République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

M. GANIAR MOUAFAK

Oscillation d'une équation différentielle d'ordre n dans les échelles de temps

Encadrant :

Mr. Abderrahmane Beniani

Maitre Conférence "A" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 2020

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. Mami Toufik (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Mr. Hammoudi Ahmed (Professeur)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mr. Beniani Abderrahmane (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2019/2020

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**

1.1 Calculs sur les échelles de temps . . . 3

1.1.1 Classification des points . . . 6

1.1.2 Dérivation . . . 7

1.1.3 Intégration . . . 12

1.1.4 Dérivation d'une fonction composée . . . 15

1.1.5 Polynômes généralisés . . . 17

1.2 Théorie de l'oscillation . . . 19

1.2.1 Fonction éventuellement Positive . . . 19

1.2.2 Fonction éventuellement Négative . . . 19

1.2.3 Fonction et équation Oscillante . . . 20

1.2.4 Etude de l'oscillation . . . 23

1.2.5 Critère d'oscillation . . . 23

2 Oscillation d'une équation différentielle d'ordre n **24**

2.1 Introduction . . . 24

2.2 Oscillation de l'équation 2.1 pour $\lambda > \alpha$ . . . 26

2.3 Oscillation de l'équation 2.1 pour $\lambda = \alpha$ . . . 33

2.4 Oscillation de l'équation 2.1 pour $\lambda < \alpha$ . . . 39

3 Oscillation d'une équation différentielle généralisée d'ordre n **41**

3.1 Introduction . . . 41

3.2 Résultats principales . . . 42

3.3 Oscillation de l'équation 3.1 pour $\alpha > \gamma$ . . . 50

3.4 Oscillation de l'équation 3.1 pour :$\alpha = \gamma$ . . . 54

3.5 Oscillation de l'équation 3.1 pour $\alpha < \gamma$ . . . 57

Conclusion **61**

Bibliographie **61**

REMERCIEMENTS

J'en profite humblement pour remercier publiquement toutes les personnes qui ont contribué positivement à mon éducation. Je donne d'abord l'honneur et la louange à Dieu. Il a encore une fois montré sa toute-puissance.

Je suis reconnaissant au Département de mathématiques de l'Université de Ain-Temouchent pour leur soutien sans fin. De plus, je remercie mes enseignants pour leur conseilles.

Je remercie mon encadreur **Dr.BENIANI**, Leur patience et leur confiance en ma capacité de réussir ont été remarquables. Je voudrais également remercier mes collègues de Master d'avoir fait de cette expérience une expérience inoubliable.

Je tiens à remercier le **Pr HAMMOUDI** de m'avoir initié à la recherche et au domaine des échelles de temps. Je voudrais également remercier **Dr.BENAISSA-CHERIF** pour ses conseils avisés.

Je suis reconnaissant à tous ceux qui me sont entrés dans ma vie.

Introduction

L'étude des équations dynamiques dans l'échelle du temps remonte à son fondateur **Stefan Hilger** (1988), et constitue un nouveau domaine d'exploration encore assez théorique en mathématiques. L'étude des échelles de temps a conduit à plusieurs applications importantes, par exemple dans l'étude des modèles de population d'insectes, des réseaux de neurones, des transferts de chaleur et des modèles épidémiques.

Outre l'aspect d'unification de la théorie des échelles de temps, il existe un aspect d'extension, qui pourrait même avoir un impact plus large sur l'avenir de l'oscillation. Au lieu d'équations différentielles ou de différences, tout autre type d'équation dynamique est également applicable à la théorie , et il pourrait être très important de comprendre les propriétés **d'oscillation** des solutions de ces équations plus générales.

La théorie de **l'oscillation** en tant que partie de la théorie qualitative des équations dynamiques a été développée rapidement au cours des dix dernières années et quelques articles intéressants ont été publiés. Le mémoire actuel s'intéresse à **l'oscillation** de différents types d'équations dynamiques d'ordre n sur des échelles de temps.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le **premier chapitre**, nous introduisons quelques notions sur la théorie des échelles de temps, nous présentons aussi les propriétés oscillatoires et non oscillatoires des équations différentielles. L'existence de solutions éventuellement positives ou éventuellement négative d'équations différentielles avec des coefficients variables sont également considérés.

Au **chapitre deux**, on s'intéresse à l'oscillation d'équations différentielles d'ordre n sur les échelles de temps de type :

$$\left(a(t)(x^{\Delta^{n-1}}(t))^{\alpha}\right)^{\Delta} + q(t)(x^{\sigma}(t))^{\lambda} = 0, \quad t \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Enfin, dans le **chapitre trois**, on étudiera l'oscillation d'équations différentielles d'ordre n dans un cas plus générale que le chapitre précédent, nous donnons quelques résultats sur l'oscillation des équations dynamiques sur des échelles de temps.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques concepts de base concernant le calcul sur des échelles de temps que l'on doit connaître pour comprendre le reste de ce mémoire. La plupart de ces résultats seront présentés sans preuve. Des preuves peuvent être trouvées dans les livres [1, 2].

1.1 Calculs sur les échelles de temps

La théorie des échelles de temps est un nouveau domaine des mathématiques qui unifie et étend l'analyse discrète et continue. Le calcul dans l'échelle de temps nous permet de modéliser des situations dans lesquelles le comportement est à la fois continu et discret. Par exemple, il peut modéliser des populations d'insectes qui sont continues pendant la saison, disparaissent, disons, en hiver, alors que leurs ufs sont en incubation ou en dormance, puis éclosent dans une nouvelle saison, donnant naissance à une population qui ne se chevauche pas.

Définition 1.1 (Échelle de temps)**.** Une échelle de temps est un sous-ensemble fermé arbitraire non vide des nombres réels.

Exemple 1.1. Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont des échelles de temps.

Exemple 1.2. Les ensembles suivantes sont des échelles de temps : $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$, $[0, 1]$, $[0, 1] \cup \{3, 4\}$,$[0, 1] \cup [3, 4]$.

Exemple 1.3.

1. L'ensemble $h\mathbb{Z} = \{\cdots, -2h, -h, 0, h, 2h, \cdots\}$ avec $h \in \mathbb{R}$ est une échelle de temps.
2. L'ensemble $\overline{q^{\mathbb{Z}}} = \left\{\cdots, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, \cdots\right\} \cup \{0\}$ est une échelle de temps.
3. L'ensemble $\mathbb{H} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \ldots\right\}$ des nombres harmoniques est une échelle de temps.

Exemple 1.4. Les ensembles suivantes : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $]0,1[$, $[0,1[$, $]0,1]$ ne sont pas des échelles de temps.

Tout au long de ce chapitre, nous désignerons une échelle de temps par le symbole $\mathbb{T}$

Nous supposons tout au long de ce mémoire qu'une échelle de temps $\mathbb{T}$ a la topologie induite de la topologie standard.

Nous introduisons maintenant les notions de base liées aux échelles de temps. Nous commençons par définir les opérateurs de saut avant et arrière.

Définition 1.2 (Opérateur de saut avant)**.** Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$ on définit l'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par :

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}$$

Dans cette définition, nous posons par convention $\inf \phi = \sup \mathbb{T}$ (c'est-à-dire $\sigma(M) = M$ si $\mathbb{T}$ a un maximum M) , où ϕ désigne l'ensemble vide.

Exemple 1.5. soit $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, alors on a :

$$\sigma(0) = 1, \quad \sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 4$$

$$\sigma(4) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 4\} = \inf \phi = \sup \mathbb{T} = 4.$$

Exemple 1.6. Soit $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$, alors on a :

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \sigma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sigma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}, \quad \cdots$$

$$\sigma(0) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = \inf \mathbb{T} = 0.$$

$$\sigma(1) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > 1\} = \inf \phi = \sup \mathbb{T} = 1.$$

pour $n \neq 0$ et $n \neq 1$ on a $t = \frac{1}{n}$ alors $\sigma(t) = \frac{1}{n-1} = \frac{t}{1-t}$

Exemple 1.7. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\sigma(t) = t - 1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{\cdots, -2h, -h, 0, h, 2h, \cdots\}$ tel que $h > 0$ alors $\sigma(t) = t + h$ pour tout $t \in h\mathbb{Z}$.

Définition 1.3 (Opérateur de saut arrière)**.** Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$ on définit l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par :

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Dans cette définition, nous mettons $\sup \phi = \inf \mathbb{T}$ (c'est-à-dire $\rho(m) = m$ si $\mathbb{T}$ a un minimum m), où ϕ désigne l'ensemble vide.

Exemple 1.8. Soit $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, alors on a :

$$\rho(1) = 0, \quad \rho(2) = 1, \quad \rho(3) = 2, \quad \rho(4) = 3$$

$$\rho(0) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < 0\} = \sup \phi = \inf \mathbb{T} = 0.$$

Exemple 1.9. soit $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$, alors on a :

$$\rho(1) = \frac{1}{2}, \quad \rho(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}, \quad \rho(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}, \quad \cdots$$

$$\rho(0) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < 0\} = \sup \phi = \inf \mathbb{T} = 0.$$

pour $n \neq 0$ et $n \neq 1$ on a $t = \frac{1}{n}$ alors $\rho(t) = \frac{1}{n+1} = \frac{t}{1+t}$

Exemple 1.10. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\rho(t) = t - 1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{\cdots, -2h, -h, 0, h, 2h, \cdots\}$ tel que $h > 0$ alors

$\rho(t) = t - h$ pour tout $t \in h\mathbb{Z}$.

1.1.1 Classification des points

Définition 1.4. Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$

1) Si $\sigma(t) > t$, on dit que t est dispersé à droite.

2) Si $\rho(t) < t$, on dit que t est dispersé à gauche.

3) Les points qui sont à la fois dispersés à droite et à gauche sont dites isolés.

4) Si $t < \sup \mathbb{T}$ et $\sigma(t) = t$, on dit que t est dense à droite.

5) Si $t > \inf \mathbb{T}$ et $\rho(t) = t$, on dit que t est dense à gauche.

6) Les point qui sont à la fois dense à droite et à gauche sont dites dense.

t dispersé à droite	$t < \sigma(t)$
t dense à droite	$t = \sigma(t)$
t dispersé à gauche	$\rho(t) < t$
t dense à droite	$\rho(t) = t$
t point isolé	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t point dense	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

TABLE 1.1 – Classification des points

Définition 1.5. Si $\mathbb{T}$ a un maximum dispersé a gauche M, alors on définit $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Définition 1.6. La fonction granulation $\mu : \mathbb{T} \to [0; \infty[$ est définie par

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}.$$

Exemple 1.11. Soit $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, alors

$$\mu(0) = 1 - 0 = 1, \quad \mu(1) = 2 - 1 = 1, \quad \mu(2) = 3 - 2 = 1,$$

$$\mu(3) = 4 - 3 = 1, \quad \mu(4) = 4 - 4 = 0$$

Exemple 1.12. Soit $\mathbb{T} = \{t = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$, alors on a :

$$\mu(0) = \sigma(0) - 0 = 0, \quad \mu(1) = \sigma(1) - 1 = 0, \quad \mu(\frac{1}{2}) = \sigma(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\mu(\frac{1}{3}) = \sigma(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \mu(\frac{1}{4}) = \sigma(\frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Exemple 1.13. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{\cdots, -2h, -h, 0, h, 2h, \cdots\}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ pour tout $t \in h\mathbb{Z}$.

Remarque 1.1. Dans ce mémoire nous nous intéressons au comportement oscillatoire quand $t \to +\infty$, nous supposerons pour le reste que $\mathbb{T}$ est une échelle de temps qui n'est pas bornée de la forme $[t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$.

1.1.2 Dérivation

Le calcul sur les échelles de temps a été initié par **Stefan Hilger** afin de créer une théorie capable d'unifier l'analyse discrète et continue. En effet, ci-dessous nous introduirons la delta dérivée pour une fonction f définie sur $\mathbb{T}$.
Considérons maintenant une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et définissons la dérivée dite delta (ou Hilger) de f en un point $t \in T^k$.

Définition 1.7 (Différentiabilité)**.** Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Nous définissons f^{Δ}(t) comme le nombre, à condition qu'il existe, comme suit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t, ($U =]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T}$) pour certain $\delta > 0$, tel que :

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad s \in U,\, s \neq \sigma(t)$$

f^{Δ} est Δ-dérivée de la fonction f.

Remarque 1.2. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ la delta dérivée coïncide avec la dérivée classique.

Définition 1.8 (Continuité)**.** Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-continues sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

et on note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ Δ-différentiables et ses dérivées rd-continues sur $\mathbb{T}^k$ par :

$$\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.1. Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions , on a alors :

- Si f est continue, alors f est rd-continue.
- Si f est rd-continue et g continue, alors $g \circ f$ est rd-continue .

Théorème 1.2. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Alors on a :

1) Si f est différentiable en t, alors f est continue en t.

2) Si f est continue en t et t est dispersé à droite , alors f est différentiable en t avec :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

3) Si t est dense à droite, alors f est différentiable en t si la limite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe comme un nombre fini. Dans ce cas

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

4) Si f est Δ-différentiable en t, alors

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

où $f^{\sigma} := f o \sigma$

Exemple 1.14. Si $f(t) = c$ tel que c est une constante alors $f^{\Delta}(t) = 0$ quelque soit l'échelle de temps $\mathbb{T}$.
Si $f(t) = t$ alors $f^{\Delta}(t) = 1$ pour n'importe quelle échelle de temps $\mathbb{T}$.

Ensuite, nous aimerions pouvoir donner les dérivés de sommes, de produits et de quotients de fonctions différentiables. Ceci est possible selon le théorème suivant :

Théorème 1.3. Supposons que f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $t \in \mathbb{T}^{k}$. Alors :

1) La somme $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est différentiable en t avec

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

2) Pour toute constante α, $\alpha . f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est différentiable en t avec :

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

3) Le produit $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est différentiable en t avec :

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

4) Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est différentiable en t avec :

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

5) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en t avec :

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

Exemple 1.15. Soit $f(t) = t^2$ La dérivée de f est :

$$f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t) = 2t + \mu(t)$$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta}(t) = 2t = f^{'}(t)$.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ et on a $f^{\Delta}(t) = 2t + 1$.
- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ et on a $f^{\Delta}(t) = 2t + h$.

Exemple 1.16. Soit $f(t) = \dfrac{1}{t}$ la dérivée de f est donnée par : $f^{\Delta}(t) = \dfrac{-1}{t\sigma(t)} = \dfrac{-1}{t^2 + t\mu(t)}$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta}(t) = \dfrac{-1}{t^2} = f^{'}$.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ et on a $f^{\Delta}(t) = \dfrac{-1}{t^2 + t}$.
- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ et on a $f^{\Delta}(t) = \dfrac{-1}{t^2 + ht}$.

Exemple 1.17. Soit $f(t) = t^3$ la dérivée de f est :

$$f^{\Delta}(t) = t^2 + t\sigma(t) + (\sigma(t))^2 = 3t^2 + 3t\mu(t) + (\mu(t))^2$$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta}(t) = 3t^2 = f^{'}$.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ et on a $f^{\Delta}(t) = 3t^2 + 3t + 1$.
- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ et on a $f^{\Delta}(t) = 3t^2 + 3ht + h^2$.

Exemple 1.18. Soit $f(t) = \sqrt{t}$ la dérivée de f est :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}} = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t + \mu(t)}}$$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = f^{'}$.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ et on a $f^{\Delta}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t+1}}$.
- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ et on a $f^{\Delta}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t+h}}$.

Définition 1.9 (Dérivée d'ordre supérieur)**.** Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite deux fois Δ-dérivable sur $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ si la dérivée f^{Δ} est différentiable (Δ-dérivable) sur $\mathbb{T}^k$. Elle est notée $f^{\Delta\Delta}$ ou $(f^{\Delta})^{\Delta}$ ou f^{Δ^2}.

On généralise, en disant que f est n fois Δ-dérivable sur $\mathbb{T}^{k^n} = (\mathbb{T}^{k^{n-1}})^k$ si $\underbrace{\left(...\left((f^{\Delta})^{\Delta}\right)^{\Delta}...\right)}_{n\ fois}$ existe. Elle est notée $f^{\Delta^n} = \left(f^{\Delta^{n-1}}\right)^{\Delta}$.

On notera l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont n fois différentiables et f^{Δ^n} rd-continues sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$\mathcal{C}^n_{rd} = \mathcal{C}^n_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^n_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Exemple 1.19. Soit $f(t) = t^2$, la dérivée seconde de f est :

$$f^{\Delta^2}(t) = (t + \sigma(t))^{\Delta} = (2t + \mu(t))^{\Delta} = 2 + \mu^{\Delta}(t)$$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta^2}(t) = 2 = f^{''}(t)$.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ et $\mu^{\Delta}(t) = 0$ et on a $f^{\Delta^2}(t) = 2$.

- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ et $\mu^{\Delta}(t) = 0$ et on a $f^{\Delta^2}(t) = 2$.

Exemple 1.20. Soit $f(t) = t^3$, la dérivée seconde de f est :

$$\begin{aligned} f^{\Delta^2}(t) &= \left((t^3)^{\Delta}\right)^{\Delta} \\ &= \left(t^2 + t\sigma(t) + (\sigma(t))^2\right)^{\Delta} \\ &= \left(3t^2 + 3t\mu(t) + (\mu(t))^2\right)^{\Delta} \\ &= 6t + 6\mu(t) + 3t\mu^{\Delta}(t) + (4\mu(t) + \mu^{\sigma}(t))\mu^{\Delta}(t). \end{aligned}$$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta^2}(t) = 6t = f^{''}(t)$.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ est constante et on a $f^{\Delta^2}(t) = 6t + 6$.
- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que $h > 0$ alors $\mu(t) = h$ constante et on a $f^{\Delta^2}(t) = 6t + 6h$.

1.1.3 Intégration

Définition 1.10 (Fonction Primitive)**.** Une fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite une primitive de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si :

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \;\; \textit{pour tout} \;\; t \in \mathbb{T}^k.$$

Exemple 1.21. La fonction primitive de $f(t) = 1$ est $F(t) = t + c$ tel que c est une constante.

Exemple 1.22. La fonction primitive de $\dfrac{t + \sigma(t)}{2}$ est $\dfrac{t^2}{2}$.

Théorème 1.4 (Existence de Primitive)**.** Toute fonction rd-continue a une primitive.

Définition 1.11 (Intégrale)**.** Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction rd-continue , et soit $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une primitive de f, alors on définit l'intégrale (de Cauchy) de f par :

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r) \;\; \text{pour tout} \quad r, s \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.5 (Propriétés élémentaires de l'intégrale)**.** Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{C}_{rd}$, alors :

(1) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\, \Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$

(2) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$

(3) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

(4) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$

(5) $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

(6) $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

(7) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

(8) si $f(t) \geq 0$ pour tout $a \leq t \leq b$ alors $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$

(9) si $|f(t)| \leq g(t)$ sur $[a, b[$, alors

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

Théorème 1.6. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque et $t \in \mathbb{T}$, alors

$$\int_t^{\sigma(t)} f(t)\Delta t = \mu(t)f(t).$$

Démonstration : Soit F une primitive de f, on a donc

$$\int_t^{\sigma(t)} f(t)\Delta t = F(\sigma(t)) - F(t) = \mu(t)\frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\sigma(t) - t} = \mu(t)f(t)$$

$\square$

Théorème 1.7 (Calcul d'intégrales)**.** Soit a , $b \in \mathbb{T}$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}$.

(1) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$
où l'intégrale de droite est l'intégrale de Riemann habituelle du calcul.

(2) Si $[a,b]$ n'est constitué que de points isolés, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & \text{si } a > b \end{cases}$$

(3) Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, où $h > 0$, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} h.f(kh) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} h.f(kh) & \text{si } a > b \end{cases}$$

(4) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors
$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{k=a}^{b-1} f(k) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum\limits_{k=b}^{a-1} f(k) & \text{si } a > b \end{cases}$$

Exemple 1.23.

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\int_0^4 t\Delta t = \int_0^4 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^4 = 8.$
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\int_0^4 t\Delta t = \sum\limits_{k=0}^{k=3} k = 6.$
- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ alors $\int_0^4 t\Delta t = \sum\limits_{k=0}^{k=\frac{4}{h}-1} h(kh) = h^2 \sum\limits_{k=0}^{k=\frac{4}{h}-1} k = 8 - 2h.$

1.1.4 Dérivation d'une fonction composée

Nous considérons ici deux théorèmes concernant la dérivation d'une fonction composée.

Théorème 1.8 (Règle de dérivation d'une fonction composée [3])**.** Supposons que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continu, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ- différentiable sur $\mathbb{T}^k$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continuement différentiable. Il existe alors $c \in [t, \sigma(t)]$ avec $(f \circ g)^{\Delta}(t) = f(g(c))g^{\Delta}(t)$.

Exemple 1.24. Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^3 + 1$, $g(t) = t^2$. Nous avons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable sur $\mathbb{T}^k$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continuement différentiable, $\sigma(t) = t + 1$. Alors

$$g^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t$$

et,

$$(f \circ g)^{\Delta}(1) = f^{'}(g(c))g^{\Delta}(1) = 3g^2(c)(\sigma(1) + 1) = 9c^4.$$

Ici, $c \in [1, \sigma(1)] = [1, 2]$. Aussi,

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = g^3(t) + 1 = t^6 + 1$$

pour que

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = (\sigma(t))^5 + t(\sigma(t))^4 + t^2(\sigma(t))^3 + t^3(\sigma(t))^2 + t^4\sigma(t) + t^5$$

et,

$$(f \circ g)^{\Delta}(1) = (\sigma(1))^5 + (\sigma(1))^4 + (\sigma(1))^3 + (\sigma(1))^2 + \sigma(1) + 1 = 63.$$

D'après le théorème 1.8, nous obtenons $63 = 9c^4$, donc $c = \sqrt[4]{7} \in [1, 2]$.

Théorème 1.9 (Règle de chaîne [3])**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuement différentiable et supposons que $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable. Alors $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable, et on a la formule :

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f^{'}(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t).$$

Corollaire 1.1 (voir [14])**.** On suppose que $g(t)$ est Δ-différentiable et de signe constante, alors

$$(g^{\alpha}(t))^{\Delta} = \alpha \left\{ \int_0^1 [(1-h)\, g(t) + hg^{\sigma}(t)]^{\alpha-1} dh \right\} g^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.25. Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $g(t) = t+1$. On notera que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable. On a $f^{'}(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$, $\mu(t) = 1$, $g^{\Delta}(t) = 1$ et $g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t) = t + 1 + h$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} f^{'}(g(t) + h\mu(t))g^{\Delta}(t) &= f^{'}(t+1+h) \\ &= \frac{2(t+1+h)}{(1+(t+1+h)^2)^2} \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.9 , nous concluons que $f \circ g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable et

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{\Delta}(t) &= -\int_0^1 \frac{2(t+1+h)}{\left(1+(t+1+h)^2\right)^2} dh \\ &= -\int_0^1 \frac{d(t+1+h)^2}{\left(1+(t+1+h)^2\right)^2} \\ &= \left. \frac{1}{1+(t+1+h)^2} \right|_{h=0}^{h=1} \\ &= \frac{1}{1+(t+2)^2} - \frac{1}{1+(t+1)^2} \\ &= \frac{-2t-3}{(t^2+4t+5)(t^2+2t+3)} \end{aligned}$$

1.1.5 Polynômes généralisés

On va donner la définition des polynômes généralisés dans les échelles de temps (voir[**?**]).

Définition 1.12. Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $h_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$h_k(t,s) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ \int\limits_s^t h_{k-1}(\tau,s)\Delta\tau & \text{si} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

$h(t,s)$ s'appelle polynôme généralisé.

Exemple 1.26.

$$h_1(t,s) = \int\limits_s^t h_0(\tau,s)\Delta\tau = \int\limits_s^t 1\Delta\tau = t - s$$

pour une échelle de temps $\mathbb{T}$ quelconque.

Exemple 1.27. Si $\mathbb{T} = [0,1] \cup [3,4]$, on a :

$$h_0(t,0) = 1, \qquad h_1(t,0) = t$$

$$h_2(t,0) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{t^2}{2} - 2 & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

et

$$h_3(t,0) = \begin{cases} \dfrac{t^3}{6} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \dfrac{t^3}{6} - 2t + \dfrac{8}{3} & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Exemple 1.28.

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors

$$h_n(t,s) = \frac{(t-s)^n}{n!} \qquad \text{pour tout} \quad t,s \in \mathbb{R} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors

$$h_n(t,s) = \frac{(t-s)^{(n)}}{n!} = \begin{pmatrix} t-s \\ n \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout} \quad t,s \in \mathbb{Z}$$

où $(t-s)^{(n)} = (t-s)(t-s-1)\cdots(t-s-n+1)$ est la fonction dite de chute

- Si $\mathbb{T} = \overline{q^N}$ avec $q > 1$ alors

$$h_n(t,s) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{t - q^m s}{\sum\limits_{j=0}^{m} q^j}.$$

- Si $\mathbb{T} = h\mathbb{N}$ alors

$$h_n(t,s) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (t - ih - s)}{n!} \quad t > s.$$

En général pour $t \geq s$, nous avons que $h_k(t,s) \geq 0$, et

$$h_k(t,s) \leq \frac{(t-s)^k}{k!} \text{ pout tout } t > s\,,\, k \in \mathbb{N}$$

Nous considérons également les monômes de Taylor $g_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, qui sont définis de manière récursive.

Définition 1.13. Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $g_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$g_k(t,s) := \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; k = 0 \\ \int\limits_s^t g_{k-1}(\sigma(\tau), s)\Delta\tau & \text{si} \;\; k \geq 1 \end{cases}$$

Si on désigne par $g^{\Delta}(t,s)$ la Δ-dérivée de g par rapport a t , alors on a :

$$g_{k+1}^{\Delta}(t,s) = g_k\left(\sigma(t), s\right) \quad k \in \mathbb{N}\,,\; t \in \mathbb{T}$$

pour chaque $s \in \mathbb{T}$ fixe. On peut voir que

$$h_k(t,s) = (-1)^k g_k(s,t).$$

1.2 Théorie de l'oscillation

Ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour étudier l'oscillation et la non-oscillation des solutions d'équations dynamiques sur des échelles de temps.De nombreux résultats concernant les équations dynamiques du second ordre ont déjà été établis [?, 15].

Son objectif principal est de présenter quelques concepts de base de la théorie des oscillations des équations différentielles et d'esquisser quelques résultats préliminaires qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.

1.2.1 Fonction éventuellement Positive

Nous avons besoin tout d'abord de donner la définition mathématique d'une fonction éventuellement positive.

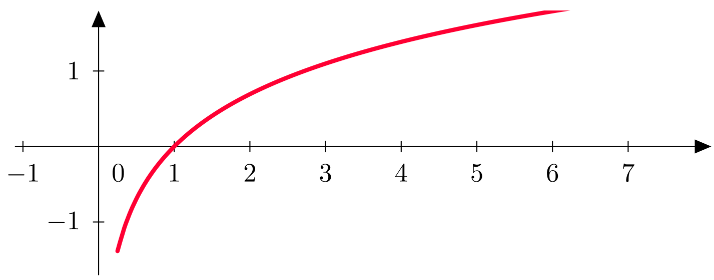
Définition 1.14. Une fonction $f : [a; +\infty[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est dite éventuellement positive, s'il existe $t_0 \in [a; +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que : $f(t) > 0$ pour tout $t \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$.

Exemple

La fonction

$$f(x) = \ln(x)$$

est éventuellement positive.



1.2.2 Fonction éventuellement Négative

Nous avons besoin tout d'abord de donner la définition mathématique d'une fonction éventuellement négative.

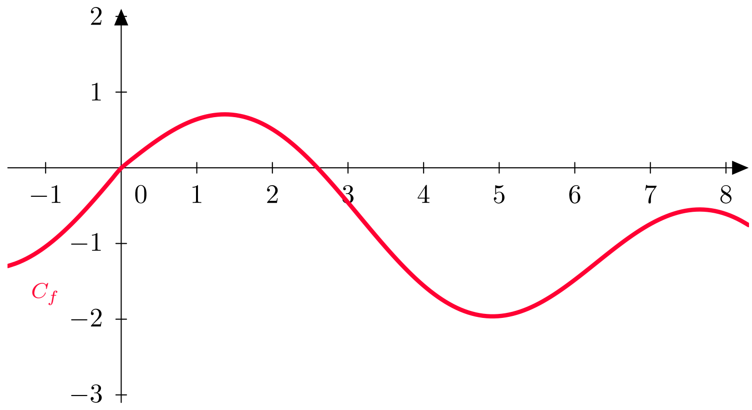
Définition 1.15. Une fonction $f : [a; +\infty[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est dite éventuellement négative, s'il existe $t_0 \in [a; +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que : $f(t) < 0$ pour tout $t \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$.

Exemple

La fonction

$$f(x) = \sin(x) - \frac{|x|}{5}$$

est éventuellement négative.



1.2.3 Fonction et équation Oscillante

Nous avons besoin de donner la définition mathématique d'une fonction oscillante et d'une équation différentielle oscillante.

Définition 1.16. On dit qu'une fonction $f : [a; +\infty[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est oscillante sur $[a; +\infty[_{\mathbb{T}}$ si elle ni éventuellement positive ni éventuellement négative ; c'est à dire pour $T \in [a; +\infty[_{\mathbb{T}}$ assez grand , l'équation $f(t) = 0$ admet une infinité des zéros au voisinage de l'infini sur $T \in [a; +\infty[_{\mathbb{T}}$. Elle est dite non oscillante dans le cas contraire.

Voici une autre définition d'une fonction oscillante.

Définition 1.17 (voir [?])**.** Une fonction f est appelée oscillante si pour tout $t_1 \in [a, +\infty[$, il existe $t_2 \in [t_1, +\infty[$ tel que $f(t_2)f(\sigma(t_2)) \leq 0$.

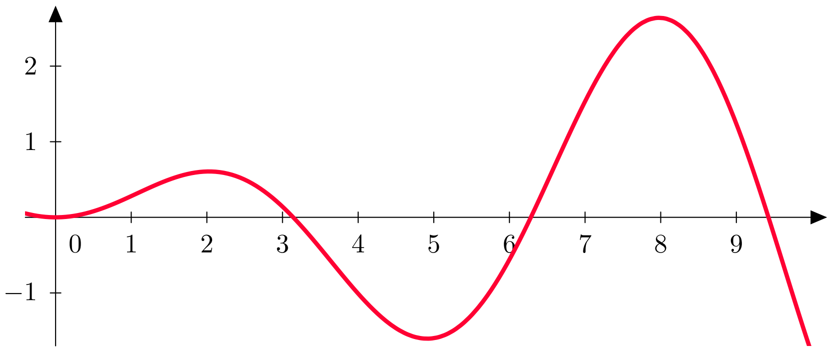
Définition 1.18 (Non-oscillation (voir[?]))**.** La fonction f est non oscillante si elle est éventuellement positive ou négative, c'est-à-dire qu'il existe $t_1 \in [a, \infty[$ tel que $f(t)f(\sigma(t)) > 0$ pour tout $t \in [t_1, \infty[$.

Exemple

La fonction $f(x) = \frac{x}{3}\sin(x)$ est oscillante car l'équation

$$\frac{x}{3}\sin(x) = 0$$

admet une infinité des zéros au voisinage de l'infini.



Définition 1.19. On dit que l'équation différentielle est oscillante si et seulement si toute solution de l'équation est oscillante.

Exemple 1.29. On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^{''}(t) + x(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0; +\infty[$$

elle a des solutions périodiques $x_1(t) = \sin(t)$ et $x_2(t) = \cos(t)$ sur $[0; +\infty[$ et ces deux solutions sont oscillantes,et toutes les solutions sont oscillantes.
donc on dit que l'équation est oscillante.

Exemple 1.30. Une équation dynamique donnée peut avoir des solutions oscillantes et non oscillantes. Prenons par exemple l'équation suivante :

$$x^{\Delta^2}(t) + \frac{8}{3}x^{\Delta}(t) + \frac{4}{3}x(t) = 0$$

où $t \in \mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Les solutions de cette équation aux différence sont faciles à trouver. Parmi les solutions on a les deux solutions suivantes :

$$x_1(t) = (-1)^t \ \text{,et} \quad x_2(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

Il est clair que x_1 est oscillante et x_2 est non oscillante.

Exemple 1.31. On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^{''}(t) - \frac{1}{t}x^{'}(t) + 4t^2x(t) = 0$$

cette équation admet une solution non périodique $x(t) = \sin(t^2)$. Cette solution est oscillante.

Exemple 1.32. On considère l'équation différentielle à retard suivante :

$$x^{''}(t) + \frac{1}{2}x^{'}(t) - \frac{1}{2}x(t-\pi) \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

dont la solution $y(t) = 1 - \sin(t)$ a une infinité de zéros. Cette solution est oscillante.

Exemple 1.33. On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^{''}(t) - x(-t) = 0$$

Cette équation admet une solution oscillante $x_1(t) = sin(t)$ et une solution non oscillante $x_2(t) = e^t + e^{-t}$.

Exemple 1.34. l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{1}{t}x^{'}(t)\right)^{'} + \frac{3}{4t^3}x(t) = 0$$

admet une solution non-oscillante$x(t) = \sqrt{t})$ tandis que l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{t}x^{'}(t)\right)^{'} + \frac{3}{4t^3}x(ct) = 0$$

est oscillante pour tout $c > \exp\left(\frac{8e}{3}\right)$.

1.2.4 Etude de l'oscillation

Définition 1.20. Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Une équation dynamique du second ordre de la forme $(py^{\Delta})^{\Delta}+qy^{\sigma}=0$ est appelée une équation dynamique du second ordre auto-adjointe.

1.2.5 Critère d'oscillation

Théorème 1.10 (Théorème de Wintner [1])**.** Considérons l'équation auto-adjointe $(py^{\Delta})^{\Delta}+qy^{\sigma}=0$. Supposons que $\sup\mathbb{T}=\infty$,$a\in\mathbb{T}$,$\mu(t)\geq K>0$ et $0<p(t)\leq M$ pour tout $t\in[a,\infty)$ et $\int_a^{\infty} q(t)\Delta t=\infty$. Alors l'équation auto-adjointe est oscillante sur $[a,\infty[_{\mathbb{T}}$.

Exemple 1.35. Pour $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}$ où $q>1$, l'équation suivante :

$$x^{\Delta\Delta}+\frac{c}{q(q-1)t^2}x^{\sigma}=0$$

tel que $c>0$ est oscillante sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.11 (Théorème de Leighton-Wintner [1])**.** Considérons l'équation auto-adjointe $(py^{\Delta})^{\Delta}+qy^{\sigma}=0$. Supposons $a\in\mathbb{T}$, $p>0$, $\sup\mathbb{T}=\infty$, et

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{p(t)}\Delta t=\int_a^{\infty} q(t)\Delta t=\infty.$$

Alors l'équation auto-adjointe oscille sur $[a,\infty)$.

Exemple 1.36. Pour $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}}$ où $q>1$, l'équation suivante :

$$x^{\Delta\Delta}+\frac{1}{t\ln(2t)}x^{\sigma}=0$$

est oscillante sur $\mathbb{T}$.

Chapitre 2

Oscillation d'une équation différentielle d'ordre n

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'oscillation de toute solution de l'équation différentielle d'ordre n suivante dans l'échelle de temps $\mathbb{T}$:

$$\left(a(t)(x^{\Delta^{n-1}}(t))^{\alpha}\right)^{\Delta} + q(t)(x^{\sigma}(t))^{\lambda} = 0, \quad t \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}} \tag{2.1}$$

On suppose qu'elle admet au moins une solution. $\mathbb{T}$ est une échelle de temps arbitraire $\mathbb{T} \subsetneq \mathbb{R}$ avec $\sup \mathbb{T} = \infty$, n est un entier positif impair.

On impose les conditions suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ α et λ sont des quotients positifs de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers positifs impairs.

$(\mathcal{H}_2)$ a et q : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^{+}$ deux fonctions réelles rd-continues, $a^{\triangle}(t) \geq 0$ pour $t \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$.

$(\mathcal{H}_3)$ $\int\limits_{t}^{\infty} \left(\dfrac{1}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = \infty.$

On considère quelques lemmes et théorèmes qui seront utiles dans les démonstrations.

Lemme 2.1 (voir [11]). Soient A, B, λ des constantes strictement positives. On a l'inégalité suivante :

$$Bx - Ax^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \frac{\lambda^{\lambda} B^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1} A^{\lambda}} \text{ pour } x \geq 0.$$

Lemme 2.2 ([?], Corollaire 1). Pour $n \in \mathbb{N}$ $s, t \in \mathbb{T}$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ alors

$$\int_{s}^{t} \int_{\eta_{n+1}}^{t} \cdots \int_{\eta_2}^{t} f(\eta_1) \Delta\eta_1 \Delta\eta_2 \cdots \Delta\eta_{n+1} = (-1)^n \int_{s}^{t} h_n(s, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta.$$

Théorème 2.1 (Lemme de Kiguarde,[7]). Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_{rd}^{n}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $sup\mathbb{T} = \infty$. Supposons que f est soit éventuellement positive ou éventuellement négative et soit f^{Δ^n} oscillante , donc il existe $t_1 \in [t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$, $m \in [0, n[_{\mathbb{N}}$ tel que $(-1)^{n-m} f(t) f^{\Delta^n}(t) \geq 0$ est vérifiée avec :

(i) $f(t) f^{\Delta^j}(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$ et tout $j \in [0, m[_{\mathbb{N}}$.

(ii) $(-1)^{m+j} f(t) f^{\Delta^j}(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$, et pour tout $j \in [m, n[_{\mathbb{N}}$.

Lemme 2.3 ([?]). Soit $\sup \mathbb{T} = +\infty$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}^{n}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$,$(n \geq 2)$. De plus, on suppose que le Théorème de Kiguarde est vrai avec $m \in [1, n[_{\mathbb{N}}$ et $f^{\Delta^n} \leq 0$ dans $\mathbb{T}$. Alors il existe $t_1 \in \mathbb{T}$ suffisamment grand tel que :

$$f^{\Delta}(t) \geq h_{m-1}(t, t_1) f^{\Delta^m}(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Corollaire 2.1. Supposons que les conditions du Lemme sont satisfaites. Alors

$$f(t) \geq h_m(t, t_1) f^{\Delta^m}(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$$

.

Lemme 2.4 ([8]). Si X et Y sont deux réels positifs et $\lambda > 1$, alors

$$X^{\lambda} - \lambda X Y^{\lambda-1} + (\lambda - 1) Y^{\lambda} \geq 0,$$

et l'égalité est vraie si et seulement si $X = Y$.

Démonstration : On va étudier le signe de $P(X,Y) = X^{\lambda} - \lambda X.Y^{\lambda-1} + (\lambda - 1)Y^{\lambda}$ pour $X > 0$ et $Y > 0$ et $\lambda > 1$ divisons par Y^{λ} et on pose $z = \dfrac{X}{Y}$ et posons $f(z) = z^{\lambda} - \lambda.z + (\lambda - 1)$ le tableau de variation de cette fonction est donné ci-dessous :

z	0		1		$+\infty$
$f(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$	$\lambda - 1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

on voit bien que $f(z) \geq 0$ et $f(z) = 0 \iff z = 1$ c'est à dire pour $X = Y$. Pour $Y = 0$ la démonstration est triviale. □

Lemme 2.5. On suppose que $\sup \mathbb{T} = +\infty$ et $f \in \mathcal{C}^1_{rd}([t_0; +\infty[\,, \mathbb{R}^+)$ et $\lambda > 0$ alors :

$$f^{\Delta}.(f^{\sigma})^{-\lambda} \leq \frac{\left(f^{1-\lambda}\right)^{\Delta}}{1-\lambda} \leq f^{\Delta}.f^{-\lambda}.$$

2.2 Oscillation de l'équation 2.1 pour $\lambda > \alpha$

Nous allons présenter les résultats de l'oscillation de l'équation (2.1) dans le cas $\lambda > \alpha$

Théorème 2.2. Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ et

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s), t_0).\left(\left(\frac{1}{a(s)}\right)\int_s^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{1/\alpha} \Delta s = \infty,$$

si

$$\int_{t_0}^{\infty} h_{n-2}(s, t_0)\left(\left(\frac{1}{a(s)}\right)\int_s^{\infty} q(u)\Delta u\right)^{1/\alpha} \Delta s = \infty,$$

alors l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration : Soit $x(t)$ une solution non oscillante de l'équation (2.1) dans $[t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ il suffit de discuter le cas éventuellement positive (car $-x(t)$ est aussi solution si x est l'est).

On a $x(t) > 0$ pour $t \geq t_1 \geq t_0$

On sait que :

$$\left(a(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} \leq 0 \quad \text{pour} \quad t \geq t_1$$

car

$$\left(a(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + q(t)(x(t))^{\lambda} = 0$$

$$\left(a(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} = -q(t)(x(t))^{\lambda} \leq 0$$

D'après le Théorème 2.1, on trouve $x^{\Delta^{n-1}}(t) > 0$ pour $t \geq t_1$, sinon on obtient une contradiction.

Maintenant $a^{\Delta}(t) \geq 0$ pour $t \in [t_0; \infty[_{\mathbb{T}}$ on a :

$$\left(a(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} = a^{\Delta}(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha} + a^{\sigma}(t)\left(\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} \leq 0,$$

ceci implique

$$\left(\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} \leq 0 \quad \text{pour} \quad t \geq t_1.$$

On pose : $y = x^{\Delta^{n-1}} > 0$ dans $[t_1; +\infty)_{\mathbb{T}}$. D'après le Théorème 1.9, on voit que :

$$\begin{aligned} 0 \geq (y^{\alpha})^{\Delta} &= \alpha y^{\Delta} \int_0^1 \left(y + h\mu y^{\Delta}\right)^{\alpha-1} dh \\ &= \alpha . y^{\Delta} \int_0^1 (hy + (1-h)y^{\sigma})^{\alpha-1} dh \\ &\geq \alpha y^{\Delta} \int_0^1 (hy)^{\alpha-1} dh \\ &= y^{\Delta} y^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Puisque $y^{\alpha-1} > 0$ alors $y^{\Delta} = x^{\Delta^n} \leq 0$ dans $[t_1; +\infty)_{\mathbb{T}}$ et par le lemme (2.2), il existe un entier $m \in \{1, 3, ..., n-1\}$ tel que (i), (ii) du Théorème (2.1) sont vérifiés dans $[t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}$.

il est clair que $x^{\Delta}(t) > 0$ pour tout $t \geq t_1$ [voir [5], Lemme 4.2.3].

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$x(\sigma(t)) \geq x(t) > c \text{ pour tout } t \geq t_1.$$

On suppose que : $x^{\Delta^{n-2}} < 0$ et $x^{\Delta^{n-3}} > 0$ pour tout $t \geq t_1$. Par intégration de l'équation (2.1) de $t \geq t_1$ à $u \geq t$

$$\left(a.\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) + q(t).(x^{\sigma}(t))^{\lambda} = 0$$

$$\int_t^u \left(a.\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(s)\Delta s + \int_t^u q(s).(x^{\sigma}(s))^{\lambda}\Delta s = 0$$

$$-\int_t^u \left(a.\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(s)\Delta s = \int_t^u q(s).(x^{\sigma}(s))^{\lambda}\Delta s$$

$$\begin{aligned} a(t).\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha} &\geq a(t).\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha} - a(u).\left(x^{\Delta^{n-1}}(u)\right)^{\alpha} \\ &= \int_t^u q(s).(x^{\sigma}(s))^{\lambda}\Delta s \\ &\geq c^{\lambda}\int_t^u q(s)\Delta s \end{aligned}$$

$$\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha} \geq \frac{1}{a(t)}c^{\lambda}\int_t^u q(s)\Delta s$$

$$x^{\Delta^{n-1}}(t) \geq \left(\frac{1}{a(t)}c^{\lambda}\int_t^u q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

passant à la limite $u \to +\infty$

$$x^{\Delta^{n-1}}(t) \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}}\left((a(t))^{-1}\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Par intégration de cette dernière relation de t à v puis faisant v tendre vers $+\infty$

$$\int_t^v x^{\Delta^{n-1}}(s)\Delta s \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_t^v \left(\frac{1}{a(u)} \int_u^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta u.$$

On déduit que,

$$x^{\Delta^{n-2}}(t) \leq x^{\Delta^{n-2}}(t) - x^{\Delta^{n-2}}(v) \leq -c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_t^v \left(\frac{1}{a(u)} \int_u^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta u,$$

donc

$$-x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_t^{+\infty} \left(\frac{1}{a(u)} \int_u^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta u \geq 0$$

et

$$\int_{t_1}^t -x^{\Delta^{n-2}}(t)\Delta s \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_{t_1}^t \int_{\eta_1}^{+\infty} \left((a(\eta))^{-1} \int_\eta^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta u \Delta \eta \geq 0$$

c'est à dire :

$$x^{\Delta^{n-3}}(t_1) - x^{\Delta^{n-3}}(t) \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_{t_1}^t \int_{\eta_1}^{+\infty} \left((a(\eta))^{-1} \int_\eta^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta u \Delta \eta \geq 0$$

et

$$x^{\Delta^{n-3}}(t_1) \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_{t_1}^t \int_{\eta_1}^{+\infty} \left((a(\eta))^{-1} \int_\eta^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta u \Delta \eta \geq 0.$$

D'après le lemme (2.1), et on posons

$$f(\eta) = \left((a(\eta))^{-1} \int_\eta^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

alors

$$x^{\Delta^{n-3}}(t_1) \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} (-1)^1 \int_{t_1}^t h_1(t_1, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta \eta \geq 0$$

mais $\quad -h_1(t_1, \sigma(\eta)) = h_1(t_1, \sigma(\eta))$ donc

$$x^{\Delta^{n-3}}(t_1) \geq c^{\frac{\lambda}{\alpha}} \int_{t_1}^t h_1(\sigma(\eta), t_1) \left((a(\eta))^{-1} \int_\eta^{+\infty} q(s)\Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta \eta \geq 0$$

et par passage à la limite

$$\int_{t_1}^{+\infty} h_1(\sigma(\eta), t_1)\left((a(\eta))^{-1} \int_{\eta}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta\eta \leq c^{-\frac{\lambda}{\alpha}} x^{\Delta^{n-3}}(t_1)$$

ou bien avec changement des variables on trouve,

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s), t_0)\left((a(s))^{-1} \int_{s}^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s \leq c^{-\frac{\lambda}{\alpha}} x^{\Delta^{n-3}}(t_0) < \infty.$$

ce qui fait une contradiction avec la quatrième hypothèse du théorème.
il suit du lemme (2.3) avec $m = n - 1$ que

$$x^{\Delta}(t) \geq h_{n-2}(t, t_1) x^{\Delta^{n-1}}(t) \quad \text{pour tout} \;\; t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

D'autre part, on a

$$a(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha} \geq \int_{t}^{+\infty} q(s)(x(\sigma(s)))^{\lambda} \Delta s \geq \int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s (x(\sigma(t)))^{\lambda}$$

donc,

$$x^{\Delta^{n-1}}(t) \geq \left((a(t))^{-1} \int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} (x(\sigma(t)))^{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

ensuite,

$$x^{\Delta}(t) \geq h_{n-2}(t, t_1) x^{\Delta^{n-1}}(t) \geq h_{n-2}(t, t_1)\left((a(t))^{-1} \int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} (x(\sigma(t)))^{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

donc,

$$\frac{x^{\Delta}(t)}{(x(\sigma(t)))^{\frac{\lambda}{\alpha}}} \geq h_{n-2}(t, t_1)\left((a(t))^{-1} \int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

En intégrant la dernière inégalité de t_1 à t, et on appliquons le lemme 2.5, nous obtenons

$$h_{n-2}(t,t_1)\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{x^{\Delta}(t)}{(x(\sigma(t)))^{\frac{\lambda}{\alpha}}} \leq \frac{\left(x^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}\right)^{\Delta}(t)}{1-\frac{\lambda}{\alpha}}$$

puis

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} h_{n-2}(u,t_1)\left(\frac{1}{a(u)}\int_u^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta u &\leq \int_{t_1}^{t}\frac{\left(x^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}\right)^{\Delta}(u)}{1-\frac{\lambda}{\alpha}}\Delta u\\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-\lambda}x^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}(t)-\frac{\alpha}{\alpha-\lambda}x^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}(t_1)\\ &\leq -\frac{\alpha}{\alpha-\lambda}x^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}(t_1),\end{aligned}$$

et par passage à la limite et avec un changement des variables on trouve ;

$$\int_{t_1}^{+\infty} h_{n-2}(s,t_1)\left(\frac{1}{a(s)}\int_u^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s \leq \frac{\alpha}{\lambda-\alpha}x^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}(t_1) < \infty.$$

Ce qui donne une contradiction. □

Exemple 2.1. Pour $a(t)=t^2$ et $q(t)=\dfrac{\beta}{t^2}$, $\alpha=\dfrac{7}{3}$, et $\lambda>\alpha$ pour $t>0$.

$$\int_t^{+\infty}\left(\frac{1}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s=\int_t^{+\infty}\left(\frac{1}{s^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s=\int_t^{+\infty}\frac{1}{s^{\frac{2}{\alpha}}}\Delta s=\int_t^{+\infty}\frac{1}{s^{\frac{6}{7}}}\Delta s=+\infty$$

On a aussi $h_1(t,s)=t-s$ et $h_1(\sigma(s),t_0)=\sigma(s)-t_0$ et donc pour $t_0>0$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s),t_0)\left(\frac{1}{a(s)}\int_s^{+\infty}\frac{\beta}{u^2}\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s &= \int_{t_0}^{+\infty}(\sigma(s)-t_0)\left(\frac{1}{s^2}\int_s^{+\infty}\frac{\beta}{u^2}\Delta u\right)^{\frac{3}{7}}\Delta s\\ &= \int_{t_0}^{+\infty}(\sigma(s)-t_0)\left(\frac{1}{s^2}\times\frac{\beta}{s}\right)^{\frac{3}{7}}\Delta s\\ &= \beta^{\frac{3}{7}}\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\sigma(s)-t_0}{s^{\frac{9}{7}}}\Delta s=+\infty\end{aligned}$$

car $\dfrac{\sigma(s)-t_0}{s^{\frac{9}{7}}} \sim \dfrac{1}{s^{\frac{2}{7}}}$ au voisinage de ∞.
et on a aussi

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_{n-2}(s,t_0)\left(\frac{1}{a(s)}\int_{s}^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s = \int_{t_0}^{+\infty} h_{n-2}(s,t_0)\left(\frac{\beta}{s^3}\right)^{\frac{3}{7}}\Delta s$$
$$= \beta^{\frac{3}{7}}\int_{t_0}^{+\infty}\frac{h_{n-2}(s,t_0)}{s^{\frac{9}{7}}}\Delta s = +\infty \quad \text{pour } n \geq 3$$

Ce qui fait que l'équation :

$$\left(t^2\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\frac{7}{3}}\right)^{\Delta} + \frac{\beta}{t^2}(x^{\sigma}(t))^{\lambda} = 0 \;\; \text{pour } \beta > 0\,, n \geq 3 \;\; et \;\; \lambda > \frac{7}{3}$$

est oscillante.

Théorème 2.3. Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$, et

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s),t_0).\left(\left(\tfrac{1}{a(s)}\right)\int_{s}^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{1/\alpha}\Delta s = \infty,$$

et si

$$\limsup_{t\to+\infty} h_{n-1}(t,t_0)\left(\frac{1}{a(t)}\int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} = +\infty,$$

alors l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration : On applique le corollaire (2.1) avec $m = n-1$ on trouve

$$x(t) \geq h_{n-1}(t,t_1)x^{\Delta^{n-1}}(t) \qquad \text{pour tout } t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}},$$

et par conséquent,

$$(x(t)) \geq h_{n-1}(t,t_1)\left((a(t))^{-1}\int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} x(\sigma(t))^{\frac{\lambda}{\alpha}}$$
$$\geq h_{n-1}(t,t_1)\left((a(t))^{-1}\int_{t}^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} x((t))^{\frac{\lambda}{\alpha}},$$

donc,

$$(x(t))^{1-\frac{\lambda}{\alpha}} \geq h_{n-1}(t,t_1)\left((a(t))^{-1}\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et par passage à la limite quand $t \to +\infty$ on a

$$\limsup_{t\to+\infty} h_{n-1}(t,t_1)\left((a(t))^{-1}\int_t^{+\infty} q(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \limsup_{t\to+\infty} (x(t))^{1-\frac{\lambda}{\alpha}} < +\infty,$$

d'où une contradiction. □

2.3 Oscillation de l'équation 2.1 pour $\lambda = \alpha$

Nous allons présenter les résultats de l'oscillation de l'équation (2.1) dans le cas $\lambda = \alpha$

Théorème 2.4. Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ et

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s),t_0)\left(\frac{1}{a(s)}\int_s^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s = +\infty, \tag{2.2}$$

et s'il existe une fonction g décroissante positive et $\Delta-$différentiable tel que pour tout $t_1 \in [t_0,+\infty[_{\mathbb{T}}$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}\left[g(s)q(s) - a(s)g^{\Delta}(s)(h_{n-1}(s,t_0))^{-\alpha}\right]\Delta s = +\infty, \tag{2.3}$$

alors l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration : Soit $x(t)$ une solution non oscillante de l'équation (2.1) dans $[t_0;+\infty[_{\mathbb{T}}$ il suffit de discuter le cas éventuellement positive (car $-x(t)$ est aussi solution si x est l'est). On sait que $x(t) > 0$ pour $t \geq t_1 \geq t_0$.
D'abord on a : $x(t) \geq h_{n-1}(t,t_1)x^{\Delta^{n-1}}(t)$ pour tout $t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$. Nous définissons la fonction w par

$$w := ag\left(\frac{x^{\Delta^{n-1}}}{x}\right)^{\alpha} \quad \text{dans } [t_1,+\infty[_T.$$

Alors, pour $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$, on a

$$\begin{aligned} w^{\Delta} &= \left(\frac{g}{x^{\alpha}}\right)^{\Delta}\left(a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right) + \left(\frac{g}{x^{\alpha}}\right)^{\sigma}\left(a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} \\ &= \left(\frac{g}{x^{\alpha}}\right)^{\Delta}\left(a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right) + \left(\frac{g}{x^{\alpha}}\right)^{\sigma}(-q(x^{\sigma})^{\alpha}) \\ &= \frac{g^{\Delta}x^{\alpha} - g(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}(x^{\sigma})^{\alpha}} a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha} - qg^{\sigma}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} w^{\Delta} &\leq \frac{g^{\Delta}x^{\alpha} - g(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}(x^{\sigma})^{\alpha}} a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha} - gq \\ &= \frac{g^{\Delta}}{(x^{\sigma})^{\alpha}} a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha} - \frac{g(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}(x^{\sigma})^{\alpha}} a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha} - gq \\ &\leq -gq + ag^{\Delta}\frac{1}{(x^{\sigma})^{\alpha}}\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Puisque $x^{\sigma} \geq x$ car $x^{\Delta} > 0$ et donc $\dfrac{1}{x^{\sigma}} < \dfrac{1}{x}$.

Alors

$$w^{\Delta} \leq -gq + ag^{\Delta}\left(\frac{x^{\Delta^{n-1}}}{x}\right)^{\alpha}.$$

Nous avons :

$$x(t) \geq h_{n-1}(t, t_1)x^{\Delta^{n-1}}(t) \quad \text{pour tout } t \in [t_1, +\infty)_T$$

ce qui fait

$$\frac{x^{\Delta^{n-1}}(t)}{x(t)} \leq (h_{n-1}(t, t_1))^{-1},$$

on trouve

$$w^{\Delta}(t) \leq -g(t)q(t) + a(t)g^{\Delta}(t)(h_{n-1}(t, t_1))^{-\alpha}$$

Intégrant la dernière inégalité de $t_2 > t_1$ à $t \geq t_2$, on aura

$$w(t) \leq w(t_2) - \int_{t_2}^{t} \left[g(s)q(s) - a(s)g^{\Delta}(s)(h_{n-1}(s, t_1))^{-\alpha}\right]\Delta s,$$

donc,

$$\int_{t_2}^{t} \left[g(s)q(s) - a(s)g^{\Delta}(s)(h_{n-1}(s,t_1))^{-\alpha}\right] \Delta s \leq w(t_2) - w(t)$$

puis

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_{t_2}^{t} \left[g(s)q(s) - a(s)g^{\Delta}(s)(h_{n-1}(s,t_1))^{-\alpha}\right] \Delta s \leq \limsup_{t\to+\infty} \left[w(t_2) - w(t)\right]$$

Ce qui donne la contradiction avec (2.3). □

Théorème 2.5. Sous les conditions $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ et

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s),t_0)\left(\frac{1}{a(s)}\int_{s}^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = +\infty, \tag{2.4}$$

et s'il existe une fonction g décroissante positive et $\Delta-$différentiable tel que pour tout $t_1 \in [t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup \int_{t_1}^{t} \left[g(s)q(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} a(s)\left(g^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1} (h_{n-2}(s,t_0)g(s))^{-\alpha}\right] \Delta s = +\infty \tag{2.5}$$

alors l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration : Soit $x(t)$ une solution non oscillante de l'équation (2.1) dans $[t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ il suffit de discuter le cas éventuellement positive (car $-x(t)$ est aussi solution si x est l'est). On sait que $x(t) > 0$ pour $t \geq t_1 \geq t_0$.

On pose

$$w := ag\left(\frac{x^{\Delta^{n-1}}}{x}\right)^{\alpha} \quad \text{dans } [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Nous obtenons

$$w^{\Delta} = -gq\left(\frac{x(\sigma(t))}{x(t)}\right)^{\alpha} + \left(a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right)^{\sigma} \left[\frac{g^{\Delta}x^{\alpha} - g.(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}(x^{\sigma})^{\alpha}}\right].$$

Par le Théorème 1.9, on trouve

$$(x^{\alpha})^{\Delta} = \alpha x^{\Delta}\int_0^1 \left[x+\mu h x^{\Delta}\right]^{\alpha-1}dh \geq \alpha x^{\Delta}\int_0^1 x^{\alpha-1}dh = \alpha x^{\Delta}x^{\alpha-1},$$

donc

$$w^{\Delta} \leq -gq + \left(\frac{g^{\Delta}}{g^{\sigma}}\right)w^{\sigma} - \alpha\left(\frac{g}{g^{\sigma}}\right)\left(\frac{x^{\Delta}}{x}\right)w^{\sigma},$$

pour $t \geq t_2 \geq t_1$, on sait que

$$\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}x^{\Delta^{n-1}}}{x} = \left(\frac{w}{g}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\left(\frac{w}{g}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{dans} [t_2, +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w}{g}\right)^{\Delta} &= \left(\frac{a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}}{x^{\alpha}}\right)^{\Delta} \\
&= \frac{\left(a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}x^{\alpha} - a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)^{\sigma}} \\
&= \frac{-q(x^{\sigma})^{\alpha}x^{\alpha} - a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)^{\sigma}} \\
&= -q - \frac{a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}(x^{\alpha})^{\Delta}}{x^{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)^{\sigma}}
\end{aligned}$$

et on a : $(x^{\alpha})^{\Delta} \geq \alpha x^{\alpha-1}x^{\Delta} > 0$, ce qui fait

$$\left(\frac{w}{g}\right)^{\Delta} \leq -q - a\left(x^{\Delta^{n-1}}\right)^{\alpha}\alpha x^{\alpha-1}x^{\Delta} \leq 0$$

donc la fonction $\frac{w}{g}$ est décroissante et alors $\left(\frac{w}{g}\right)^{\sigma} \leq \left(\frac{w}{g}\right)$ ensuite $\left(\left(\frac{w}{g}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{w}{g}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ donc $\left(\frac{x^{\Delta^{n-1}}}{x}\right) \geq a^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{w}{g}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ alors on a :

$$\begin{aligned}
w^{\Delta} &\leq -gq + \left(\frac{g^{\Delta}}{g^{\sigma}}\right)w^{\sigma} - \alpha\left(\frac{g}{(g^{\sigma})}\right)(h_{n-2})\left(a^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{w^{\sigma}}{g^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)w^{\sigma} \\
w^{\Delta} &\leq -gq + \left(\frac{g^{\Delta}}{g^{\sigma}}\right)w^{\sigma} - \alpha\left(\frac{a^{-\frac{1}{\alpha}}g}{(g^{\sigma})^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)(h_{n-2})\left(w^{\sigma}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

pour $t \geq t_2 \geq t_1$, on pose

$$\begin{cases} X = \left(\alpha \left(a^{-\frac{1}{\alpha}}\right) g h_{n-2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\dfrac{w}{g}\right)^{\sigma} \\ Y = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha} (g^{\Delta})^{\alpha} \left(\left(\dfrac{a^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha g h_{n-2}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\alpha} \end{cases}$$

et d'après le lemme 2.4 avec $\lambda = \dfrac{\alpha+1}{\alpha} > 1$, on conclut que

$$\alpha \left(\frac{g}{(g^{\sigma})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\right) \left(\frac{1}{h_{n-2}}\right) (w^{\sigma})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - \left(\frac{g^{\Delta}}{g^{\sigma}}\right) w^{\sigma} + \frac{a}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{\left(g^{\Delta}\right)^{\alpha+1}}{g^{\alpha} h_{n-2}^{\alpha}} \geq 0,$$

et donc,

$$w^{\Delta} \leq -gq + \frac{a}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{g h_{n-2}}\right)^{\alpha} \left(g^{\Delta}\right)^{\alpha+1}.$$

Par intégration de t_2 à t

$$w(t) \leq w(t_2) - \int_{t_2}^{t} \left[g(s)q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{g(s)h_{n-2}(s,t_1)}\right)^{\alpha} \left(g^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1}\right] \Delta s,$$

ou encore

$$\int_{t_2}^{t} \left[g(s)q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{g(s)h_{n-2}(s,t_1)}\right)^{\alpha} \left(g^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1}\right] \Delta s \leq w(t_2) - w(t).$$

Par conséquent,

$$\limsup_{t\to+\infty} \int_{t_2}^{t} \left[g(s)q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{g(s)h_{n-2}(s,t_1)}\right)^{\alpha} \left(g^{\Delta}(s)\right)^{\alpha+1}\right] \Delta s \leq \limsup_{t\to+\infty} w(t_2) - w(t)$$

Ce qui fait une contradiction avec (2.5). □

Théorème 2.6. Sous les conditions $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ et

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s), t_0) \left(\frac{1}{a(s)} \int_{s}^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = +\infty, \tag{2.6}$$

et s'il existe une fonction g décroissante positive et $\Delta-$différentiable tel que pour tout $t_1 \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \int_{t_1}^{t} \left[g(s)q(s) - \left(\frac{1}{4\alpha}\right) \frac{(a(s))^{\sigma}\big(g^{\Delta}(s)\big)^2}{g(s)(h_{n-1}(s,t_1))^{\alpha-1} h_{n-2}(s,t_1)} \right] \Delta s = +\infty, \quad (2.7)$$

alors l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration : Soit $x(t)$ une solution non oscillante de l'équation (2.1) dans $[t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ il suffit de discuter le cas éventuellement positive (car $-x(t)$ est aussi solution si x est l'est). On sait que $x(t) > 0$ pour $t \geq t_1 \geq t_0$

Nous définissons la fonction w par

$$w := g \frac{a\big(x^{\Delta^{n-1}}\big)^{\alpha}}{x^{\alpha}} \quad \text{dans } [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

On trouve

$$w^{\Delta} \leq -gq + \left(\frac{g^{\Delta}}{g^{\sigma}}\right) w^{\sigma} - \alpha \left(\frac{a^{-\frac{1}{\alpha}} g}{g^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\right) (h_{n-2}) \left(w^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} (w^{\sigma})^2$$

et nous avons

$$\frac{x}{x^{\Delta^{n-1}}} \geq h_{n-1},$$

ceci implique dans $[t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}$ que

$$\begin{aligned} w^{\frac{1}{\alpha}-1} &= a^{\frac{1}{\alpha}-1} g^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{x^{\Delta^{n-1}}}{x}\right)^{1-\alpha} \\ &= a^{\frac{1}{\alpha}-1} g^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{x}{x^{\Delta^{n-1}}}\right)^{\alpha-1} \\ &\geq a^{\frac{1}{\alpha}-1} g^{\frac{1}{\alpha}-1} h_{n-1}^{\alpha-1} \end{aligned}$$

on aura

$$w^{\Delta} \leq -gq + \left(\frac{g^{\Delta}}{g^{\sigma}}\right) w^{\sigma} - \alpha \left(\frac{g(h_{n-1}^{\sigma})^{\alpha-1} h_{n-2}}{(a)^{\sigma} (g^{\sigma})^{2}}\right) (w^{\sigma})^{2}$$

$$= -gq - \left(\frac{\left(\alpha h_{n-2}(h_{n-1}^{\sigma})^{\alpha-1} g\right)^{\frac{1}{2}}}{(a^{\sigma})^{\frac{1}{2}} g^{\sigma}} w^{\sigma} - \frac{(a^{\sigma})^{\frac{1}{2}} g^{\Delta}}{2\left(\alpha g h_{n-2}(h_{n-1}^{\sigma})^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{2} + \frac{(a^{\sigma}) \left(g^{\Delta}\right)^{2}}{4\alpha g h_{n-2}(h_{n-1}^{\sigma})^{\alpha-1}} .$$

$$\leq -gq + \left(\frac{1}{4\alpha}\right) \left(\frac{(a^{\sigma}) \left(g^{\Delta}\right)^{2}}{g h_{n-2}(h_{n-1}^{\sigma})^{\alpha-1}}\right)$$

Intégrant la dernière inégalité de t_2 à t, on obtient

$$\int_{t_1}^{t} w^{\Delta}(s)\Delta s \leq \int_{t_1}^{t} -g(s)q(s) + \left(\frac{1}{4\alpha}\right) \left(\frac{(a^{\sigma}(s)) \left(g^{\Delta}(s)\right)^{2}}{g(s) h_{n-2}(s,t_1) (h_{n-1}^{\sigma}(s,t_1))^{\alpha-1}}\right) \Delta s$$

donc

$$w(t) - w(t_1) \leq \int_{t_1}^{t} -g(s)q(s) + \left(\frac{1}{4\alpha}\right) \left(\frac{(a^{\sigma}(s)) \left(g^{\Delta}(s)\right)^{2}}{g(s) h_{n-2}(s,t_1) (h_{n-1}^{\sigma}(s,t_1))^{\alpha-1}}\right) \Delta s,$$

et aussi

$$\int_{t_1}^{t} \left[g(s)q(s) - \left(\frac{1}{4\alpha}\right) \left(\frac{(a^{\sigma}(s)) \left(g^{\Delta}(s)\right)^{2}}{g(s) h_{n-2}(s,t_1) (h_{n-1}^{\sigma}(s,t_1))^{\alpha-1}}\right)\right] \Delta s \leq w(t_1) - w(t) \leq w(t_1) < \infty.$$

Ce qui fait une contradiction avec (2.7). □

2.4 Oscillation de l'équation 2.1 pour $\lambda < \alpha$

Nous allons présenter les résultats de l'oscillation de l'équation (2.1) dans le cas $\lambda < \alpha$

Théorème 2.7. Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$ et

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\sigma(s), t_0) \left(\frac{1}{a(s)} \int_{s}^{+\infty} q(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = +\infty, \tag{2.8}$$

et si

$$\int_{t_0}^{+\infty} (a(t))^{-\frac{\lambda}{\alpha}} q(s)(h_{n-1}(s,t_0))^{\lambda} \Delta s = +\infty, \tag{2.9}$$

alors l'équation (2.1) est oscillante.

Démonstration : Soit $x(t)$ une solution non oscillante de l'équation (2.1) dans $[t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ il suffit de discuter le cas éventuellement positive.

On pose $w(t) = a(t)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\alpha}$ dans l'équation (2.1). On a

$$\begin{aligned}
-w^{\Delta}(t) &= -\left(a(t)x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\Delta} \\
&= q(t)x^{\lambda}(\sigma(t)) \\
&\geq q(t)x^{\lambda}(t) \\
&\geq q(t)h_{n-1}^{\lambda}(t,t_1)\left(x^{\Delta^{n-1}}(t)\right)^{\lambda} \\
&\geq q(t)h_{n-1}^{\lambda}(t,t_1)\left(\frac{w(t)}{a(t)}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}} \\
&\geq q(t)h_{n-1}^{\lambda}(t,t_1)a(t)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}(w(t))^{\frac{\lambda}{\alpha}}
\end{aligned}$$

et

$$q(t)h_{n-1}^{\lambda}(t,t_1)a(t)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \leq -(w(t))^{-\frac{\lambda}{\alpha}} w^{\Delta}(t).$$

Par intégration de t_1 à t

$$\int_{t_1}^{t} q(s)h_{n-1}^{\lambda}(s,t_1)a(s)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\Delta s \leq -\int_{t_1}^{t} (w(t))^{-\frac{\lambda}{\alpha}} w^{\Delta}(t)\Delta s,$$

donc

$$\int_{t_1}^{t} q(s)h_{n-1}^{\lambda}(s,t_1)a(s)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\Delta s \leq \frac{\alpha}{\alpha-\lambda}(w(t_1))^{\frac{\alpha-\lambda}{\alpha}} - \frac{\alpha}{\alpha-\lambda}(w(t))^{\frac{\alpha-\lambda}{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha-\lambda}(w(t_1))^{\frac{\alpha-\lambda}{\alpha}}$$

et $\frac{\alpha}{\alpha-\lambda}(w(t_1))^{\frac{\alpha-\lambda}{\alpha}}$ est un nombre fini, ce qui une contradiction avec (2.9).

□

Chapitre 3

Oscillation d'une équation différentielle généralisée d'ordre n

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques premiers progrès dans le sens de la généralisation des résultats d'oscillation donnés dans le chapitre précédent de ce mémoire au cas des échelles de temps. En effet nous allons traiter le problème dans un cas général soit l'équation suivante :

$$\left(a(t)\left(x^{\Delta^{n-2}}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2} + f(t, x^{\alpha}(t)) = 0 \qquad t \in [t_0; \infty[_{\mathbb{T}} \tag{3.1}$$

avec $\sup \mathbb{T} = \infty$, n nombre pair $n \geq 4$, α et γ des nombres rationnels de la forme $\dfrac{p}{q}$ tel que p et q sont impaires.
$a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ tel que $a^{\Delta}(t) > 0$ pour $t \in [t_0; \infty[_{\mathbb{T}}$ et f une fonction qui satisfait les conditions suivantes :

(H_1) : la fonction $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue

(H_2) : $f(t, -x) = -f(t, x)$ pour tout $t \in [t_0; \infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(H_3) : Il existe une fonction $r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ positive et rd - continue tel que :
$\dfrac{f(t, x)}{x} \geq r(t)$; $\forall t \in [t_0; \infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}^*$

Lemme 3.1 (voir[6]). Si $n \in \mathbb{N}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}^n([t_0; +\infty), \mathbb{R}^+)$ Alors les affirmations suivantes sont vraies :

$$i)\ \lim_{t\to+\infty} \inf f^{\Delta^n}(t) > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f^{\Delta^k}(t) = +\infty \quad \forall\, k \in [0,n)_{\mathbb{N}}$$
$$ii)\ \lim_{t\to+\infty} \sup f^{\Delta^n}(t) < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f^{\Delta^k}(t) = -\infty \quad \forall\, k \in [0,n)_{\mathbb{N}}$$

3.2 Résultats principales

Dans cette section , on établit quelques conditions suffisantes pour garantir que toute solution de l'équation (3.1) est oscillante dans $[t_0;\infty[_{\mathbb{T}}$

On commence par donner les lemmes suivantes :

Lemme 3.2. Supposons que la solution x de (3.1) est éventuellement positive et :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a(t)} = \lambda \in \mathbb{R}_+^* \tag{3.2}$$

Alors il existe $t_1 \in [t_0;\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que :

$$\Big(a(t)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta} > 0\,,\ \ \forall t \in [t_1;+\infty)_{\mathbb{T}}$$

Démonstration : Supposons que x est une solution éventuellement positive de (3.1), alors il existe $t_1 \in [t_0;+\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1;+\infty[_{\mathbb{T}}$.
Par (3.1), en déduit que la fonction $\Big(a(t)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}$ est décroissante sur $[t_1,+\infty[_T$.
On va montrer que c'est une fonction positive c'est à dire

$$\Big(a(t)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta} > 0\,,\ \ \forall t \in [t_1;+\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Par absurde, on suppose le contraire, donc il existe une constante $M > 0$ et $t \in [t_2;+\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que :

$$\Big(a(t)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta} < -M < 0\,,\ \ \forall t \in [t_2;+\infty[_{\mathbb{T}}\,.$$

En intégration de t_2 a t on obtient

$$\int_{t_2}^{t}\Big(a(s)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(s)\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}\Delta s \leq \int_{t_2}^{t} -M\Delta s < 0,$$

et donc

$$a(t)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma} \leq -Mt + Mt_2 + a(t_2)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t_2)\Big)^{\gamma}.$$

On pose $\eta = Mt_2 + a(t_2)\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t_2)\Big)^{\gamma}$.

On obtient

$$\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma} \leq \frac{-Mt+\eta}{a(t)}.$$

Par passage à la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\Big)^{\gamma} \leq \lim_{t\to+\infty}\frac{-Mt+\eta}{a(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a(t)} \times \lim_{t\to+\infty}(-Mt+\eta) = -\infty,$$

Puisque $\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ oùγ_1 et, γ_2 sont des entiers positifs impairs, alors $\lim_{t\to+\infty} x^{\Delta^{n-2}}(t) = -\infty$.

D'après le lemme 2.1, en déduit que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$, donc x est éventuellement positive. D'où une contradiction. $\square$

Lemme 3.3. Supposons que la solution x de (3.1) est éventuellement positive et (3.2) vérifiée, si de plus

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a(t)}\int_{t}^{+\infty} r(s)\Delta s = +\infty \tag{3.3}$$

Alors il existe $t_1 \in [t_0;\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que :

$$x^{\Delta^{n-2}}(t) > 0 \ \ , \forall t \in [t_1, +\infty[_{T}.$$

Démonstration : On suppose que x est une solution éventuellement positive de (3.1).

Par le lemme 3.2, en déduit qu'il existe $t_1 \in [t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que x^{Δ^k} sont de signe constante sur $[t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$ pour $k \in [1,n-1[_{\mathbb{N}}$. On suppose que $y(t) = x^{\Delta^{n-2}} < 0$ pour tout $t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$.

On a :

$$(a(y)^{\gamma})^{\Delta}(t) = a^{\Delta}(t)(y(t))^{\gamma} + a^{\sigma}(t)(y^{\gamma})^{\Delta}(t) > 0 \quad , \quad \forall t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Puisque $a(t) > 0$, et $a^{\Delta}(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$. On trouve $((y)^{\gamma})^{\Delta} > 0$ pour tout $t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$, et encore

$$(y^{\gamma})^{\Delta}(t) = \gamma y^{\Delta}(t)\int_0^1 (hy(t) + (1-h)y^{\sigma}(t))^{\gamma-1}dh \quad \text{pour tout } \ t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Par conséquent $y^{\Delta}(t) = x^{\Delta^{n-1}} < 0$ pour tout $t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$.

D'après le Théorème 2.1 il existe $t_2 \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que $x^{\Delta}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [t_2,+\infty[_{\mathbb{T}}$, il existe une constante $c > 0$ tel que $x(t) > c$ pour tout $t \in [t_2,+\infty[_{\mathbb{T}}$.

On sait que la fonction $\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}$ est décroissante sur $[t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$.

Donc pour tout $t \in [t_1,+\infty[_{\mathbb{T}}$, on a :

$$a(t)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) = a(t_1)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left(a(s)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(s)\Delta s.$$

On pose $\eta = a(t_1)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t_1)$, On obtient

$$a(s)\left(\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(s) \geq a(t)\left(\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) \quad , \ \forall s \in [t_1,t]\,.$$

Donc

$$a(t)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) \geq \eta + \left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)\int_{t_1}^{t}\Delta s \geq \eta + (t-t_1)\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)$$

De l'équation (3.1) on trouve

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) = -f(t,x^{\alpha}(t)) \leq -r(t)x^{\alpha}(t).$$

Par intégration de t à u avec $u > t$

$$\int_t^u -\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(s)\Delta s \geq \int_t^u r(s)x^{\alpha}(s)\Delta s.$$

Ceci implique

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) \geq \left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) - \left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(u) \geq \int_t^u r(s)x^{\alpha}(s)\Delta s.$$

Par passage à la limite quand $u \to +\infty$ on aura :

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) \geq \left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) - \left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(u) \geq \int_t^{+\infty} r(s)x^{\alpha}(s)\Delta s$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) &\geq \frac{\eta}{a(t)} + \frac{t-t_1}{a(t)} \int_t^{+\infty} r(s)x^{\alpha}(s)\Delta s \\
&\geq \frac{\eta}{a(t)} + c^{\alpha}\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\right) \int_t^{+\infty} r(s)\Delta s \quad \text{pour } \ t \in [t_2, +\infty[_T \\
&\geq \frac{\eta}{a(t)} + c^{\alpha}\left(\frac{t}{2a(t)}\right) \int_t^{+\infty} r(s)\Delta s \quad \text{pour } \ t \in [t_3, +\infty[_{\mathbb{T}}.
\end{aligned}$$

Où $t_3 \geq 2t_1$ donc

$$\lim_{t \to +\infty} x^{\Delta^{n-2}}(t) = +\infty.$$

D'où une contradiction. $\square$

Lemme 3.4 (voir [4])**.** Supposons que x est une solution éventuellement positive de (3.1) tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{a(t)} = \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{a(t)} \int_t^{+\infty} r(s)\Delta s = +\infty. \tag{3.4}$$

Alors il existe $t_1 \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$x^{\Delta^k}(t) > 0 \quad \text{pour tout } \ t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}} \ \text{ et pour tout } \ k \in [1, n-1[_{\mathbb{N}}.$$

Démonstration : D'après le lemme précédente les fonctions x^{Δ^k} sont de signe constant sur $[t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$, pour $k \in [1, n-1[_{\mathbb{N}}$. Puisque

$$\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) \geq \frac{\eta}{a(t)} + c^{\alpha}\left(\frac{t}{2a(t)}\right)\int_{t}^{+\infty} r(s)\Delta s \text{ pour } t \in [t_2, +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Alors

$$\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)(t) \geq \left(\frac{\eta}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ pour } t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}},$$

avec $\eta > 0$ définit précédemment et $t_2 \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$. On conclut par passage à la limite que : $\lim\limits_{t\to+\infty} x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq (\lambda\eta)^{\frac{1}{\gamma}} > 0$.
Par le lemme 2.1, on déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} x^{\Delta^k}(t) = +\infty$, $\forall k \in [1, n-2[_{\mathbb{N}}$.
Donc les fonctions x^{Δ^k} sont éventuellement positive, donc

$$x^{\Delta^k}(t) > 0\ ,\ \forall k \in [1, n-2[_{\mathbb{N}}.$$

□

Lemme 3.5. On suppose que la solution x de l'équation (3.1) est éventuellement positive et la relation (3.2) est vérifiée, supposons qu'il existe une suite de fonctions $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n-2} \in \mathcal{C}^1_{rd}([t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$. Soit $A_1, A_2, ..., A_{n-2}$ des fonctions définies par :

$$\begin{aligned} A_1(t, t_1) &:= \left(\frac{a(t)}{\phi_1(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s \qquad t \in [t_1; +\infty[_{\mathbb{T}} \\ A_k(t, t_1) &:= \frac{1}{\phi_k(t)} \int_{t_1}^{t} \phi_k(s)\Delta s \qquad t \in [t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}\ ,\ k \in [2, n-1[_{\mathbb{N}} \end{aligned}.$$

Où $t_1 \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$, de plus on suppose que :

$$\phi_1(t) - \phi_1^{\Delta}(t).(t - t_1) \leq 0 \qquad\qquad \forall t \in [t_1; +\infty[_{\mathbb{T}},$$

et

$$\phi_k(t) - \phi_k^{\Delta}(t)A_{k-1}(t,t_1) \leq 0 \qquad \forall t \in [t_1;+\infty)_{\mathbb{T}} \quad , \quad k \in [2,n-1)_{\mathbb{N}}.$$

Alors

$$x^{\Delta^k}(t) \geq E_k(t,t_1)\, x^{\Delta^{n-2}}(t) \qquad \forall t \in [t_1;+\infty[_{\mathbb{T}} \quad , \quad k \in [0,n-2[_{\mathbb{N}},$$

où

$$E_k(t,t_1) := \prod_{m=1}^{n-k-2} A_m(t,t_1) \qquad \forall t \in [t_1;+\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Démonstration : Supposons que x est une solution éventuellement positive de (3.1). On a :

$$\left(\frac{a\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}}{\phi_1}\right)^{\Delta}(t) = \frac{\Big(a\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}(t)\phi_1(t) - \phi_1^{\Delta}(t)a(t)\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}(t)}{\phi_1(t)\phi_1^{\sigma}(t)},$$

on sait que

$$a(t)\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}(t) \geq \Big(a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}(t)(t-t_1).$$

Donc

$$\left(\frac{a\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}}{\phi_1}\right)^{\Delta}(t) \leq \frac{\Big(a\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}(t)}{\phi_1(t)\phi_1^{\sigma}(t)} \underbrace{\big(\phi_1(t) - \phi_1^{\Delta}(t)(t-t_1)\big)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Ce qui fait que la fonction $\dfrac{a\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}}{\phi_1}$ est décroissante sur $[t_1;+\infty[_{\mathbb{T}}$.

On a

$$x^{\Delta^{n-3}}(t) = \underbrace{x^{\Delta^{n-3}}(t_1)}_{>0} + \int_{t_1}^{t} x^{\Delta^{n-2}}(s)\Delta s \geq \int_{t_1}^{t} x^{\Delta^{n-2}}(s)\Delta s.$$

Mais

$$x^{\Delta^{n-2}}(s) = \left(\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{a(s)}{\phi_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\left(x^{\Delta^{n-2}}(s)\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{a(s)\big(x^{\Delta^{n-2}}\big)^{\gamma}(s)}{\phi_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Donc

$$x^{\Delta^{n-3}}(t) \geq \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{a(s)\big(x^{\Delta^{n-2}}(s)\big)^{\gamma}}{\phi_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s,$$

et

$$x^{\Delta^{n-3}}(t) \geq \left(\frac{a(t)\big(x^{\Delta^{n-2}}(t)\big)^{\gamma}}{\phi_1(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s = \underbrace{\left(\frac{a(t)}{\phi_1(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_1}^{t} \left(\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s}_{A_1(t,t_1)}\, x^{\Delta^{n-2}}(t).$$

Donc

$$x^{\Delta^{n-3}}(t) \geq A_1(t,t_1) x^{\Delta^{n-2}}(t) \quad \text{pour tout } \ t \in [t_1, +\infty[_T.$$

De même

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^{\Delta^{n-3}}(t)}{\phi_2(t)}\right)^{\Delta} &= \frac{x^{\Delta^{n-2}}(t)\phi_2(t) - x^{\Delta^{n-3}}(t)\phi_2^{\Delta}(t)}{\phi_2(t)\phi_2^{\sigma}(t)} \\
&\leq \frac{x^{\Delta^{n-2}}(t)\phi_2(t) - A_1(t,t_1)x^{\Delta^{n-2}}(t)\phi_2^{\Delta}(t)}{\phi_2(t)\phi_2^{\sigma}(t)} \\
&\leq \frac{x^{\Delta^{n-2}}(t)}{\phi_2(t)\phi_2^{\sigma}(t)} \left(\underbrace{\phi_2(t) - A_1(t,t_1)\phi_2^{\Delta}(t)}_{\leq 0}\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Par suite la fonction $\dfrac{x^{\Delta^{n-3}}(t)}{\phi_2(t)}$ est décroissante sur $[t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}$. Donc

$$\begin{aligned}
x^{\Delta^{n-4}}(t) &= \underbrace{x^{\Delta^{n-4}}(t_1)}_{>0} + \int_{t_1}^{t} x^{\Delta^{n-3}}(s)\Delta s \geq \int_{t_1}^{t} x^{\Delta^{n-3}}(s)\Delta s \\
&\geq \int_{t_1}^{t} \phi_2(s) \left(\frac{x^{\Delta^{n-3}}(s)}{\phi_2(s)}\right)\Delta s \\
&\geq \int_{t_1}^{t} \phi_2(s)\Delta s \left(\frac{x^{\Delta^{n-3}}(t)}{\phi_2(t)}\right) \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{\phi_2(t)} \int_{t_1}^{t} \phi_2(s)\Delta s}_{A_2(t,t_1)} \left(x^{\Delta^{n-3}}(t)\right)
\end{aligned}$$

ce qui fait,

$$x^{\Delta^{n-4}}(t) \geq A_2(t,t_1)x^{\Delta^{n-3}}(t).$$

De même et par récurrence on montre que

$$x^{\Delta^{k-1}}(t) \geq A_{n-k-1}(t,t_1)x^{\Delta^{k}}(t) \quad \text{pour tout} \quad k \in [1, n-1)_{\mathbb{N}}.$$

On suppose que

$$x^{\Delta^{k}}(t) \geq A_{n-k-2}(t,t_1)x^{\Delta^{k+1}}(t),$$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^{\Delta^k}(t)}{\phi_{n-k-1}(t)}\right)^{\Delta} &= \frac{x^{\Delta^{k+1}}(t)\phi_{n-k-1}(t) - x^{\Delta^k}(t)\phi^{\Delta}_{n-k-1}(t)}{\phi_{n-k-1}(t)\phi^{\sigma}_{n-k-1}(t)} \\
&\leq \frac{x^{\Delta^{k+1}}(t)\phi_{n-k-1}(t) - A_{n-k-2}(t,t_1)x^{\Delta^{n-2}}(t)\phi^{\Delta}_{n-k-1}(t)}{\phi_{n-k-1}(t)\phi^{\sigma}_{n-k-1}(t)} \\
&\leq \frac{x^{\Delta^{k+1}}(t)}{\phi_{n-k-1}(t)\phi^{\sigma}_{n-k-1}(t)}\left(\underbrace{\phi_{n-k-1}(t) - A_{n-k-2}(t,t_1)\phi^{\Delta}_{n-k-1}(t)}_{\leq 0}\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

La fonction $\dfrac{x^{\Delta^k}(t)}{\phi_{n-k-1}(t)}$ est décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}
x^{\Delta^{k-1}}(t) &= \underbrace{x^{\Delta^{k-1}}(t_1)}_{>0} + \int_{t_1}^{t} x^{\Delta^k}(s)\Delta s \geq \int_{t_1}^{t} x^{\Delta^k}(s)\Delta s \\
&\geq \int_{t_1}^{t} \phi_{n-k-1}(s)\left(\frac{x^{\Delta^k}(s)}{\phi_{n-k-1}(s)}\right)\Delta s \\
&\geq \underbrace{\left\{\left(\frac{1}{\phi_{n-k-1}(t)}\right)\int_{t_1}^{t} \phi_{n-k-1}(s)\Delta s\right\}}_{A_{n-k-1}(t,t_1)} x^{\Delta^k}(t) \\
&\geq A_{n-k-1}(t,t_1)x^{\Delta^k}(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x^{\Delta^k}(t) &\geq A_{n-k-2}(t,t_1)x^{\Delta^{k+1}}(t) \\ &\geq A_{n-k-2}(t,t_1)\times A_{n-k-3}(t,t_1)x^{\Delta^{k+2}}(t) \\ &\geq \underbrace{A_{n-k-2}(t,t_1)\times A_{n-k-3}(t,t_1)\times\cdots\times A_1(t,t_1)}_{E_k(t,t_1)}x^{\Delta^{n-2}}(t) \end{aligned}$$

□

3.3 Oscillation de l'équation 3.1 pour $\alpha > \gamma$

Théorème 3.1. On suppose que les relations (3.4) du lemme(3.4) soient vraies, et $\alpha > \gamma$. On suppose qu'il existe $t_1 \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que :

$$\int_{t_1}^{+\infty} E_1(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta t = +\infty.$$

Où E_1 est définie dans le Lemme précédent. Alors l'équation (3.1) est oscillante.

Démonstration : Supposons le contraire c'est à dire que la solution $x(t)$ est non-oscillante. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x(t)$ est éventuellement positive, puisque la substitution $y(t) = -x(t)$ transforme l'équation (3.1) en une équation du même forme, disons $x(t) > 0$ pour $t > t_1 \geq t_0$.

Par la condition (H_3) On a :

$$\begin{aligned} \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) + f(t,x^{\alpha}(t)) = 0 &\Rightarrow \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) = -f(t,x^{\alpha}(t)) \\ &\Rightarrow \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) \leq -r(t)x^{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Par intégration entre t et u, on obtient

$$\int_t^u -\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta^2}(s)\Delta s \geq \int_t^u r(s)x^\alpha(s)\Delta s \quad u \in [t;+\infty)_T$$

$$\Rightarrow \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(t) - \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(u) \geq \int_t^u r(s)x^\alpha(s)\Delta s$$

$$\Rightarrow \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(t) \geq \int_t^u r(s)x^\alpha(s)\Delta s$$

$$\Rightarrow \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(t) \geq \int_t^{+\infty} r(s)x^\alpha(s)\Delta s.$$

La fonction $y(t) = \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(t)$ est décroissante car

$$\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta^2}(t) \leq -r(t)x^\alpha(t) < 0 \qquad t \in [t_1;+\infty)_{\mathbb{T}}$$

$$\int_{t_1}^t \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(s)\Delta s = a(t).\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma(t) - a(t_1).\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma(t_1).$$

Donc

$$\int_{t_1}^t \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(s)\Delta s \leq a(t).\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma(t)$$

$$a(t).\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma(t) \geq (t-t_1)\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta}(t) \geq (t-t_1)\int_t^{+\infty} r(s)x^\alpha(s)\Delta s.$$

Ceci implique

$$\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma(t) \geq \frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_t^{+\infty} r(s)x^\alpha(s)\Delta s.$$

Donc

$$x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq \left\{\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_t^{+\infty} r(s)x^\alpha(s)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Par le Lemme 3.5 précédente,

$$x^{\Delta}(t) \geq E_1(t,t_1).x^{\Delta^{n-2}}(t).$$

Où

$$E_1(t,t_1) = \prod_{m=1}^{n-3} A_m(t,t_1).$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &\geq \left\{\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_{t}^{+\infty} r(s)x^{\alpha}(s)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.E_1(t,t_1)\\
&\geq \left\{\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(s)x^{\alpha}(s)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.E_1(t,t_1)\\
&\geq \left\{\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(s)x^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.E_1(t,t_1)\\
&\geq \left\{\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(s)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.E_1(t,t_1)x^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\sigma(t)\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x^{\Delta}(t)}{x^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\sigma(t)\right)} \geq \left\{\frac{t-t_1}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(s)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}}.E_1(t,t_1).$$

Par le Lemme 2.5 avec ($\lambda = \dfrac{\alpha}{\gamma}$) on trouve :

$$\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\left(x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)^{\Delta}(t) \geq \left\{\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_{t}^{+\infty} r(s)\Delta s\right\}^{\frac{1}{\gamma}} E_1(t,t_1).$$

Par intégration de t_1 à t,

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t} E_1(u,t_1)\left(\frac{(u-t_1)}{a(u)}\int_{\sigma(u)}^{+\infty} r(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta u &\leq \int_{t_1}^{t}\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)^{\Delta}(u)\Delta u\\
&\leq \frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)(t) - \frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)(t_1)\\
&\leq -\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)(t_1),
\end{aligned}$$

puis $t \to +\infty$, on trouve

$$\int_{t_1}^{+\infty} E_1(t,t_1)\left(\frac{(t-t_1)}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta t \leq -\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)(t_1) < +\infty.$$

D'où une contradiction. $\square$

Corollaire 3.1 (voir [5])**.** On suppose que les relations (3.4)du Lemme 3.4 soient vraies, et $\alpha > \gamma$. Supposons que pour $t_1 \in [t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ assez grand, tel que :

$$\int_{t_1}^{+\infty} R(t) H_{n-4}(t, t_1) \Delta t = +\infty,$$

avec

$$R(t) := \left(\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad et \qquad H_k(t, t_1) := \int_{t_1}^{t} \left(\frac{s - t_1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} h_k(t, \sigma(s)) \Delta s.$$

Alors toute solution de l'équation (3.1) est oscillante.

Exemple 3.1. On considère l'équation différentielle d'ordre n suivante :

$$x^{\Delta^n}(t) + t^{-\frac{3}{2}} x^{\alpha}(t) = 0, \;\; t \in [1, +\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}$$

avec $n \in [3, +\infty)_{\mathbb{N}}$ et n pair.

On a ici $a(t) = 1$, $r(t) = t^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = 1$ et $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} > 1$, tel que α_1 et α_2 impairs positifs. On a

$$\int_{t}^{+\infty} r(u) \Delta u = \lim_{s \to +\infty} \int_{t}^{s} r(u) \Delta u = \lim_{s \to +\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{s}} + \frac{2}{\sqrt{t}} \right] = \frac{2}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On voit que les relations (3.4) sont vérifiées. Soit

$$\phi_k(t) := h_k(t, t_1) \qquad k \in [1, n-1)_{\mathbb{N}}.$$

Les hypothèses du Lemme 3.5 sont vérifiées.

Pour $k \in [1, n-1)_{\mathbb{N}}$, et $t \in [1, +\infty[_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}$ nous avons

$$A_k(t, t_1) = \frac{h_{k+1}(t, t_1)}{h_k(t, t_1)}.$$

Alors pour tout $t \in [1, +\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}$. On a

$$E_1(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geq \frac{h_{n-2}(t,t_1)}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{+\infty} E_1(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{+\infty} r(u)\Delta u\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta t = +\infty$$

On déduit du Théorème 3.1 que toute solution x de notre équation est oscillante.

3.4 Oscillation de l'équation 3.1 pour :$\alpha = \gamma$

Théorème 3.2. On suppose que les relations (3.4)du lemme(3.4) soient vraies, et soit $\alpha = \gamma \geq 1$. On suppose qu'il existe une fonction positive $\delta \in C^1_{rd}\left([t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ tel que il existe $t_1 \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand, pour $t_2 \in [t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que :

$$\int_{t_2}^{+\infty} \delta(t)r(t) - \frac{\gamma^\gamma}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}.\frac{\left(\delta_+^\Delta(t)\right)^{\gamma+1}.a(t)}{\delta^\gamma(t)E_1^\gamma(t,t_1)(t-t_1)}\Delta t = +\infty.$$

Où $\delta_+^\Delta(t) = \max\left\{0, \delta^\Delta(t)\right\}$ et E_1 est définit dans le lemme (3.5). Alors l'équation (3.1) est oscillante.

Démonstration : Supposons que l'équation (3.1) admet une solution non oscillante $x(t)$ dans $[t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}$, $t_1 > t_0$.

On définit la fonction $w(t)$ par :

$$w(t) = \delta(t)\frac{\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)(t)}{x^\gamma(t)} \qquad t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}.$$

Donc $w(t) > 0$ pour $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$ on a

$$\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^\gamma\right)^{\Delta^2}(t) \leq -r(t).x^\alpha(t).$$

Calculons $w^{\Delta}(t)$

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}(t) &= \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t).\frac{\delta(t)}{x^{\gamma}(t)} + \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(\sigma(t)).\left(\frac{\delta(t)}{x^{\gamma}(t)}\right)^{\Delta} \\
&= -f(t, x^{\gamma}(t)).\frac{\delta(t)}{x^{\gamma}(t)} + \frac{w^{\sigma}(t).x^{\gamma}(\sigma(t))}{\delta^{\sigma}(t)}\left(\frac{\delta^{\Delta}(t).x^{\gamma}(t) - \delta(t).(x^{\gamma}(t))^{\Delta}}{x^{\gamma}(t).x^{\gamma}(\sigma(t))}\right) \\
&= -f(t, x^{\gamma}(t)).\frac{\delta(t)}{x^{\gamma}(t)} + \frac{w^{\sigma}(t).\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)} - \frac{w^{\sigma}(t).\delta(t).(x^{\gamma}(t))^{\Delta}}{\delta^{\sigma}(t).x^{\gamma}(t)} \\
&\leq -\delta(t).r(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)}w^{\sigma}(t) - w^{\sigma}(t)\frac{\delta(t).(x^{\gamma}(t))^{\Delta}}{\delta^{\sigma}(t).x^{\gamma}(t)}.
\end{aligned}$$

Par dérivation on a,

$$(x^{\gamma}(t))^{\Delta} = \gamma x^{\Delta}(t).\int_0^1 (h.x(t) + (1-h).x^{\sigma}(t))^{\gamma-1}dh$$

mais $h.x(t)+(1-h).x^{\sigma}(t) \geq h.x(t)$ donc $(x^{\gamma}(t))^{\Delta} \geq x^{\Delta}(t).x^{\gamma-1}(t)$. Ceci implique $\dfrac{(x^{\gamma}(t))^{\Delta}}{x^{\gamma}(t)} \geq \dfrac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}$.
Donc

$$w^{\Delta}(t) \leq -\delta(t).r(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)}w^{\sigma}(t) - w^{\sigma}(t)\frac{\delta(t).(x(t))^{\Delta}}{\delta^{\sigma}(t).x(t)}.$$

Par le Lemme 3.5

$$x^{\Delta}(t) \geq E_1(t,t_1).x^{\Delta^{n-2}}(t) = \frac{E_1(t,t_1)}{(a(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\left(a(t)\left(x^{\Delta^{n-2}}(t)\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Mais

$$\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)(t) \geq (t-t_1)\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t).$$

Donc

$$\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(t) \geq (t-t_1)\left(\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(t).$$

Ceci implique

$$x^{\Delta}(t) \geq E_1(t,t_1).\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(t).$$

Alors

$$x^{\Delta}(t) \geq E_1(t,t_1).x(t)\left(\frac{t-t_1}{a(t)\delta^{\sigma}(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(w^{\sigma}(t))^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Car

$$\left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) \geq \left(a.\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(\sigma(t)) = \frac{w^{\sigma}(t).x^{\gamma}(\sigma(t))}{\delta^{\sigma}(t)}.$$

Ceci implique

$$w^{\Delta}(t) \leq -\delta(t)r(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)}w^{\sigma}(t) - \frac{\delta(t)E_1(t,t_1)}{\delta^{\sigma}(t)}.\left(\frac{t-t_1}{a(t)\delta^{\sigma}(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(w^{\sigma}(t))^{\frac{1}{\gamma}+1}.$$

Appliquons le Lemme 2.1 voir[4, 6]

$$By - Ay^{1+\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{\gamma^{\gamma}}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}.\frac{B^{1+\gamma}}{A^{\gamma}}.$$

Avec

$$\begin{cases} y = w^{\sigma}(t) \\ A = \dfrac{\delta(t)E_1(t,t_1)}{\delta^{\sigma}(t)}.\left(\dfrac{t-t_1}{a(t)\delta^{\sigma}(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ B = \dfrac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)} \end{cases}$$

Donc

$$w^{\Delta}(t) \leq -\delta(t)r(t) + \frac{\gamma^{\gamma}}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}.\frac{\left(\delta_+^{\Delta}(t)\right)^{1+\gamma}.a(t)}{\delta^{\sigma}(t).E_1^{\gamma}(t,t_1).(t-t_1)}.$$

Par intégration de t_2 à t

$$\int_{t_2}^{t}\left(\delta(s)r(s) - \frac{\gamma^{\gamma}}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}.\frac{\left(\delta_+^{\Delta}(s)\right)^{1+\gamma}.a(s)}{\delta^{\sigma}(s).E_1^{\gamma}(s,t_1).(s-t_1)}\right)\Delta s \leq w(t_2) - w(t) \leq w(t_2).$$

Par passage à la limite $t \to +\infty$

$$\int_{t_2}^{+\infty}\left(\delta(t)r(t) - \frac{\gamma^{\gamma}}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}.\frac{\left(\delta_+^{\Delta}(t)\right)^{1+\gamma}.a(t)}{\delta^{\sigma}(t).E_1^{\gamma}(t,t_1).(t-t_1)}\right)\Delta t \leq w(t_2) < +\infty.$$

Ce qui fait une contradiction.

□

Corollaire 3.2 (voir [5]). On suppose que les relations (3.4) du lemme(3.4) soient vraies, et soit $\alpha = \gamma \geq 1$. On suppose qu'il existe une fonction positive $\delta \in C^1_{rd}\left([t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ tel que il existe $t_1 \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand, pour $t_2 \in [t_1; +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que :

$$\int_{t_2}^{+\infty} \left(\delta(t) r(t) - \zeta_\gamma \frac{\left(\delta_+^\Delta(t)\right)^{\gamma+1}}{\delta^\gamma(t) H_{n-4}^\gamma(t, t_1)} \right) \Delta t = +\infty.$$

Où $H_k(t, t_1) := \int_{t_1}^{t} \left(\frac{s - t_1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} h_k(t, \sigma(s)) \Delta s$ et ζ_γ une constante qui dépend de γ. Alors toute solution de l'équation (3.1) est oscillante.

3.5 Oscillation de l'équation 3.1 pour $\alpha < \gamma$

Théorème 3.3. On suppose que les relations (3.4) du lemme(3.4) soient vraies, et soit $\gamma > \alpha > 0$. On suppose qu'il existe une fonction positive $\delta \in C^1_{rd}\left([t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ tel que il existe $t_1 \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand, et

$$\int_{t_1}^{+\infty} \delta^\sigma(t) r(t) E_0^\alpha(t, t_1) \left(\frac{t - t_1}{a(t)\delta(t)} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \Delta t = +\infty,$$

où $\delta^{\Delta(t)} \leq 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$ et E_0 est définie dans le lemme (3.5). Alors l'équation (3.1) est oscillante.

Démonstration : Supposons que l'équation (3.1) admet une solution non-oscillante x définie sur $[t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$. Nous pouvons sans perte de généralité supposer que $x(t)$ est éventuellement positive c'est à dire qu'il existe $t_1 \in [t_0, +\infty[_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$.
On pose $w(t) = \delta(t). \left(a. \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^\gamma \right)^\Delta (t)$ pour $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$.
Alors $w(t) > 0$ pour $t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$, car $\delta(t) > 0$ et $\left(a. \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^\gamma \right)^\Delta (t) > 0$ par le

Lemme 3.4. Calculons $w^{\Delta}(t)$,

$$w^{\Delta}(t) = \underbrace{\delta^{\Delta}(t)\Big(a.\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}(t)}_{\leq 0} + \underbrace{\delta^{\sigma}(t)\Big(a.\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta^2}(t)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Ce qui implique,

$$w^{\Delta}(t) \leq \delta^{\sigma}(t)\Big(a.\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta^2}(t).$$

Mais

$$\Big(a.\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta^2}(t) = -f\left(t, x^{\alpha}(t)\right).$$

Donc

$$w^{\Delta}(t) \leq \delta^{\sigma}(t)\left(-f\left(t, x^{\alpha}(t)\right)\right).$$

D'après l'hypothèse (H_3) on a,

$$-f\left(t, x^{\alpha}(t)\right) \leq -r(t)x^{\alpha}(t).$$

Donc

$$w^{\Delta}(t) \leq -\delta^{\sigma}(t).r(t)..x^{\alpha}(t).$$

Par le Lemme 2.5 on a

$$x(t) \geq E_0(t, t_1)x^{\Delta^{n-2}}(t),$$

et

$$\begin{aligned}
a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}(t) &= \underbrace{a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}(t_1)}_{>0} + \int_{t_1}^{t} \underbrace{\Big(a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}}_{>0}(s)\Delta s \\
&\geq \int_{t_1}^{t} \underbrace{\Big(a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}}_{dcroissante}(s)\Delta s \\
&\geq \int_{t_1}^{t} 1\Delta s\Big(a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}(t) \\
&\geq (t-t_1)\Big(a\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}\Big)^{\Delta}(t) \\
&\geq (t-t_1)\frac{w(t)}{\delta(t)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Big(x^{\Delta^{n-2}}\Big)^{\gamma}(t) \geq \frac{(t-t_1)}{a(t)}\frac{w(t)}{\delta(t)} \Rightarrow x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq \left(\frac{(t-t_1)}{a(t)\delta(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(w(t))^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
-w^{\Delta}(t) &\geq \delta^{\sigma}(t)r(t)x^{\alpha}(t) \\
&\geq \delta^{\sigma}(t)r(t)\left(E_0(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)\delta(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(w(t))^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\alpha} \\
&\geq \delta^{\sigma}(t)r(t)E_0^{\alpha}(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)\delta(t)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}(w(t))^{\frac{\alpha}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$-w^{\Delta}(t)w^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(t) \geq \delta^{\sigma}(t)r(t)E_0^{\alpha}(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t).\delta(t)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Par le Lemme 2.5

$$-\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\Big(w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\Big)^{\Delta}(t) \geq \delta^{\sigma}(t).r(t)E_0^{\alpha}(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t).\delta(t)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Par intégration de t_1 à t puis passant à la limite quand $t \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} \delta^{\sigma}(s).r(s)E_0^{\alpha}(s,t_1)\left(\frac{s-t_1}{a(s).\delta(s)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\Delta s &\leq -\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\int_{t_1}^{t}\left(w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)^{\Delta}(s)\Delta s \\ &\leq -\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(t) - \left(-\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\right)w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(t_1) \\ &\leq \frac{\gamma}{\gamma-\alpha}w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(t_1).\end{aligned}$$

Par le passage à la limite $t \to +\infty$, on trouve

$$\int_{t_1}^{+\infty} \delta^{\sigma}(t).r(t)E_0^{\alpha}(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t).\delta(t)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\Delta t \leq \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(t_1)}_{fini} < +\infty.$$

D'où la contradiction. $\square$

Corollaire 3.3 (voir [5]). On suppose que les relations (3.4) du Lemme 3.4 soient vraies, et soit $\gamma > \alpha > 0$. On suppose qu'il existe une fonction positive $\delta \in \mathcal{C}_{rd}^{1}([t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ tel que pour tout $t_1 \in [t_0; +\infty[_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand, tel que :

$$\int_{t_1}^{+\infty} r(t)\delta^{\sigma}(t)\delta^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(t)(H_{n-3}(t,t_1))^{\alpha}\Delta t = +\infty.$$

Où $\delta^{\Delta(t)} \leq 0$ pour tout $t \in [t_1, +\infty[_{\mathbb{T}}$ et $H_k(t,t_1) := \int_{t_1}^{t}\left(\frac{s-t_1}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} h_k(t,\sigma(s))\Delta s$.
Alors toute solution de l'équation (3.1) est oscillante.

Conclusion

Nous avons traiter des critères d'oscillation pour des équations de type neutre d'ordre supérieur sur des échelles de temps arbitraires par comparaison avec des équations dynamiques du second ordre. Puisqu'il existe plusieurs critères d'oscillation pour de telles équations dynamiques de second ordre, on peut fournir plusieurs résultats correspondants pour le cas d'ordre supérieur. Cette approche a été utilisée avec beaucoup de succès pour les équations différentielles et de différence, mais elle en est à ses débuts pour les équations dynamiques à des échelles de temps arbitraires. Comme il est mentionné dans l'introduction, cela est dû au fait que nous n'avons pas la version à l'échelle du temps complet du lemme de Kiguradze, à savoir l'inégalité entre les dérivés d'ordre supérieur et ceux d'ordre inférieur.

Il existe plusieurs techniques souvent utilisées dans la théorie de l'oscillation des équations différentielles et de différence séparément, mais non disponibles pour une échelle de temps générale. Plus il y a d'outils disponibles pour le calcul de l'échelle de temps, plus les meilleurs critères d'oscillation peuvent être obtenus pour des équations d'ordre supérieur. Dans le présent travail, nous n'avons démontré qu'une seule méthode pour étudier de telles équations.

Bibliographie

[1] M. Bohner and A. Peterson , Dynamic equations on time scales, an introduction with applications, Birkhauser Boston . Inc. , MA, 2001

[2] M.Bohner and A.Peterson , Advances in Dynamic equations on time scales, Birkhauser Boston . Inc. , MA, 2003.

[3] M. Bohner and S. G. Georgiev , Multivariable dynamic calculus on time scales. Springer,2016.

[4] A. Benaissa Cherif , F. Z. Ladrani and A. Hammoudi , Oscillation theorems for higher order neutral nonlinear dynamic equations on time scales , Malaya Journal of Matematik ,ISSN :2319-3786 , 2016.

[5] F. Z. Ladrani , Etude qualitative des solutions d'equations différentielles sur les échelles de temps, Thèse de doctorat 2016.

[6] Said R.Grace , On the Oscillation of nth Order Dynamic Equations on Time Scales , Mediterranean Journal of Mathematics,10-2013,147-156.

[7] R. P. Agarwal and M.Bohner , Basic calculus on time scales and some of its applications, Results Math. 35 ; 1999, 3-22.

[8] R. P. Agarwal, M. Bohner, and Wan-Tong Li, Nonoscillation and Oscillation : Theory for Functional Differential Equations, Marcel Dekker, Inc., Cimarron Road, Monticello, New York 12701, U.S.A.

[9] Said R.Grace , On the Oscillation of Higher Order Dynamic Equations on Time Scales , Journal of Advanced Research,(2013)4.

[10] S.H. Saker, Oscillation criteria of second-order half-linear dynamic equations on time scales, Journal of Computational and Applied Mathematics 177(2005)375-387.

[11] S.H. Saker, Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales,Second and Third Orders,LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010.

[12] Said R Grace, Ravi P Agarwal, Agacik Zafer, Oscillation of higher order nonlinear dynamic equations on time scales, Advances in Difference Equations 2012,2012 :67.

[13] Said Grace, Ravi Agarwal, D. O'Regan, Oscillation Criteria for Certain nth Order Differential Equations with Deviating Arguments, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 262, 601622 (2001).

[14] Ravi P. Agarwal, Said R. Grace, Donal O'Regan, Oscillation Theory For Second Order Dynamic Equations, Taylor et Francis Inc, ISBN 0-415-30074-6.

[15] F. Z. Ladrani, A.Hammoudi, A.Benaissa Cherif, Oscillation Theorems For Fourth-Order Nonlinear Dynamic Equations On Time Scales, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications,Vol. 3(2)July 2015, pp. 46-58, ISSN :2090-729.

[16] Said R.Grace , Martin Bohner and Ravi P.Agarwal, On the oscillation of second-order half-linear dynamic equations, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 15,No.5,May 2009, 451-460.

[17] Kurt Kreith, Oscillation Theory, Springer-Verlag, Berlin.Heidelberg.New York 1973.

[18] S.H.Saker, Oscillation of nonlinear dynamic equations on time scales, Applied Mathematics and Computation 148(2004)81-91.

[19] Ravi P.Agarwal, Said R.Grace and Donal O'Regan, Oscillation Theory for Second Order Dynamic Equations, Series in Mathematical Analysis and Applications :Volume 5, Taylor-Francis.

[20] Ravi Agarwal, Martin Bohner, Basic Calculus on Time Scales and Some of its Applications, Results in Mathematics 35(1999)3-22.

[21] Said R.Grace, Martin Bohner and Shurong Sun, Oscillation of Fourth-Order Dynamic Equations, Journal of Mathematics and Statistics, Volume 39(4)(2010),545-553.

[22] Merve Zingil, Fatma Serap Topal, Oscillation Criteria for Nonlinear Dynamic Equations On Time Scales, Journal.Math.Sci., Vol. 2(2018),No. 1, pp.307-322.

[23] Said R. Grace, Martin Bohner, Ravi P. Agarwal, On the oscillation of second-order half-linear dynamic equations, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 15, No. 5, May 2009, 451460.

[24] Ravi P. Agarwal, Said R. Grace and Donal ORegan, Oscillation Criteria for Certain nth Order Differential Equations with Deviating Arguments, Journal of Mathematical Analysis and Applications 262, 601622 (2001).

[25] Said R Grace, Ravi P Agarwal and Aack Zafer, Oscillation of higher order nonlinear dynamic equations on time scales, Grace et al. Advances in Difference Equations 2012, 2012 :67.

[26] Svetlin G. Georgiev, Functional Dynamic Equations on Time Scales, Springer Nature Switzerland AG 2019.

[27] C. A. Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, ACADEMIC PRESS New York and London 1968.

[28] Ravi P. Agarwal, Said R. Grace and Donal O’Regan , Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers (2000).

[29] L. H. Erbe, Qingkai Kong, B. G. Zhang, Oscillation Theory For Functional Differential Equations, Marcel Dekker, Inc. (1995).

[30] Taher S. Hassan And Qingkai Kong, Asymptotic And Oscillatory Behavior Of $n$thOrder HalfLinear Dynamic Equations, Differential Equations and Applications Volume 6, Number 4 (2014), 527549.

[31] Jia Baoguo, Lynn Erbe, And Allan Peterson, Asymptotic Behavior Of nth Order Sublinear Dynamic Equations On Time Scales, Applied Analysis 15 (2011), no. 2, 3 and 4, 183194.

[32] Ravi Agarwal, Martin Bohner, Donal O’Regan, Allan Peterson , Dynamic equations on time scales : a survey , Journal of Computational and Applied Mathematics 141 (2002) 126.

[33] Ravi P. Agarwal, Martin Bohner, Said R. Grace, Donal ORegan, Discrete Oscillation Theory, Hindawi Publishing Corporation (2005).

[34] Taher S. Hassan, Oscillation criteria for half-linear dynamic equations on time scales, Journal of Mathematical Analysis and Applications 345 (2008) 176185.