الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة بلحاج بوشعيب عين تموشنت
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Mathématiques et Informatique

M ÉMOIRE
Pour l’obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématique et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation

Dérivée d'ordre fractionnaire de Grunwald -Letnikov

Présenté Par :
1) Mme YAHIAOUI YOUCEFI Asya.

Devant le jury composé de :

Dr.Mme MECENE	M A B.	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. Mme GOUAR	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. Kheira MEKHALFI	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2022/2023

Remerciement

En premier lieu, nous remercions Allah qui nous avoir donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail.

Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce travail Dr. MEKHALFI Kheira. pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous.

Nous remercions les membres du jury Mme Gaouar et Mme Mecene pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet universitaire.

Nous remercions les parents généreux, le marie pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs.

Et nous remercions les frères, mon fils et ma fille.

Nous remercions les amis et les collègues en particulier collègues Hanane, et Mika.

Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Dédicace

À mes chers parents à qui je dois compte tout ce travail est le fruit de leur amour, leurs encouragement et sacrifices.

À mon chère marie, qui m'a soutenue tout au long de ce travail.

À mes enfants Silya et Abderrahmene

À mes chers frères Kamel, Abdelilah.

À ma belle mère, et beau père.

À toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

Ensembles

- $\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.

- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels.

- $\mathbb{N}^*$ Ensemble des entiers naturels non nuls.

- $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ Ensemble des fonctions réelles continues sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Fonctions

- $\Gamma(z)$ Fonction Gamma.
- $B(z,w)$ Fonction Bêta.
- $E_{\alpha,\beta}(z)$ Fonction de Mittag-Leffler.
- $I_a^\alpha f$ Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
- $D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
- ${}^{GL}D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Grunwuld-Letnikov d'ordre α de la fonction f.
- $D^n f = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ Dérivée ordinaire d'ordre n par rapport à t de la fonction f.
- $\mathcal{L}\big[f(t)\big]$ Transformée de Laplace de la fonction f.

Abréviations

- G-L Grunwuld-Letnikov
- R-L Riemann-Liouville.

Introduction Générale

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

En 1695, Leibniz dans une lettre *à* l'Hospital, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière d'une fonction. Dans sa réponse, l'Hospital s'est *intérrogé* sur la signification qu'on pourrait donner a la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. En effet, $\frac{1}{2}$ est a égale distance de l'ordre 0 qui est sensé designer la continuité et l'ordre 1 sensée designer la dérivabilité classique. La réponse de Leibniz contenait a peu prés cette phrase :
"cela conduirait *à* un paradoxe *à* partir duquel, un jour, on pourra tirer des conséquences utiles."

Depuis cette époque, la dérivation d'ordre non entier a attirée l'attention de nombreux mathématiciens célèbres, tels Euler (1730), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel ($1823-1826$), Liouville ($1832-1873$), Riemann (1847), et Laurent (1884). C'est seulement lors de ces dernières décennies que cette théorie commence a toucher un nombre important de domaines mathématiques et autres grâce a une explosion des activités de recherche sur l'application du calcul fractionnaire touchant la physique, la mécanique, la diffusion fractale, la biologie, électrotechnique, électrochimie,...

La théorie du calcul fractionnaire est presque aussi vieille que le calcul lui-même, mais aujourd'hui, un certain nombre de manuels ont été publies sur ce domaine et ses applications, on cite par exemple le livre de Samko S.G [7] , qui considéré comme une encyclopédie de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire. On peut citée également les travaux de I.Podlubny[5],k.B.Oldham [4].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de s'adapter avec le calcul fractionnaire .
Ce mémoire contient trois chapitres répartis comme suit :

- **Le premier chapitre** est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : fonctions spéciales (les fonction Gamma, Bêta et celle de Mittag-Leffler), transformée de Laplace, espaces de fonctions (intégrables, et absolument continues) et quelques notions et résultats de la théorie d'analyse fonctionnelles .

- **le deuxième chapitre** nous présentons les définitions de dérivations et intégrations fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et ses propriétés.

- **le troisième chapitre** nous avons traité l'approche de dérivée fractionnaire de Grünwald -Letnikov, ainsi que leurs propriétés, et le lien avec l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville .

A la fin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions, propriétés et résultats sur l'analyse fonctionnelle, pour plus de détails voir ([1]).

1.1 Les fonctions spéciales

Les fonctions spéciales sont définit de manière assez imprécise, puis qu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation *à* finit par associer *à* un nom). Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, qui généralise la factorielle $n!$ et permet n de prendre aussi des valeurs non entiers et même des valeurs complexes.

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma Γ est généralement définie sur $\mathbb{C}$ par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{1.1}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, Si $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Proposition 1.1.1. *L'une des propriétés de base de la fonction Gamma est :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{1.2}$$

En particulier :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$, alors

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(z+1)-1}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z}dt \\ &= \Big[- e^{-t}t^{z}\Big]_0^{+\infty} + z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt}_{\Gamma(z)}.\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{t\to\infty} t^z e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^z}{e^t} = 0$$

Par conséquent :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt = 1,$$

D'après (1.2), pour toute $z \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{array}{c}\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1! \\ \Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!\end{array}$$

On a bien par récurrence que

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

■

Exemple 1.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ce qui entraine

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^n\ n!}, \tag{1.3}$$

En effet,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

On pose le changement de variable suivant :

$$v = \sqrt{t} \Rightarrow t = v^2 \ \text{ et } dt = 2v\, dv.$$

D'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2}}{v} \cdot v\, dv$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv.$$

D'après l'intégrale de Gausse, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant (1.3), *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right) . \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right) . \Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right) . \left(n-\frac{3}{2}\right) . \Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right) . \left(n-\frac{3}{2}\right) ... \frac{1}{2}. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right) . \left(\frac{2n-3}{2}\right) ... \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2^n}.(2n-1).(2n-3) ... 3.1.\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $(2n-2)(2n-4)\ ...\ 2$, *on a*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1).(2n-2) ... 3.2.1}{2^n.(2n-2).(2n-4) ... 2}.\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^n.2^{n-1}.(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{n-1}.(n-1)!}.
\end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $2n$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n.(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.2n.(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^n\ n!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent (1.3) est prouvée.
Une autre propriété importante de la fonction Gamma qu'on peut représenter par une limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2. *La fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de seconde espère)est donnée par :*
Pour toute $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0,\ \mathfrak{Re}(w) > 0, \tag{1.4}$$

cette intégrale est convergente.

Théorème 1.1.1 (Relation entre les fonctions Bêta et Gamma)**.** *:*
Les fonctions Bêta et Gamma sont liée par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0,\ \mathfrak{Re}(w) > 0. \tag{1.5}$$

Démonstration. Soient $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$ et $\mathfrak{Re}(w) > 0$, telle que

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{z-1}d\tau$$

$$\Gamma(w) = \int_0^{+\infty} e^{-s}s^{w-1}ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \tau^{z-1}e^{-\tau}t^{w-1}e^{-t}d\tau\ dt \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \tau^{z-1}e^{-(\tau+t)}t^{w-1}d\tau\ dt.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $r = \tau + t \Rightarrow dr = d\tau + dt$ et $0 < r < +\infty$.
On pose $\tau = rs \Rightarrow s = \frac{\tau}{r} = \frac{\tau}{\tau+t}$
Donc,

$$\text{si } \tau = 0 \Rightarrow s = 0.$$
$$\text{si } \tau = +\infty \Rightarrow s = 1.$$

On a

$$dr = dt + dx \Rightarrow dx = dr - dt$$

et on a $\tau = rs$ donc

$$dt = dr - (rds + sdr) \Rightarrow dt = (1-s)dr - rds.$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} d\tau & = & rds+sdr \\ dt & = & (1-s)dr-rds \end{array}\right. \Rightarrow d\tau dt = rdsdr.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}(rs)^{z-1}(r(1-s))^{w-1}r\ ds\ dr \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}r^{z-1}s^{z-1}r^{w-1}(1-s)^{w-1}r\ ds\ dr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z-1}r^{w-1}r\ dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z+w-1}dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds \\
&= \Gamma(z+w)B(z,w).
\end{aligned}$$

D'où $B(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$. ■

Proposition 1.1.2. *Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$ et $\mathfrak{Re}(w) > 0$. On a*

1. $B(z,w) = B(w,z)$.
2. $B(w,z) = B(w+1,z) + B(w,z+1)$.
3. $B(w,z+1) = \frac{z}{w}B(w+1,z) = \frac{z}{w+z}B(w,z)$.

Démonstration. 1.

$$B(w,z) = \int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt = \int_0^1 (1-t)^{w-1}t^z dt = B(w,z)$$

2. $B(w,z) = B(w+1,z) + B(w,z+1)$

$$\begin{aligned}
B(w,z+1) &= \frac{\Gamma(w)\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+z+1)} = \frac{\Gamma(w)z\Gamma(z)}{\Gamma(w+z+1)} = \frac{z\Gamma(w)\Gamma(z)}{(w+z)\Gamma(w+z)} \\
&= \frac{z}{w+z}\frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)} = \frac{z}{w+z}B(w,z).
\end{aligned}$$

On obtient

$$(w+z)B(w,z+1) = zB(w,z)$$

Et ceci implique

$$\begin{aligned}
B(w,z) &= \frac{w}{z}B(w,z+1) + B(w,z+1) \\
&= \frac{w\Gamma(w)\Gamma(z+1)}{z\Gamma(w+z+1)} + B(w,z+1) = \frac{w\Gamma(w)z\Gamma(z)}{z\Gamma()w+z+1} + B(w,z+1) \\
&= \frac{\Gamma(w+1)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z+1)} + B(w,z+1)
\end{aligned}$$

Donc

$$B(w,z) = B(w+1,z) + B(w,z+1).$$

3.
$$\begin{aligned}B(w,z+1) &= \frac{\Gamma(w)\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+z+1)} = \frac{z\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z+1)} \\ &= \frac{z}{w}\frac{w\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z+1)} = \frac{z}{w}\frac{\Gamma(w+1)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z+1)} \\ &= \frac{z}{w}B(w+1,z)\end{aligned}$$

D'où
$$B(w,z+1) = \frac{z}{w+z}B(w,z)$$

■

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3. *La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonction suivante*
$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C}$$
La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par
$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha,\beta > 0, z \in \mathbb{C}$$

Propriétés

1. $E_{1,1}(z) = e^z$
2. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$
3. $E_{1,3}(z) = \frac{e^z-1-z}{z^2}$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right]$
5. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$
6. $E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(z)}{2}$

Démonstration. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ alors
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$$

2. On a
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}$$
Comme $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$ on obtient $e^z = z\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{k-1}}{k!} + 1$, et alors $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{k-1}}{k!} = \frac{e^z-1}{z}$ ceci donne
$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$$

3. $E_{1,3}(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^{k-2}}{k!}$. Puisque

$$e^z=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}=1+z+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\longrightarrow\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}=\frac{e^z-1-z}{z^2}$$

Et alors on trouve

$$E_{1,3}(z)=\frac{e^z-1-z}{z^2}=\frac{1}{z^{3-1}}\left[e^z-\sum_{k=0}^{1}\frac{z^k}{k!}\right]$$

4. Soit $m\in\mathbb{N}^*$ fix$\acute{e}$ on a

$$E_{1,m}=\frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right]$$

Montrons que $E_{1,m+1}=\frac{1}{z^m}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{k!}\right]$.

$$\begin{aligned}
E_{1,m+1}(z)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+m+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{(k+m)\Gamma(k+m)},\\
&=\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{z^{k-m}}{k\Gamma(k)}=\frac{1}{z^m}\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{z^k}{k\Gamma(k)}\\
&=\frac{1}{z^m}\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\\
&=\frac{1}{z^m}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{k!}\right]=\frac{1}{z^m}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{k!}\right]=
\end{aligned}$$

D'o$\grave{u}$

$$E_{1,m+1}(z)=\frac{1}{z^m}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{k!}\right]$$

5.

$$E_{2,1}\left(z^2\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{2k!}=\cosh(z)$$

6.

$$E_{2,2}\left(z^2\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(z)}{z}.$$

■

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

Définition 1.2.1 (Formule de Dirichlet). *Soient $h(x,y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet :*

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1}h(x,y)dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}h(x,y)dx.$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier. Par exemple, si on prend

$$h(x,y) = g(x)f(y)$$

et

$$g(x) \equiv 1$$

Alors,

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1}f(y)dy = B(\alpha,\beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}f(y)dy$$

Où B est la fonction bêta.

Définition 1.2.2 (Règle de dérivation de Leibniz). *La règle de dérivation de Leibniz est définie par :*

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{b(t)} f(t,x)dx\right] = f(t,b(t))b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{d}{dt}f(t,x)dx.$$

Théorème 1.2.1 (Théorème de Fubini). *Soit h une fonction continue sur $[a,t] \times [s,u]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors*

$$\int_a^t \left(\int_s^u h(x,y)dy\right)dx = \int_s^u \left(\int_a^t h(x,y)dx\right)dy$$

1.3 Transformée de Laplace

Définition 1.3.1. *La transformée de Laplace d'une fonction réelle g localement intégrable sur $[0,+\infty[$ notée $G(p) = \mathcal{L}\big[g(t)\big](p)$, est donnée par*

$$G(p) = \mathcal{L}\big[g(t)\big](p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Où p, appelé variable de Laplace ($\mathfrak{Re}(p) \geq a$) et $g(t)$ est appelée l'originale de $G(p)$.

On peut définir une transformation inverse de Laplace, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que

$$G(p) = \mathcal{L}\big[g(t)\big](p) \Leftrightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[G(p)\big].$$

► La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}(t) = g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}G(p)dp, \quad c = \mathrm{Re}(p)$$

▶ La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier $n$de la fonction f est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{g^{(n)}(t)\right\}(p) &= p^n G(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} g^{(k)}(0)\\ &= p^n G(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k} g^{(n-k-1)}(0).\end{aligned}$$

Propriétés 1.3.1. *La transformée de Laplace est linéaire :*

$$\mathcal{L}\big[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\big](p) = \alpha\mathcal{L}\big[f_1(t)\big](p) + \beta\mathcal{L}\big[f_2(t)\big](p).$$

Propriétés 1.3.2. *. Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, le produit de convolution de f et g est définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t f(x)g(t-x)dx. \tag{1.7}$$

Le tableau suivant donne un bref résumé de certaines transformées de Laplace utiles. Nous allons souvent se référer à ce tableau le long de ce mémoire.

$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$
$\frac{1}{p^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(p+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{at}$
$\frac{1}{p^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{p^\alpha}{p(p^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{p(p^\alpha+a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{p^\alpha(p-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha-a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

Dans le tableau a et b sont des constantes réelles distinctes.

1.4 Espaces fonctionnels

1.4.1 Espaces L^p, lorsque $p \in [1, +\infty[$

On suppose connues la définition des applications mesurables pour la mesure de Lebesgue et la définition de $L^1(\Omega)$, espace des fonctions sommables sur Ω, muni de la norme définie par $\|f\| = \int_\Omega |f(x)|dx$.

Définition 1.4.1. *L'espace des fonctions de puissance p-ème sommables dans Ω peut être défini par :*

$$L^p(\Omega, \mathbb{C}) = \left\{u \text{ mesurable sur } [a,b],\ a \text{ valeur dans } \mathbb{C}\ \|u\|^p \in L^1\right\}.$$

C'est un espace normé, dont la norme, noter $\|\cdot\|_p$ où $\|\cdot\|_{L^p}$ est définie par :

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.4.2. *Soit $L^{\infty}(\Omega)$ l'espace des fonctions f mesurables telles que :*

$$\exists a > 0,\ mesE_{\alpha} = mes\left\{x : |f(x)| > \alpha\right\} = 0.$$

C'est un espace normé, la norme étant :$\|f\|_{\infty} = \inf_{\{\alpha : mesE_{\alpha}=0\}} \alpha$.

1.4.2 Espaces des fonctions absolument continues

Définition 1.4.3. *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. f est dite absolument continue si :*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout partition$\{]a_k, b_k[\}_{i=1}^{n}$ de $[a,b]$, et

$\sum_{i=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$ *alors*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

- Si f est absolument continue alors elle est uniformément continue.
- Toute fonction absolument continue est *à* variation bornée.
- La somme de deux fonctions absolument continue et le produit d'une telle fonction par un nombre sont absolument continue.
- Toute fonction absolument continue est est la différence de deux fonction absolument continue croissantes.

Théorème 1.4.1. *Soit $f \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ alors $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est absolument continue.*

On note $AC([a,b],\mathbb{R})$ l'espace de fonction absolument continue.

- $(AC([a,b],\mathbb{R})$ est un espace de banach, avec

$$\|f\|_{AC} = |f(a)| + \int_a^b |f'(s)|\, ds$$

- $AC^n([a,b]),\mathbb{R} = \left\{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f, \ldots, f^{(n-1)}\right\}$. sont absolument continue.
- $f \in AC([a,b],\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds, \quad f' \in L^1([a,b],\mathbb{R}).$
- $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x f^{(n)}(s)ds.$

Chapitre 2

Intégrales et Dérivées d'ordre Fractionnaire

Il existe beaucoup d'approches différentes qui ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation d'ordre non entiers. Dans cette section on va présenter les notions de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, pour plus de details voir ([3, 4, 7]).

2.1 Équation d'Abel

Définition 2.1.1. *On considère l'équation intégrale*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(t), \quad \alpha \in]0,1[, x \in [a,b], \tag{2.1}$$

Où φ est la fonction inconnue et f est une fonction donnée .

L'équation (2.1) s'appelle l'équation d'Abel, et elle admet une solution définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

En effet, posons $x = t$, et $t = s$ alors

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds \tag{2.2}$$

En multipliant l'équation (2.2) par $(x-t)^{-\alpha}$, on obtient

$$(x-t)^{-\alpha}f(t) = (x-t)^{-\alpha}\int_a^t \frac{\varphi(t)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds.$$

Par intégration

$$\Gamma(\alpha)\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt = \int_a^x (x-t)^{-\alpha}\left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right)dt.$$

D'après le théorème de Fubini on obtient

$$\Gamma(\alpha)\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt = \int_a^x\int_a^t \varphi(s)(x-t)^{-\alpha}(x-s)^{\alpha-1}dtds$$
$$= \int_a^x \varphi(s)ds\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt,$$

Maintenant, on calcule l'intégrale

$$J = \int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt.$$

En y effectuant le changement de variable $t = s + r(x-s)$, on a $dt = (x-s)dr$, si $t = x\ r = 1$ et si $t = sr = 0, t-s = r(x-s)$, donc

$$\begin{aligned}\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt &= \int_0^1 (x-t)^{-\alpha}r^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha}dr\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x-s}{x-t}\right)^{\alpha} r^{\alpha-1}dr\\ &= \int_0^1 (1-r)^{-\alpha}r^{\alpha-1}dr\\ &= B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt.$$

Alors

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{t-\alpha}f(t)dt.$$

Ceci implique

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt$$

Justification de la solution de l'équation d'Abel : *Dans cette partie on va imposer quelque condition sur la fonction f de l'équation (2.1) pour justifier l'existence de la solution. Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée. On introduit la fonction suivante :*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

Lemme 2.1.1. *Si $f \in L^1([a,b]),\mathbb{R}$ alors $f_{1-\alpha} \in L^1([a,b]),\mathbb{R}$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\,dx &= \left|\int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right)dx\right|\\ &\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b dx\int_a^x \frac{|f(t)|}{(x-t)^{\alpha}}dt\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini et Dirichlet on obtient

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\, dx \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |f(t)| dt \int_t^b \frac{1}{(x-t)^\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |f(t)|(x-t)^{1-\alpha} dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\, dx &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha} dt \\ &\leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|f\|_{L^1} < +\infty\end{aligned}$$

D'où $f_{1-\alpha} \in L^1([a,b],\mathbb{R})$. ■

Théorème 2.1.1. *Soit* $\alpha \in]0,1[$ *L'équation d'Abel admet une solution dans* $L^1([a,b],\mathbb{R}$ *si et seulement si*

$$f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R}), \quad et \quad f_{1-\alpha}(a) = 0.$$

Démonstration. .

- **La condition nécessaire.** Soit $\varphi \in AC([a,b],\mathbb{R})$ solution de l'équation d'Abel, alors

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(t) \Rightarrow f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right) dt.$$

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x dt \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds = \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right) dt$$

Montrons que $f_{1-\alpha}(\cdot) \in AC([a,b],\mathbb{R})$.

- $f_{1-\alpha}$ **est continue.**
Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $x_1 < x_2$ alors

$$\begin{aligned}|f_{1-\alpha}(x_1) - f_{1-\alpha}(x_2)| &= \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)} \left| \int_{x_1}^{x_2} dt \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} dt \int_a^t \frac{|\varphi(s)|}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} |\varphi(s)| ds \int_s^{x_2} (t-s)^{-\alpha} dt \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)B(\alpha,1-\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} |\varphi(s)| \left[(t-s)^{1-\alpha} \right]_s^{x_2} ds \\ &\leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)B(\alpha,1-\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} |\varphi(s)| ds.\end{aligned}$$

Donc $|f_{1-\alpha}(x_1) - f_{1-\alpha}(x_2)| \longrightarrow 0$ quand $x_1 \longrightarrow x_2$. D'où $f_{1-\alpha} \in C([a,b],\mathbb{R})$.
D'après la définition de $f_{1-\alpha}$ on a

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad f'_{1-\alpha}(a) = 0$$

Comme $\varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, donc d'après le lemme(2.1.2) on a $f'_{1-\alpha} \in L^1([a,b],\mathbb{R})$. D'où $f_{1-\alpha} = \int_a^x f'_{1-\alpha} dt, x \in [a,b]$, ce qui montre que $f_{1-\alpha}(\cdot) \in AC([a,b],\mathbb{R})$.

- **La condition suffisante**
Puisque $f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R})$. Alors $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.

On considère la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x \in [a,b].$$

Montrons que $f = g$.

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, x \in [a,b]$$

Ceci implique

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = g'_{1-\alpha}(x)$$

On a$f_{1-\alpha}$ et absolument continue alors $g_{1-\alpha}$ et aussi absolument continue. Alors $f_{1-\alpha-}\ g_{1-\alpha} = c$ est constante.

Le fait que $c = 0$, donc $\int_a^x \frac{f(t)-g(t)}{x-t} dt = 0 \Rightarrow f(t) g = (t)$.

■

Lemme 2.1.2. *Si $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors $f_{1-\alpha}(x) \in ([a,b],\mathbb{R})$. et*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right].$$

Démonstration. Comme $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds$.

D'après le théorème (2.1.1) $f_{1-\alpha} \in ([a,b],\mathbb{R})$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
f_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{\left(f(a) + \int_a^t f'(s)ds \right)}{(x-t)^{\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{(f(a)}{(x-t)^{\alpha}} dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t f'(s)ds \\
&= \frac{f(a)(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_s^x \frac{f'(t)}{(t-s)^{\alpha}} dt \right) ds \\
&= \frac{f(a)(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x f'(t)ds \int_s^x \frac{dt}{(t-s)^{\alpha}} \\
&= \frac{f(a)(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{1-\alpha} f(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où,

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-t)^{1-\alpha} + \int_a^x (x-s)^{1-\alpha} f'(s)ds\right].$$

■

Corollaire 2.1.1. *Si $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$, alors l'équation d'Abel $0 < \alpha < 1$ admet une solution φ dans $L^1([a,b],\mathbb{R})$. donnée par la formule.*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha}ds\right], \quad x \in \left]a,b\right].$$

Démonstration. D'après le lemme (2.1.2) on a

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha}dt,$$

l'équation d'Abel admet une solution donnée par

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right] = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x)$$

Ceci implique

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha}\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right]$$

■

Dérivée fractionnaire sur intervalle $[a,b]$ **:**
Riemann réalise le lien entre l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire *à* partir de la solution de l'équation intégrale **Abel** pour tout $\alpha \in]0,1[$.

2.2 Approche de Riemann-Liouville

Dans cette partie, nous présentons quelques définitions et résultats du l'approche de Riemann-Liouville (R-L). Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

2.2.1 Unification des dérivées et intégrales d'ordre entier

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ au sens de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété n-fois. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, On considère l'intégrale :

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(s)ds$$

Pour une primitive seconde en utilisant le théorème de Fubini , on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(s)ds \\ &= \int_a^t f(s)ds \int_a^t dt_1 \\ &= \int_a^t (t-s)f(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_a^3 f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} f(s)ds \\ &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} (t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-s)^2 f(s)ds \end{aligned}$$

Et par récurrence dans le cas général, on a la formule de Cauchy :

$$\begin{aligned} I_a^n f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t)\,dt \\ &= I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$. Riemann observe que le second membre de (2.3) pourrait avoir un sens même pour des valeurs non-entières de n, il était donc naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

2.2.2 Intégrale d'ordre Fractionnaire

Définition 2.2.1 (Intégrale de Riemann-Liouville). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville de f notée I_a^α, l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \qquad (x > a, \mathfrak{Re}(\alpha) > 0). \tag{2.4}$$

On note I_0^α par I^α.

Proposition 2.2.1. *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété suivante.*

$$I_a^p\big[I_a^q f(x)\big] = I_a^{p+q} f(x). \quad pour \quad p > 0, q > 0 \tag{2.5}$$

Démonstration. La preuve découle directement de la définition

$$\begin{aligned} I_a^p\big[I_a^q f(x)\big] &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}\big[I_a^q f\big](t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}\left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-s)^{q-1} f(s)ds\right]dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on aura :

$$I_a^p\big[I_a^q f(x)\big] = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x f(s)\underbrace{\int_s^x (x-t)^{p-1}(t-s)^{q-1}dt}_{\mathcal{I}}\ ds. \tag{2.6}$$

En effectuant le changement de variable suivant dans l'intégrale $\mathcal{I}$:

$$\tau = \frac{t-s}{x-s}, \quad \forall x > s,$$

alors

$$t = s + (x-s)\tau, \qquad \text{avec} \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad \text{donc} \quad dt = (x-s)d\tau.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{p-1}(s+(x-s)\tau-s)^{q-1}(x-s)\ d\tau \\
&= \int_0^1 (x-s)^{p-1}(1-\tau)^{p-1}(x-s)^{q-1}\tau^{q-1}(x-s)\ d\tau \\
&= \int_0^1 (x-s)^{p+q-1}\tau^{q-1}(1-\tau)^{p-1}\ d\tau \\
&= (x-s)^{p+q-1}\int_0^1 \tau^{q-1}(1-\tau)^{p-1}\ d\tau.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= (x-s)^{p+q-1}B(q,p) \\
&= (x-s)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.
\end{aligned}$$

En retournant à la formule (2.6), on obtient alors

$$\begin{aligned}
I_a^p\big[I_a^q f(x)\big] &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x f(s)\left[\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}(x-s)^{p+q-1}\right] ds \\
&= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(p+q)}\int_a^x (x-s)^{p+q-1}f(s)\ ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^x (x-s)^{p+q-1}f(s)\ ds \\
&= I_a^{p+q}f(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2.3 Intégrales fractionnaires de$f(t) = (t-a)^{\beta}$

On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \quad t \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0.$$

On a alors

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^\beta d\tau. \tag{2.7}$$

En faisons le changement de variable en effet :

$$r = \frac{\tau - a}{t-a}, \qquad \forall t > a.$$

Alors

$$\tau = a + (t-a)r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq r \leq 1 \qquad \text{donc} \qquad d\tau = (t-a)dr.$$

Donc, (2.7) devient

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-(t-a)r)^{\alpha-1}(a+(t-a)r-a)^\beta (t-a)\ dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 -(t-a)^{\alpha-1}(1-r)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta+1} r^\beta\ dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha+\beta}(1-r)^{\alpha-1} r^\beta\ dr \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^\beta\ dr.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on aura

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Alors, on definit l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f, telle que

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{2.8}$$

Cas particulier :

- Si $\alpha = 1$. D'après (1.2) on déduit que

$$I_a^1 (t-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1}(t-a)^{1+\beta}.$$

- Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha.$$

2.3 Dérivées d'ordre fractionnaire

Définition 2.3.1 (Dérivée de Riemann-Liouville). *Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f notée ${}^{RL}D_a^{\alpha}$, la fonction définie par :*

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = D^n [I_a^{n-\alpha} f(t)]
$$

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \qquad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)+1], t > a). \tag{2.9}
$$

Où [.] désigne la partie entière d'un nombre réel et $D^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$.
En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique

- *Pour $\alpha = 0$, on a*

$$
D_a^0 f(t) = D^1[I_a^1 f(t)] = f(t).
$$

- *Pour $\alpha = n$, tel que $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$
D_a^n f(t) = D^{n+1}[I_a^{n+1-n} f(t)] = D^{n+1}[I_a^1 f(t)] = D^n f(t).
$$

2.4 Dérivée fractionnaires de $f(t) = (t-a)^{\beta}$

On considère la fonction f définie par :

$$
f(t) = (t-a)^{\beta}, \quad t \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \in \mathbb{R}.
$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in]n-1, n[$, nous avons

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = D^n \left[I_a^{n-\alpha}(t-a)^{\beta}\right].
$$

D'après (2.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= D^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta}\right].
\end{aligned}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\ldots(n-\alpha+\beta-n+1)(t-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\
&= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\ldots(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n+1-\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\beta+n+1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\right]. $$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. $$

Cas particulier ;

- ▶ Pour $\alpha = 1$, on a :

$$ D_a^1(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^{\beta}. $$

- ▶ Pour $\beta = 0$. dans ce cas on a

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. $$

Ce qui montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

2.5 Composition avec les intégrales fractionnaires

Proposition 2.5.1. *L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.*

$$ {}^{RL}D^{\eta}\left({}^{RL}D_a^{-\eta}f(t)\right) = {}^{RL}D^{\eta}\left(I_a^{\eta}f(t)\right) = f(t) $$

En général on a

$$ {}^{RL}D^{\eta}\left({}^{RL}D_a^{-q}f(t)\right) = {}^{RL}D^{\eta-q}f(t) \tag{2.10} $$

Démonstration. Nous avons pour $\eta = m \geq 1$

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D_a^{m}\left({}^{RL}D_a^{-m}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}f(\tau)d(\tau) \\ &= \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t) \end{aligned} $$

Si $m-1 \leq \eta < m$, alors en utilisant la règle de composition des intégrales fractionnaire au sens de RL, on obtient :

$$ {}^{RL}D_a^{-m}f(t) = {}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}\left({}^{RL}D_a^{-\eta}f(t)\right) $$

D'où

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D_a^{m}\left({}^{RL}D_a^{-m}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}\left({}^{RL}D_a^{-\eta}f(t)\right)\right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}^{RL}D_a^{-m}f(t)\right\} = f(t) \end{aligned} $$

■

Proposition 2.5.2. *Si la dérivée fractionnaire* ${}^{RL}D_a^{\eta}f(t), (m-1 \leq \eta < m)$ *d'une fonction* $f(t)$ *est intégrable, alors :*

$$ {}^{RL}D_a^{-\eta}\left({}_a^{RL}D_a^{\eta}f(t)\right) = f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}^{RL}D_t^{\eta-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i}}{\Gamma(\eta-i+1)} \tag{2.11}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{-\eta}\left({}_a^{RL}D_a^{\eta}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\eta)}\int_a^t (t-\tau)^{\eta-1RL}D_a^{\eta}f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\eta+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\eta RL}D_a^{\eta}f(\tau)d\tau\right]. \end{aligned}$$

En effectuant des intégrations par parties répetées, on utilisant la définition de R-L, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\eta+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\eta}\left[{}^{RL}D_a^{\eta}f(\tau)\right]d\tau =& \frac{1}{\Gamma(\eta+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\eta}\frac{d^m}{d\tau^m}\left\{{}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}f(\tau)\right\}d\tau. \\ =& \frac{1}{\Gamma(\eta-m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\eta-m}\left\{{}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}f(\tau)\right\}d\tau. \\ & -\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}}\left({}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i+1}}{\Gamma(2+\eta-i)} \\ =& \frac{1}{\Gamma(\eta-m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\eta-m}\left\{{}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}f(\tau)\right\}d\tau. \\ & -\sum_{i=1}^{m}\left[\left({}^{RL}D_a^{(\eta-i)}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i+1}}{\Gamma(2+\eta-i)} \\ =& {}^{RL}D_a^{-(-m-\eta-1)}\left({}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}f(t)\right). \\ & -\sum_{i=1}^{m}\left[\left({}^{RL}D_a^{(\eta-i)}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i+1}}{\Gamma(2+\eta-i)} \\ =& {}^{RL}D_a^{-1}f(t). \\ & -\sum_{i=1}^{m}\left[\left({}^{RL}D_a^{(\eta-i)}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i+1}}{\Gamma(2+\eta-i)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Par substitution, on obtient le résultat désirée (2.11). ∎

Proposition 2.5.3. *Si* $0 \leq m-1 \leq q < m$*, on a*

$$ {}^{RL}D_a^{-\eta}\left({}_a^{RL}D_a^{q}f(t)\right) = {}^{RL}D^{q-\eta}f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}^{RL}D_t^{q-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i}}{\Gamma(\eta-i+1)} \tag{2.13}$$

Démonstration. Pour prouver la relation (2.13), nous utilisans les relations (2.10),(2.11),(2.12)

. Donc, on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{-\eta}\left({}_a^{RL}D_a^{q}f(t)\right) &= {}^{RL}D^{q-\eta}\left\{{}^{RL}D_a^{-q}\left({}^{RL}D_a^{q}f(t)\right)\right\} \\
&= {}^{RL}D^{q-\eta}\left\{f(t)-\sum_{i=1}^{m}\left[{}^{RL}D_a^{q-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)}\right\} \\
&= {}^{RL}D^{q-\eta}f(t)-\sum_{i=1}^{m}\left[{}^{RL}D_a^{q-i}f(t)\right]_{t=a}{}^{RL}D^{q-\eta}\left\{\frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)}\right\} \\
&= {}^{RL}D^{q-\eta}f(t)-\sum_{i=1}^{m}\left[{}^{RL}D_a^{q-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\eta-i}}{\Gamma(1+\eta-i)}.
\end{aligned}
$$

D'oừ le résultat désiré. ■

2.6 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 2.6.1. *Dans plusieurs problèmes appliqués, on trouve la composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier.*
De la définition de la dérivée de Riemann-Liouville,nous avons :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n}\left({}^{RL}D_a^{\alpha}f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(n+\alpha))}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau \\
&= {}^{RL}D_a^{n+\alpha}f(t).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Dans le cas inverse des opérateurs, nous avons :

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{-n}f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \\
&= f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Et que

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D_a^{\alpha+n}\left({}^{RL}D_a^{-n}f(t)\right) \tag{2.16}
$$

En combinaison (2.14), (2.15) *et* (2.16), *on obtient :*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) &= {}^{RL}D_a^{\alpha+n}\left({}^{RL}D_a^{-n}f(n)(t)\right) \\
&= {}^{RL}D_a^{\alpha+n}\left\{f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)}\right\} \\
&= {}^{RL}D_a^{\alpha+n}f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+i-\alpha-n)}.
\end{aligned}
$$

Alors, on peut déduire que la dérivation fractionnaire au sense de Riemann-Liouville dérivation d'ordre entier ne commutent que si $f^{(i)}(a) = 0$*, pour tout* $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

2.7 Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 2.7.1. *Soit* $n-1 \leq \eta < n$ *et* $m-1 \leq q < m$ *:En utilisant la définition de la dérivée fraction au sens de Riemann-Liouville et les formules* (2.10) *et* (2.14)*, on obtient :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\eta}\left({}^{RL}D_a^{q}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}^{RL}D_a^{-(m-\eta)}\left({}^{RL}D_a^{q}f(t)\right)\right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}^{RL}D_a^{\eta+q-m}f(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}^{RL}D_a^{q-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-\eta-i}}{\Gamma(1+m-\eta-i)}\right\} \\ &= {}^{RL}D_a^{\eta+q}f(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}^{RL}D_a^{q-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\eta-i}}{\Gamma(1-\eta-i)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En permutant η *et* q*, la relation* (2.17) *donne :*

$${}^{RL}D_a^{q}\left({}^{RL}D_a^{\eta}f(t)\right) = {}^{RL}D^{\eta+q}f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}^{RL}D_a^{\eta-i}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-i}}{\Gamma(1-q-i)} \tag{2.18}$$

Une comparaison des relations (2.17) *et* (2.18)*, montre que les deux opérateurs de dérivation fractionnaire* ${}^{RL}D^{\eta}$ *et* ${}^{RL}D^{q}$*,ne commutent que si* $\eta = q$ *ou si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\left[{}^{RL}D^{\eta-i}f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad \textit{pour tout} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m$$

et

$$\left[{}^{RL}D^{q-i}f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad \textit{pour tout} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

.

Remarque 2.7.1. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e*

$$D_a^{\alpha} \circ D_a^{\beta} = D_a^{\alpha+\beta} \neq D_a^{\beta} \circ D_a^{\alpha}.$$

Exemple 2.7.1. *On considère la fonction* f *définie par*

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tau &\longrightarrow f(\tau) = 1 \end{aligned}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}g$,$D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}g$,$D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}g$.

Solution. *On a* $D_0^{\frac{1}{2}}1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tau^{-\frac{1}{2}}$ *ceci nous donne*

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}1 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(\tau-x)^{\frac{1}{2}}}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau \tau^{\frac{-1}{2}}(\tau-x)^{\frac{-1}{2}}dx, \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau x^{\frac{-1}{2}}(\tau-x)^{\frac{-1}{2}}dx &= \int_0^1 v^{\frac{-1}{2}}(1-v)^{\frac{-1}{2}}dv \\ &= \int_0^1 v^{\frac{1}{2}-1}(1-v)^{\frac{1}{2}-1}dv \\ &= \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Donc $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}1 = 0 = D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}1.$

Exemple 2.7.2. *Soit la fonction g définie par*

$$\begin{aligned} g:[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}g$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}g$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}g$.

Solution. *De la même manière que l'exemple précédent, on trouve que* $(D_0^{\frac{1}{2}}g)(x) = 0$, *de plus on a*

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}g)(x) = (D^1g)(x) = \frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

D'où $(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}g)(x) = 0 \neq -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

Exemple 2.7.3. *soient* $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ *et* $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, *la fonction g définie par :*

$$\begin{aligned} g:[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}g$, $D_0^{\frac{3}{2}}g$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}g$, $D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}g$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}g$.

Solution. *On a*

$$D_0^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \tau^{\frac{1}{2}}(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau,$$

et alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \tau^{\frac{1}{2}}(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau &= \int_0^1 v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dv \\ &= x\int_0^1 v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}}dv \\ &= x\int_0^1 v^{\frac{3}{2}-1}(1-v)^{\frac{1}{2}-1}dv \\ &= x\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Alors

$$D_0^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{\beta(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})} = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$D_0^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\left[x\beta(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\right] = 0.$$

D'où

$$(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}g)(x) = 0. \tag{2.19}$$

$$(D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}g)(x) = D_0^{\frac{3}{2}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2}] = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{2.20}$$

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}g)(x) = (D^2g)(x) = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{2.21}$$

Alors d'après (2.19), (2.20), (2.21) *on a*

$$D_0^{\alpha_1}D_0^{\alpha_2}g \neq D_0^{\alpha_2}D_0^{\alpha_1}g \neq D_0^{\alpha_1+\alpha_2}g.$$

2.8 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $r > 0$ de R-L définie par :

$$_aD_t^{-r}f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t (t-\tau)^{r-1}f(\tau)d\tau, \tag{2.22}$$

laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{r-1}$ et $f(t)$ comme suit :

$$_0D_t^{-r}f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-\tau)^{r-1}f(\tau)d\tau = t^{r-1} \star f(t). \tag{2.23}$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{r-1}est

$$G(p) = \mathcal{L}\big[t^{r-1}\big](p) = \Gamma(r)p^{-r}. \tag{2.24}$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution , nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L :

$$\mathcal{L}\big[{}_0D_t^{-r}f(t)\big](p) = p^{-r}F(p). \tag{2.25}$$

Maintenant, nous nous intéressons au calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L, qui pour cela nous l'écrivons sous la forme

$${}_0D_t^r f(t) = g^{(n)}(t),$$

$$g(t) =_0 D_t^{-(n-r)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-r)}\int_0^t (t-\tau)^{n-r-1}f(\tau)d\tau. \tag{2.26}$$

L'utilisation de la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier donne :

$$\mathcal{L}\big[{}_0D_t^r f(t)\big](p) = p^n G(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k g^{(n-k-1)}(0). \tag{2.27}$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t)$ est déterminée par (2.25) :

$$G(p) = p^{-(n-r)}F(p). \tag{2.28}$$

En résumé, de la définition de la dérivée fractionnaire de R-L, il vient :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}{}_0D_t^{-(n-r)}f(t) =_0 D_t^{r-k-1}f(t). \tag{2.29}$$

En substituant (2.29) et (2.28) dans (2.27), nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L d'ordre $r > 0$:

$$\mathcal{L}\big[{}_0D_t^r f(t)\big](p) = p^r F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [{}_0D_t^{r-k-1}f(t)]_{t=0}. \tag{2.30}$$

Chapitre 3

Dérivée de Grünwald-Letnikov

Dans ce chapitre nous décrivons une approche pour l'unification des deux notions, qui sont souvent présentées séparément dans l'analyse classique : dérivée d'ordre entier n et intégrale répétée n-fois, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov. Nous allons commencer par la définition de la dérivéé de G-L, en donnant les propriétés les plus importantes de cette approche, ainsi que le lien avec l'approche de R-L pour plus de détails voir ([3, 5, 2]).

3.1 L'unification des dérivées et des intégrales fractionnaires d'ordre entier

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois si (p est négatif), d'une fonction f comme ceci :

Considérons une fonction continue $y = f(t)$, d'après la définition classique de la dérivation en un point t on a :

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{3.1}$$

de la même manière, on peut définir la dérivée seconde d'une fonction :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h))}{h^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

utilisant (3.1) et (3.2)on obtient

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{3.3}$$

et, par récurrence

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) \qquad (3.4)$$

où

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r!)}. \qquad (3.5)$$

Grâce à la propriété fondamentale de la fonction Gamma $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(n+1)}{r!\Gamma(n-r+1)}.$$

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant les fractions dans (3.1)(3.4). pour un entier p on a :

$$f_h^{(p)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh). \qquad (3.6)$$

Définition 3.1.1. *Soit p un réel strictement positif, on définit la dérivée d'ordre non entier de la fonction f au sens de Grünwald-Letnikov par :*

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^p f(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(p+1)}{r!\Gamma(p-r+1)} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^x (x-t)^{-p-1} f(t)\, dt, \qquad (x > a, \mathfrak{Re}(p) > 0). \end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. *Remarquons que si $p \leq n$ on a :*

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \qquad (3.7)$$

car dans un tel cas, comme il ressort de (3.1)*, tous les coefficient du numérateur après* $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ *sont égaux a* 0*.*
Considérons des valeurs négative pour p. Par commodité, on note

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{r!} \qquad (3.8)$$

Alors on a :

$$\begin{pmatrix} -p \\ r \end{pmatrix} = \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

Et en remplaçant p dans (3.6) *par $-p$ on peut écrire :*

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \qquad (3.10)$$

Où p est un nombre entier positif. Si p est fixé, alors $f_h^{(-p)}(t)$ tend vers 0 quand $h \to 0$. Pour arriver à une limite non nulle, on suppose que $n \to +\infty$ quand $h \to 0$.
Alors, On peut prendre $h = \frac{t-a}{n}$ où a est une constante réelle, et on considère la valeur limite (soit finie ou infinie) de $f_h^{(-p)}(t)$, que l'on notera comme suit :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-p)} f(t) = {}_a^{GL} D_t^{-p} f(t) \tag{3.11}$$

Cas particuliers : *Considérons quelques cas particuliers.*

Cas 1 : *Pour $p = 1$ on a :*

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} f(t - rh). \tag{3.12}$$

En tenant compte de $t - nh = a$ et que la fonction $f(t)$ est supposée continue, on conclut que :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a^{GL} D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau. \tag{3.13}$$

Cas 2 : *Pour $p = 2$ on a :*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2 + r - 1)}{r!} = r + 1.$$

Et on a

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (rh) f(t - rh) \tag{3.14}$$

En notant par $t + h = y$ on peut écrire :

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(t - rh). \tag{3.15}$$

Si $h \to 0$, alors :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z)dt = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau, . \tag{3.16}$$

car $y \to t$ quand $h \to 0$.

Cas 3 : *Pour $p = 3$ on a l'expression générale de ${}_a D_t^{-p}$ En tenant compte de*

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3 + r - 1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2}$$

On a

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=0}^{n} (r+1)(r+2) h^2 f(t - rh) \tag{3.17}$$

En notant, comme ci-dessus, par $t+2h=y$, on écrit :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1\cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \tag{3.18}$$

L'expression (3.18) se réécrit comme :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1\cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} rh^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) \tag{3.19}$$

En faisant tendre $h\to 0$, nous obtenons :

$${}_a^{GL}D_t^{-3}f(t) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau \tag{3.20}$$

Parce que $y\to t$ et $h\to 0$ et

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1\cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0,.$$

Les relations $(3.13)-(3.20)$ suggèrent l'expression générale suivante :

$${}_a^{GL}D_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array}\right] f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \tag{3.21}$$

Pour prouver la formule (3.21) par récurrence on a montrer que si elle est vérifiée pour un certain p, alors elle est aussi vérifiée pour $p+1$. Introduisons la fonction

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{3.22}$$

qui admet la propriété évidente $f_1(a)=0$, et considérons

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^{p-1}f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p+1}\sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array}\right] f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array}\right] f_1(t-rh) \\ &- \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array}\right] f_1(t-(r+1)h) \end{aligned} \tag{3.23}$$

En utilisant (3.8), il est facile de vérifier que :

$$\left[\begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r-1 \end{array}\right] \tag{3.24}$$

Où nous devons poser

$$\left[\begin{array}{c} p+1 \\ -1 \end{array}\right] = 0$$

La relation (3.24) appliquée à la première somme de (3.23) et le remplacement de r par $r-1$ dans la seconde somme donnent :

$$\begin{aligned}
{}_a^{GL}D_t^{-p-1}f(t) = &\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to ta}} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array}\right] f_1(t-rh) \\
&+ \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r-1 \end{array}\right] f_1(t-rh) \\
&- \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r \end{array}\right] f_1(t-rh) \\
&- \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ r-1 \end{array}\right] f_1(t-rh) \\
&= {}_a^{GL}D_t^{-p}f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \left[\begin{array}{c} p+1 \\ n \end{array}\right] f_1(t-(n+1)h) \\
&= {}_a^{GL}D_t^{-p}f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\infty} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ n \end{array}\right] \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

Il suit de la définition de la fonction $f_1(t)$ que :

$$\lim_{n\to\infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0$$

En tenant compte de la limite connue

$$\lim_{n\to\infty} \left[\begin{array}{c} p+1 \\ n \end{array}\right] \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
{}_a^{GL}D_t^{p-1}f(t) = {}_a^{GL}D_t^{-p}f_1(t) &= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau)d\tau \\
&= -\left.\frac{(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!}\right|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve par récurrence de la formule (3.21).

Montrons maintenant que la formule (3.21) est une représentation d'une intégrale répétée p-fois. En intégrant la relation

$$\frac{d}{dt}\left({}_a^{GL}D_t^{-p}f(t)\right) = \frac{1}{(p-2!)}\int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau)d\tau = {}_a^{GL}D_t^{-p+1}f(t)$$

de a à t, nous obtenons :

$${}_a^{GL}D_t^{-p}f(t) = \int_a^t \left({}_a^{GL}D_t^{-p+1}f(t)\right)dt$$

Et

$$ {}_{a}^{GL}D_t^{-p+1}f(t) = \int_a^t \left({}_{a}^{GL}D_t^{-p+2}f(t)\right) dt, \textit{ etc.} $$

et donc

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{GL}D_t^{-p}f(t) &= \int_a^t \left({}_{a}^{GL}D_t^{-p+2}f(t)\right) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_{a}^{GL}D_t^{-p+3}f(t)\right) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \ldots \int_a^t dt.}_{pfois} \end{aligned} $$

On remarque que la dérivée d'ordre entier n et l'intégrale répétée n-fois d'une fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de la formule générale :

$$ {}_{a}^{GL}D_t^{p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) $$

qui représente la dérivée d'ordre n si $p = n$ et l'intégrale répétée n-fois si $p = -n$.

Alors, l'intégrale fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$$ \begin{aligned} {}_{a}I^{p}f(t) =_{a}^{GL} D^{-P}f(t) &= \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(p)} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}f(t)dt \end{aligned} $$

3.2 La dérivée d'une constante au sens de Grünwald-Letnikov

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Soit $f(t) = c$ et p un nombre non entier positif. on a donc

$$ f^{(k)}(t) = 0 $$

pour $k = 1, 2, \cdots n$

$$
\begin{aligned}
{}_a^{GL}D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)(a)}}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}}_{=0} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{=0} \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}
\end{aligned}
$$

3.3 La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$

Soit p un nombre non entier $(0 < n-1 < p < n)$ et soit $\beta > n-1$, alors on a

$f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n},$$

D'oὺ

$${}_a^{GL}D_t^p (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\beta-n} d\tau.$$

On utilisant le changement de variable $\tau = a + x(t-a)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_a^{GL}D_t^p (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\beta-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta-p}}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (1-x)^{n-p-1} x^{\beta-n} dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta(n-p, \beta-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-p} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(t-a)^{\beta-p}
\end{aligned}
$$

3.4 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 3.4.1. *Soient n un entier strictement positif et p non entier. Alors :*

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) = {}_a^{GL}D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_a^{GL}D_t^{p+n} f(t)$$

Démonstration. Pour $m > p - 1$, on pose $s = m$ on a d'une part :

$$\begin{aligned}{}_a^{GL}D_t^p f(t) = &\sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau) d\tau\end{aligned}$$

on suppose que $m < p < m + 1$.

Calculons la dérivée d'ordre entier n de la dérivée fractionnaire d'ordre réel p, où on prend $s \geq m + n - 1$. Le résultat est :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) = &\sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a^{GL}D_t^{p+n} f(t).\end{aligned}$$

Comme $s > m + n - 1$ est quelconque, prenons $s = m + n - 1$. Ceci donne

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) &= {}_a^{GL}D_t^{p+n} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'ordre inverse des opérations et calculons la dérivée fractionnaire d'ordre p d'une dérivée d'ordre entier $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$.

$$\begin{aligned}{}_a^{GL}D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) = &\sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}{}_a^{GL}D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) = &\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) = {}_a^{GL}D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}.$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

■

3.5 Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 3.5.1. *Trois cas sont à distinguer :*

- *Si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors*

$$_{a}^{GL}D_{t}^{q}\left(_{a}^{GL}D_{t}^{p}f(t)\right) = {}_{a}^{GL}D_{t}^{p+q}f(t).$$

- *Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$, alors :*

$$_{a}^{GL}D_{t}^{q}\left(_{a}^{GL}D_{t}^{p}f(t)\right) = {}_{a}^{GL}D_{t}^{p+q}f(t).$$

Seulement si $f(k)(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, r-2$ avec $r = max(m, n)$.

Démonstration. :

Cas 1 : Si $q < 0$ et $p < 0$, alors :

$$\begin{aligned}
_{a}^{GL}D_{t}^{q}\left(_{a}^{GL}D_{t}^{p}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-q-1}\left(_{a}^{GL}D_{\tau}^{p}f(\tau)\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-q-1}d\tau\int_{a}^{\tau}(\tau-\xi)^{-q-1}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_{a}^{t}f(\xi)d\xi\int_{\xi}^{t}(t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi)^{-p-1}d\tau.
\end{aligned}$$

En Effectuant le changement de variable $\tau = \xi + z(t-\xi)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{t}(t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi)^{-p-1}d\tau &= (t-\xi)^{-p-q-1}\int_{0}^{1}(1-z)^{-q-1}z^{-p-1}dz \\
&= \frac{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}{\Gamma(-p-q)}(t-\xi)^{-p-q-1}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
_{a}^{GL}D_{t}^{q}\left(_{a}^{GL}D_{t}^{p}f(t)\right) &= \frac{\beta(-q,-p)}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_{a}^{t}(t-\xi)^{-p-q-1}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p-q)}\int_{a}^{t}(t-\xi)^{-p-q-1}f(\xi)d\xi \\
&= {}_{a}^{GL}D_{t}^{p+q}f(t).
\end{aligned}$$

Cas 2 : Si $0 < n < q < n+1$.
On a : $q = (n) + (q-n)$, avec $q - n < 0$,alors :

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^q\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a^{GL}D_t^{q-n}\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right)\right\} \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a^{GL}D_t^{p+q-n} f(t)\right\} \\ &= {}_a^{GL}D_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

• Pour $0 \leq m < p < m+1$ et $q < 0$ on a :

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h\to\infty \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

les fonctions $(t-a)^{-p+k}$ ont des singularités non-intégrables pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$ et dans ce cas on a :

$${}_a^{GL}D_t^p f(t) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_a^{GL}D_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t).$$

De plus, la dérivée d'ordre réel q de ${}_a^{GL}D_t^p f(t)$. existe seulement si

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Alors,

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^q\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) =& \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p-q+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)}\int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+q-m}} \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^q\left({}_a^{GL}D_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t)\right) &= {}_a^{GL}D_t^{p+q-m-1} f^{(m+1)}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)}\int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+q-m}} \end{aligned}$$

Pour $p > 0$ et $q > 0$ tel que $[q] = n$ et $[p] = m$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ dans ce cas

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^q\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a^{GL}D_t^{q-n}\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right)\right\} \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a^{GL}D_t^{p+1-n} f(t)\right\} \\ &= {}_a^{GL}D_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$${}_a^{GL}D_t^q\left({}_a^{GL}D_t^p f(t)\right) = {}_a^{GL}D_t^p\left({}_a^{GL}D_t^q f(t)\right) = {}_a^{GL}D_t^{p+q} f(t).$$

■

3.5.1 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de G-L.

Proposition 3.5.2. *Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$.*

Pour $0 \leq \alpha < 1$ on a :

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^{GL}D_t^{\alpha} f(t)\right\}(s) = s^{\alpha} F(s)$$

Pour $\alpha \geq 1$ il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique mais dans le sens des distributions on a aussi :

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^{GL}D_t^{\alpha} f(t)\right\}(s) = s^{\alpha} F(s)$$

Démonstration. .Pour $0 \leq \alpha < 1$ on a :

$${}_0^{GL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds$$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme, et la transformée de Laplace de la convolution et de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{{}_0^{GL}D_t^{\alpha} f(t)\right\}(s) &= \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{1}{s^{1-\alpha}}(sF(s) - F(0)) \\ &= s^{\alpha} F(s)\end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre $p > 1$ n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non intégrables . Les transformées de Laplace de telles fonctions sont données par des intégrales divergentes. ■

3.6 Propriétés générale des dérivées fractionnaires

Dans cette section, D^p désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

3.6.1 La linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire :

$$\begin{aligned}{}_aD_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = &\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} (\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \\ =&\lambda \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) \\ &+ \mu \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} g(t-rh) \\ &= \lambda_a D_t^p f(t) + \mu_a D_t^p g(t).\end{aligned}$$

Dans cette preuve $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions pour lesquelles les opérateurs donnés sont définis et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

Une démonstration de la linéarité du difféo-intégral de Riemann-Liouville sera également donnée. En utilisant l'intégrale fractionnaire donné :

$$\begin{aligned}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(\lambda f(t)+\mu g(t)) =& \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1}(\lambda f(\tau)+\mu g(\tau)) \mathrm{d}\tau \\ =& \lambda \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &+ \mu \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} g(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \lambda\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(t)+\mu\left(I_{a+}^{\alpha} g\right)(t).\end{aligned}$$

3.6.2 La règle du zéro

On peut prouver que si $f(t)$ est continue pour $t \geq a$ nous avons

$$\lim_{p \to 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = f(t)$$

Par conséquent, nous définissons

$$ {}_aD_t^0 f(t) = f(t)$$

3.6.3 Formule de Leibnitz pour l'intégrale d'ordre fractionnaire

Théorème 3.6.1. *Soient $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et g une fonction analytique sur $[a,b]$, alors pour tout $\alpha > 0$ on a*

$$\left(I_{a_+}^{\alpha} fg\right)(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\alpha \\ j \end{pmatrix} D^j g(x) I_{a_+}^{\alpha+j} f(x)$$

Démonstration. On a

$$I_{a_+}^{\alpha}(fg)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) g(t) dt,$$

Et

$$\left(I_{a_+}^{\alpha+j} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+j)} \int_a^{\alpha} (x-t)^{\alpha+j-1} f(t) dt.$$

Puisque g est analytique, on obtient

$$g(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j D^j g(x)}{j!} (x-t)^j,$$

Ceci implique

$$g(t) = g(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j D^j g(x)}{j!}(x-t)^j,$$

Alors

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a+}(f(x)g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) \left(g(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j D^j g(x)}{j!}(x-t)^j \right) dt \\
&= \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j D^j g(x)}{j!} \int_a^x (x-t)^j f(t) dt \\
&= g(x) I^{\alpha}_{a+} f(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} D^j g(x) \left(I^{\alpha+j}_{a+} f \right)(x) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\alpha \\ j \end{pmatrix} \left(D^j g(x) \right) \left(I^{\alpha+j}_{a+} f(x) \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\left(I^{\alpha}_{a+} fg \right)(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\alpha \\ j \end{pmatrix} D^j g(x) I^{\alpha+j}_{a+} f(x)$$

Avec

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha + j)}{j! \Gamma(\alpha)}$$

■

3.7 Lien avec l'approche de Riemann-Liouville

Comme mentionné ci-dessus, il existe une relation entre les approches de différentiation d'ordre réel arbitraire de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov. Les conditions exactes de l'équivalence de ces deux approches sont les suivantes.

Proposition 3.7.1. *Supposons que la fonction $f(t)$ est $(m-1)$ -fois continument différentiable dans l'intervalle $[a,t]$. Et donc, pour tout $\alpha, (0 < \alpha < m)$ la dérivée ${}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t)$ au sens de Riemann-Liouville existe et coïncide avec la dérivée ${}^{G}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t)$ de Grünwald -Letnikov. Et si $0 \leq \alpha < n \leq m$ alors pour $a < t < T$ nous avons :*

$${}^{GL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = {}^{RL}_{a} D^{\alpha}_{t} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \tag{3.25}$$

Démonstration. En effet, d'une part, le membre a droite de la formule (3.25) est égal a la dérivée ${}^{GL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t)$ de Grünwald-Letnikov. D'autre part, on peut écrire :

$$\frac{d^n}{dt^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \right\}.$$

laquelle, après n-intégration par parties, prend la forme de la dérivée ${}_a^{RL}D_t^{\alpha} f(t)$ au sens de Riemann-Liouville

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left\{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-} f^{(n)}(s)ds\right\} &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a^{RL}D_t^{-(n-\alpha)} f(t)\right\} \\ &={}_a^{RL} D_t^{\alpha} f(t)\end{aligned}$$

■

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'introduire et définir les dérivées et les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov en tant qu'extension des dérivées et intégrales arbitraire.

On a rappelé quelques notions préliminaires fondamentales, et quelques outils de base du calcul telle que la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés.

Ainsi que déterminer les propriétés et les résultats liés à ceux-ci. Ce travail nous a permis de savoir l'importance du calcul fractionnaire dans le domaine des mathématiques. Grâce à ce recherche, nous avons beaucoup appris sur le calcul dite fractionnaire, en particulier la maitrise à une certaine mesure, de calculer des dérivées ou des intégrales fractionnaires pour différentes fonctions.

Nous comptons, dans l'avenir d'appliquer le calcul fractionnaire aux divers problèmes et de développer des autres méthodologies de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires.

Bibliographie

[1] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et application*,Academic Press, France, Dunod, 2005.

[2] Kamel Haouam, *Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires*, PhD Thesis, Université de Canstantine **2007**.

[3] K. Miller,B.Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[4] K. B. Oldham, J. Spanier ; *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.

[5] I. Podlubny, *Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering*, vol, **198**, Academic Press, New York/London/Toronto, 1999.

[6] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Mathematica (1948) **81**, pp. 1-222.

[7] Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.O. (1993), *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach, New York. 1993.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de s'adapter avec le calcul fractionnaire en introduisant les opérateurs linéaires d'intégration fractionnaire et de différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov. Une attention particulière est consacré aux outils auxiliaires nécessaires pour définir ces nouveaux concepts comme certaines fonctions spéciales (Gamma-Bêta...) et la technique des transformées de Laplace. Ensuite, nous allons donner les définitions des dérivées et intégrales fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov. Aussi, nous présentons certaines propriétés de base des différo-intégrales, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et la composition.
Enfin, nous expliquons le lien entre ces dérivées.

Abstracts

The work presented in this memory is part of the framework of adapting with fractional calculus by introducing the fractional integration and fractional differentiation linear operators of Riemann-Liouville and Grünwald-Letnikov. Particular attention is devoted to the auxiliary tools necessary to define these new concepts as certain special functions (Gamma-bêta...) and to the Laplace transform technique. Then, we present the definitions of fractional derivatives in the sens of Riemann-Liouville and Grünwald-Letnikov. Also, we present some basic properties of differintegrals, such as linearity, the Leibniz rule and composition.
Finally, we explain the links between these derivatives.

ملخص

يندرج العمل المقدم في هذه المذكرة في إطار التكيّف مع الحساب الكسري من خلال إدخال مؤثري التكامل والتفاضل برتب غير طبيعية حسب مقاربة ريمان - ليوفيل ، غرونوالد - ليتنيكوف . ويكرس اهتمام خاص للأدوات المساعدة اللازمة لتقديم هذه المفاهيم الجديدة كبعض الدوال الخاصة غاما - بيتا وتقنية تحويل لابلاس. أيضا، نقدم تعريف المشتقات و التكاملات ذات الرتب الكسرية بمعنى ريمان - ليوفيل و غرونوالد - ليتنيكوف . كما، نقدم بعض الخصائص الأساسية للمستكاملات مثل خاصيّة الخطيّة، قاعدة ليبنز و خاصيّة التركيب.
وأخيرا، نشرح العلاقة بين المقاربتين.