration.
Si $g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b]_{\mathbb{T}}$, alors $g(a) \neq g(b)$. Maintenant , nous considérons la fonction suivante :

$$h(t) = f(t) - f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot \big(g(t) - g(b)\big).$$

La fonction h est continue sur $[a, b]_{\mathbb{T}}$ qui est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $]a, b]_{\mathbb{T}}$ et $h(a) = h(b)$.

D'après la propriété (i) du théorème (3.2.3) , on trouve

$$h_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] \cdot g_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

On applique le théorème (3.3.6) à la fonction h .
$\exists\, \xi, \eta \in]a,b[_{\mathbb{T}}$ tel que $h_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi) \leq 0 \leq h_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta)$. On trouve

$$\frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi)}{g_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{f_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta)}{g_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta)}.$$

□

Dans les deux théorèmes suivants , nous donnons une relation entre $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable donnée dans la définition (2.3.1) .

Notation 3.3.1. On note , en générale $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t_0) \neq f_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t_0))$ *et* $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t_0) \neq f_{\nabla}^{(\alpha)}(\sigma(t_0))$.
Si $\sigma(\rho(t_0)) = t_0$ alors $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t_0) = f_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t_0))$, et si $\rho(\sigma(t_0)) = t_0$ alors $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t_0) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(\sigma(t_0))$.

Et nous avons les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.3.9. [11, 12] *Supposons que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable*[3] *sur $\mathbb{T}^k$ et si $f_{\Delta}^{(\alpha)}$ est continue sur $\mathbb{T}^k$, alors f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable sur $\mathbb{T}_k$ et*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{T}_k$.
On considère le cas t est dispersé à gauche . Puisque f est $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable , alors f est continue . Par conséquent , f est $\nabla-$différentiable fractionnaire conformable en t et on a

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t} t^{1-\alpha}.$$

D'autre part , puisque $\rho(t)$ sera dispersé à droite , nous avons

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t)) = \frac{f(\sigma(\rho(t))) - f(\rho(t))}{\sigma(\rho(t)) - \rho(t)} t^{1-\alpha} = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} t^{1-\alpha}.$$

Par conséquent ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = f_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t)).$$

3. voir la définition (2.3.1) .

Soit maintenant t est dense .

Dans ce cas d'après l'existence de $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$, il s'ensuit que la limite

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{(t-s)}t^{1-\alpha} \tag{3.12}$$

existe est finie et égale à $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$.

D'autre part , puisque t est dense à gauche , d'après l'existence de la limite (3.12) , il s'ensuit que $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$ existe et égal à cette limite . Donc

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=f_{\Delta}^{(\alpha)}(t).$$

Finalement , soit t dense à gauche et dispersé à droite . On applique le théorème de la valeur moyenne (Théorème 15 dans [55]) à f , on trouve

$$\xi^{\alpha-1}f_{\Delta}^{(\alpha)}(\xi)\leq\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leq\eta^{\alpha-1}f_{\Delta}^{(\alpha)}(\eta) \tag{3.13}$$

où ξ,η entre s et t , si $s\to t$ donc $\xi\to t$, $\eta\to t$, et puisque $f_{\Delta}^{(\alpha)}$ est continue , il en résulte que

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=t^{\alpha-1}f_{\Delta}^{(\alpha)}(t). \tag{3.14}$$

D'autre part , puisque t est dense à gauche , le membre à gauche de (3.14) est égale à $t^{\alpha-1}f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$. Donc , $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)=f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$.

□

Théorème 3.3.10. [11, 12] *Supposons que $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable sur $\mathbb{T}_k$ et si $f_{\nabla}^{(\alpha)}$ est continue sur $\mathbb{T}_k$, alors f est $\Delta-$fractionnaire conformable différentiable sur $\mathbb{T}^k$ et*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)=f_{\nabla}^{(\alpha)}(\sigma(t)),\qquad \textit{pour tout } t\in\mathbb{T}^k.$$

Démonstration. Soit $t\in\mathbb{T}^k$.

Nous considérons le cas t est dispersé à droite . Puisque f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable , alors f est continue . Par conséquent , f est $\Delta-$différentiable fractionnaire conformable en t et on a

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)=\frac{f(t)-f(\sigma(t))}{t-\sigma(t)}t^{1-\alpha}.$$

D'autre part , puisque $\sigma(t)$ sera dispersé à gauche , nous avons

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(\sigma(t))=\frac{f(\sigma(t))-f(\rho(\sigma(t)))}{\sigma(t)-\rho(\sigma(t))}t^{1-\alpha}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}t^{1-\alpha}.$$

Par conséquent ,

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(\sigma(t)).$$

Soit maintenant t dense .

Dans ce cas d'après l'existence de $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$, il s'ensuit que la limite

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha}. \tag{3.15}$$

existe est finie et égale à $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$.

D'autre part , puisque t est dense à droite , d'après l'existence de la limite (3.15) , il s'ensuit que $f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$ existe et égal à cette limite . Donc ,

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

Finalement , soit t dense à droite et dispersé à gauche . On applique le théorème (3.3.7) à f , on trouve

$$\xi^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(\xi) \leq \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \eta^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(\eta) \tag{3.16}$$

où ξ, η entre s et t , si $s \to t$ donc $\xi \to t$, $\eta \to t$, et puisque que $f_{\nabla}^{(\alpha)}$ est continue , il en résulte que

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = t^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) \tag{3.17}$$

D'autre part , puisque t est dense à droite , le membre à gauche de (3.17) est égale à $t^{\alpha-1} f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$.
Donc , $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)$. □

3.3.2 Fonction absolument continue

Définition 3.3.4. [11, 12] *Une fonction $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue notée $f \in \mathcal{AC}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\{(a_k, b_k]_{\mathbb{T}}\}_{k=1}^{m}$ est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints satisfaisant*

$$\sum_{k=1}^{k=m} (b_k - a_k) < \delta \qquad \textit{alors} \qquad \sum_{k=1}^{k=m} |f(b_k) - f(\sigma(a_k))| < \varepsilon$$

Lemme 3.3.1. [11, 12]*On suppose que la fonction $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ si et seulement si f est $\nabla-$différentiable $\nabla-$p.p. sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et on a :*

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} f^{\nabla}(s)\nabla s, \qquad \textit{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Théorème 3.3.11. [11, 12] *On suppose que la fonction $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$, alors f est $\nabla-$ fractionnaire conformable différentiable d'ordre α $\nabla-$p.p. sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et on a l'égalité suivante :*

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} f_{\nabla}^{(\alpha)}(s)\nabla_\alpha s, \quad \textit{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Démonstration.
D'après le lemme (3.3.1) , f est $\nabla-$différentiable $\nabla-$p.p. sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Alors , par la remarque (3.2.2) , f est $\nabla-$fractionnaire différentiable d'ordre α $\nabla-$p.p. sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$.
Par conséquent , la définition (3.3.2) implique que

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} f_{\nabla}^{(\alpha)}(s)\nabla_\alpha s, \quad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

□

Lemme 3.3.2. [43] *On suppose que les fonctions $f, g \in \mathcal{AC}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, alors le produit fg est absolument continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et on a*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(f^{\nabla}g + f^{\rho}g^{\nabla}\right)(t)\nabla t &= f(b)g(b) - f(a)g(a)\\ &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(fg^{\nabla} + f^{\nabla}g^{\rho}\right)(t)\nabla t.\end{aligned}$$

Théorème 3.3.12. [55] *On suppose que les fonctions $f, g \in \mathcal{AC}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, alors le produit fg est absolument continue sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ et on a*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(f_{\nabla}^{(\alpha)}g + f^{\rho}g_{\nabla}^{(\alpha)}\right)(t)\nabla_\alpha t &= f(b)g(b) - f(a)g(a)\\ &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(fg_{\nabla}^{(\alpha)} + f_{\nabla}^{(\alpha)}g^{\rho}\right)(t)\nabla_\alpha t.\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la propriété (iii) du théorème (3.2.3) et le théorème (3.3.11) , avec le lemme (3.3.2) , nous avons

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f^{\rho}(t)g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) + f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)g(t)\nabla_\alpha t &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(t)g_{\nabla}^{(\alpha)}(t) + f_{\nabla}^{(\alpha)}(t)g^{\rho}(t)\nabla_\alpha t\\ &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} (fg)_{\nabla}^{(\alpha)}\nabla_\alpha t\\ &= (fg)(b) - (fg)(a).\end{aligned}$$

□

3.4 Les espaces de Lebesgue $L^p_\nabla(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $L^p_{\alpha,\nabla}(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Dans cette section , on définit Les espaces de Lebesgue $L^p_\nabla(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $L^p_{\alpha,\nabla}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ sur les échelles de temps , et on donne quelques inégalités de convexité .

3.4.1 Définitions et quelques inégalités de convexité

Définition 3.4.1. [43] *Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\nabla-$mesurable , $p \in [1,+\infty]$ et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction $\nabla-$mesurable . On dit que f appartient à $L^p_\nabla(E,\mathbb{R})$ si*

$$\int_E |f(s)|^p \nabla s < +\infty, \quad \textit{pour} \quad p \in [1,+\infty[.$$

Et , s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|f| \leq c \qquad \nabla-\textit{p.p. sur } E, \quad \textit{pour} \quad p = +\infty.$$

Définition 3.4.2. [55] *Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\nabla-$mesurable , $p \in [1,+\infty]$ et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction $\nabla-$mesurable . On dit que f appartient à $L^p_{\alpha,\nabla}(E,\mathbb{R})$ si*

$$\int_E |f(s)|^p \nabla_\alpha s < +\infty, \quad \textit{pour} \quad p \in [1,+\infty[.$$

Et , s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|f| \leq c \qquad \nabla-\textit{p.p. sur } E, \quad \textit{pour} \quad p = +\infty.$$

Lemme 3.4.1. [43] *Soit $p \in [1,+\infty]$. Alors l'ensemble $L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme qui définie pour $f \in L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ par :*

$$\|f\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{[a,b]_\mathbb{T}} |f(t)|^p \nabla t\right)^{1/p} & \textit{si} \quad p \in [1,+\infty[, \\ \inf\left\{c > 0 : |f| \leq c \ \ \nabla-\textit{p.p. sur } [a,b]_\mathbb{T}\right\} & \textit{si} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Corollaire 3.4.1. [43] *$L^2_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donné pour tout $(f,g) \in L^2_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R}) \times L^2_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ par :*

$$(f,g)_{L^2_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} = \int_{[a,b]_\mathbb{T}} f(t)g(t)\nabla t.$$

Théorème 3.4.1. [55] *Soit $p \in [1,+\infty]$. Alors l'ensemble $L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme qui définie pour $f \in L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ par :*

$$\|f\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^p \nabla_\alpha t\right)^{1/p} & si \quad p \in [1,+\infty[, \\ \inf\left\{c>0 : |f| \le c \quad \nabla-p.p. \ sur\ [a,b]_\mathbb{T}\right\} & si \quad p=+\infty. \end{cases}$$

Démonstration.

Il est clair que $L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace normé . Pour cela il suffit de montrer que $L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace complet .

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|u_m(t)-u_n(t)\right|^p \nabla_\alpha t &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|u_m(t)-u_n(t)\right|^p t^{\alpha-1}\nabla t \\ &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|u_m(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}} - u_n(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right|^p \nabla t \underset{m,n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 .\end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme $L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach , alors il existe $u_0 \in L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$.

D'après le lemme (3.4.1) et l'égalité (3.18) , on a

$$\begin{aligned}\|u_n-u_0\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|u_n(t)-u_0(t)\right|^p \nabla_\alpha t \\ &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|u_n(t)-u_0(t)\right|^p t^{\alpha-1}\nabla t \\ &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|u_n(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}} - u_0(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right|^p \nabla t \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 .\end{aligned}$$

Donc , l'espace $L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}$.

□

Corollaire 3.4.2. [55] *$L^2_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire donné pour tout $(f,g) \in L^2_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R}) \times L^2_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ par*

$$(f,g)_{L^2_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} = \int_{[a,b]_\mathbb{T}} f(t)g(t)\nabla_\alpha t.$$

Lemme 3.4.2. [43] *Soient $p,q \in [1,+\infty]$, tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

Si $f \in L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $g \in L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors $f.g \in L^1_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ et on a

$$\|f.g\|_{L^1_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\|g\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{3.19}$$

Démonstration.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $g \in L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ tel que q est le conjugué de p . Il est clair que

$$\widetilde{f\cdot g} = \widetilde{f}\cdot\widetilde{g}.$$

Par le théorème (1.4.3) et l'inégalité de Hölder pour les fonctions définie sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\|f.g\|_{L^1_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\|g\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

$\square$

Théorème 3.4.2. [55] *Soient $p,q \in [1,+\infty]$, tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*
Si $f \in L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $g \in L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors $f.g \in L^1_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$ et on a

$$\|f.g\|_{L^1_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\|g\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{3.20}$$

L'inégalité (3.20) s'appelle Inégalité de Hölder .

Démonstration.

Par le lemme (3.4.2) , nous affirmons que

$$\begin{aligned}
\|f.g\|_{L^1_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)g(t)\right|\nabla_\alpha t \\
&= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)g(t)\right| t^{\alpha-1}\nabla t \\
&= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left(\left|f(t)\right|t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right)\left(\left|g(t)\right|t^{\frac{\alpha-1}{q}}\right)\nabla t \\
&\leq \left(\int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left(\left|f(t)\right|t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right)^p\nabla t\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left(\left|g(t)\right|t^{\frac{\alpha-1}{q}}\right)^q\nabla t\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^p t^{\alpha-1}\nabla t\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|g(t)\right|^q t^{\alpha-1}\nabla t\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^1_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^1_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 3.4.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Lorsque $p=q=2$, l'inégalité (3.20) se réduit alors à l'inégalité suivante :

$$\|f.g\|_{L^1_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\|g\|_{L^2_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{3.21}$$

Lemme 3.4.3. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et f, g des fonctions dans l'espace $L^p_\nabla(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors on a*

$$\left\|f+g\right\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \left\|f\right\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \left\|g\right\|_{L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{3.22}$$

Démonstration.

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_\nabla([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})$. Il est clair que

$$\widetilde{f+g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}.$$

Par le théorème (1.4.3) et l'inégalité de Minkowski pour les fonctions définie sur $\mathbb{R}$, on obtient l'inégalité (3.22) .

□

Théorème 3.4.3.

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et f, g des fonctions dans l'espace $L^p_{\alpha,\nabla}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors on a

$$\left\|f+g\right\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \left\|f\right\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \left\|g\right\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{3.23}$$

L'inégalité (3.23) s'appelle Inégalité de Minkowski .

Démonstration.

Par le lemme (3.4.3) , nous affirmons que

$$\begin{aligned}
\left\|f+g\right\|^p_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} &= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)+g(t)\right|^p \nabla_\alpha t \\
&= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)+g(t)\right|^p t^{\alpha-1} \nabla t \\
&= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}} + g(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right|^p \nabla t \\
&\leq \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right|^p \nabla t + \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|g(t)t^{\frac{\alpha-1}{p}}\right|^p \nabla t \\
&= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^p t^{\alpha-1} \nabla t + \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|g(t)\right|^p t^{\alpha-1} \nabla t \\
&= \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|f(t)\right|^p \nabla_\alpha t + \int_{[a,b]_\mathbb{T}} \left|g(t)\right|^p \nabla_\alpha t \\
&= \left\|f\right\|^p_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \left\|g\right\|^p_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Donc ,

$$\left\|f+g\right\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \left\|f\right\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \left\|g\right\|_{L^p_{\alpha,\nabla}([a,b]_\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

□

3.5 Calcul $\nabla-$fractionnaire pour les fonctions à valeurs vectorielles

Maintenant , nous introduisons $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable sur les échelles de temps pour les fonctions à valeurs vectorielles et nous donnons certaines propriétés importantes .

Définition 3.5.1. [11, 12] *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ est dite ld-continue si elle est continue en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$ et si sa limite à droite existe et est finie en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$. On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ qui sont ld-continues sur $\mathbb{T}$ par : $C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$.*

Définition 3.5.2. [11, 12] *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction , $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$. Soit $t \in \mathbb{T}_k$. Alors on définit*

$$f_\nabla^{(\alpha)}(t) = \Big((f_1)_\nabla^{(\alpha)}(t), (f_2)_\nabla^{(\alpha)}(t), \cdots, (f_n)_\nabla^{(\alpha)}(t)\Big).$$

• *On appelle $f_\nabla^{(\alpha)}(t)$ la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en $t > 0$.*
• *La fonction f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α sur $\mathbb{T}_k$ s'il existe un nombre $f_\nabla^{(\alpha)}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}_k$.*
• *On appelle $f_\nabla^{(\alpha)}(t) : \mathbb{T}_k \to \mathbb{R}^n$ la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en t , et on définit la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable en 0 par :*

$$f_\nabla^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f_\nabla^{(\alpha)}(t).$$

Définition 3.5.3. [11, 12] *Soient $\mathbb{T}$ une échelle de temps , $\alpha \in]m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ $m-$fois $\nabla-$différentiable en $\mathbb{T}_{k^m}$. On définit la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α par :*

$$f_\nabla^{(\alpha)}(t) = \big(f^{\nabla^m}\big)_\nabla^{(\alpha-m)}(t).$$

En combinant les théorèmes (3.2.1) , (3.2.3) avec la définition (3.5.2) , on trouve le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. [11, 12] *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction , $\alpha \in]0, 1]$ et $t \in \mathbb{T}_k$. Alors on a les propriétés suivantes :*

i) Si f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t , alors f est continue en t .

ii) Si f est continue en t , et si t est dispersé à gauche , alors f est $\nabla-$fractionnaire conformable *différentiable d'ordre α en t et*

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\gamma(t)} t^{1-\alpha}. \tag{3.24}$$

iii) Si t est dense à gauche , alors f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t si et seulement si la limite , $\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$ existe et finie .

Dans ce cas ,

$$f_{\nabla}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}. \tag{3.25}$$

iv) Si f est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable d'ordre α en t , alors

$$f^{\rho}(t) = f(t) - \gamma(t) t^{\alpha-1} f_{\nabla}^{(\alpha)}(t).$$

Théorème 3.5.2. [11, 12]*Supposons que $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ sont $\nabla-$fractionnaires conformables différentiables d'ordre α alors ,*

i) la somme $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et

$$(f+g)_{\nabla}^{(\alpha)} = f_{\nabla}^{(\alpha)} + g_{\nabla}^{(\alpha)}.$$

ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et

$$(\lambda f)_{\nabla}^{(\alpha)} = \lambda f_{\nabla}^{(\alpha)}.$$

iii) Si f et g sont continues alors le produit $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ est $\nabla-$fractionnaire conformable différentiable et

$$\begin{aligned}(fg)_{\nabla}^{(\alpha)} &= f_{\nabla}^{(\alpha)} g + f^{\rho} g_{\nabla}^{(\alpha)}. \\ &= f_{\nabla}^{(\alpha)} g^{\rho} + f g_{\nabla}^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Ensuite , nous introduisons $\nabla-$intégrale fractionnaire conformable (ou $\nabla-$intégrale α-fractionnaire) sur l'échelle de temps pour les fonctions à valeurs vectorielles .

Définition 3.5.4. [11, 12] *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction , $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$. Soit A est sous-ensemble $\nabla-$mesurable de $\mathbb{T}$. alors f est $\nabla_{\alpha}-$intégrable sur A si et seulement si $f_i (i = 1, 2, ..., n)$ sont $\nabla_{\alpha}-$intégrables sur A , et*

$$\int_A f(t) \nabla_{\alpha} t = \left(\int_A f_1(t) \nabla_{\alpha} t, \int_A f_2(t) \nabla_{\alpha} t, ..., \int_A f_n(t) \nabla_{\alpha} t \right).$$

En combinant la définition (3.5.4) avec le théorème (3.3.2) , nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.5.3. [11, 12] *Soient* $\alpha \in]0,1]$, $a, b, c \in \mathbb{T}$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *et* f, g *deux fonctions ld-continues alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(t) + \beta g(t)]\nabla_\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\nabla_\alpha t + \beta \int_a^b g(t)\nabla_\alpha t$.
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = -\int_b^a f(t)\nabla_\alpha t$.
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla_\alpha t = \int_a^c f(t)\nabla_\alpha t + \int_c^b f(t)\nabla_\alpha t$.
4. $\displaystyle\int_a^a f(t)\nabla_\alpha t = 0$.
5. *S'il existe* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *avec* $||f(t)|| \leq g(t)$ *pour tout* $t \in [a, b]$ *, alors*

$$\left\| \int_a^b f(t)\nabla_\alpha t \right\| \leq \int_a^b g(t)\nabla_\alpha t .$$

Définition 3.5.5. [11] *Une fonction* $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$ *est dite absolument continue sur* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *(i.e.,* $f \in \mathcal{AC}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$*) si pour* $\varepsilon > 0$ *, il existe un* $\delta > 0$ *tel que si* $\{(a_k, b_k]_{\mathbb{T}}\}_{k=1}^m$ *est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints satisfaisant*

$$\sum_{k=1}^{k=m} (b_k - a_k) < \delta \qquad \textit{alors} \qquad \sum_{k=1}^{k=m} \|f(b_k) - f(\sigma(a_k))\| < \varepsilon$$

En combinant les définitions (3.5.2) , (3.3.2) avec le théorème (3.3.11) , nous obtenons les théorèmes suivants :

Théorème 3.5.4. [11, 12] *On suppose que la fonction* $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ *est absolument continue sur* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *, alors* f *est* $\nabla-$ *fractionnaire conformable différentiable d'ordre* α $\nabla-$*p.p. sur* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *et on a l'égalité suivante :*

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} f_\nabla^{(\alpha)}(s)\nabla_\alpha s, \quad \textit{pour tout } t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Théorème 3.5.5. [55] *On suppose que les fonctions* $f, g \in \mathcal{AC}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ *, alors le produit* fg *est absolument continue sur* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *et on a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left[\left(f_\nabla^{(\alpha)}(t), g(t)\right) + \left(f^\rho(t), g_\nabla^{(\alpha)}(t)\right) \right] \nabla_\alpha t &= \left(f(b), g(b)\right) - \left(f(a), g(a)\right) \\ &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left[\left(f(t), g_\nabla^{(\alpha)}(t)\right) + \left(f_\nabla^{(\alpha)}(t), g^\rho(t)\right) \right] \nabla_\alpha t. \end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce travail on a étudié le calcul $\nabla-$fractionnaire conformable sur les échelles de temps . Les résultats de mémoire consistent une généralisation de la dérivée fractionnaire conformable [41] et la $\nabla-$dérivée [26, 25, 15] consiste à étudier la dérivée fractionnaire conformable sur des échelles de temps . Il serait intéressant au lieu de suivre l'approche Delta qu'ils ont adapté dans [17] et l'approche Nabla que nous avons adapté , on peut développer l'approche Diamond [3, 14] .

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas , H. M. , Srivastava and J. J. Trujillo , *North-holland mathematics studies 204 . Theory and applications of fractional differential equations (2006).*

[2] A. A. Martynyuk , *Stability theory for dynamic equations on time scales - Birkhauser Verlag Ag (2016) .*

[3] A. B. Malinowska and D. F. M. Torres , *On the diamond-alpha Riemann integral and mean value theorems on time scales , Dynam. Systems Appl. 18 (2009), no. 3-4, 469–481 .*

[4] A. Cabada and D. R. Vivero , *Criterions for absolute continuity on time scales, J. Difference.Equ. Appl. 11, 1013-1028, 2005 .*

[5] A. Cabada and D. R. Vivero , *Expression of the Lebesgue $\Delta-$integral on time scales as a usual Lebesgue integral ; application to the calculus of $\Delta-$antiderivatives , Math. Comput. Modelling. 43 (2006), 194-207 .*

[6] A. Gökdoğan , E. Ünal and E. Çelik , *Existence and uniqueness theorems for sequential linear conformable fractional differential equations , arXiv preprint , 2015 .*

[7] B. Aulbach and S. Hilger , *A unified approach to continuous and discrete dynamics, in Qualitative theory of differential equations (Szeged, 1988), 37-56, Colloq. Math. Soc. J´anos Bolyai, 53 North-Holland , Amsterdam , 1990 .*

[8] B. Bayour and D. F. M. Torres , *Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation , J. Comput. Appl. Math. 312 (2016) , 127-133 .*

[9] B. Benaoumeur , *Contributions dans les échelles de temps . PhD thesis , 2017 .*

[10] B. Bendouma , A. Cabada and A. Hammoudi , *Existence of solutions for conformable fractional problems with nonlinear functional boundary conditions , submitted .*

[11] B. Bendouma , A. Hammoudi , *A nabla conformable fractional calculus on time scales, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications.7 (2019), no.1,202-216 .*

[12] B. Bendouma , *Diffrential equations on times scales . PhD thesis , 2019 .*

[13] D. F. Zhao and Xue-Xiao You , *Nabla local fractional derivative on time scales , (2016) .*

[14] D. Mozyrska and D. F. M. Torres , *A study of diamond-alpha dynamic equations on regular time scales , Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) 8 (2009), no. 1, 35–47 .*

[15] D. R. Anderson , L. Erbe , *Nabla dynamic equations on time scales. Panamer.Math.J. 13 (2003), no.1,1-47 .*

[16] D. R. Anderson , R. I. Avery , *Fractional-order boundary value problem with Sturm-Liouville boundary conditions , Electron . J. Differ. Equa. 2015 (2015) , no.29 , 10 pp .*

[17] D. Zhao and T. Li , *On conformable delta fractional calculus on time scales , J. Math. Computer Sci. 16 , 324-335 , 2016 .*

[18] Eze R. Nwaeze , *A mean value theorem for the conformable fractional calculus on arbitrary time scales, Progr. Fract. Differ. Appl. 2, no. 4, 287-291, 2016.*

[19] Eze R. Nwaeze , D. F. M. Torres , *Chain rules and inequalities for the BHT fractional calculus on arbitrary time scales , Published online : 27 December 2016 .*

[20] H. Batarfi , J. Losada , J. J. Nieto and W. Shammakh , *Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations , J. Funct . Spaces . 2015 (2015) , Art. ID706383 , 6pp .*

[21] K. D. Olumoyin , *Solutions of dynamic equations on time scales with jumps Marshall , University May 2013 .*

[22] M. Abu Hammad and R. Khalil , *Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations, Int. J. Differ. Equ. Appl. 13 (2014) , 177-183 .*

[23] M. Abu Hammad and R. Khalil , *Conformable fractional heat differential equations , Int. J. Pure. Appl. Math. 94 (2014), 215-221 .*

[24] M. F. Aticiand G. S. Guseinov , *On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales , J. Comput.Appl.Math. 141 (2002) .*

[25] M. Bohner, A. C. Peterson , *Advances in Dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA , 2003 .*

[26] M. Bohner and A. C. Peterson , *Dynamic equations on time scales. An introduction with applications, Birkhäuser Boston. Inc., Boston, MA, 2001 .*

[27] M. Bohner, S. G. Georgiev , *Multivariable dynamic calculus on time scales - Springer international publishing (2016) .*

[28] M. Bohner , T. S. Hassan and T. Li , *Fite-Hille-Wintner-type oscillation criteria for second order half-linear dynamic equations with deviating arguments, Indag. Math. (N.S.), 29, 548–560, 2018 .*

[29] M. R. Sidi Ammi and D. F. M. Torres , *Existence of solution to a nonlocal conformable fractional thermistor problem , Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 , ISSN 1303-5991 , 13 08 2018 arXiv :1808.04186v1 .*

[30] N. Benkhettou , A. M. C. Brito da Cruz and D. F. M. Torres , *A fractional calculus on arbitrary time scales : fractional differentiation and fractional integration , Signal Process. 107, 230-237, 2015 .*

[31] N. Benkhettou , A. M. C. Brito da Cruz and D. F. M. Torres , *Nonsymmetric and symmetric fractional calculi on arbitrary nonempty closed sets , Math. Meth. Appl. Sci., 39 (2016), no. 2, 261–279 .*

[32] N. Benkhettou, S. Hassani and D. F. M. Torres , *A conformable fractional calculus on arbitrary time scales, J. King Saud Univ. Sci. 28, no. 1, 93-98, 2016 .*

[33] N. Martins , Delfim F.M. Torres , *Calculus of variations on time scales with nabla derivatives, 2009 .*

[34] N. Y. Gözütok and U. Gözütok , *Multivariable conformable fractional calculus , math.CA 2017 .*

[35] O. S. Iyiola and E. R. Nwaeze , *Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach , Progr. Fract. Dier. Appl. 2 (2) (2016) , 115-122 .*

[36] O. T. Birgani , S. Chandok , N. Dedovic , S. Radenovic , *A note on some recent results of the conformable derivative (2019) No. 1, 11–17 .*

[37] P. A. Williams , *Unifying fractional calculus with time scales July , 2012 .*

[38] Q. Feng and F. Meng , *Oscillation results for a fractional order dynamic equation on time scales with conformable fractional derivative (2018) .*

[39] R. Agarwal , D. O'Regan , S. Saker , *Dynamic inequalities on time scales - Springer international publishing (2014) .*

[40] R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud , *Lyapunov inequality for a boundary value problem involving conformable derivative , Progress in Fractional Differentiation and Applications , 2017 .*

[41] R. Khalil , M. Al Horani , A. Yousef and M. Sababheh , *A new definition of fractional derivative , J. Comput. Appl. Math. 264, 65-70 , 2014 .*

[42] R. P. Agarwal, M. Bohner , *Basic calculus on time scales and some of its applications, Results Math.35 (1999) 3–22.*

[43] R. P. Agarwal , V. Otero-Espinar , K. Perera and DR. Vivero , *Basic properties of Sobolev's spaces on time scales , Adv. Differ. Equ. 2006 (2006) , Article ID 38121 .*

[44] S. G. Georgiev , *Fractional dynamic calculus and fractional dynamic equations on time scales - Springer international publishing (2018) .*

[45] S. G. Georgiev , *Functional Dynamic equations on time scales - Springer international publishing (2019) .*

[46] S. G. Georgiev , *Integral equations on time scales - Atlantis press (2016) .*

[47] Sh. Guseinov , *Integration on time scales , J. Math. Anal. Appl., 285(1) :107-127, 2003 .*

[48] S. Hilger , *Ein Maβtkettenkalkül Ein Matkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. Thesis, Universtät Wüurzburg, Wüurzburg Germany, (1988) .*

[49] S. Saker , M. Kenawy , G. AlNemer and M. Zakarya , *Some fractional dynamic inequalities of Hardy's type via conformable calculus , Published : 16 March 2020 .*

[50] T. Abdeljawad , *On conformable fractional calculus, J.Comput.Appl.Math. 279(2015),57-66.*

[51] T. Abdeljawad ,M. AlHorani and R. Khalil , *Conformable fractional semigroups of operators , Journal of Semigroup Theory and Applications . 2015 (2015) , Art. ID7 , 9 pp .*

[52] T. Gulsen , E. Yilmazand S. Goktas , *Conformable fractional Dirac system on time scales. J. Inequal.Appl. 2017,1-10 .*

[53] U. N. Katugampola , *A new fractional derivative with classical properties, preprint, 2014 .*

[54] W. S. Chung , *Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative , J. Comput. Appl. Math. 290 (2015), 150-158 .*

[55] Y. Wang , J. Zhou and Y. Li , *Fractional Sobolev's spaces on time scales via conformable fractional calculus and their application to a fractional differential equation on time scales, Adv. Math. Phys. 1-21, 2016 .*

Abstract

In this memory , we introduce the definition of nabla conformable fractional derivative of order $\alpha \in]0,1]$ and their important properties , we introduce and develop the notion of nabla conformable fractional integral of order $\alpha \in]0,1]$ on time scales . The basic tools for fractional differentiation and fractional integration are then developed . The Hilger time scale calculus is obtained as a particular case , by choosing $\alpha = 1$. Many basic properties of the theory are proved .

Key words : Time scales , Conformable fractional derivative , Conformable fractional integral , Conformable fractional calculus on time scales , A Mean Value Theorem , Absolutely continuous function .

Résumé

Dans ce mémoire , nous introduisons la définition de la $\nabla-$dérivée fractionnaire conformable d'ordre $\alpha \in]0,1]$ et leurs propriétés importantes , nous introduisons et développons la notion de la $\nabla-$intégrale fractionnaire conformable $\alpha \in]0,1]$ sur l'échelle de temps . Les outils de base pour la différentiation fractionnaire et l'intégration fractionnaire sont ensuite développés . Le calcul de l'échelle de temps de Hilger est obtenu comme un cas particulier , en choisissant $\alpha \in]0,1]$. Plusieurs propriétés de base de la théorie sont prouvées.

Mots-clés : Échelle de temps , Dérivée fractionnaire conformable , Intégrale fractionnaire conformable , Calcul fractionnaire conformable sur l'échelle de temps , Théorème de la moyenne , Fonction absolument continue .