République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

Benarbia Rahmouna

Les équations différentielles semi linéaires avec retard à domaine non dense

---

Encadreur :

Mme Mekhalfi Kheira

Maitre Conférence "A" à C.U.A.T.

Soutenu le 22/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	Mr Boukhari Boumediene (MAA)	C.U.A.T
Examinateurs :	Mr Mami Toufik (MCA)	C.U.A.T
Encadreur :	Mme Mekhalfi Kheira (MCA)	C.U.A.T.

Année Universitaire : 2019 – 2020

Dédicaces

Avec tout l'amour sur terre et chaque souffle d'air dans le ciel, j'offre tout ce qui

est dans mon cœur, à ma mère et je prie Dieu de te guérir.

Je dédie ce mémoire à mes filles Lamisse et Malek la prunelle de mes yeux , mes frères

et sœurs ainsi qu'à leur époux.

A mon neveu Mohamed et ma nièce Rimess.

A Mr Boulenoire qui m'a encouragé à poursuivre mes études malgré la longue interruption.

Remerciements

Je tiens à remercier tout premièrement ALLAH le tout puissant pour la volonté, la

santé et la patience afin de mener à bien ce travail.

Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur Mme

Mekhalfi Kheira pour ses conseils, ses encouragement.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury Boukhari Boumediene, MAMI Toufik,

pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercie monsieur BENIANI Abdrahmen pour ses efforts .

Également, un remerciement à touts mes collègues pour les bons moments qui

nous avons passé ensemble.

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles sont apparues Historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie.
Une théorie classique dans la modélisations mathématique d'une transformation physique est de supposer que le comportement futur du système peut être résumé, dans le cadre déterministe, par son seul présent, sans dépendre de son évolution antérieure. Cette supposition conduit à une modélisation sous forme de système d'équation différentielles ordinaires. Mais il existe de nombreux cas où cette théorie est mise en imperfection, et il est alors nécessaire de prendre en compte d'autre phénomènes, ce qui entraine alors pour l'analyse du système un surcroit de complexité. L'une de ces causes est le phénomène de retard ou d'hérédité qui caractérise l'influence que l'état d'un processus exerce sur son comportement au moment actuel. Ainsi, les systèmes imposés présentant des retards non négligeables ne peuvent plus être formulés mathématiquement sous forme de systèmes différentiels ordinaires, mais ils sont décrits par des équations héréditaires dont la dimension théorique devient infinie.
Les équations différentielles semi linéaires à retard surviennent dans la formulation de nombreux phénomènes dynamiques où certains effets ne sont pas instantanés, mais interviennent avec retard, autrement dit lorsque l'état à un instant donné est une fonction de son passé.
On peut les rencontrer dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie,.....etc. La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différente : le temps de gestation en biologie, le temps de réaction en conduite automobile, la période d'incubation d'une maladie contagieuse, le temps d'accumulation,....etc.

On trouve ainsi dans la théorie des ces équations différentielles semi linéaire à retard un moyen plus réaliste que dans les équations différentielles ordinaires.
A partir des années (50) la théorie des équations à retard a connu un grand développement, notamment on trouve Belman et Cooke(1963) ; Hale (1977).

Dans ce mémoire on s'intéressera aux équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires avec retard à domaine non dense et plus précisément aux résultats d'existence et d'unicité de solutions.
Ces résultats sont basés sur la théorie des semi-groupes et sur l'argument du point fixe.
Le mémoire est organisé de la façon suivante :
Le premier chapitre est consacré aux notations et définitions, théorie de C_0 semi-groupe et semi-groupe intégré, quelque théorèmes de point fixe et des exemples sur les opérateurs à domaine non dense et les modèles d'équations à retard.

Le deuxième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour des équations différentielles semi-linéaires à retard fini :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) & = & \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in J = [0, b], \\ x(t) & = & \varphi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Où $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un opérateur linéaire a domaine non dense, satisfait la condition de Hille-Yosida génère un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach, $f : J \times C \to \mathcal{E}$ est une fonction continue. $\varphi : [-r, 0] \to \mathcal{E}$ est une fonction continue donnée et x_t l'élément de $C([-r, 0], \mathcal{E})$ défini par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0],$$

Le troisième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour des équations différentielles semi-linéaires à retard infini :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) &= \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in [0, b], \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

où $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un opérateur linéaire fermé à domaine non dense dans $\mathcal{E}$, et satisfait la condition de Hille-Yosida génère un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. φ est dans un espace de phase $\mathcal{B}$, f est une fonction défini de $[0, b] \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$ et x_t représente une fonction définie de $(-\infty, 0]$ dans $\mathcal{E}$ par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad \textit{pour } \theta \in (-\infty, 0].$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette section, nous allons exposer l'ensemble de toute les notions de base utilisées dans notre travail, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux.

1.1 Notation et Définitions

Les notions suivantes serons utilisées dans tout ce qui va suivre. Soit $J = [0, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(\mathcal{E}, \|.\|)$ un espace de Banach.

$C(J, \mathcal{E})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J à valeur dans $\mathcal{E}$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup \{|u(t)| : t \in J\}$$

Pour $\psi \in C([-r, b], \mathcal{E})$, la norme de ψ est définie par

$$\|\psi\|_{\mathfrak{D}} = sup \{|\psi(\theta)|, \theta \in [-r, b]\}.$$

Supposons que $r > 0$ est un nombre réel donné.

$C([-r, 0], \mathcal{E})$ désigne l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ muni de la topologie de la convergence uniforme avec la norme

$$\|\varphi\|_C = sup \{|\varphi(\theta)|, -r \leq \theta \leq 0\}.$$

Et nous allons utiliser tout simplement C pour $C([-r,0],\mathcal{E})$.
$\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés définis de $\mathcal{E}$ à valeur dans $\mathcal{E}$ muni de la norme

$$\|H\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \sup\{|H(u)| : |u| = 1\}$$

Définition 1.1.1. *[21] Une fonction mesurable $u : J \to \mathcal{E}$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si $\|u\|$ est intégrable au sens de Lebesgue.*
$L^1(J,\mathcal{E})$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \to \mathcal{E}$ qui sont Bochner intégrables, muni de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^b |u(s)|\, ds$$

Définition 1.1.2. ***(La convergence dominée de Lebesgue [3])**. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $L^1(J,\mathbb{R}^n)$ converge presque partout (p.p) vers f.*
Supposons qu'il existe une fonction positive $g \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad p.p \quad \forall x \in J$$

Alors la fonction f est intégrable et on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^b f_n(x)dx = \int_0^b f(x)dx.$$

Définition 1.1.3. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach et l'opérateur $H : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. On dit que l'opérateur H est complètement continu si :*

1. *H est continu.*

   et

2. *H transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact .*

Proposition 1.1.1. *Soit $C(J,\mathcal{E})$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M} \subset C(J,\mathcal{E})$.*
$\mathcal{M}$ est relativement compact si est seulement si

1. *$\mathcal{M}$ est borné i.e $\exists b \geqslant 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant b, \forall f \in \mathcal{M}$,*

2. $\mathcal{M}$ *est équicontinu i.e*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in J : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{M},$$

3. $\forall x \in J, \{f(x) : f \in M\}$ *est relativement compact dans* $\mathcal{E}$.

Théorème 1.1.1. *(**Arzelà-Ascoli** [7] [23]) Soit F une famille des fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathcal{E}$. Alors F est relativement compact (pré-compact) dans $C([a, b], \mathcal{E})$ si F est équicontinue et uniformément bornée.*

1.2 Théorie des semi-groupes

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu de la théorie des semi-groupes (C_0 semi-groupes et semi-groupe intégré) qui est très important dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires avec retard. Pour plus détails peuvent être trouvés dans les revus :([6], [8], [20])
nous commençons par :

1.2.1 C_0 semi-groupe

Définition 1.2.1. *Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaire bornés sur $\mathcal{E}$ est dite C_0 semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) si :*

1. $T(0) = I$ *(où I est l'opérateur identité de $\mathcal{E}$);*
2. $T(t + s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geqslant 0$;
3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in \mathcal{E}.$

Proposition 1.2.1. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe, alors il existe $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe exponentiellement borné, et on note par SG(M,ω) l'ensemble des C_0 semi-groupe exponentiellement borné. En particulier :

a) Les C_0 semi-groupes ***bornés*** *i.e*

$$\|T(t)\| \leqslant M, \quad \forall t \geqslant 0.$$

b) Les C_0 semi-groupes de ***contractions*** *i.e*

$$\|T(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Définition 1.2.2. *On appelle* ***générateur infinitésimal*** *d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur $\mathcal{A}$ linéaire défini sur l'ensemble :*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathcal{E} / \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } \mathcal{E} \right\}.$$

par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \ \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Proposition 1.2.2. *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et $\mathcal{A}$ Son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et on a l'égalité :*

$$T(t)\mathcal{A}x = \mathcal{A}T(t)x, \quad \forall t \geqslant 0$$

Proposition 1.2.3. *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,\omega)$ et $\mathcal{A}$ son générateur infinitésimal. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} T(.)x: & [0,+\infty) & \to & \mathcal{E} \\ & t & \to & T(t)x \end{array}$$

est dérivable sur $[0,+\infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x = \mathcal{A}T(t)x, \quad \forall t \geqslant 0$$

Proposition 1.2.4. *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

Quelque soit $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$.

Définition 1.2.3. *Pour un opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, on note par*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda I - \mathcal{A} \text{ est inversible dans } \quad \mathcal{B}(\mathcal{E})\}$$

l'ensemble résolvante de $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, et par

$$\begin{array}{rccl} R(.,\mathcal{A}) : & \rho(\mathcal{A}) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{E}) \\ & \lambda & \to & R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \end{array}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$

Théorème 1.2.1. *(Hille Yosida) un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur $\mathcal{E}$ vérifiant*
$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ avec $\omega \geqslant 0$, $M \geqslant 1$ si et seulement si :

1. *$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ un opérateur fermé .*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$ on a $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leqslant \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1.2.2 Semi groupe intégré

Définition 1.2.4. *[1] on appelle semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}$ une famille $\{S(t)\}_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriété suivantes :*

i) *S(0)=0*

ii) *L'application : $t \to S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est fortement continue $\forall t \geqslant 0$.*

iii) *$\forall t, s \geqslant 0$ on a :*

$$S(t)S(s) = \int_0^t [S(r+s) - S(r)]dr$$

Proposition 1.2.5. *Soit $\{S(T)\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe intégré, alors $\forall t, s \geqslant 0$, on a :*

1. *$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)$*
2. *$S(t)S(s) = S(s)S(t)$*

Définition 1.2.5. *On appelle espace **dégénéré** du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ l'ensemble :*

$$N = \{x \in \mathcal{E} / S(t)x = 0, \quad \forall t \geqslant 0\}$$

Définition 1.2.6. *On dit que le semi-groupe intégré est non dégénéré si* $N = \{0\}$*. Dans le cas contraire, on dit que* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *est un semi-groupe intégré dégénéré.*

Remarque 1.2.1. *Le semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *est non dégénéré si :*

$$\forall t \geqslant 0 : \quad S(t)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Proposition 1.2.6. *Un semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$*est non-dégénéré si et seulement si on a :* $S'(0)x = x$ *;* $\forall x \in \mathcal{E}$

Définition 1.2.7. *[1] On appelle générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *l'opérateur linéaire* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$ *définit par* $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{A}x = y$ *si et seulement si :*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \text{on a} \quad S(t)x - tx = \int_0^t S(r)ydr$$

On voit que $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{A}x = y$ *si et seulement si :*

$$S'(t)x - x = S(t)y \quad \forall t \geq 0$$

Proposition 1.2.7. *[1] Soit* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$*. Alors* $\forall x \in C^1$ *, on a :*

$$S'(t)x = \mathcal{A}S(t)x + x \quad \forall t \geqslant 0$$

De plus $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *:*

$$S(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x \quad \forall t \geqslant 0$$

et $\quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall t \geqslant 0$

$$\int_0^t S(s)xds \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\int_0^t S(s)xds = S(t)x - tx$$

Définition 1.2.8. *[1] On dit que le semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ *est exponentiel-*

lement borné, s'il existe $M \geqslant 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \quad \forall t \geqslant 0,$$

Si $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe intégré exponentiellement borné, Alors le transformé de Laplace $R(\lambda) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt$ existe, pour $\mathcal{R}e(\lambda) > \omega$.
$R(\lambda)$ est injective si et seulement si $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est non dégénéré, $R(\lambda)$ satisfait l'expression :

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu).$$

Théorème 1.2.2. *[1] Soient $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé et $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ une famille fortement continue et $\exists M > 0, \omega \in \mathbb{R}$ tel que*
$\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0$ et l'espace non dégénéré $N = \{0\}$
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe intégré non dégénéré exponentiellement borné pour le générateur $\mathcal{A}$.*
2. *$[\omega, +\infty) \subset \rho(\mathcal{A})$ et $\forall \ \mathcal{R}e\lambda > \omega$, on a : $R(\lambda, \mathcal{A}) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt$*

Remarque 1.2.2. *Si l'opérateur $\mathcal{A}$ est un générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} - \lambda I$ est le générateur du semi-groupe intégré $(S_\lambda(t))_{t\geq 0}$ étant donné par*

$$S_\lambda(t) = e^{-\lambda t}S(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s}S(s)ds.$$

Théorème 1.2.3. *Soit $\{S(T)\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe intégré non dégénéré. Alors $\{S'(T)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.*

Remarque 1.2.3. *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur de Hille-Yosida et $(S(t))_{t\geq 0}$, un semi- groupe intégré continu localement lipschitzienne généré par $\mathcal{A}$. Alors la dérivée $(S'(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe généré par la partie $\mathcal{A}_0$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ dans $\overline{D(A)}$, qui est défini par :*

$$D(\mathcal{A}_0) = \{x \in D(\mathcal{A}) : \mathcal{A}x \in \overline{D(A)}\},$$

$$\mathcal{A}_0 x = \mathcal{A}x \quad \text{pour } x \in D(\mathcal{A}_0).$$

Définition 1.2.9. *[16] Un semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est dite localement lipschitzienne si :*

$\forall \tau > 0, \exists L(\tau) > 0$ *tel que :* $\|S(t) - S(s)\| \leqslant L(\tau)\,|t-s|$ *, pour tout* $t, s \in [0, \tau]$.

Définition 1.2.10. *[15] On dit que l'opérateur linéaire* $\mathcal{A}$ *satisfait la condition de Hille-Yosida (HY) s'il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tels que* $[\omega, +\infty) \subset \rho(\mathcal{A})$ *et*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Le théorème suivant montre que la condition de Hille-Yosida caractérise les générateurs de semi-groupes intégrés continus localement lipschitziens.

Théorème 1.2.4. *[16] Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{A}$ *est le générateur d'un semi-groupe intégré continu et localement lipschitzien.*
2. $\mathcal{A}$ *satisfait la condition de Hille-Yosida (HY).*

1.3 Théorèmes du point fixe

Dans cette section nous présentons quelques théorèmes de point fixe qui sont utilisés dans la suite pour montrer l'existence et l'unicité de solution intégrale.

Théorème 1.3.1. ***Contraction de Banach*** *[14] [26]*
Soit X *un espace de Banach et* $f : X \to X$ *une contraction alors* f *a un unique point fixe.*

Théorème 1.3.2. ***Leray-schauder****[26]*
Soit $\mathcal{E}$ *un espace de Banach et* $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ *convexe avec* $0 \in \mathcal{U}$*, et soit* $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est un opérateur complètement continue , alors ou bien :*

1. F *a un point fixe .*

   ou bien
2. *l'ensemble* $\xi = \{x \in \mathcal{U}, x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1\}$ *est non borné.*

Théorème 1.3.3. ***Schauder*** *[19]*
Soient $\mathcal{E}$ *un espace de Banach et* C *un convexe compact.*
Si T *est une application continue de* C *dans* C *telle que :* $T(C)$ *soit relativement compact alors* T *a un point fixe.*

1.4 Quelques exemples d'opérateurs à domaines non dense

Dans cette section, nous allons présenter des exemples d'opérateurs linéaires à domaines non denses satisfaisant la condition de Hille-Yosida. Plus de détails peuvent être trouvés dans l'article de Da Prato et Sinstrari [7]

Exemple 1.4.1. *Soit* $\mathcal{E} = C([0,1],\mathbb{R})$ *et l'opérateur* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$ *défini par* $\mathcal{A}y = y'$, *où*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ y \in C^1([0,1],\mathbb{R}); y(0) = 0 \right\}.$$

Alors

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \{ y \in C([0,1],\mathbb{R}); y(0) = 0 \} \neq \mathcal{E}.$$

Exemple 1.4.2. *Soit* $\mathcal{E} = C([0,1],\mathbb{R})$ *et l'opérateur* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$ *défini par* $\mathcal{A}y = y''$, *où*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ y \in C^2([0,1],\mathbb{R}); y(0) = y(1) = 0 \right\}$$

Alors

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \{ y \in C([0,1],\mathbb{R}); y(0) = y(1) = 0 \} \neq \mathcal{E}.$$

Exemple 1.4.3. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert borné avec* Γ *la frontière régulière et* $\mathcal{E} = C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ *et l'opérateur* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$ *défini par* $\mathcal{A}y = \Delta y$, *où*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ C(\overline{\Omega},\mathbb{R}); y = 0 \ sur \ \Gamma; \Delta y \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}) \right\}.$$

Ici Δ *est Laplacien au sens des distribution sur* Ω. *Dans ce cas nous avons*

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \left\{ y \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}); y = 0 \ sur \ \Gamma \right\} \neq \mathcal{E}.$$

1.5 Quelques modèles d'équations à retard

On vient de voir que les équations à retard sont des équations différentielles dans lesquelles la dérivée à un moment t dépend de la fonction (et de la dérivée dans le cas des équations neutre) à des moments antérieurs $t - \tau, \tau \in \mathbb{R}$. Autrement dit ces

équations tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du future, pour plus de détails voir ([15] [11] [24] [3] [2]) . Les systèmes d'équations différentielles à retard occupent désormais une place de première importance dans tous les domaines de la science, en particulier dans la modélisation des phénomènes biologiques.
On a choisi dans cette section quelques modèles intervenant dans des domaines différents monde réel.

1.5.1 Un modèle en logistique

Le premier modèle de développement démographique est introduit par Malthus

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(t), \quad \lambda > 0 \text{ (équation Malthus)}$$

Il traduit l'accroissement exponentiel d'une population au cours du temps. Dans sa simplicité, il oublie en particulier que de nombreuses populations ont un plafond démographique imposé par les contraintes extérieures comme l'espace, les ressources, ect.....Pour remédier à ce problème, un des moyens les plus simple est d'évaluer la capacité maximum K de la population et de remplacer le taux de croissance λ par une quantité qui sera d'autant plus petite qu'elle s'approche de K. Encore une fois, le souci de simplification amène à proposer le modèle suivant :

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \text{(équation logistique)}$$

Même si ce modèle parait plus réaliste, il présente encore un défaut de principe. Ainsi, il se peut que la capacité maximale soit atteinte et même dépassée(situation que le modèle ne peut pas prévoir). Cette situation ne se manifeste qu'à travers l'apparition de problème, tels que l'apparition des maladies, le manque d'espace, le manque des ressources,...ect. On peut déduire au moins une remarque intéressante ; le taux de croissance de la population à l'instant t dans l'équation logistique ne fait pas intervenir la taille de la population à cet instant mais il est fonction de la taille de la population précédente. Une traduction mathématique simple de ce qui précède est l'équation logistique retardée, connue aussi sous le nom de l'équation de

Hutchinson suivante

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \text{(équation logistique à retard).}$$

Où r est le taux de croissance de la population, K est la capacité de charge du milieu et $\tau > 0$ est le retard.

L'équation de Hutchinson suppose que l'effet de régulation dépend de la population au temps $t - \tau$ plutôt qu'à l'instant t. Dans un modèle réaliste, l'effet du retard devrait être une moyenne distribuée sur tout le passé de la population ou sur une partie de ce passé. Ceci a comme conséquence une équation à retard distribué ou à retard infini. le premier travail utilisant une équation à retard distribué est dù à Volterra. Ce travail fut ensuite étendu par Kostitzin. Volterra a utilisé un terme intégral où il a distribué le retard pour examiner l'effet cumulatif du taux de mortalité d'une espèce. Le Modèle qui a été considéré est une équation intégro-différentielle

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{1}{K}\int_0^{+\infty} F(t-s)x(s)ds\right) \text{(logistique à retard distribué).}$$

Où F représente le noyau retard, correspondant à une pondération du retard. Généralement, le noyau retard est normalisé de sorte que

$$\int_0^{+\infty} F(s)ds = 1$$

Considérons à titre d'exemple l'évolution d'une population animale ne tenant compte que de le natalité et de la mortalité naturelles. En supposant que la mortalité est instantanée dans la population, par rapport à l'échelle de temps considérée (typiquement, la semaine ou le moi), la description de l'évolution de la population nécessite de connaitre le nombre d'individus à l'instant t, que l'on peut noter $N(t)$, mais également le nombre d'individus à l'instant $t-\tau$, ou τ est la durée de gestation moyenne de la population. On peut alors écrire l'équation linéaire à retard discret suivante,

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\alpha N(t) + \beta N(t-\tau), \quad t > 0$$

$$N(t) = \psi(t) \quad t \in [-\tau, 0]$$

Où $\alpha \quad et \quad \beta$ sont respectivement les taux de mortalité et de naissance de la population, et ψ une condition initiale, définie sur l'intervalle $[-\tau, 0]$.

1.5.2 contrôle d'un Bateau(Minorsky)

En 1962 Minorsky (voir [6]) a conçu un dispositif pour le contrôle automatique de la direction pour un bateau. Le modèle se décrit comme suit. Soit $x(t)$ une position angulaire fixée du gouvernail de direction du bateau et supposons qu'il existe une force de frottement proportionnelle à la vitesse, $cx'(t)$. On suppose qu'il existe un dispositif qui indique la direction du mouvement du bateau en temps réel et reliés à un appareil connecté à un moteur électrique qui produit une certaine force agissant sur le gouvernail dans le but de le faire pivoter (orienter) pour ramener le bateau sur le chemin désiré. De toute évidence il y a un décalage (retard) de magnitude $r > 0$ en temps entre le moment ou le moteur électrique exerce la force pour redresser le bateau et le moment ou le bateau réagit pour se réorienter. Minorsky décrit cela par l'équation suivante donnée sur $x(t)$

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t-r)) = 0$$

Où il considère que $xg(x) > 0$, si $x = 0$ et c une constante positive. L'objectif du problème est de chercher des conditions qui assurent le maintien de $x(t)$ près de zéro de sorte que le bateau suivra étroitement son cours appropriés pour arriver à sa destination fixée.

Chapitre 2

Équation Différentielles semi-linéaires à domaine non dense avec retard fini

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème à valeur initiale d'équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires à retard fini, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de solutions intégrales utilisant la théorie de semi-groupes intégrés et l'approche du point fixe. Plusieurs études ont été faites lorsque l'opérateur A est à domaine non dense. On citera à titre d'exemple les travaux de Adimy et Ezzinbi [4]

Plus précisément. nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) & = & \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in J = [0, b], \\ x(t) & = & \varphi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un opérateur linéaire a domaine non dense, $f : J \times C \to \mathcal{E}$ est une fonction continue.

Dans tout ce chapitre, nous supposons que $\mathcal{A}$ satisfait la condition de Hille-Yosida. $\varphi : [-r, 0] \to \mathcal{E}$ est une fonction continue donnée et $(\mathcal{E}, |.|)$ un espace de Banach réel. Pour toute fonction x définie sur $[-r, b]$ et tout $t \in J$ on note par x_t l'élément de $C([-r,0],\mathcal{E})$ défini par

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-r,0],$$

Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution intégrale du problème (2.1).

Définition 2.1.1. *On dit que la fonction continue $x : [-r,b] \to \mathcal{E}, b > 0$ est une solution intégrale du problème (2.1) si :*

i) $x \in C([0,b];\mathcal{E})$,

ii) $\displaystyle\int_0^t x(s)ds \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *pour* $t \in [0,b]$,

iii) $x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \mathcal{A}\displaystyle\int_0^t x(s)ds + \int_0^t f(s,x_s)ds, & 0 \le t \le b, \\ \varphi(t) & -r < t \le 0. \end{cases}$

De la définition on déduit que $x(t) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \forall t \ge 0$. De plus, x satisfait la formule de variation des constantes :

$$x(t) = S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,x_s)ds, \quad t \ge 0 \tag{2.2}$$

Où $S(t)$ est le semi-groupe intégré généré par $\mathcal{A}$.

Lemme 2.1.1. *[20] Soit $(S(t))_{t\ge 0}$ un semi-groupe intégré localement Lipschitzien continu sur un espace de Banach $(\mathcal{E},|.|)$ généré par $(\mathcal{A},\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ et $G : [0,T] \to \mathcal{E}(0 < T)$, une fonction Bochner intégrable. Ensuite, la fonction $K : [0,T] \to \mathcal{E}$ définie par*

$$K(t) = \int_0^t S(t-s)G(s)ds$$

est continument différentiable sur $[0,T]$ et satisfait, $t \in [0,T]$

$$K'(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t S'(t-s)S(h)G(s)ds = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t S'(t-s)(\mathcal{A}_\lambda G(s))ds,$$

avec $\mathcal{A}_\lambda = \lambda(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$

Démonstration. On a K est continument différentiable sur $[0,T]$, et nous avons par la définition d'un semi-groupe intégré que

$$S(t)S(h)x = \int_0^t (S(s+h)x - S(s)x)ds,$$

pour $t, h \geq 0$; $et\, x \in \mathcal{E}$. Cela donne que la fonction $t \to S(t)S(h)x$ est continument différentiable sur $[0, T]$, pour chaque $h \geq 0; x \in \mathcal{E}$, et satisfait

$$S'(t)S(h)x = S(t+h)x - S(t)x.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} K'(t) = \; & \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\int_0^t (S(t+h-s) - S(t-s))G(s)ds \\ & + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)G(s)ds) \end{aligned}$$

Si on met, dans la seconde intégrale du coté droit, $u = \frac{1}{h}(s-t)$, on obtient

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)G(s)ds = \int_0^1 S(h(1-u))G(t+hu)du.$$

Ceci implique que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)G(s)ds = 0$$

Par conséquent

$$K'(t) = \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\int_0^t (S(t+h-s) - S(t-s))G(s)ds.$$

Mais

$$S(t+h-s) - S(t-s) = S'(t-s)S(h).$$

Il s'ensuit que, pour $t \in [0, T]$

$$K'(t) = \lim_{h\to 0}\int_0^t S'(t-s)\frac{1}{h}S(h)G(s)ds.$$

$\square$

Alors pour tout $y \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \mathcal{A}_\lambda y \to y$ quand $\lambda \to \infty$.

Aussi de la condition de Hille-Yosida (avec n=1), il est facile de voir que

$\lim_{\lambda\to\infty} |\mathcal{A}_\lambda y| \leq M\,|y|$, depuis

$$|\mathcal{A}_\lambda| = \left|\lambda(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - \omega}$$

Notons aussi que, si x satisfait (2.2), alors

$$x(t) = S'(t)\varphi(0) + \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t S'(t-s)A_\lambda f(s, x_s)ds, \quad t \geq 0.$$

2.2 Résultats principaux

Notre premier résultat d'existence est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.1. *Soit $f : J \times C([-r, 0], \mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ continue. Supposons qu'il existe une constante positive K telle que*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K\,\|u - v\|_C\,, \quad t \in J \text{ et } u, v \in C$$

Si

$$\frac{KM^2}{\omega}(e^{\omega b} - 1) < 1. \tag{2.3}$$

Alors il existe une solution intégrale unique du problème (2.1) sur $[-r, b]$.

Démonstration. Transformons le problème (2.1) en un problème du point fixe.
On considère l'opérateur $T : C([-r, b], \mathcal{E}) \to C([-r, b], \mathcal{E})$ défini par :

$$T(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-r, 0], \\ S'(t)\varphi(0) + \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, & t \in [0, b]. \end{cases}$$

Soient $x, y \in C([-r, b], \mathcal{E})$, alors d'après le lemme (2.1.1) on a pour tout $t \in [0, b]$, et

$\lambda > \omega$

$$\begin{aligned}
|T(y)(t)-T(x)(t)| &= \left| S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,y_s)ds \right. \\
&\quad \left. -S'(t)\varphi(0) - \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,x_s)ds \right| \\
&= \left| \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)[f(s,y_s)-f(s,x_s)]ds \right| \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty}\left| \int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda[f(s,y_s)-f(s,x_s)]ds \right| \\
&\leq M\left| \int_0^t S'(t-s)[f(s,y_s)-f(s,x_s)]ds \right| \\
&\leq \int_0^t M^2 e^{\omega(t-s)}\left|f(s,y_s)-f(s,x_s)\right| ds \\
&\leq KM^2 e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\left\|y_s-x_s\right\|_C ds \\
&\leq KM^2 e^{\omega t}\left\|y-x\right\|_\infty \int_0^t e^{-\omega s}ds \\
&\leq KM^2 e^{\omega t}\left\|y-x\right\|_\infty (\tfrac{-1}{\omega}e^{-\omega t}+\tfrac{1}{\omega}) \\
&\leq \frac{-KM^2}{\omega}\left\|y-x\right\|_\infty + \frac{KM^2e^{\omega t}}{\omega}\left\|y-x\right\|_\infty \\
&\leq \left[\frac{KM^2}{\omega}(e^{\omega t}-1)\right]\left\|y-x\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in [-r,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\underset{t\in[-r,b]}{sup}|T(y)(t)-T(x)(t)| &\leq \underset{t\in[-r,b]}{sup}\left[\frac{KM^2}{\omega}(e^{\omega t}-1)\left\|y-x\right\|_\infty\right] \\
\left\|T(y)-T(x)\right\|_{\mathfrak{D}} &\leq \frac{KM^2}{\omega}(e^{\omega b}-1)\left\|y-x\right\|_{\mathfrak{D}} .
\end{aligned}$$

Par la condition(2.3) l'opérateur T est une contraction et donc T a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui est une solution intégrale unique au problème (2.1). □

Ensuite, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder aux opérations complètement continus.

Théorème 2.2.2. *Soit $f : J \times C([-r,0],\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ continue. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H1) A est un opérateur de Hille-Yosida.

(H2) Il existe $\mu > 0$ telle que $\|f(t,x_t)\| \leq \mu$ pour tout $t \in [0,b]$

(H3) Le semi-groupe $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est compact sur $(\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \|.\|)$.

Si $\varphi(0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, alors le problème (2.1) a au moins une solution intégrale x sur $[-r,b]$.

Démonstration. Transformons le problème (2.1) en un problème du point fixe.
On considère l'opérateur $T : C([-r,b],\mathcal{E}) \to C([-r,b],\mathcal{E})$ défini comme dans le théorème (2.1).
La preuve est donnée en quatre étapes.
Étape 1 : T est continu.
Soit (U_n) une suite dans $C([-r,b],\mathcal{E})$ telle que $U_n \to U$ dans $C([-r,b],\mathcal{E})$, alors pour $t \in [0,b]$ on a :

$$\begin{aligned}
|T(U_n)(t) - T(U)(t)| &= \left|\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)[f(s,(U_n)_s) - f(s,U_s)]ds\right| \\
&\le \lim_{\lambda\to\infty}\left|\int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda[f(s,(U_n)_s) - f(s,U_s)]ds\right| \\
&\le \int_0^t M^2 e^{\omega(t-s)}\left|f(s,(U_n)_s) - f(s,U_s)\right| ds \\
&\le M^2 e^{\omega t}\left\|f(s,(U_n)_s) - f(s,U_s)\right\|_\infty \int_0^t e^{-\omega s} ds \\
&\le \frac{M^2}{\omega}(e^{\omega b} - 1)\left\|f(s,(U_n)_s) - f(s,U_s)\right\|_{\mathfrak{D}}
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors

$$f(s,(U_n)_s) \to f(s,U_s) \quad lorseque\ n \to \infty$$

Alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous avons :

$$\|T(U_n) - T(U)\|_{\mathfrak{D}} \to 0 \quad lorseque\ n \to \infty$$

d'où la continuité de T.
Étape 2 T transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $C([-r,b],\mathcal{E})$.
Pour tout nombre positif l, soit

$$B_l = \{x \in C([-r,b],\mathcal{E}) : \|x\|_{\mathfrak{D}} \le l\}$$

Alors pour tout l, B_l est clairement un ensemble borné. Il suffit de montrer que pour tout $l > 0$, il existe une constante L telle que pour chaque $x \in B_l$ nous avons

$T(x) \in B_L$. Pour chaque $t \in [0, b]$

$$
\begin{aligned}
|T(x)(t)| &= \left| S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds \right| \\
&\leq |S'(t)\varphi(0)| + \lim_{\lambda\to\infty}\left|\int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda[f(s, x_s)ds\right| \\
&\leq \|S'(t)\|_{\overline{D(A)}}\varphi(0) + \int_0^t M^2 e^{\omega(t-s)}\,|f(s, x_s)|\,ds \\
&\leq Me^{\omega t}\varphi(0) + M^2\mu e^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}ds \\
&\leq Me^{\omega t}\varphi(0) + \frac{M^2\mu}{\omega}(e^{\omega t} - 1) \\
&\leq Me^{\omega b}\varphi(0) + \frac{M^2\mu}{\omega}(e^{\omega b} - 1) = L
\end{aligned}
$$

Alors, $\|T(x)\|_{\mathfrak{D}} \leq L$. Donc $T(x) \in B_L$.

Étape 3 T transforme tout ensemble bornée en un ensemble équicontinu dans $C([-r, b], \mathcal{E})$.

Nous considérons B_l comme dans l'étape 2. Soient $\tau_1, \tau_2 \in [0, b]$ avec $\tau_2 > \tau_1$. Ainsi, si $\epsilon \leq \tau_1 \leq \tau_2$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
|T(x)(\tau_2) - T(x)(\tau_1)| &= \Bigg| S'(\tau_2)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^{\tau_2} S(\tau_2 - s)f(s, x_s)ds \\
&\quad - S'(\tau_1)\varphi(0) - \frac{d}{dt}\int_0^{\tau_1} S(\tau_1 - s)f(s, x_s)ds \Bigg| \\
&\leq |S'(\tau_2) - S'(\tau_1)|\,\varphi(0) + \lim_{\lambda\to\infty}\Bigg|\Bigg(\int_0^{\tau_2} S'(\tau_2 - s)\mathcal{A}_\lambda f(s, x_s)ds \\
&\quad - \int_0^{\tau_1} S'(\tau_1 - s)\mathcal{A}_\lambda f(s, x_s)ds\Bigg)\Bigg| \\
&\leq |S'(\tau_2) - S'(\tau_1)|\,\varphi(0) + \left| M\int_0^{\tau_1}\left(S'(\tau_2 - s) - S'(\tau_1 - s)\right)f(s, x_s)ds \right| \\
&+ \left| M\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(S'(\tau_2 - s) - S'(\tau_1 - s)\right)f(s, x_s)ds \right|.
\end{aligned}
$$

Comme $\tau_1 \to \tau_2$, le nombre droit de l'inégalité ci-dessous tend vers zéro et puisque $\{S'(t)\}_t \geq 0$ est un opérateur compact fortement continu, ceci implique la continuité uniforme d'opérateur.

Puisque $T(B_l)$ est une famille équicontinue et uniformément borné. On conclu d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli que l'ensemble $\{T(x)(t) : x \in B_l\}$ est relativement compact dans $\mathcal{E}$.

Les étapes précédentes impliquent que $T : C([-r, b], \mathcal{E}) \to C([-r, b], \mathcal{E})$ est un opérateur complètement continu.

Étape 4 Estimations à priori des solutions.

Maintenant, il reste à prouver que l'ensemble

$$\xi = \{x \in C([-r,b],\mathcal{E}), x = \eta T(x), 0 < \eta < 1\}$$

est borné.

Soit $x \in \xi$ un élément arbitraire.

Alors, pour tout $t \in [0,b]$,

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \eta T(x)(t) = \eta \left[S'(t)\varphi(0) + \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s,x_s)ds \right] \\ |x(t)| & \leq & |S'(t)|\,\varphi(0) + \displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \left| \int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda f(s,x_s)ds \right| \\ & \leq & |S'(t)|\,\varphi(0) + M \displaystyle\int_0^t |S'(t-s)|\,|f(s,x_s)ds| \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_{\mathfrak{D}} & \leq & Me^{\omega t}\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t M^2 e^{\omega(t-s)}\mu ds \\ & \leq & Me^{\omega t}\varphi(0) + M^2\mu e^{\omega t}\displaystyle\int_0^t e^{-\omega s}ds \\ & \leq & Me^{\omega b}\left[\varphi(0) + \frac{M\mu}{\omega}\right] - \dfrac{M^2\mu}{\omega} = d. \end{array}$$

Alors, pour tout $t \in [-r,b]$, il existe une constante d telle que

$$\|x\|_{\mathfrak{D}} \leq d.$$

Donc l'ensemble ξ est borné. En conséquence du théorème (2.2.2) on déduit que T a un point fixe qui est une solution du problème(2.1). □

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problèmes (2.1). Le lemme suivant est essentiel pour notre résultat principale.

Lemme 2.2.1. *(**Gronwall**) Soient $u,\alpha \in C([0,b],\mathcal{E}), B(t) \geq 0, B$ intégrable sur $[0,b]$ et*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t B(s)u(s)ds, \quad 0 \leq t \leq b$$

Alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t B(s)\alpha(s)exp\left(\int_0^t B(\tau)d\tau\right)ds, \quad 0 \leq t \leq b$$

Démonstration. Posons $F(t) = \displaystyle\int_0^t B(s)u(s)ds$. En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $B(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} B(t)u(t) &\leq B(t)\alpha(t) + B(t)F(t) \\ F'(t) &\leq B(t)\alpha(t) + B(t)F(t) \\ F'(t) - B(t)F(t) &\leq B(t)\alpha(t) \end{aligned}$$

Et en multipliant les deux membres de l'inégalité par $exp\left(-\int_0^t B(s)ds\right)$, on obtient

$$exp\left(-\int_0^t B(s)ds\right)[F'(t) - B(t)F(t)] \leq exp\left(-\int_0^t B(s)ds\right)B(t)\alpha(t)$$

Ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \alpha(t)B(t)exp\left(-\int_0^t B(s)ds\right)$$

avec

$$G(t) = F(t)exp\left(-\int_0^t B(s)ds\right)$$

Comme $G(0) = F(0) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_0^t \alpha(s)B(s)exp\left(-\int_0^t B(\tau)d\tau\right)ds$$

Or par hypothèse

$$u(t) \leq \alpha(t) + G(t)exp\left(\int_0^t B(s)ds\right)$$

D'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus. □

Théorème 2.2.3. *Supposons que les conditions du théorèmes (2.2.2) sont vérifiées. Supposons de plus qu'il existe une constante positive K telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K\|u-v\|_C \quad \textit{pour } t \in [0,b] \textit{ et } u,v \in C([-r,0],\mathcal{E})$$

Alors le problème (2.1) a une solution intégrale unique sur $[-r,b]$.

Démonstration. L'existence d'au moins une solution intégrale $x(t)$ de problème (2.1) est assurée par le théorème (2.2.2). Pour prouver l'unicité de $x(t)$, soit $y(t)$ une autre solution intégrale du problème (2.1). Alors pour chaque $t \in [-r, b]$ nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &= \left| \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s) \left[f(s, x_s) - f(s, y_s) \right] ds \right| \\
&\leq \left| \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t S'(t-s) \mathcal{A}_\lambda \left[f(s, x_s) - f(s, y_s) \right] ds \right| \\
&\leq M \int_0^t |S'(t-s)| \left| f(s, x_s) - f(s, y_s) \right| ds \\
&\leq \|S'(t-s)\|_{\overline{D(A)}} \int_0^t MK \left\| x_s - y_s \right\|_C ds
\end{aligned}$$

Ce qui implique encore

$$\|x - y\|_{\mathfrak{D}} \leq KM^2 e^{\omega t} \int_0^t e^{-\omega s} \|x - y\|_{\mathfrak{D}} \, ds$$

Maintenant, en utilisant le lemme (2.2.1) avec $\alpha(t) = 0$ on obtient l'unicité de $x(t)$.

$\square$

Chapitre 3

Équation Différentielles semi-linéaires à domaine non dense avec retard infini

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'existence et l'unicité de solution intégrales pour des équations différentielles semi-linéaires à retard infini lorsque la partie $\mathcal{A}$ est à domaine non dense. L'outil de base dans notre étude est la théorie de semi-groupes intégrés et l'argument du point fixe. On citera à titre les travaux de Hale et Kato [17], Kappel et Schppacher [22], Schumacher [15], Travis et Webb [5, 13] et Webb [20, 21].

Considérons le problème d'équations différentielles fonctionnelles avec retard infini donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) &= \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in J = [0, b], \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un opérateur linéaire fermé à domaine non dense dans $\mathcal{E}$, dans tout ce chapitre, nous supposons que $\mathcal{A}$ satisfait la condition de Hille-Yosida. φ est dans un espace de phase $\mathcal{B}$, f est une fonction défini de $[0, b] \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$ et, pour chaque $x : (-\infty, b] \to \mathcal{E}$ et $t \in [0, b], x_t$ représente une fonction définie de $(-\infty, 0]$ dans $\mathcal{E}$ par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \quad \textit{pour } \theta \in (-\infty, 0]$$

3.1.1 Espace de phase

Dans la littérature consacrée aux équation avec retard fini, l'espace d'état est l'espace de toutes les fonctions continues sur $[-r, 0], r > 0$, muni de la norme uniforme. Quand le retard est infini, la notion de l'espace de phase $\mathcal{B}$ joue un rôle important dans l'étude de la théorie qualitative et quantitative. Un choix habituel est l'espace $\mathcal{B}$ des fonctions appliquant $(-\infty, 0]$ dans $\mathcal{E}$ muni de la semi-norme $\|.\|_{\mathcal{B}}$ satisfaisant les axiomes appropriés, qui a été présenté par Hale et Kato [17], Kappel et Schppacher [22], et Schumacher [15]

L'espace $\mathcal{B}$ satisfait les axiomes suivant :

A) il existe une constante positive H et des fonctions $K(.); M(.) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, avec K continue et M localement bornée, telle que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, si $x : (-\infty, \sigma + b] \to \mathcal{E}, x_\sigma \in \mathcal{B}$, et $x(.)$ est continu sur $[\sigma, \sigma + b]$, puis pour tout t dans $[\sigma, \sigma + b]$ les conditions suivantes sont réalisées :

   i) $x_t \in \mathcal{B}$

   ii) $\|x(t)\| \leq H \|x_t\|_{\mathcal{B}}$,

   iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \underset{\sigma \leq s \leq t}{sup} \|x(s)\| + M(t - \sigma) \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$.

B) Pour la fonction $x(.)$ dans (A), $t \to x_t$ est une fonction continue de valeur dans $\mathcal{B}$ pour t dans $[\sigma, \sigma + b]$.

C) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Remarque 3.1.1. *a) la condition (ii) est équivalente à :* $\|\varphi(0)\| \leq H \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$

b) Puisque $\|.\|_{\mathcal{B}}$ *est un semi norme, deux éléments* $\psi, \phi \in \mathcal{B}$ *peut vérifier* $\|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$ *sans nécessairement* $\phi(\theta) = \psi(\theta)$ *pour tout* $\theta \leq 0$. *Mais, de a) nous voyons que*

$$\psi, \phi \in \mathcal{B} \quad et \quad \|\phi - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad implique\ que\ \phi(0) = \psi(0).$$

3.1.2 Quelques exemples d'espaces de phase

Exemple 3.1.1. *on note par*

$\mathcal{BC}$ *l'espace des fonctions continues bornées définies de* $(-\infty, 0]$ *dans* $\mathcal{E}$

$\mathcal{BUC}$ *l'espace des fonctions continues uniformément bornées définies de* $(-\infty, 0]$ *dans* $\mathcal{E}$

$\mathcal{C}^{\infty} = \left\{ \phi \in \mathcal{BC} : \lim_{\theta \to -\infty} \phi(\theta) \text{ existe dans } \mathcal{E} \right\}$
$\mathcal{C}^{0} = \left\{ \phi \in \mathcal{BC} : \lim_{\theta \to -\infty} \phi(\theta) = 0 \right\}$, *muni de la norme uniforme*

$$\|\phi\| = sup \{|\phi(\theta)| : \theta \leq 0\}.$$

Nous savons que les espaces $\mathcal{BUC}, \mathcal{C}^{\infty}$ *et* $\mathcal{C}^{0}$ *satisfont les conditions* $(A) - (C)$.
$\mathcal{BC}$ *satisfait* $(B) - (C)$ *mais* (A) *n'est pas satisfait.*

Exemple 3.1.2. *Soit* $g : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ *une fonction continue. Nous définissons*
$\mathcal{C}_g = \{\phi \in \mathcal{C}((-\infty, 0], \mathcal{E}) : (\phi(\theta)/g(\theta)) \text{ est bornée sur } (-\infty, 0]\}$
$\mathcal{UC}_g = \{\phi \in \mathcal{C}_g : (\phi(\theta)/g(\theta)) \text{ est uniformement continue sur } (-\infty, 0]\}$
$\mathcal{C}^0_g = \left\{ \phi \in \mathcal{C}_g : \lim_{\theta \to -\infty} (\phi(\theta)/g(\theta)) = 0 \right\}$, *muni de cette norme*

$$\|\phi\| = sup \left\{ \frac{|\phi(\theta)|}{g(\theta)} : -\infty < \theta \leq 0 \right\}.$$

Considérons les conditions suivantes sur la fonction g,

$$(\mathcal{G}) : \sup_{0 \leq t \leq a} sup \left\{ \frac{g(\theta + t)}{g(\theta)} : -\infty < \theta \leq -t \right\} < \infty \text{ pour tout } a > 0$$

Alors nous savons que l'espace $\mathcal{C}_g$ *et* $\mathcal{C}^0_g$ *satisfont la condition* (C). *Ils satisfont les conditions (A) et (B) si* $(\mathcal{G})$ *est réalisée.*

Exemple 3.1.3. *L'espace* $\mathcal{C}_\gamma$.
Pour n'importe quelle constante réelle γ, *nous définissons l'espace fonctionnel* $\mathcal{C}_\gamma$ *par*

$$\mathcal{C}_\gamma = \left\{ \phi \in \mathcal{C}((-\infty, 0], \mathcal{E}) : \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta} \phi(\theta) \text{ existe dans } \mathcal{E} \right\}.$$

Muni de la norme suivante

$$\|\phi\| = sup \left\{ e^{\gamma\theta} |\phi(\theta)| : \theta \leq 0 \right\}.$$

Alors dans l'espace $\mathcal{C}_\gamma$ *les axiomes* $(A) - (C)$ *sont satisfait. Pour plus de détails sur la théorie d'espace de phase, le livre de Hino et Al [12] contient une bibliographie approfondie et une discussion détaillée sur ce sujet.*

Soit $\mathcal{A}_\lambda = \lambda R(\lambda, \mathcal{A}) = \lambda(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$. Alors pour tout $x \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \mathcal{A}_\lambda x \to x$ quand $\lambda \to \infty$.

Aussi de la condition de Hille-Yosida (avec n=1), il est facile de voir que

$$\lim_{\lambda \to \infty} |\mathcal{A}_\lambda x| \leq M\,|x|\,,$$

de puis

$$|\mathcal{A}_\lambda| = \left|\lambda(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - \omega}$$

Ainsi

$$\lim_{\lambda \to \infty} |\mathcal{A}_\lambda| \leq M.$$

3.2 Résultats principaux

On commence par introduire les définitions suivantes :

Définition 3.2.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{B}$, on dit que la fonction $x : (-\infty, b] \to \mathcal{E}, b > 0$, est une solution intégrale de problème (3.1) dans $(-\infty, b]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) x *est continu sur* $[0, b]$;

ii) $\displaystyle\int_0^t x(s)ds \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad t \in [0, b]$;

iii) $x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \mathcal{A}\displaystyle\int_0^t x(s)ds + \int_0^t f(s, x_s)ds, & 0 \leq t \leq b, \\ \varphi(t), & -\infty < t \leq 0. \end{cases}$

De la définition on déduit que $x(t) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \forall t \geq 0$. De plus, x satisfait la formule de variation des constantes :

$$x(t) = S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, \quad t \geq 0 \tag{3.2}$$

Où $S(t)$ est le semi-groupe intégré généré par $\mathcal{A}$.

Notons aussi que, si x satisfait (3.2), alors

$$x(t) = S'(t)\varphi(0) + \lim_{\lambda \to \infty}\int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda f(s, x_s)ds, \quad t \geq 0.$$

3.2.1 Existence locale de solution intégrale

Soit Ω un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathcal{B}$. Nous supposons :

(H1) $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un opérateur de Hille-Yosida, i.e, qu'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que $[\omega, +\infty) \subset \rho(\mathcal{A})$ et

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})^n\| \leq \frac{\overline{M}}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Observez que le théorème (1.2.3) implique que, dans cette hypothèse, $\mathcal{A}$ est le générateur d'un semi-groupe intégré continu localement Lipschitzienne $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{E}$. De plus $S'(t) : \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \to \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ est un C_0 semi-groupe satisfaisant

$$\|S'(t)y\| \leq \overline{M} e^{\omega t} \|y\| \quad \textit{pour } t \geq 0 \quad \textit{et } y \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.$$

Nous avons également besoin de la propriété de compacité suivante de $(S'(t))_{t\geq 0}$.

(H2) Le semi-groupe $(S'(t))_{t\geq 0}$ est compact sur $(\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \|.\|)$.

Théorème 3.2.1. *Soit $f : [0, b] \times \Omega \to \mathcal{E}$ une fonction continue et supposons les conditions (H1) et (H2).*
Si $\varphi \in \Omega$ avec $\varphi(0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$; alors le problème (3.1) a une solution intégrale
$x : (-\infty, b] \to \mathcal{E}$, De plus,

$$x(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) + \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, & 0 \leq t \leq b, \\ \varphi(t), & -\infty < t \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \Omega$ avec $\varphi(0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$. L'idée principale de la preuve est d'utiliser le théorème de point fixe de Schauder.

la preuve est donnée en quatre étapes.

Premièrement, il existe des constantes $r_1 > 0$ et $\mu \geq 0$ telles que $\overline{B_{r_1}(\varphi)} = \{\psi \in \mathcal{B} : \|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq r_1\} \subseteq \Omega$ et $\|f(s, \psi)\| \leq \mu$ pour tous $s \in [0, r_1]$ et $\psi \in \overline{B_{r_1}(\varphi)}$. Considérons la fonction $y : (-\infty, +\infty) \to \mathcal{E}$ définie par

$$y(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) & \textit{pour } t \geq 0, \\ \varphi(t) & \textit{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

En vertu des axiomes $(A)(i)$ et (B), et pour $r_2 \in]0, r_1[$, il existe $b_1 \in]0, r_1]$ tel que $\overline{B_{r_2}(\varphi)} = \{y_t \in \mathcal{B},\ \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq r_2,\ t \in [0, b_1]\}$

Soient $K_b = \underset{0\leq t\leq b}{max} K(t), M_b = \underset{0\leq t\leq b}{sup} M(t)$ et $\overline{M_b} = \underset{0\leq s\leq b}{sup} \|S'(s)\|_{\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}}$ et, soit b une constante telle que

$$0 < b \leq min\left\{b_1, \frac{r_1 - r_2}{\overline{M}\ \overline{M_b} K_b \mu}\right\}.$$

Nous introduisons l'espace

$$\mathbb{F}_b = \{x : (-\infty, b] \to \mathcal{E} \text{ tel que } x_0 \in \mathcal{B} \text{ et la restriction } x : [0, b] \to \mathcal{E} \text{ est continue }\},$$

muni de la semi norme $\|.\|_{\mathbb{F}_b}$, défini par

$$\|x\|_{\mathbb{F}_b} = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \underset{0\leq s\leq b}{sup} \|x(s)\|.$$

Nous définissons également, pour $\varphi \in \mathcal{B}$, le sous-ensemble de $\mathbb{F}_b$

$$\mathbb{F}_b(\varphi) = \{x \in \mathbb{F}_b \text{ tel que } \|x_0 - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0 \text{ et pour tout } t \in [0, b], \|x_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq r_1\}.$$

Étape 1 : $\mathbb{F}_b(\varphi)$ est fermé, borné et convexe.

Il est clair que la restriction de y à $(-\infty, b]$ est un élément de $\mathbb{F}_b(\varphi)$. Alors, $\mathbb{F}_b(\varphi)$ est non vide.

Pour tout $x \in \mathbb{F}_b(\varphi)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\mathbb{F}_b} &= \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \underset{0\leq s\leq b}{sup} \|x(s)\|, \\
&\leq \|x_0 - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \underset{0\leq s\leq b}{sup} H \|x_s\|_{\mathcal{B}}, \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + H \underset{0\leq s\leq b}{sup} \{\|(x_s - \varphi) + \varphi\|_{\mathcal{B}}\}, \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + H \left\{\underset{0\leq s\leq b}{sup} \|(x_s - \varphi)\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}\right\}, \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + H(r_1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}).
\end{aligned}$$

Alors, $\mathbb{F}_b(\varphi)$ est borné.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathcal{B}$, il est clair que $\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \in \mathbb{F}_b(\varphi)$, pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{F}_b(\varphi)$ et $\alpha \in]0, 1[$. Alors, $\mathbb{F}_b(\varphi)$ est convexe.

Finalement, $\mathbb{F}_b(\varphi)$ est fermé dans $\mathbb{F}_b$. Pour prouver cela, considérons une suite convergente $(x^n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{F}_b(\varphi)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(x^n) = x$ dans $\mathbb{F}_b$. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, nous avons

$$\|x_0 - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \|x_0 - x_0^n\|_{\mathcal{B}} + \|x_0^n - \varphi\|_{\mathcal{B}},$$

Quand $n \to +\infty$, $\quad \|x_0 - \varphi\|_{\mathcal{B}} = 0$. Alors, axiome $(A)(iii)$ implique que pour tout $t \in [0; b]$,

$$\begin{aligned}
\|x_t^n - x_t\|_{\mathcal{B}} &\leq K(t) \underset{0\leq s\leq t}{sup} \|x^n(s) - x(s)\| + M(t)\,\|x_0^n - x_0\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq Max(K_b, M_b)\,\|x^n - x\|_{\mathbb{F}_b}.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in [0, b], x_t^n \to x_t$ dans $\mathcal{B}$. A partir de cela avec l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\|x_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} &\leq \|x_t - x_t^n\|_{\mathcal{B}} + \|x_t^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \|x_t - x_t^n\|_{\mathcal{B}} + r_1 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

on en déduit que $\|x_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq r_1$. Par conséquent, $x \in \mathbb{F}_b(\varphi)$.

Nous avons prouvé que $\mathbb{F}_b(\varphi)$ est un sous-ensemble non vide, borné, convexe et fermé de $\mathbb{F}_b$.

Transformons le problème (3.1) en un problème du point fixe.

Considérons maintenant l'opérateur T défini sur $\mathbb{F}_b(\varphi)$ par

$$(Tx)(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) + \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, & t \in [0, b], \\ \varphi(t), & -\infty < t \leq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Étape 2 : $Tx \in \mathbb{F}_b(\varphi)$ *et* T est continu.

En fait, par (H2) et axiome (B), pour chaque $x \in \mathbb{F}_b(\varphi)$, la fonction $s \to f(s, x_s)$ est continue sur $[0, b]$. Donc, pour chaque $x \in \mathbb{F}_b(\varphi)$, la fonction $t \to \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds$ est continuellement différentiable on $[0, b]$. De là, la fonction $z = Tx$ est continue sur $[0, b]$. Alors, $z \in \mathbb{F}_b$.

Pour prouver que $z \in \mathbb{F}_b(\varphi)$,

On met $w = z - y$, on obtient alors pour tout $t \in [0, b]$,

$$\begin{aligned}
\|z_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} &\leq \|w_t\|_{\mathcal{B}} + \|y_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \|w_t\|_{\mathcal{B}} + r_2.
\end{aligned}$$

Par axiome $(A)(iii)$, on a pour tout $t \in [0,b]$,

$$\|w_t\|_{\mathcal{B}} \leq K_b \underset{0\leq s\leq t}{sup} \|w(s)\| + \underbrace{M_b \|w_0\|_{\mathcal{B}}}_{=0}.$$

A partir du lemme(2.3.2), on obtient pour $t \in [0,b]$

$$\begin{aligned}
\|w(t)\| &= \left\| \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s) f(s,x_s) ds \right\| \\
&= \left\| \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda f(s,x_s) ds \right\| \\
&\leq \lim_{\lambda\to+\infty} \left\| \int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda f(s,x_s) \right\| \\
&\leq \overline{M}\ \overline{M_b} \mu b \\
&\leq \frac{r_1 - r_2}{K_b}.
\end{aligned}$$

Alors $\|z_t - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq r_1 \quad pour\ tout\ t \in [0,b]$, ce qui montre que $z \in \mathbb{F}_b(\varphi)$.

Nous allons prouver maintenant la continuité de T.

Soit $(x^n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente dans $\mathbb{F}_b(\varphi)$ avec $\lim_{n\to+\infty} x^n = x$, on a

$$\|T(x^n) - T(x)\|_{\mathbb{F}_b} = \underbrace{\|x_0 - x_0\|_{\mathcal{B}}}_{=0} + \underset{0\leq s\leq b}{sup} \|T(x^n) - T(x)\|$$

Alors c'est exactement la norme $\|.\|_\infty$ donc :

$$\begin{aligned}
|T(x^n)(t) - T(x)(t)| &= \left| \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)[f(s,x_s^n) - f(s,x_s)] ds \right| \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty} \left| \int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda [f(s,x_s^n) - f(s,x_s)] ds \right| \\
&\leq Mb\overline{M_b} \|f(s,x_s^n) - f(s,x_s)\|_\infty
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors

$$f(s,x_s^n) \to f(s,x_s) \quad lorseque\ n \to \infty$$

Alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous avons :

$$\|T(x^n) - T(x)\|_\infty \to 0 \quad lorseque\ n \to \infty$$

d'où la continuité de T.

Étape 3 : T transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathbb{F}_b(\varphi)$.

Pour tout nombre positif l, soit

$$B_l = \left\{ x \in \mathbb{F}_b(\varphi) : \|x\|_{\mathbb{F}_b} \leq l \right\}$$

Alors pour tout l, B_l est clairement un ensemble borné. Il suffit de montrer que pour tout $l > 0$, il existe une constante L telle que pour chaque $x \in B_l$ nous avons $T(x) \in B_L$.

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_{\mathbb{F}_b} &= \|Tx_0\|_{\mathcal{B}} + \underset{0 \leq s \leq b}{sup} \|Tx(s)\| \\
&\leq \|Tx_0 - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \underset{0 \leq s \leq b}{sup} H \|Tx_s\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + H\{ \underset{0 \leq s \leq b}{sup} \|Tx_s - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \} \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + H\{r_1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}}\} = L
\end{aligned}$$

Alors, $\|T(x)\|_{\mathbb{F}_b} \leq L$. Donc $T(x) \in B_L$.

Étape 4 : T transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $\mathbb{F}_b(\varphi)$.

Nous considérons B_L comme dans l'étape 3. Soient $\tau_1, \tau_2 \in (-\infty, b]$ avec $\tau_2 > \tau_1$. nous avons :

$$\begin{aligned}
|T(x)(\tau_2) - T(x)(\tau_1)| &= \Big| S'(\tau_2)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^{\tau_2} S(\tau_2 - s)f(s, x_s)ds \\
&\quad -S'(\tau_1)\varphi(0) - \frac{d}{dt}\int_0^{\tau_1} S(\tau_1 - s)f(s, x_s)ds \Big| \\
&\leq |S'(\tau_2) - S'(\tau_1)|\, \varphi(0) + \lim_{\lambda \to \infty} \Big| \Big(\int_0^{\tau_2} S'(\tau_2 - s)\mathcal{A}_\lambda f(s, x_s)ds \\
&\quad - \int_0^{\tau_1} S'(\tau_1 - s)\mathcal{A}_\lambda f(s, x_s)ds \Big) \Big| \\
&\leq |S'(\tau_2) - S'(\tau_1)|\, \varphi(0) + \left| \overline{M} \int_0^{\tau_1} (S'(\tau_2 - s) - S'(\tau_1 - s))\, f(s, x_s)ds \right| \\
&+ \left| \overline{M} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (S'(\tau_2 - s) - S'(\tau_1 - s))\, f(s, x_s)ds \right|.
\end{aligned}$$

Comme $\tau_1 \to \tau_2$, le nombre droit de l'inégalité ci-dessous tend vers zéro et puisque $\{S'(t)\}_t \geq 0$ est un opérateur compact fortement continu, ceci implique la continuité uniforme d'opérateur.

Puisque $T(B_l)$ est une famille équicontinue et uniformément borné. On conclu

d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli que l'ensemble $\{T(x)(t) : x \in B_l\}$ est relativement compact dans $\mathcal{E}$.
Enfin, le théorème de point fixe de Schauder implique que T a un point fixe x dans $\mathbb{F}_b(\varphi)$. $\square$

3.2.2 Existence global et caractère unique de la solution intégrale

Notre objectif ici est de donner des conditions suffisantes pour l'existence globale et l'unicité de la solution intégrale de l'équation (3.1), (la contraction de Banach).

Théorème 3.2.2. *Soit $f : J \times \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ est continue et satisfaite une condition de Lipschitz : il existe une constante positive L telle que*

$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\| \leq L \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}}, \quad \textit{pour chaque } t \in J \textit{ et } \varphi, \psi \in \mathcal{B}.$$

Si

$$\frac{L\overline{M}^2 K_b}{w}(e^{wb} - 1) < 1. \tag{3.4}$$

Alors il existe une solution intégrale unique du problème (3.1) sur $(-\infty, b)$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ tel que $\varphi(0) \in \overline{D(A)}$. Considérons l'ensemble $Z_b(\varphi) = \{z \in C([0,b],\mathcal{E}), z(0) = \varphi(0)\}$
Soit $\widetilde{z} : (-\infty, b] \to \mathcal{E}$ la fonction définie par

$$\widetilde{z}(t) = \begin{cases} z(t), & t \in [0,b], \\ \varphi(t), & -\infty < t \leq 0. \end{cases}$$

Soit $K_b = \underset{0 \leq t \leq b}{max} K(t)$ et $M_b = \underset{0 \leq t \leq a}{max} M(t)$. Puisque f est continue et de l'axiome (B), la fonction $s \to f(s, \widetilde{z}_s)$ est continue sur $[0,b]$. Cela implique que la fonction $t \to \int_0^t S(t-s)f(s,\widetilde{z}_s)$ est continuellement différentiable sur $[0,b]$.
Transformons le problème (3.1) en un problème du point fixe.
on considère l'opérateur $P : Z_b(\varphi) \to Z_b(\varphi)$ défini par

$$(Pz)(t) = S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,\widetilde{z}_s)ds.$$

Soient $y, z \in Z_b(\varphi), t \in J\ et\ \lambda > w$,

$$\begin{aligned}
|P(z)(t) - P(y)(t)| &= \left| S'(t)\varphi(0) + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,\widetilde{z}_s)ds \right. \\
&\quad \left. - S'(t)\varphi(0) - \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,\widetilde{y}_s)ds \right| \\
&= \left| \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)[f(s,\widetilde{z}_s) - f(s,\widetilde{y}_s)]ds \right| \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty} \left| \int_0^t S'(t-s)\mathcal{A}_\lambda[f(s,\widetilde{z}_s) - f(s,\widetilde{y}_s)]ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^t \overline{M}S'(t-s)[f(s,\widetilde{z}_s) - f(s,\widetilde{y}_s)]ds \right| \\
&\leq \int_0^t \overline{M}^2 e^{w(t-s)} \left| f(s,\widetilde{z}_s) - f(s,\widetilde{y}_s) \right| ds \\
&\leq L\overline{M}^2 e^{wt} \int_0^t e^{-ws} \left\| \widetilde{z}_s - \widetilde{y}_s \right\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq L\overline{M}^2 e^{\omega t} \int_0^t e^{-ws} \Bigg(K(s) \underset{0\leq\xi\leq s}{sup} \|z(\xi) - y(\xi)\| \\
&\quad + M(s) \underbrace{\|z_0 - y_0\|_{\mathcal{B}}}_{=0} \Bigg) ds \\
&\leq L\overline{M}^2 K_b e^{\omega t} \int_0^t e^{-ws} \underset{0\leq\xi\leq s}{sup} \|z(\xi) - y(\xi)\| ds \\
&\leq L\overline{M}^2 K_b e^{\omega t} [\tfrac{-1}{w} e^{-wt} + \tfrac{1}{w}] \|z - y\|_{Z_b(\varphi)} \\
&\leq \frac{L\overline{M}^2 K_b}{w} (e^{wt} - 1) \|z - y\|_{Z_b(\varphi)}
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0, b]$, nous avons

$$\|P(z) - P(y)\| \leq \frac{L\overline{M}^2 K_b}{w} (e^{wb} - 1) \|z - y\|_{Z_b(\varphi)}$$

Par la condition (3.3) l'opérateur P est une contraction et donc P a un point fixe par la contraction de Banach, qui est une solution intégrale unique au problème (3.1). □

3.3 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons vu quelques méthodes de résolution pour des équations différentielles semi-linéaires à domaine non dense avec retard basées sur quelques versions du théorème du point fixe pour établir l'existence et même l'unicité de la solution lorsque les hypothèses sont bien choisies.

Les théorèmes relatifs au point fixe fournissent un excellent outil pour ce genre de problème et pour tant d'autres.

Nous avons étudié les équations différentielles semi-linéaires à domaine non dense avec retard fini auquel cas l'espace de phase $C([-r, 0], \mathcal{E})$ est l'espace des fonctions continues de $[-r, 0]$ dans $\mathcal{E}$ muni de la convergence uniforme. On observe que lorsque le retard est non borné, on parlera d'équations différentielles semi-linéaires à domaine non dense avec retard infini et cette propriété a permis de développer une théorie complète d'équations différentielles semi-linéaires à retard sur des espace multi dimensionnels. Néanmoins, l'investigation des équations avec retard infini sur de tels espaces exige et nécessite le développement d'autre outils d'analyse fonctionnelle pour faire face aux problèmes liés à l'aspect qualitatif des solutions.

La nature du retard (discret, continus, infini, dépendant de l'état, ...) complique potentiellement l'étude de système.

Généralement la plupart des systèmes d'équations différentielles semi-linéaires à retard reste encore un problème ouvert.

Bibliographie

[1] W.Arendt,Resolvant positive operators and integrated semi-group,Proc.London Math.Soc., 3, vol.54, (1987),321-349.

[2] Ardjouni A. Djoudi A. A existence of periodic solutions for a second order nonlinear neutral differential equation with functional delay Elecronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 31, 1-9, (2012)

[3] Arino O. Hbid M. L, Dads E. A. Delay Differentials and Applications, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held inMarrakech, Morocco, September 2002. Springer Science Business Media, Vol. 205 pages 9-21 (2007)

[4] M. Adimy et K. Ezzinbi,Semi-groupes intégrés et équations diférentielles à retard en dimension infini, C R. Acad.Sci. Paris, t, 323, série, I(1996), 481-486.

[5] S.Busenberg and $B.W_u$, convergence theorems for integrated semi-group, Diff. Int. Eq.5,vol.3, May (1992),509-520.

[6] BurtonT.A.Stability and periodic. Solutions of ordinary functional differential equation, Academic Press.NY, (1985).

[7] G.Da Prato. E. Sinestrari, Differential operators with non-dense domains, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI .Sci. 14(1987)285-344

[8] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Walter de Gruyter, Berlin, 1985.

[9] Jin C. H. Luo J W. Fixed points and stability in neutal differential equation with variable delays, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 136, Nu. 3, 909-918, (2008)

[10] H. Hille, E. Functional Analysis and Semi-Groups. A.M.S, New York, 1948.

[11] J.K.hale, J,Kato, Phase space for retarded equation with infinite delay, Funkcial.Ekvac. 21 (1978) 11-41.

[12] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, Functional Differential Equation with infinite Delay, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1473, Springer, Berlin, 1991.

[13] M.Hieber, Integrated semi-grups and diff. operators an L^p, Dissertation, (1989).

[14] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003

[15] Kuang Y. Delay differential equations : with applications in population dynamics. Vol. 191. Academic Press, (1993).

[16] (H. Kellermann and M.Hieber, Integrated semigroup, J.Fun.Anal., 15, (1989), 160-180).

[17] E. Laamri, Mesures et intégrations, Convulution et Transformé de Fourier des Fonctions.Dunod 2001.

[18] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partical Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] Smart D.R,Fixed point Theorems, Cambridge tracts in mathematics,University, vol 66,(1974)

[20] H. Thieme, Integrated semi groupes and integrated solution to abstract cauchy problems, Journal of .Mathematical. Analysis and .Applications, 152, (1990), 416-447.

[21] H.Thieme, Semiflows generated by Lipschitz perturbation of non-densely defined operators, Diff. Integr. Equations 3, N06, (1990) 1035-1066.

[22] K. Yosida, Functional analsis,6^{th} end. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[23] Y.Yosida, K. On the différentiabilité and the représentation of one-paramètre semi-groupes of linear operators.J. Math. Japan,**1**(197-48), 15-21.

[24] Yorke J. A. Asymptotic stability for one dimensional differential- delay aquations, Journal of Differential equations 7.1 pages 189-202, (1970).

[25] E.Zeidler, Functional Analysis and Applications. Fixed point Theorems. Springer -Verlag, New York. 1986.

[26] E. Zeidler, Nonlineair Functional Analysis and its Applications. Fixed point Theorems. Springer-Verlag, New York. 1990.