République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Équations différentielles et modélisation

Présenté par : Melle. Sihem MEGTAITI

DÉRIVATION FRACTIONNAIRE APPLIQUÉE À L'ÉTUDE DE DEUX PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS FRACTIONNAIRES NON-LINÉAIRES

Encadrant :

Pr. Ahmed HAMMOUDI

Professeur à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 23/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. KHIAR (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Mme. SAIAH (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Pr. Ahmed HAMMOUDI (Professeur)	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2019 – 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire : A mes très chers parents.

Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler.

Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leur patience, leur persévérance.

À ma très chére sœur et mes frères,

À mes amis,

À toute ma famille.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je vous dis merci.

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanaho wa tahala .

Je tenais à remercier vivement mon encadreur de mémoire , Pr. Ahmed Hammoudi pour ces conseils,son encouragement et sa disponibilité dans ce travail.

Je remercie également Mr. khiar et Mme. SAIAH pour leur conseils et leur écoute durant l'élabration de ce mémoire.

Il est important pour moi de remercier ma famille :mon père ,ma mère, ma soeur et mes frères qui ont toujours été une une source inépuisable d'encouragement.

Il est important pour moi de remercier tous mes amis.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je vous dis merci.

Résumé

Le concept de la dérivation fractionnaire a beaucoup d'applications.

Il intervient dans la résolution de plusieurs problèmes fractionnaires non linéaires, en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.
Dans ce mémoire on aborde différentes applications de toute notion ainsi que quelques unes de ses extensions et généralisations qui entrent dans la résolution des problèmes différentiels fractionnaires non linéaires .Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions en utilisant le principe de contraction de Banach et les théorèmes du point fixe de Schaefer et Kranoselskii.

Mots-clés: équation différentielle fractionnaire non linéaire, problème aux conditions aux limites,dérivée fractionnaire de Riemann, dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov, intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville,théorie du point fixe.

Table des matières

INTRODUCTION

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du $17^{éme}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$pour désigne la $n^{éme}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hopital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hopital a répondu :
Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?
Cette lettre de l'Hopital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier pas de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hopital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre ractionnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématiques. Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{\text{ème}}$ siècle, inclut :
P.S.Laplace (1812), J.B.J.Fourier (1822), N.H.Abel (1823 - 1826), J.Liouville (1832 - 1873), B.Riemann (1847), H.Holomgren(1865 - 1867), A.K.Grunwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H.Laurent (1884), P.A.Nekrassov (1888), A.Krug (1890), J.Hadamard (1892), O.Heaviside (1892-1912), S.Pincherle (1902), G.H.Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928) , H.Weyl (1917), P.L'evy(1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A.Zygmund (1935-1945), E.R.Amour (1938-1996), A.Erdélyi (1939-1965), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz(1949).

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe un rôle très important.
Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui montrent l'existence des solutions dans divers types d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire car elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence et d'unicité pour nombreux problèmes non linéaires.

La méthode du point fixe est associée aux noms de plusieurs mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz et Picard. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématiciens polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite. Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peut plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B.Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B.Oldham et J.Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencée en 1968.
De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres :
• **Chapitre 1** :C'est un rappel de quelques définitions, notions de base et résultats sur la dérivation fractionnaire.

• **Chapitre 2** : Dans ce chapitre nous présentons les résultats que nous obtenons pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J = [0,1], \quad 2 < \alpha < 3 \\ u(0) = 0, u'(0) = u'(1) = \beta u(\eta), \end{cases}$$

où ${}^cD^\alpha$ désigne la dérivé fractionnaire de l'ordre α au sens de Caputo, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\eta \in (0,1)$ et $\beta \in [1, \frac{1}{\eta}]$ sont des constantes arbitraires .

Ces résultats concernent l'existence et l'unicité de solutions pour ce problème.
Le premier de ces résultats il est obtenu moyennant le principe de contraction de Banach.

Le second résultat de ce chapitre est obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Schaefer.

• **Chapitre 3** : Ce chapitre traite le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_0^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J = [0,1], \quad 2 < \alpha < 3. \\ D_0^{\alpha-1}u(0) = 0, D_0^{\alpha-2}u(1) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

où D_0^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Nous montrons deux résultats d'existence de solutions pour ce problème.
Le premier résultat, moyennant le principe de contraction de Banach, affirme que le problème admet une solution unique. Le second résultat est montré par utilisation du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

CHAPITRE I

Dérivation et Intégration Fractionnaires : Notions Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions, propriétés et résultats sur les différentes approches de la dérivation fractionnaire (voir[[1],[3],[16],[17],[15][18]]).

I.1 Définitions et notations

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions, notations et quelques théorèmes qui nous seront utiles dans notre étude.

Définition I.1.1 [20]
On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Soit $J = [a, b]$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ et soit $(X, |\ .\ |)$ un espace de Banach.
• $C(J, X)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \to X$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)|\ :\ t \in J\}.$$

• $C^n(J, X)$ l'espace de Banach des fonctions n fois continument différentiables.
• $L^1(J, X)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \to X$ qui sont Lebesgue intégrable, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b |y(s)|\, ds.$$

Définition I.1.2
On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.

Définition I.1.3 [20]
Soient X et Y deux espaces de Banach, et $A : X \to Y$ une application linéaire. On dit que A est bornée si elle envoie les parties bornées de X sur des parties bornées de Y.

Définition I.1.4 [20]
Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de X dans Y.

Proposition I.1.1 [23]
Soient $\mathcal{C}(J, X)$ l'espace des fonctions continues de J dans l'espace de Banach X et $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}(J, X)$. $\mathcal{Q}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J, X)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) L'ensemble $\mathcal{Q}$ est uniformément borné, i.e :

$$\exists K \geq 0 \ : \ \|f\|_\infty \leq K, \quad \forall t \in J, \ \ \forall f \in \mathcal{Q}.$$

b) L'ensemble $\mathcal{Q}$ est équicontinu, i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ \forall t_1, t_2 \in J, \ \ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon, \ \ \forall f \in \mathcal{Q}.$$

Remarque I.1.1
Pour tout $x \in J$, l'ensemble $\{f(x), \ \ f \in \mathcal{Q}\}$ est relativement compacte dans X.

Définition I.1.5 [20]
Soient X, Y deux espaces de Banach et A un opérateur défini de X dans Y ;

a) A est dit compact si l'image de X par A, i.e. l'ensemble $A(X)$ est relativement compact dans Y.

b) A est dit complètement continu, s'il est continu et l'image de tout borné de X est relativement compact dans Y.

Théorème I.1.1 (Arzelà-Ascoli) [19]
Soient X un sous-ensemble compact d'un espace métrique et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$. Alors, $\mathcal{F}$ est relativement compacte (pré-compact) dans $\mathcal{C}(X)$, si et seulement si $\mathcal{F}$ est équicontinue et uniformément bornée.

Théorème I.1.2 (Bolzano-Weierstrass) [23]
Soit X un espace métrique, $A \subseteq X$ est compact, si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui convergente dans A.

Définition I.1.6 [27, 13]
Soit (X, d) un espace métrique complet et soit T une application de X dans X . On dit que T est une application Lipschitizienne s'il existe une constante positive k telle que l'on ait :

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X. \tag{I.1}$$

✓ Si $k < 1$, l'application T est dite k-contractante.

Définition I.1.7
Soit f une fonction définie sur $[0, \infty[$, f est dite d'ordre exponentielle $\alpha(\alpha > 0)$ s'il existe une constante positive k et $T > 0$, tels que :

$$\forall t > T, \quad \textit{on a} \quad |f(t)| \leqslant ke^{\alpha t}$$

Définition I.1.8
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $[0, \infty[$ et d'ordre exponentiel α. La transformée de Laplace de la fonction f est l'application L définie par :

$$L(f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad \textit{avec} \quad \mathfrak{Re}(p) > \alpha$$

.

Définition I.1.9 [23]
Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$.

I.2 Fonctions de base

Dans cette section, nous introduisons quelques fonctions spéciales qui nous seront utiles dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

I.2.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler Γ, qui généralise la factorielle $n!$ permettant à n de prendre des valeurs non entières et même des valeurs complexes.

Définition I.2.1 [22]
La fonction Gamma Γ est définie sur $\mathbb{C}$ par l'intégrale impropre suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{I.2}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, si $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Proposition I.2.1 [22]
L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnel suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{I.3}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle a des pôles simples aux points $z = -n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Preuve.
On démontre cette proposition par une intégration par partie de (I.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{(z+1)-1} \ dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{z} \ dt \\
&= \left[-e^{-t} \ t^{z}\right]_{+\infty}^{0} + z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{z-1} \ dt}_{\Gamma(z)} .
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{1-1} \, dt = 1.$$

et en utilisant (I.3), on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(2) & = & 1.\Gamma(1) & = & 1.1 & = & 1! \\
\Gamma(3) & = & 2.\Gamma(2) & = & 2.1! & = & 2! \\
\Gamma(4) & = & 3.\Gamma(3) & = & 3.2! & = & 3! \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\Gamma(n+1) & = & n.\Gamma(n) & = & n(n-1)! & = & n!.
\end{array}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Proposition I.2.2 [22, 21]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \ \sqrt{\pi}}{4^n \ n!}, \tag{I.4}$$

avec

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve.

On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En effet

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{t} \quad \Longrightarrow \quad t = u^2 \quad \text{et} \quad dt = 2u \, du,$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du.$$

D'après l'intégrale de Gauss on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant (I.4) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right).\left(n-\frac{3}{2}\right).\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right).\left(n-\frac{3}{2}\right)\ \ldots\ \frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right).\left(\frac{2n-3}{2}\right)\ \ldots\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\\
&= \frac{1}{2^n}.(2n-1).(2n-3)\ \ldots\ 3.1.\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $(2n-2).(2n-4)\ \ldots\ 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1).(2n-2)\ \ldots\ 3.2.1}{2^n.(2n-2).(2n-4)\ \ldots\ 2}.\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^n.2^{n-1}.(n-1)!}\\
&= \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.(n-1)!}.
\end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $2n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n.(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.2n.(n-1)!}\\
&= \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n\ n!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent (I.4) est prouvée. ■

Théorème I.2.1 [8]

La fonction Gamma est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}(\ln t)^k\ dt.$$

I.2.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

Définition I.2.2 [22, 21]
La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de seconde espèce

$$B(z,\omega)=\int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{\omega-1}\,dt,\quad \mathfrak{Re}(z)>0,\ \mathfrak{Re}(\omega)>0, \tag{I.5}$$

cette intégrale est convergente pour tout $z,\omega\in\mathbb{C}$.

Proposition I.2.3 [22]
Les fonctions Γ et B sont liées par la relation suivante :

$$B(z,\omega)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)},\qquad \mathfrak{Re}(z)>0,\mathfrak{Re}(\omega)>0. \tag{I.6}$$

Preuve.
Pour $\mathfrak{Re}(z),\mathfrak{Re}(w)>0$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega)&=\left(\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt\right).\left(\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{w-1}ds\right).\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^{z-1}s^{w-1}e^{-(t+s)}dtds.\end{aligned}$$

Soit le changement de variable suivant :

$$x=t+s$$

$$t=xy$$

alors

$$0\leqslant x\quad,\quad 0\leqslant y\leqslant 1$$

et

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(y,x)}=\begin{vmatrix}x & y\\ -x & 1-y\end{vmatrix}=x$$

ainsi

$$dt.ds = x.dy.dx$$

il s'ensuit que : :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (xy)^{z-1}(x(1-y))^{\omega-1}e^{-x}xdydx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 x^{z+\omega-1}y^{z-1}(1-y)^{\omega-1}e^{-x}dydx \\
&= (\int_0^{+\infty} x^{z+\omega-1}e^{-x}dx)(\int_0^1 y^{z-1}(1-y)^{\omega-1}dy) \\
&= \Gamma(z+\omega)B(z,\omega)
\end{aligned}$$

Donc

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$$

Remarque I.2.1
Il est clair que :

$$B(z,\omega) = B(\omega,z) \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0, \mathfrak{Re}(\omega) > 0$$

I.3 Calcul fractionnaire

I.3.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale suivante :

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt$$
$$I_a^2 f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt,$$

Plus généralement le $n^{iéme}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_a^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{I.7}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$. Riemann s'est rendu compte que le second membre de (I.7) pourrait avoir un sens même quand n prend une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

I.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition I.3.1 (Intégrale de Riemann-Liouville)
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville de f notée I_a^α, l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \qquad (x > a, \mathfrak{Re}(\alpha) > 0). \tag{I.8}$$

Où Γ est la fonction Gamma et on note I_0^α par I^α.

Exemple I.3.1
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-a)^{\beta}, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0.$$

On a alors

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\, dt. \tag{I.9}$$

En faisant le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{t-a}{x-a}, \quad \forall x > a.$$

$$t = a + (x-a)\tau, \quad \text{avec} \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \text{donc} \quad dt = (x-a)d\tau. \tag{I.10}$$

Donc, (I.9) devient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^{\beta}(x-a)\, d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[(x-a)(1-\tau)\right]^{\alpha-1} \left[(x-a)\tau\right]^{\beta} (x-a)\, d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^{(\beta+1)-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de la fonction Bêta (I.5) puis de la relation (I.6), on a :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f :

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{I.11}$$

Cas particulier,
• Si $\alpha = 1$. D'après (I.3) on déduit que

$$I_a^1 (x-a)^{\beta} = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{1+\beta}.$$

• Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha.$$

Proposition I.3.1 [14]
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Pour α et β des nombres complexes où $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathfrak{Re}(\beta) > 0$, alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{I.12}$$

et pour $\mathfrak{Re}(\alpha) > 1$ on a :

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f \tag{I.13}$$

et pour $\forall x \in [a,b]$ on a :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} (I_a^\alpha f)(x) = f(x). \tag{I.14}$$

Preuve.
► Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, On a par définition de I_a^α

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[I_a^\beta f\right](t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1}\, f(s)\, ds\right] dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{s-1}\, f(s)\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \underbrace{\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\, dt}_{\mathcal{I}}\, ds. \end{aligned} \tag{I.15}$$

En effectuant le changement de variable suivant dans l'intégrale $\mathcal{I}$:

$$\tau = \frac{t-s}{x-s} \quad \forall x > s,$$

alors :

$$t = s + (x-s)\tau, \quad \text{avec} \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad \text{donc} \quad dt = (x-s)d\tau.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{\alpha-1}(s+(x-s)\tau-s)^{\beta-1}(x-s)\,d\tau \\ &= \int_0^1 \left[(x-s)(1-\tau)\right]^{\alpha-1}\left[(x-s)\tau\right]^{\beta-1}(x-s)\,d\tau \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\,d\tau.\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de la fonction Bêta (I.5) puis de la relation (I.6), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha) \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

De à la formule (I.15), on obtient alors

$$\begin{aligned}I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\left[(x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds \\ &= I_a^{\alpha+\beta}f(x).\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

► Pour l'identité (I.13) on utilise la dérivation classique d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
On a $\forall x > a$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(I_a^{\alpha}f(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)\,dt \\ &= I_a^{\alpha-1}f(x).\end{aligned}$$

▶ Pour l'identité (I.14) , on suppose que f est continue sur $[a,b]$. Alors on a :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

d'où :

$$\left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x)\, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) - f(x) \mid \ dt.$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) - f(x) \mid \ dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) - f(x) \mid \ dt.$$

Puisque la fonction f est continue, on a alors :

$\forall (x,t) \in [a,b]^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \mid x - t \mid \leqslant \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(t) \mid \leqslant \varepsilon.$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) - f(x) \mid \ dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) - f(x) \mid \ dt \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} (\mid f(t) \mid + \mid f(x) \mid)\, dt + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1}\, dt \\
&\leqslant 2 \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1}\, dt + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha \\
&\leqslant 2 \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(x-a)^\alpha - \delta^\alpha \right] + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha) + \varepsilon \delta^\alpha).
\end{aligned}$$

Où $M = sup\left\{f(x), x \in [a, a-\delta]\right\}$. Donc, lorsque $\alpha \to 0$ on a :

$$\left|(I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x)\right| \leqslant \varepsilon;$$

ce qui entraine que

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \left|(I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x)\right| = \left|\lim_{\alpha \longrightarrow 0} (I_a^\alpha f)(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, il s'en suit que :

$\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} (I_a^\alpha f)(x) = f(x)$, ce qui achève ainsi la preuve de la proposition . ■

Remarques I.3.1 [14]
$\forall x \in [a, b]$,nous avons :

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{d}{dt}\right) \left(-\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(-\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) f(t)\right]_a^x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(-\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\right) f'(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha f(a) + \left(I_a^{\alpha+1} f'\right)(x).
\end{aligned}$$

$*$ Pour $\alpha = 0$:

$$(I_a^0 f)(x) = f(a) + (I_a^1 f')(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(x).$$

$*$ Pour $\alpha = -1$:

$$(I_a^{-1} f)(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

D'où :

$$I_a^{-1} = \frac{d}{dx}.$$

▷ Une simple itération de cette formule donne :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+1} f^{(n)}(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

• L'identité (I.12) n'est valable que si $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathfrak{Re}(\beta) > 0$ car nous avons, par exemple (pour $\alpha = 1$ et $\beta = -1$) :

$$I_a^1(I_a^{-1} f)(x) = I_a^1(\frac{d}{dx} f)(x) = f(x) - f(a) \neq I_a^0 f(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

I.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition I.3.2 (Dérivée de Riemann-Liouville) [22, 14]

Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f notée D_a^α, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D^n \Big[I_a^{n-\alpha} f(x) \Big] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a)\,. \end{aligned} \tag{I.16}$$

Où $[\ .\ ]$ la partie entière d'un nombre réel et $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$.

En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique ;

- Si $\alpha = 0$, on a :
$$D_a^0 f(x) = D^1[I_a^1 f(x)] = f(x).$$
- Si $\alpha = n, (n \in \mathbb{N})$, on a :
$$D_a^n f(x) = D^{n+1}[I_a^{n+1-n} f(x)] = D^{n+1}[I_a^1 f(x)] = D^n f(x).$$

Exemple I.3.2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in]n-1, n[$, nous avons

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n \left[I_a^{n-\alpha} (x-a)^\beta \right].$$

D'après (I.11), on obtient :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= D^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \right]. \end{aligned} \tag{I.17}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots(n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\ &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{I.18}$$

En substituant (I.18) dans (I.17), on aura :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \right].$$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{I.19}$$

Cas particulier,

$*$ Si $\alpha = 1$. D'après (I.3) on déduit que

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (x-a)^{\beta-1} = \beta (x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx} (x-a)^\beta.$$

$*$ Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

Ce qui montre que la dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

$*$ Si $a = 0$.Dans ce cas

$$D_0^\alpha (x)^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x)^{\beta-\alpha}, & \text{si } \beta > -1 \\ \\ 0. & \text{si } \beta \in \{\alpha-1,\ \alpha-2,\ \alpha-3, \cdots,\ \alpha-n\} \end{cases}$$

Exemple I.3.3
Nous avons les relations suivantes :$\forall x \in [a, b]$

▷ $D_a^0 1 = 1;$

▷ $D_a^{-1} 1 = x - a;$

▷ $D_a^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt[2]{\pi x}};$

Remarque I.3.1 (Dérivée des fonctions exponentielles)
La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction exponentielle e^{bx} ou b est une constante, est donnée par l'expression suivant :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{bx} = b^n e^{bx}.$$

Liouville a étendu cette définition pour inclure les dérivées d'ordre arbitraire α :

$$D_a^\alpha e^{bx} = b^\alpha e^{bx}.$$

Il a aussi utilisé le développement en série pour collecter toutes les fonctions exponentielles :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x},$$

avec $\mathfrak{Re}(b_n) > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$.
D'où

$$D_a^\alpha(f(x)) = D_a^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n^\alpha e^{b_n x}, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Remarque I.3.2 (Dérivée de fonctions trigonométriques)
On a d'après (I.16)

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(e^{ibx}) &= (ib)^\alpha e^{ibx} \\ &= \left(\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right)(\cos(bx) + isin(bx))\, b^\alpha \\ &= b^\alpha\left[\cos\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit les identités suivantes :

$$D_a^\alpha \cos(bx) = b^\alpha \cos(bx + \alpha\frac{\pi}{2}).$$
$$D_a^\alpha \sin(bx) = b^\alpha \sin(bx + \alpha\frac{\pi}{2}).$$

Proposition I.3.2 [14]
Si $n > \mathfrak{Re}(\alpha) > \mathfrak{Re}(\beta) > n-1 > 0$, alors pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on a la relation

$$\left(D_a^\beta I_a^\alpha f\right)(x) = I^{\alpha-\beta} f(x).$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{Re}(\alpha) > k$, alors

$$\left(D_a^k I_a^\alpha f\right)(x) = I^{\alpha-k} f(x). \tag{I.20}$$

Preuve.
En utilisant la définition I.3.2 et de proposition I.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}\left(D_a^\beta I_a^\alpha f\right)(x) &= D^n\left[I_a^{n-\beta}\left(I_a^\alpha f(x)\right)\right]\\ &= D^n\left[I_a^{n+\alpha-\beta} f(x)\right]\\ &= D^n\left[I_a^n\left(I_a^{\alpha-\beta} f(x)\right)\right]\\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x).\end{aligned}$$

d'où le résultat. (Car $D^n(I^n) = I$) ■

Remarque I.3.3
La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e :

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta \neq D_a^\beta \circ D_a^\alpha.$$

Proposition I.3.3 (Linéarité) [22]
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les deux fonctions f et g pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Riemann-Liouville existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :

$$D_a^\alpha\left(\lambda f + g\right)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + (D_a^\alpha g)(x).$$

I.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La notion de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Cependant, les demandes de la technologie moderne exigent une certaine révision de l'approche mathématique pure bien établie, car les problèmes appliqués nécessitent l'utilisation des condition initiales $f(a), f'(a)$, etc. Ces besoins ont bientôt conduit à la naissance d'une définition alternative des dérivées fractionnaires qui a été introduite par M.Caputo à la fin des années soixante.

Définition I.3.3 (Dérivée de Caputo) [22]
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Caputo de f notée ${}^cD_a^\alpha$, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)]+1, x > a). \end{aligned} \tag{I.21}$$

On note ${}^cD_0^\alpha$ par ${}^cD^\alpha$.

Exemple I.3.4
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \geq 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in [n-1, n[$, nous avons

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n (x-a)^\beta\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[(t-a)^\beta\right]^{(n)} dt. \end{aligned}$$

On sait que

$$\left[(t-a)^\beta\right]^{(n)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},$$

et donc

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}\, dt}_{\mathcal{I}}. \tag{I.22}$$

En y effectuant le changement de variable (I.10) dans l'intégrale $\mathcal{I}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{n-\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^{\beta-n}(x-a)\,d\tau\\ &= \int_0^1 [(x-a)(1-\tau)]^{n-\alpha-1}\,[(x-a)\tau]^{\beta-n}\,(x-a)\,d\tau\\ &= (x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 \tau^{(\beta-n+1)-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\,d\tau.\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de la fonction Bêta (I.5) puis de la relation (I.6), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= (x-s)^{\beta-\alpha}B(\beta-n+1,n-\alpha)\\ &= (x-s)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.\end{aligned}$$

La formule (I.22), devient alors :

$${}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\left[\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right],$$

et donc

$${}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

D'où

$${}^cD_a^\alpha(x-a)^\beta = \begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}, & \text{si } \beta > n-1\\ \\ 0. & \text{si } \beta \in \{0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1\}\end{cases}$$

Remarque I.3.4
La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t)=C$ est nulle, autrement dit : ${}^cD_a^\alpha C = 0$.

Proposition I.3.4 (Linéarité) [22]
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in\,]n-1,n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient deux fonctions f et g pour laquelle les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Caputo (I.21) existent. Alors pour $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, on a :

$${}^cD_a^\alpha\left(\lambda f+g\right)(x) = \lambda\,{}^cD_a^\alpha f(x) + {}^cD_a^\alpha g(x).$$

I.3.5 Lien entre les dérivée fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville

Propriété I.3.1 [14]
Si $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville (I.16) et celle de Caputo (I.21) est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] \\ &= D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)]+1, x > a). \end{aligned} \tag{I.23}$$

En particulier, lorsque $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]0,1[$, on a :

$$ {}^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{I.24}$$

A partir de (I.23), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo, si a est un zéro d'ordre n de f. Plus précisément, on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{I.25}$$

Alors,

$$ {}^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x).$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, de la définition I.3.2, on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] &= D^n I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k \right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k \right] dt}_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Par intégration par partie de l'intégrale $\mathcal{I}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} &\left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k \right)(x-t)^{n-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} \\ &+ \int_a^x \frac{(x-t)^{(n-\alpha+1)-1}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(\frac{d}{dt}\right) \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k \right] dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathcal{I} = I_a^{n-\alpha+1} D \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right].$$

En intégrant n fois, on aura :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= I_a^{n-\alpha+n} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] \\
&= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] \\
&= I_a^n I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) - D^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right].
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, donc :

$$\mathcal{I} = I_a^n I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right].$$

Alors,

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^n I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right] \\
&= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right].
\end{aligned}$$

En tenant compte de (I.20) de la propriété I.3.2 et de la définition I.3.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] &= \underbrace{D^n I_a^n}_{Id} I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right] \\
&= I_a^{n-\alpha} \left[D^n f(x) \right] \\
&= {}^c D_a^\alpha f(x).
\end{aligned}$$

En plus par linéarité de l'opérateur D_a^α, on a :

$$D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] = D_a^\alpha f(x) - D_a^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right].$$

Et d'après l'exemple I.3.2, on aura :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}\,D_a^\alpha(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}\,\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors,

$$D_a^\alpha\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] = D_a^\alpha f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Ce qui montre (I.23). ■

I.3.6 Dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Lenikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée (-p) fois si (p est négatif), d'une fonction f comme ceci :

Pour une fonction f donnée, d'après la définition classique de la dérivation en un point t on a :

$$f'(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}(f(t)-f(t-h)). \tag{I.26}$$

On utilise le même concept pour la dérivée seconde pour trouver

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f'(t)-f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{f(t)-f(t-h)}{h}-\frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^2}(f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)). \end{aligned}$$

Donc

$$f''(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^2}(f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)). \tag{I.27}$$

Moyennant (I.26) et (I.27) on obtient

$$f^{(3)}(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^3}\left(f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)\right).$$

Par itération on trouve la formule générale

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f(t-kh).$$

Où

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Pour un entier p arbitraire on a :

$$f^{(p)}(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh).$$

Remarquons que si $p \leqslant n$ on a

$$\begin{aligned} f^{(p)}(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh) \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh) \\ &+ \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh) \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh). \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $\begin{pmatrix} p \\ p+j \end{pmatrix} = 0$,pour tout $j = 1, 2, 3, \dots, n.$

Définition I.3.4
La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Grunwald-Letnikov est donnée par

$${}^{GL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f(t-kh)$$

avec $0 \leqslant n-1 < \alpha < n.$

Remarque I.3.5

Remarquons que

$$\begin{aligned}(-1)^k\binom{\alpha}{k} &= (-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}\\ &= (-1)^k\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)!}{k!(\alpha-k)!}\\ &= \frac{-\alpha(-\alpha+1)\dots(-\alpha+k-1)}{k!}\\ &= \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc

$$^{GL}D^{\alpha}f(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}f(t-kh).$$

L'intégrale fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$$^{GL}I^{\alpha}f(t) = ^{GL}D^{-\alpha}f(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}h^{\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}f(t-kh).$$

Cas particuliers :

pour $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}^{GL}I^{1}f(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0}h\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1)}f(t-kh)\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0}h\sum_{k=0}^{+\infty}f(t-kh)\\ &= \int_0^{t-a}f(t-y)dy\\ &= \int_0^{t}f(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

pour $\alpha = 2$:

$$\begin{aligned}^{GL}I^{2}f(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0}h^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2)}f(t-kh)\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0}h\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)f(t-kh).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t+h=z$, on déduit que :

$$^{GL}I^{2}f(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}h^2\sum_{k=1}^{+\infty}kf(z-kh).$$

I.4 Lemmes fondamentaux

Lemme I.4.1 [14]
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, alors

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) = f(x). \tag{I.28}$$

Preuve.
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. La relation (I.23) de propriété I.3.1 permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) = \left(D_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(I_a^\alpha f\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Puis d'après le lemme I.4.4, on a

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(I_a^\alpha f\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Et comme $k \leq n-1 < \mathfrak{Re}(\alpha)$, pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$, alors les dérivées

$$\left(I_a^\alpha f\right)^{(k)}(a) = 0.$$

Ce qui donne

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) = f(x).$$

■

Lemme I.4.2 [32]
Soit $\alpha > 0$,alors l'équation différentielles

$${}^cD^\alpha f(x) = 0$$

admet les solutions

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1.$$

Preuve.
Supposons que

$${}^cD^\alpha f(x) = 0,$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo (I.3.3), on obtient

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=0,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt=0,$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\neq 0$,on a

$$\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt=0,$$

et par suite

$$x^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)=0.$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L\left(x^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)\right)(p)=L(0)(p)=0$$

posant $F(p)=L(f)(p)$ on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{p^{n-\alpha}}\left(p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)\right)=0,$$

alors

$$p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)=0,$$

donc

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}p^{-k}f^{(k-1)}(0),$$

en appliquant maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(F(p))(x)=L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}p^{-k}f^{(k-1)}(0)\right)(x)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=1}^{n}f^{(k-1)}(0)L^{-1}\left(p^{-k}\right)(x)\\&=\sum_{k=1}^{n}f^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)},\end{aligned}$$

en faisant le changement d'indice $i = k - 1$ on trouve

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

pour $c_i = \frac{f_i(0)}{i!}$ on a

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i.$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha f(x) &= {}^cD^\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i {}^cD^\alpha x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^i \end{aligned}$$

puisque $(0 \leqslant i \leqslant n - 1 < n)$ on a

$${}^cD^\alpha f(x) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Lemme I.4.3 [32]
Soit $\alpha > 0$, alors

$$I^{\alpha c}D^\alpha f(x) = f(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1, n = [\alpha] + 1.$

Preuve.
De la définitions de la dérivée fractionnaire de Caputo (I.3.3), on a :

$${}^cD^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(x),$$

on applique l'opérateur de l'intégrale fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}f(x) &= I^{\alpha}I^{n-\alpha}f^{(n)}(x)\\
&= I^{n}D^{n}f(x)\\
&= f(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{x^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}\lim_{t\longrightarrow 0}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j}I^{n-n}f(x)\\
&= f(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{x^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j}f(x)\right)(0)\\
&= f(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{x^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}f^{(n-j)}(0)
\end{aligned}$$

par le changement d'indice $k=n-j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}f(x) &= f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)x^{k}}{k!}\\
&= f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c'_{k}x^{k}}{k!}\\
&= f(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_{k}x^{k}}{k!}.
\end{aligned}$$

■

Lemme I.4.4 [14]
Si $\mathfrak{Re}(\alpha)\in\,]n-1,n[$, $n\in\mathbb{N}^{*}$ et $f\in\mathcal{C}([a,b])$, alors on a l'égalité

$$\left(D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f\right)(x)=f(x).$$

Preuve.
En se basant sur la propriété classique :

$$\left(D^{n}I_{a}^{n}f\right)(x)=f(x),$$

Et en utilisant la définition I.3.2 et de proposition I.3.1, on déduit

$$\begin{aligned}
\left(D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f\right)(x) &= D^{n}\Big[I_{a}^{n-\alpha}\left(I_{a}^{\alpha}f(x)\right)\Big]\\
&= D^{n}\Big[I_{a}^{n}f(x)\Big]\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme I.4.5 [14]
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$D_a^{\alpha} f(x) = 0,$$

Admet une solution donnée par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k-n+\alpha}, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1).$$

Pour $a = 0$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} x^{\alpha-(n-k)}, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1).$$

Où les $c_k \in \mathbb{R}, \ (k = 0, 1, \dots, n-1)$ sont des constantes réelles.

Preuve.
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (\frac{d}{dx})^n [(I_a^{n-\alpha} f)(x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k \\ &\Leftrightarrow (I_a^{n} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{\alpha+k} \\ &\Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{\alpha+k-n}. \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme I.4.6
Soit $n-1 < \alpha < n$ et $f \in C(J, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} I^{\alpha} D_0^{\alpha} f(x) &= f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D_0^{\alpha-k} f(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)} x^{\alpha-k} \\ &= f(x) - c_1 x^{\alpha-1} - c_2 x^{\alpha-2} - \dots - c_n x^{\alpha-n}, \quad x \in \mathbb{J}. \end{aligned}$$

avec $c_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, \dots, n$.

Preuve.
Soit $n-1<\alpha<n$ et $f \in C(J,\mathbb{R})$.
D'après la définition de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (I.3.1), on a :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha[D_a^\alpha f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}[D_a^\alpha f(t)]dt. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x \frac{d}{dx}(x-t)^{\alpha}[D_a^\alpha f(t)]dt \\
&= \frac{d}{dx}\left[\underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha} D_a^\alpha f(t)dt}_{\mathcal{F}}\right].
\end{aligned}$$

En faisant des intégrations par parties répétés de $\mathcal{F}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha}\frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t))dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-n}(I^{n-\alpha}f(t))dt - \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}\left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}I^{n-\alpha}f(a)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-n}(I^{n-\alpha}f(t))dt - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}[D_a^{\alpha-k}f(a)] \\
&= I_a^{\alpha-n+1}(I_a^{n-\alpha}f(x)) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}[D_a^{\alpha-k}f(a)] \\
&= I_a^1 f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}[D_a^{\alpha-k}f(a)].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\left[D_a^\alpha f(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left[I_a^1 f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}D_a^{\alpha-k}f(a)\right] \\
&= f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}[D_a^{\alpha-k}f(a)].
\end{aligned}$$

Pour $a=0$:

$$\begin{aligned}
I^\alpha\left[D_0^\alpha f(x)\right] &= f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}[D_0^{\alpha-k}f(0)] \\
&= f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{D_0^{\alpha-k}f(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k} \\
&= f(x) - c_1x^{\alpha-1} - c_2x^{\alpha-2} - \ldots - c_nx^{\alpha-n},
\end{aligned}$$

avec $c_k = \frac{D_0^{\alpha-k}f(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)}$ et pour $k=1,\ldots,n$. ■

I.5 Quelques théorèmes du point fixe

Dans cette section, nous présentons des théorèmes de point fixe qui seront utiles dans notre travaille pour l'existence de solution du problème aux limites d'ordre fractionnaire.

Théorème I.5.1 (Banach)[11]
Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur contractant alors T admet un point fixe unique. i.e $\exists! u \in X \quad$ tel que $\quad Tu = u.$

Théorème I.5.2 (Schaefer)[11, 12]
Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur complètement continu.
Si l'ensemble :

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Tu = u, \quad \text{pour un certain} \quad \lambda \in]0,1[\}$$

est borné, alors T possède au moins un point fixe .

Théorème I.5.3 (Théorème du point fixe de Kranoselskii) [26]
Soit F un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach X.
T_1 et T_2 sont deux applications de F dans X telles que :

- $T_1(x) + T_2(y) \in F, \quad \forall x, y \in F,$
- T_1 est une contraction ,
- T_2 est compacte et continue.

Alors, $T_1 + T_2$ admet un point fixe dans F,autrement dit, il existe $x \in F$ tel que :

$$T_1(x) + T_2(x) = x$$

.

Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire au sens de Caputo

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites (voir [6]). Nos résultats se basent sur l'application de deux théorèmes du point fixe, à savoir
• Le théorème du point fixe de Banach.
• Le théorème du point fixe de Schaefer.

II.1 Présentation du problème

Nous considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites :

$$^{c}D^{\alpha}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,1] \quad 2 < \alpha < 3. \tag{II.1}$$

$$u(0) = 0, u'(0) = u'(1) = \beta u(\eta), \tag{II.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivé fractionnaire de l'ordre α au sens de Caputo, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\eta \in (0,1)$ et $\beta \in [1, \frac{1}{\eta}]$ sont des constantes arbitraires .
Il existe de nombreux travaux qui traitent de l'existence et de la multiplicité des solutions d'équations différentielles non linéaires par l'utilisation des techniques d'analyse non linéaire, en particulier la théorie du point fixe.
Dans [31], en utilisant certains arguments de point fixe, S.Zhang a prouvé l'existence de solutions pour le problème aux limites non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} ^{c}D_t^{\alpha}u(t) + f(t, u(t)) = 0, 0 < t < 1, 1 < \alpha < 2. \\ u(0) = \nu, u(1) = \rho, \quad \nu\rho \neq 0. \end{cases}$$

Dans un autre article, par l'utilisation de théorème de fixe sur les cônes, S.Zhang a [28] étudié l'existence et la multiplicité de solutions positives du problème aux limites non linéaire fractionnaire

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha u(t) + f(t,u(t)) = 0, 0 < t < 1, \quad 1 < \alpha < 2, \\ u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

où ${}^cD^\alpha$ la dérivé fractionnaire au sens de Caputo.
Dans [2], M. Benchohra, S. Hamani, K. Ntouyas et A. Ouahab, au moyen de théorème de point fixe de Banach et de l'alternative non linéaire de type Leary-Schauder, ont prouvé l'existence de solutions pour le problème de la valeur limite du premier ordre pour l'équation différentielle de l'ordre fonctionnel :

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha u(t) = f(t,u(t)) = 0, 0 < t < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \\ au(0) + bu(1) = c, \end{cases}$$

où ${}^cD_t^\alpha$ est la dérivé fractionnaire au sens de Caputo ,f est une fonction continue et a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq c$.
M.Houas et Z.Dahmani dans [20] ont considéré le problème aux limites fractionnelle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f(t,u(t), D^\beta u(t)), \quad 2 < \alpha \leqslant 3, \beta \leqslant \alpha - 1, 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \lambda_1 u(\eta) + \lambda_2 u'(\eta) = \lambda_3 u(\xi) + \lambda_4 u'(\xi) = 0, \end{cases}$$

où ${}^cD^\alpha$ et ${}^cD^\beta$ sont les dérivés fractionnaires au sens de Caputo ,$\lambda_i, i = 1,4$ sont des constantes réelles avec $\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3(\xi - \eta) \neq 0$ et f une fonction continue sur $[0,1]$.
T.Qui et Z.Bai en [24] ont discuté de l'existence des solutions positives pour les problèmes aux limites associés au équations différentielles fractionnaires non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f(t,u(t)), 2 < \alpha \leqslant 3, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(1) = u''(0) = 0, \end{cases}$$

où ${}^cD^\alpha$ la dérivé fractionnaire au sens de Caputo,$f(1,1] \times [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est continue, avec $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} f(t,.) = +\infty$(c'est- à-dire que f est singulière en $t = 0$).
Dans Ce travail, nous étudions l'existence et l'unicité de solution pour le problème aux limites (II.1)-(II.2) .
Nos résultats améliorent ceux de [[29],[30]].

II.2 Existence de solution

Dans cette section on s'intéresse à l'existence des solutions du problème (II.1)- (II.2).

▶ On commence par donner la définition d'une solution du problème (II.1)-(II.2).

Définition II.2.1 [32]
On dit que la fonction $u \in C^3(J, \mathbb{R})$ est une solution du problème (II.1) et (II.2),s'il existe un fonction $f \in L^1(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall t \in J$ telle que :

$$^cD^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0. \quad \text{pour tout} \quad t \in J = [0,1], \quad 2 < \alpha < 3.$$

et la fonction u satisfait les conditions (II.2)

▶ Pour l'existence de la solution, on a besoin du lemme suivant :

Lemme II.2.1
Soit $\beta\eta \neq 1$ et $h \in L^1[0,1]$. Une fonction u est une solution de problème aux limites :

$$\begin{cases} ^cD^\alpha u(t) + h(t) = 0, \quad 2 < \alpha < 3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, & \text{(II.A)} \\ u(0) = 0, u'(0) = u'(1) = \beta u(\eta), & \text{(II.B)} \end{cases}$$

si et seulement si c'est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds + \frac{\beta t}{1 - \beta\eta} \int_0^1 G(\eta, s)h(s)ds$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \begin{cases} -\dfrac{2}{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1} + t^2(1-s)^{\alpha-2}, & \text{si} \quad s < t \\ t^2(1-s)^{\alpha-2}, & \text{si} \quad s \geqslant t. \end{cases}$$

et

$$G(\eta,s) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \begin{cases} -\dfrac{2}{\alpha-1}(\eta-s)^{\alpha-1} + \eta^2(1-s)^{\alpha-2}, & \text{si} \quad s < \eta \\ \eta^2(1-s)^{\alpha-2}, & \text{si} \quad s \geqslant \eta. \end{cases}$$

où $G(t,s)$ et $G(\eta,s)$ sont les fonctions de Green.

Preuve.
En appliquant l'opérateur I^{α} aux deux membres de l'égalité (II.A) , on aura :

$$\begin{aligned}(I^{\alpha c}D^{\alpha}u)(t) &= -\, I^{\alpha}h(t)\\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.\end{aligned} \tag{II.3}$$

Et d'après lemme (I.4.2) et lemme (I.4.3) , on a :

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1}t^{n-1}. \tag{II.4}$$

Puisque $\alpha \in]2,3[$, donc $n = [\alpha] + 1 = 3.$ Alors on obtient :

$$(I^{\alpha c}D^{\alpha}u) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2.$$

Donc de (II.3) et (II.4) , on a :

$$u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

d'où

$$u(t) = -c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \tag{II.5}$$

pour certaines constantes $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Il reste a vérifier les conditions aux limites, on a :

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0.$$

En dérivant u :

$$u'(t) = -c_1 - 2c_2 t - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}h(s)ds$$

avec la condition $u'(0) = u'(1)$ implique que

$$-c_1 = -c_1 - 2c_2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}h(s)ds.$$

Donc

$$c_2 = -\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}h(s)ds.$$

Pour c_1, nous avons :

$$\begin{aligned}
u'(0) &= \beta u(\eta) \\
-c_1 &= \beta\left(-c_1\eta - c_2\eta^2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right) \\
-c_1 &= \beta\left(-c_1\eta + \frac{\eta^2}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}h(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right)
\end{aligned}$$

et puis

$$c_1 = \frac{\beta\eta^2}{(\beta\eta-1)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{2\Gamma(\alpha-1)}h(s)ds - \frac{\beta}{(\beta\eta-1)}\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds.$$

En remplaçant les valeurs de c_1 et c_2 dans (II.5), on obtient la relation désirée dans lemme (II.2.1), c-à-d :

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}h(s)ds \\
&+ \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&+ \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}h(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds. \\
&= \frac{\beta t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\left[\int_0^{\eta}\frac{2}{\alpha-1}(\eta-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \int_0^1\eta^2(1-s)^{\alpha-2}h(s)ds\right] \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 t^2(1-s)^{\alpha-2}h(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds. \\
&= \frac{\beta t}{(1-\beta\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)h(s)ds + \int_0^1 G(t,s)h(s)ds.
\end{aligned}$$

■

Dans cette section, on donne les conditions d'existence et l'unicité de la solution du problème (II.1) et (II.2) dans l'espace $C[0,1]$.

Hypothèses :

Soient les hypothèses suivantes :

(H1) la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H2) Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$| f(t,u(t)) - f(t,v(t)) | \leqslant k \mid u(t) - v(t) |$$

pour chaque $t \in [0,1]$ et tous les $u, v \in C([0,1], R)$.

(H3) Il existe une constante $N > 0$, telle que :

$$| f(t,0) | \leqslant N, \quad \text{pour chaque} \quad t \in [0,1].$$

► Notre premier résultat dans ce travail est basé sur le principe de contraction de Banach .

Théorème II.2.1

Supposons que les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont vérifiés.

Si de plus

$$\frac{3}{2\Gamma(\alpha)} k \left(\frac{\beta}{| \beta\eta - 1 |} + 1 \right) < 1 \tag{II.6}$$

alors le problème (II.1) et (II.2) admet une solution unique sur [0,1].

Preuve.

On va transformer le problème (II.1) et (II.2) en un problème de point fixe.

T est bien défini, en effet :

$$\text{Si} \quad u \in C([0,1], \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad (Tu) \in C([0,1], \mathbb{R}).$$

Nous avons l'opérateur $T : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ donné par :

$$\begin{aligned} Tu(t) = & -\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\ & + \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ & + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Il est clair, d'après le Lemme (II.2.1) que les points fixes de l'opérateur T sont les solutions du problème (II.1)-(II.2). Il reste à montrer que T est une contraction , pour tous $u, v \in C([0,1],\mathbb{R}), t \in [0,1]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mid Tu(t)-Tv(t)\mid =\mid & -\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}f(s,u(s))ds \\
&+\frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds \\
&+\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}f(s,u(s))ds \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds \\
&+\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}f(s,v(s))ds \\
&-\frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-1}f(s,v(s))ds \\
&-\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}f(s,v(s))ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,v(s))ds\mid .
\end{aligned}$$

Par **(H2)**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mid Tu(t)-Tv(t)\mid \leqslant & \frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)\mid\beta\eta-1\mid}k\parallel u-v\parallel_\infty\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}ds \\
&+\frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\mid\beta\eta-1\mid}k\parallel u-v\parallel_\infty\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha-1}ds \\
&+\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)}k\parallel u-v\parallel_\infty\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}k\parallel u-v\parallel_\infty\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\mid Tu(t)-Tv(t)\mid \leqslant & \parallel u-v\parallel_\infty k\left[\frac{\beta}{2\Gamma(\alpha)\mid\beta\eta-1\mid}+\frac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)\mid\beta\eta-1\mid}\right] \\
&+\parallel u-v\parallel_\infty k\left[\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right] \\
&\leqslant\parallel u-v\parallel_\infty k\left[\frac{\beta}{2\Gamma(\alpha)\mid\beta\eta-1\mid}+\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)\mid\beta\eta-1\mid}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right] \\
&\leqslant\frac{3}{2\Gamma(\alpha)}k\left[\frac{\beta}{\mid\beta\eta-1\mid}+1\right]\parallel u-v\parallel_\infty
\end{aligned}$$

donc nous déduisons que

$$\| Tu - Tv \|_\infty \leqslant \frac{3}{2\Gamma(\alpha)} k \left[\frac{\beta}{\mid \beta\eta - 1 \mid} + 1 \right] \| u - v \|_\infty .$$

Enfin, grâce à (II.6) nous déduisons que T est une contraction.
D'après le principe de contraction de Banach, le problème (II.1) et (II.2) admet une solution unique sur $[0, 1]$.

■

▶ Maintenant nous donnons un résultat de l'existence et l'unicité basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème II.2.2
Supposons que les hypothèses **(H1)**,**(H2)** et **(H3)** sont satisfaites. Alors, le problème (II.1) et (II.2) admet une solution unique sur [0,1].

Nous utilisons le théorème de point fixe de Schaefer pour prouver que l'opérateur
$T : C([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ donnée par :

$$\begin{aligned} Tu(t) = & -\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s, u(s)) ds \\ & + \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \\ & + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s, u(s)) ds \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

admet un point fixe.

Preuve.
Nous divisons la preuve en quatre étapes :

Étape 1 : T est continue.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\mid Tu_n(t) - Tu(t) \mid =\mid & -\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u_n(s))ds \\
& + \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,u_n(s))ds \\
& + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u_n(s))ds \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u_n(s))ds \\
& + \frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
& - \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\
& - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \mid
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\mid Tu_n(t) - Tu(t) \mid \leqslant & \frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds \\
& + \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds \\
& + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds. \\
\leqslant & \frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} \parallel f(.,u_n(.)) - f(.,u(.)) \parallel_\infty \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} ds \\
& + \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \parallel f(.,u_n(.)) - f(.,u(.)) \parallel_\infty \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} ds \\
& + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \parallel f(.,u_n(.)) - f(.,u(.)) \parallel_\infty \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \parallel f(.,u_n(.)) - f(.,u(.)) \parallel_\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds. \\
\leqslant & [\frac{\beta\eta^2 t}{2(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} + \frac{\beta t}{\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \\
& + \frac{t^2}{2(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}] \parallel f(.,u_n(.)) - f(.,u(.)) \parallel_\infty .
\end{aligned}
$$

En utilisant **(H1)**, nous prouvons que $\parallel Tu_n - Tu \parallel_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

D'où la continuité de T sur $C([0,1],\mathbb{R})$.

Étape 2 : L'image de tout ensemble borné par T est un ensemble borné dans $C([0,1],\mathbb{R})$ soient $\rho > 0$ et $B_\rho = \{u \in C(J,\mathbb{R}), \| u \|_\infty < \rho\}$ pour $\| u \|_\infty = \sup\{| u(t) | : \quad t \in J\}$.
Pour tous $u \in B_\rho$, nous avons

$$\begin{aligned}
| Tu(t) | =& | -\frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
&+ \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\
&+ \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \,|, \quad (*)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
| f(s,u(s)) | &= | f(s,u(s)) - f(s,0) + f(s,0) | \\
&\leqslant | f(s,u(s)) - f(s,0) | + | f(s,0) | \\
&\leqslant k \mid u(s) \mid + N \\
&\leqslant k\rho + N. \quad (**)
\end{aligned}$$

En utilisant $(**)$ dans $(*)$, nous avons

$$\begin{aligned}
| Tu(t) | \leqslant& \frac{\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (k \mid u(s) \mid + N)ds \\
&+ \frac{\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} (k \mid u(s) \mid + N)ds \\
&+ \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (k \mid u(s) \mid + N)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} (k \mid u(s) \mid + N)ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
| Tu(t) | \leqslant& \frac{(k\rho+N)\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} ds \\
&+ \frac{(k\rho+N)\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \mid \beta\eta-1 \mid} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{(k\rho+N)t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} ds + \frac{(k\rho+N)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
\leqslant& \frac{(k\rho+N)\beta}{2\Gamma(\alpha) \mid \beta\eta-1 \mid} + \frac{(k\rho+N)\beta}{\Gamma(\alpha+1) \mid \beta\eta-1 \mid} + \frac{(k\rho+N)}{2\Gamma(\alpha)} + \frac{(k\rho+N)}{\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

$$| Tu(t) | \leqslant \frac{3(k\rho+N)}{2\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\beta}{| \beta\eta-1 |}+1\right). \tag{II.7}$$

Donc

$$\| Tu \|_\infty < \infty, \qquad \forall t \in [0,1] \qquad \Rightarrow \quad T \in T(B_\rho)$$

Par conséquent, $T(B_\rho)$ est bornée.

Étape 3 : L'image de tout borné par T est un ensemble équicontinu de $C([0,1],\mathbb{R})$.
Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$ et soit B_ρ un ensemble borné de $C([0,1],\mathbb{R})$.
Pour $u \in B_\rho$, on a :

$$\begin{aligned}
| Tu(t_1) - Tu(t_2) | \leqslant & \left| -\frac{\beta\eta^2 t_1}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \right. \\
& + \frac{\beta t_1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\
& + \frac{t_1^2}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\
& + \frac{\beta\eta^2 t_2}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
& - \frac{\beta t_2}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\
& - \frac{t_2^2}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
& \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \right| .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
| Tu(t_1) - Tu(t_2) | \leqslant & \frac{\beta\eta^2 | t_1-t_2 |}{2\Gamma(\alpha-1)(| \beta\eta-1 |)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} | f(s,u(s)) | ds \\
& + \frac{\beta | t_1-t_2 |}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(| \beta\eta-1 |)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} | f(s,u(s)) | ds \\
& + \frac{| t_1-t_2 | (t_1+t_2)}{2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} | f(s,u(s)) | ds \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} | f(s,u(s)) | ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} | f(s,u(s)) | ds.
\end{aligned}$$

Grâce à **(H3)** et $(**)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mid Tu(t_1) - Tu(t_2) \mid \leqslant & \frac{\beta\eta^2 \mid t_1 - t_2 \mid}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\mid \beta\eta - 1 \mid)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha-1}(k \mid u(s) \mid +N)ds \\
& + \frac{\beta \mid t_1 - t_2 \mid}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\mid \beta\eta - 1 \mid)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha-1}(k \mid u(s) \mid N)ds \\
& + \frac{\mid t_1 - t_2 \mid (t_1 + t_2)}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^{1} (1 - s)^{\alpha-2}(k \mid u(s) \mid +N)ds \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1}(k \mid u(s) \mid +N)ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}(k \mid u(s) \mid +N)ds
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\mid Tu(t_1) - Tu(t_2) \mid \leqslant & \frac{\beta\eta^2 \mid t_1 - t_2 \mid (k\rho + N)}{2\Gamma(\alpha)(\mid \beta\eta - 1 \mid)} \\
& + \frac{\beta \mid t_1 - t_2 \mid (k\rho + N)\eta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)(\mid \beta\eta - 1 \mid)} \\
& + \frac{\mid t_1 - t_2 \mid (t_1 + t_2)(k\rho + N)}{2\Gamma(\alpha)} \\
& + \frac{(k\rho + N)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha})
\end{aligned}
$$

quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où l'équi-continuté de T.

D'après **l'étape 2** et **l'étape 3** et le théorème d'Arzéla-Ascoli, $T(B_\rho)$ est relativement compact pour tout borné B_ρ. C-à-d T est complètement continu.

D'après **l'étape 1** , $T : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$ est continue et complètement continue.

Étape 4 : Soit $\omega = \{u \in C([0,1],\mathbb{R}) : u = \lambda T(u), 0 < \lambda < 1\}$. Nous montrons que ω est borné.

Soit $u \in \omega$, donc pour λ tq $0 < \lambda < 1$ et chaque $t \in [0,1]$ on a $u = \lambda T(u)$ donc

$$
\begin{aligned}
\mid u(t) \mid &= \lambda \mid Tu(t) \mid \\
&= \mid - \frac{\lambda\beta\eta^2 t}{2\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
&+ \frac{\lambda\beta t}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta\eta-1)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\
&+ \frac{\lambda t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))ds \\
&- \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \mid .
\end{aligned}
$$

Comme $0 < \lambda < 1, 0 \leqslant t \leqslant 1$ et $\eta \in (0,1)$ on déduit que

$$\begin{aligned}
\mid u(t) \mid \leqslant & \frac{\beta}{2\Gamma(\alpha-1)(\mid \beta\eta - 1 \mid)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mid f(s,u(s)) \mid ds \\
&+ \frac{\beta\eta}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\mid \beta\eta - 1 \mid)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u(s)) \mid ds \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mid f(s,u(s)) \mid ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u(s)) \mid ds.
\end{aligned}$$

Grâce à (II.7), nous obtenons

$$\mid u(t) \mid \leqslant \frac{3(\rho k + N)}{2\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\mid \beta\eta - 1 \mid} + 1 \right).$$

Cela montrons que ω est borné.
En conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, nous déduisons que T admet un point fixe qui est une solution unique du problème (II.1)-(II.2). ■

Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire au sens de Riemann-Liouville

Dans ce chapitre,nous étudions l'existence de solutions pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites.(voir [7])
Nos résultats sont basés sur l'application de deux théorèmes du point fixe :
• Le théorème du point fixe de Banach.
• Le théorème du point fixe de Krasnoselskii .

III.1 Présentation du problème

Nous considérons le problème aux limites suivant pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), t \in J = [0,1], 2 < \alpha < 3. & \text{(III.1)} \\ D_0^{\alpha-1}u(0) = 0, D_0^{\alpha-2}u(1) = 0, u(1) = 0. & \text{(III.2)} \end{cases}$$

Où D_0^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (a=0), $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.
Les résultats sont prouvés grace au principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Krasnoselskii sur un cône.

Habituellement, l'outil fondamental utilisé dans la littérature pour prouver l'existence de solutions positives pour les problème de valeurs limites pour les équations différentielles ordinaires et fractionnelles, équations aux différences est la théorie du point fixe (voir [[5],[3],[17],[14],[18]]).

Dans [4], M. Benchohra, J.Henderson, S.Ntouyas et A.Ouahab ont utilisé le théorème du point fixe de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour étudier l'existence de solutions pour les équations fonctionnelles et neutres fonctionnelles d'ordre fractionnaire avec retard infini :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant t < 1 \\ u(t) = \phi(t), \quad t \leqslant 0, \end{cases}$$

où $f : [0, 1) \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\phi \in B$ avec $\phi(0) = 0$, et B est l'espace de phase.

Dans [9] , D.Delbosco et L.Rodino ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions de certaines classes d'équations différentielles fractionnelles non linéaires de la forme :

$$D_0^s u(t) = f(t, u), \quad 0 < s < 1,$$

où $f : [0, a] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, 0 < \alpha \leqslant +\infty$,est une fonction continue donnée.
Dans ce travail,les auteurs ont utilisé le principe de contraction de Banach.
En utilisant un théorème de point fixe de krasnoselskii dans les cônes,El-Shahed dans [10] a prouvé l'existence et la non-existence de solutions positives pour le problème aux limites non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha} u(t) + \lambda a(t) f(u(t)) = 0, 0 < t < 1, 2 < \alpha \leqslant 3, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

Dans [25], A.Saadi et M.Benbachir ont obtenu des conditions suffisantes pour l'existence et la non-existence de solutions positives pour le problème aux limites fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha} u + a(t) f(u(t)) = 0, 0 < t < 1, 2 < \alpha \leqslant 3, \\ u(0) = u'(0) = 0, u'(1) - \updownarrow \delta u'(\eta) = \lambda, \end{cases}$$

où $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ et $a : (0, 1) \longrightarrow [0, \infty)$ sont des fonctions continues, $\eta \in (0, 1), \quad \delta \in [0, 1/\eta^{\alpha-2})$ et $\lambda \in [0, \infty)$ sont des constantes .

III.2 Existence de solution

Dans cette section on est concerné par l'existence des solutions du problème (III.1)-(III.2).

▶ On commence par donner la définition d'une solution du problème (III.1)-(III.2).

Définition III.2.1

On dit que la fonction $u \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution du problème (III.1) et (III.2), s'il existe un fonction $f \in L^1(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall t \in J$ telle que :

$$D_0^\alpha u(t) = f(t, u(t)). \quad \text{pour tout} \quad t \in J = [0,1], \quad 2 < \alpha < 3.$$

et la fonction u satisfait les conditions (III.2)

▶ Pour l'existence de la solution, on a besoin du lemme suivant :

Lemme III.2.1

Soit $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction u est une solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} D_0^\alpha u(t) = h(t), \quad t \in J = [0,1], 2 < \alpha < 3, & \text{(III.C)} \\ D_0^{\alpha-1} u(0) = 0, D_0^{\alpha-2} u(1) = 0, u(1) = 0. & \text{(III.D)} \end{cases}$$

si et seulement si c'est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-3}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) h(s) ds \\ - \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned}$$

Preuve.

Soit u une solution de problème (II.C)-(II.D) . En appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité (II.C),on aura :

$$\begin{aligned} (I^\alpha D_0^\alpha u)(t) &= I^\alpha h(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned} \qquad \text{(III.1)}$$

Et d'après lemme (I.4.5) et lemme (I.4.6) , on a :

$$I^\alpha D_0^\alpha u(t) = u(t) - c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} - \ldots - c_n t^{n-1}.$$

Puisque $\alpha \in]2, 3[$, donc $n = [\alpha] + 1 = 3$ alors on obtient :

$$(I^\alpha D_0^\alpha u)(t) = u(t) - c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} - c_3 t^{\alpha-3}. \tag{III.2}$$

Donc de (III.1) et (III.2), on a :

$$u(t) - c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} - c_3 t^{\alpha-3} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Alors, nous avons :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \tag{III.3}$$

Il reste a utiliser les conditions aux limites pour trouver les constants c_1, c_2, c_3.

• Pour c_1, en appliquant la dérivé $D^{\alpha-1}$ aux deux membres de l'égalité (III.3), on a :

$$D_0^{\alpha-1} u(t) = c_1 D_0^{\alpha-1} t^{\alpha-1} + c_2 D_0^{\alpha-1} t^{\alpha-2} + c_3 D_0^{\alpha-1} t^{\alpha-3} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t D_0^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Et d'après l'exemple (I.3.2), on a :

$$D_0^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha).$$

$$D_0^{\alpha-1} t^{\alpha-2} = 0.$$

$$D_0^{\alpha-1} t^{\alpha-3} = 0.$$

$$D_0^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha).$$

En remplaçant les valeurs dans la solution (III.3), on obtient :

$$D_0^{\alpha-1} u(t) = c_1 \Gamma(\alpha) + \int_0^t h(s) ds.$$

Et d'après la condition $D_0^{\alpha-1} u(0) = 0$, on a :

$$D_0^{\alpha-1} u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,$$

• Pour c_2, en appliquant la dérivé $D_0^{\alpha-2}$ aux deux membres de l'égalité (III.3), on aura :

$$\begin{aligned} D_0^{\alpha-2} u(t) = c_1 D_0^{\alpha-2} t^{\alpha-1} + c_2 D_0^{\alpha-2} t^{\alpha-2} + c_3 D_0^{\alpha-2} t^{\alpha-3} \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t D_0^{\alpha-2} (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned} \tag{III.4}$$

Pour $c_1 = 0$ et d'après l'exemple (I.3.2) , on a :

$$D_0^{\alpha-2} t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(2)} t.$$

$$D_0^{\alpha-2} t^{\alpha-2} = \Gamma(\alpha-1).$$

$$D_0^{\alpha-2} t^{\alpha-3} = D_0^{\alpha-2} t^{(\alpha-2)-1} = 0.$$

$$D_0^{\alpha-2} (t-s)^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2)} (t-s).$$

En remplaçons dans, on obtient :

$$D_0^{\alpha-2} u(1) = c_2 \Gamma(\alpha-1) + \int_0^t (t-s) h(s) ds.$$

Pour t=1, on a :

$$D_0^{\alpha-2} u(1) = c_2 \Gamma(\alpha-1) + \int_0^1 (1-s) h(s) ds.$$

Alors

$$c_2 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) h(s) ds.$$

• Pour c_3, en remplaçant $(t = 0)$ dans la solution (III.3)avec $(c_1 = 0)$, on aura :

$$u(1) = c_2 + c_3 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

d'où

$$u(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(\alpha-1)(1-s) - (1-s)^{\alpha-1}] h(s) ds.$$

En remplaçant les valeurs de c_2 et c_3 dans (III.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds &+ \frac{t^{\alpha-3}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) h(s) ds \\ &- \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \end{aligned}$$

qui est la solution de problème (III.C)-(III.D).

Inversement, si u est une solution de problème (III.C)-(III.D) , on a :

$$u(t) = I^{\alpha}h(t) + \frac{t^{\alpha-3}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}I^2h(1) - t^{\alpha-3}I^{\alpha}h(1)$$

et par conséquent

$$D^{\alpha}u(t) = h(t), D^{\alpha-1}u(0) = I^1h(0) = 0.$$

$$D^{\alpha-2}u(1) = I^2h(1) - I^2h(1) = 0 \quad \text{et} \quad u(1) = I^{\alpha}h(1) - I^{\alpha}h(1) = 0$$

et donc u est une solution de problème (III.C) et (III.D).

Dans cette section, on donne les conditions suffisantes d'existence de la solution du problème (III.1) et (III.2).

Hypothèses :

Soient les hypothèses suivantes :

(H1) la fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ être une fonction continue.

(H2) Il existe une constant $k > 0$ tq :

$$\mid f(t,u) - f(t,v) \mid < k \mid u - v \mid, \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad \forall t \in J.$$

(H3) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\mid f(t,u) \mid \leqslant \beta, \quad \forall t \in J, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Théorème III.2.1

Supposons que **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées. Si de plus

$$k\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right) < 1. \qquad \text{(III.5)}$$

alors le problème (III.1) et (III.2) admet une solution unique sur J.

Preuve.

Nous transformons le problème (III.1) et (III.2) en un problème de point fixe.

Pour cela, considérons l'opérateur $T : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ définit par :

$$\begin{aligned} Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds &+ \frac{t^{\alpha-3}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) f(s,u(s))ds \\ &- \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

- T est bien défini, car

$$\text{Si} \quad u \in C(J,\mathbb{R}), \quad \text{alors} \quad (Tu) \in C(J,\mathbb{R}).$$

Il est clair, d'après le lemme (III.2.1) que les point fixe de l'opérateur T sont les solutions de problème (III.1)-(III.2).

Maintenant, d'après le théorème de contraction de Banach , il suffit de prouver que T est une contraction .

Soit $u \in C(J,\mathbb{R})$ et $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mid Tu_1(t) - Tu_2(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \mid ds \\ &+ \frac{t^{\alpha-3}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) \mid f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \mid ds \\ &+ \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \mid ds \\ &\leqslant \frac{k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty \frac{t^{\alpha-3}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) ds \\ &+ k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leqslant \frac{k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} t^\alpha + \frac{k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty t^{\alpha-3}(1-t)}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty t^{\alpha-3}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\ &\leqslant \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \right) k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty \end{aligned}$$

donc, nous déduisons que :

$$\parallel Tu_1 - Tu_2 \parallel_\infty \leqslant \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \right) k \parallel u_1 - u_2 \parallel_\infty .$$

En vertu de (III.5), on déduit que T est une Contraction .

Du théorème de Banach, T admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème (III.1) et (III.2).

$\blacksquare$

Maintenant, nous donnons un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème III.2.2
Supposons que **(H1)** , **(H2)** et **(H3)** sont satisfaites . S'il existe $\delta > 0$ telle que :

$$\beta\frac{\alpha^2-\alpha+2}{\Gamma(\alpha+1)} \leqslant \delta, \tag{III.6}$$

alors le problème (III.1) et (III.2) admet au moins une solution sur J.

Preuve.
La démonstration est basée sur le théorème (I.5.3) .

Pour $u \in C(J,\mathbb{R})$ et $t \in J = [0,1]$,

$$T_1u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds + \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)f(s,u(s))ds. \tag{III.7}$$

et

$$T_2u(t) = -\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)f(s,u(s))ds - \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds. \tag{III.8}$$

La preuve se fait en quatre s'étapes :

Étape 1 : On montre que $T_1u_1 + T_2u_2 \in B_\delta, \forall u_1, u_2 \in B_\delta$.

Soit $B_\delta = \{u \in C(J,\mathbb{R}), \delta > 0 : \| u \|_\infty \leqslant \delta\}$,nous allons prouver que $T_1u_1 + T_2u_2 \in B_\delta$, pour tout $u_1, u_2 \in B_\delta$.

$\forall u_1, u_2 \in B_\delta$ et $\forall t \in J = [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mid T_1u_1(t) - T_2u_2(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u_1(s)) \mid ds \\
&+ \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) \mid f(s,u_1(s)) \mid ds \\
&+ \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) \mid f(s,u_2(s)) \mid ds \\
&+ \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u_2(s)) \mid ds. \\
&\leqslant \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{\beta}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) ds \\
&+ \frac{\beta}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) ds + \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds, \\
&\leqslant \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \alpha - 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \\
&\leqslant \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

par la condition (III.6), on déduit que

$$\| T_1u_1 - T_2u_2 \|_\infty \leqslant \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha} \right) \leqslant \delta,$$

c'est à dire $T_1u_1 + T_2u_2 \in B_\delta$.

Étape 2 : On montre que T_1 est une contraction.
Soit $u_1, u_2 \in C(J, \mathbb{R})$ et $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mid T_1u_1(t) - T_1u_2(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \mid ds \\
&+ \frac{t^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) \mid f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \mid ds. \\
&\leqslant \frac{k \| u_1 - u_2 \|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ t^{\alpha-3} \frac{k \| u_1 - u_2 \|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) ds. \\
&\leqslant \frac{k \| u_1 - u_2 \|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + t^{\alpha-3} \frac{k \| u_1 - u_2 \|_\infty}{2\Gamma(\alpha-1)} \\
&\leqslant k \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \right) \| u_1 - u_2 \|_\infty .
\end{aligned}$$

donc, nous déduisons que

$$\| T_1u_1 - T_1u_2 \|_\infty \leqslant k \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} \right) \| u_1 - u_2 \|_\infty .$$

En utilisant la condition (III.5), nous concluons que T_1 est une contraction.

Étape 3 : On montre que T_2 est continue.
Soit $(u_n)_n$ une suite dans $C(J,\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\| \, . \, \|_\infty$ vers une limite u, c'est-à-dire $\lim_{n\longrightarrow\infty} \| u_n - u \|_\infty = 0$. pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mid T_2u_n(t) - T_2u(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left[\int_0^1 \left((1-s) - (1-s)^{\alpha-1} \right) \mid f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)) \mid ds \right] \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} k \| u_n - u \|_\infty \int_0^1 \left((1-s) - (1-s)^{\alpha-1} \right) \\ &\leqslant \frac{\alpha-2}{2\alpha\Gamma(\alpha-1)} k \| u_n - u \|_\infty . \end{aligned}$$

Puisque u est continue , alors :

$$\| T_2u_n - T_2u \|_\infty \leqslant \frac{\alpha-2}{2\alpha\Gamma(\alpha-1)} k \| u_n - u \|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

d'ou la continuité de T_2.
Étape 4 : On montre que T_2 est compacte.

Étape 4.1 : Il est suffisant de prouver que pour chaque sous-ensemble borné B_δ de $C(J,\mathbb{R})$, nous prouvons que $T_2(B_\delta)$ est un sous ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$..

soit $u \in B_\delta$ est $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mid T_2u(t) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) \mid f(s,u(s)) \mid ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u(s)) \mid ds \\ &\leqslant \frac{\beta}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) ds + \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \\ &\leqslant \beta \left(\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right), \end{aligned}$$

nous déduisons que :

$$\| T_2u \|_\infty \leqslant \beta \left(\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) = cst \Rightarrow T_2 \in B_\delta$$

et par suite $T_2(B_\delta)$ est bornée.

Étape 4.2 : Nous prouvons que $T_2(B_\delta)$ est équicontinu.
Soit $u \in B_\delta$ et $t_1, t_2 \in J$, tels que $(t_1 < t_2)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mid T_2u(t_2) - T_2u(t_1) \mid &\leqslant \frac{t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) \mid f(s,u(s)) \mid ds \\
&+ \frac{t_2^{\alpha-3} - t_1^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mid f(s,u(s)) \mid ds \\
&\leqslant \beta \frac{t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s) ds \\
&+ \beta \frac{t_2^{\alpha-3} - t_1^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leqslant \beta \frac{t_2^{\alpha-2} - t_1^{\alpha-2}}{2\Gamma(\alpha-1)} + \beta \frac{t_2^{\alpha-3} - t_1^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

quand $t_1 \to t_2$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où l'équicontinuté de T_2.
D'après l'étape 4.1 et l'étape 4.2 et le théorème d'Arzéla-Ascoli $T_2(B_\delta)$ est relativement compact .
Enfin, d'après les étapes $(1, 2, 3, 4)$ et comme une conséquence du théorème (I.5.3) , nous
en déduisons que $T_1 + T_2$ admet au mois un point fixe, qui est une solution du problème (III.1) et (III.2). ■

III.3 Exemple

Soit $f : [0,1] \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(t,x) = \frac{x}{3e^t + 2}, \quad (t,x) \in [0,1] \times [0, \infty). \tag{III.9}$$

Pour $t \in [0,1]$ et $x \geqslant 0$, nous avons :

$$\mid f(t,x) - f(t,y) \mid = \frac{1}{3e^t + 2} \mid x - y \mid \leqslant \frac{1}{5} \mid x - y \mid$$

Ce qui prouve que f satisfait **(H1)** et **(H2)** du théorème (III.2.1).
Pour appliquer le théorème (III.2.1), on vérifie que

$$\frac{1}{5}\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right) < 1,$$

ce qui est le cas puisque nous avons :
▷ Pour $\alpha = \frac{14}{5}$,nous obtenant

$$\frac{1}{5}\left(\frac{2}{\Gamma(\frac{19}{5})} + \frac{1}{2\Gamma(\frac{9}{5})}\right) = 0.19258 < 1,$$

et pour $\alpha = \frac{7}{3}$, nous obtenons

$$\frac{1}{5}\left(\frac{2}{\Gamma(\frac{10}{5})} + \frac{1}{2\Gamma(\frac{4}{3})}\right) = 0.51198 < 1.$$

En conclusion, par le théorème (III.2.1), le problème (III.1) et (III.2) admet une solution unique.

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire on a appliqué la dérivation fractionnaire à l'étude de deux problèmes différentiels fractionnaires non linéaires avec des conditions aux limites.

On a rappelé quelques notions des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo et quelques outils de base du calcul fractionnaire avec quelques propriétés.

On a présenté aussi quelques résultats d'existence des solutions d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans le cas où $\alpha \in]2,3]$.

Les résultats d'existence et d'unicité sont prouvés en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Schaefer et Kranoselskii.

Bibliographie

[1] ABBAS, S. BENCHOHRA, M., AND G.M.N'GUÉRÉKATA. *Topics in Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2012.

[2] BAI, Z., AND LU, H. *Positive solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation,*. No. 311. J. Math. Anal. Appl, 2005.

[3] BALEANU, D. DIETHELM, K. S. E., AND TRUJILLO, J. J. *Fractional Calculus Models and Numerical Methods,*. World Scientific Publishing, New York, 2012.

[4] BENCHOHRA, M. HENDERSON, J. N., AND OUAHAB, A. *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*. No. 338. Math. J. Anal. Appl, 2008.

[5] BENCHOHRA, M. HAMANI, S., AND NTOUYAS, S. *Boundary value problems for differential equations with fractional order*. No. 3. Surveys in Math and its Appl, 2008.

[6] BENLABBES, A. BENBACHIR, M., AND LAKRIB, M. *Existence solutions of a nonlinear fractional differential equation*. 1–12, pp.

[7] BENLABBES, A. BENBACHIR, M., AND LAKRIB, M. *Boundary value problems for nonlinear fractional differential equations*, vol. 30. Facta Univ.(Nis), Ser. Mth. Inform, 2015.

[8] CAMPBELL, R. *Les intégrales eulériennes et leurs applications : étude approfondie de la fonction gamma*. Dunod, 1966.

[9] DELBOSCO, D., AND RODINO, L. *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation*. J. Math. Anal. Appl, 1996.

[10] EL-SHAHED, M. *Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations*, vol. 2007. Abst. Appl. Anal, 2007.

[11] GRANAS, A., AND DUGUNDJI, J. *Fixed Point Theory*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[12] HALE, J., AND VERDUYN LUNEL, S. *Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences*. No. 99. Springer-Verlag, New York, 1993.

[13] KHAMSI, M., AND KIRK, W. *An introduction to métric spaces and fixed-point theory*, vol. 53. Jhon Wiley & Sons, Canada, 2001.

[14] KILBAS, A., SRIVASTAVA, H. M., AND TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204. Elsevier science B. V., Amsterdam, 2006.

[15] KILBAS, A. A., AND TRUJILLO, J. J. *Differential equation of fractional order : methods, result and problems I*. No. 78. Appl. Anal, 2001.

[16] KILBAS, A. A., M. O., AND SAMKO, S. G. *fractional integral and derivatives (theory and application).Gordon and Breach*. 1993.

[17] KILBAS, A. A., S. H. M., AND TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. 2006.

[18] LAKSHMIKANTHAM, V. LEELA, S., AND VASUNDHARA, J. *Theory of Fractional Dynamic Systems*. Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.

[19] LANG, S. *Real and functional analysis*, vol. 142. Springer-Verlag, New york, 1993.

[20] MICHEL, W. *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini, Paris, 2000.

[21] OLDHAM, K. B., AND SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, vol. 111. Elsevier, 1974.

[22] PODLUBNY, I. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198. Elsevier, 1998.

[23] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations* . Academic Press, San Diego, 1999.

[24] QIN, T., AND BAI, Z. *Existence of positive solution for singular fractional differential equations*. EJDE.

[25] SAADI, A., AND BENBACHIR, M. *Positive solutions for three-point nonlinear fractional boundary value problems*. No. 3. E. J. Qual. Theory Diff.Equ., 2011.

[26] SMART, D. *Fixed Point Theorems*, vol. 66. Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics, 1980.

[27] ZEIDLER, E. *Nonlinear functional analysis and its applications I, fixed-point theorems*, vol. 1. Springer-Verlag, New York, 1985.

[28] ZHANG, S. *Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation*, vol. 2006. EJDE.

[29] ZHANG, S. *The existence of a positive solution for nonlinear fractional differential equation*. No. 252. J. Math. Anal. Appl, 2000.

[30] ZHANG, S. *Existence of a positive solution for some class of nonlinear fractional differential equation*. No. 278. J. Math. Anal. Appl, 2003.

[31] ZHANG, S. *Existence of solutions for a boundary value problem of fractional order*, vol. 26. Acta Math. Scientia, 2006.

[32] ZHANG, S. *Psitive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional diffrential equations*. No. 36. Electron, J. Diff. Equ, 2006.

Résumé

Le concept de la dérivation fractionnaire a beaucoup d'applications.

Il intervient dans la résolution de plusieurs problèmes fractionnaires non linéaires, en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.
Dans ce mémoire on aborde différentes applications de tout notion ainsi que quelques unes de ses extensions et généralisations qui entrent dans la résolution des problèmes différentiels fractionnaires non linéaires .Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions en utilisant le principe de contraction de Banach et les théorèmes du point fixe de Schaefer et Kranoselskii.

Mots-clés: Equation différentielle fractionnaire non linéaire, problème aux limites,dérivée fractionnaire de Riemann, dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov, intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville,théorie du point fixe.

Abstract

The principle of fractional derivation has many applications. It intervenes in the resolution of several nonlinear fractional problems in particular, in the study of existence and uniqueness.
This paper discusses different appliquations of this principle as well as some of its extensions and generalizations that involve in the resolution of nonlinear fractional differential problems.We demonstrate the existence and uniqueness of solutions using the principle of Banach contactions and the fixed point theorems of Schaefer and Kranoselskii.

Keywords: Nonlinear fractional differential equation,boundary condition problem, Riemann fractional derivative,Caputo fractional derivative,fractional derivative of Grunwald-Letnikov,fractional integral of Riemann-Liouville, fixed-point theory.