الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة

République algérienne démocratique et populaire

وزارة التـعليــم العالــي والبحــث العلمــــي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب


Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib

Faculté des Sciences et de Technologie

Département Mathématique et Informatique


***Projet de Fin d'Etudes***

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Équations différentielles et Modélisation

Thème

# *Problèmes de Cauchy dans l'espace des distributions*


**Présenté par:**

Taharaoui Romaissae


**Devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pr. HAMMOUDI Ahmed | Pr | UAT.B.B (Ain Temouchent) | Président |
| Dr. KHIAR Hamid | MCB | UAT.B.B (Ain Temouchent) | Examinateur |
| Dr. TCHOUAR Fatima Zahra | MCB | UAT.B.B (Ain Temouchent) | Encadrante |

**Année Universitaire : 2022-2023**

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A ceux qui m'ont soutenu quand j'étais faible,*
*A la mémoire de mon père,*
*A ma chère mère, la source de ma vie,*
*A mes chères sœurs : Sarah , Hafsa , Dounia , aux petits de la famille Hazar, Roudina,*
*A mon amie chaimae qui m'a apporté un soutien inestimable,*
*A tous mes enseignants de l'université d'Aïn Témouchent.*

Taharaoui Romaissae ✍

# Remerciements

Je remercie avant tout Allah le Tout puissant pour m'avoir donné la santé, la patience et le courage pour mener à bien ce mémoire.

Je tiens à témoigner ma plus profonde gratitude à mon encadrante, Madame

**TCHOUAR Fatima Zahra**

de m'avoir encadré et proposé un sujet aussi passionnant et intéressant. Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissante. Ses compétences et ses conseils m'ont été d'un grand secours. Encore merci !

Par ailleurs, je tiens à exprimer mes vifs remerciements au président du jury

Monsieur Hammoudi Ahmed

Je remercie très respectueusement Monsieur Khiar Hamid qui a consacré son temps à bien examiner et juger mon travail d'une façon minutieuse.

D'autre part, j'adresse une chaleureuse pensée à toute l'équipe pédagogique du Département de Mathématiques et Informatique surtout la Cheffe de département Madame Hellal Meriem.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie mes soeurs pour leurs encouragements.

En fin, un grand merci à toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de ce travail.

# Table des matières

# Notations

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des nombres réels. |
| $\mathbb{C}$ | Ensemble des nombres complexes. |
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des nombres entiers naturels. |
| $\mathbb{N}^*$ | Ensemble des nombres naturels strictement positives. |
| $I_X$ | L'opérateur identité sur $X$. |
| $\\|\cdot\\|$ | Norme sur l'espace de Banach $X$ |
| $\Re\lambda$ | La partie réelle du nombre complexe $\lambda$ |
| $\Omega$ | Un ouvert de $\mathbb{R}$ |
| $\overline{\Omega}$ | L'adhérence de l'ensemble $\Omega$. |
| $\|\Omega\|$ | Mesure de Lebesgue de l'ensemble $\Omega$ |

# Introduction

Le domaine de l'analyse fonctionnelle, spécifiquement l'étude des espaces de Banach, a prouvé son utilité dans divers contextes mathématiques, physiques et d'ingénierie. Une facette particulièrement intéressante de ce domaine est l'étude des fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach. Ces fonctions, définies sur un espace mesurable et à valeurs dans un espace de Banach, généralisent la notion traditionnelle de fonction mesurable.

Ce mémoire se propose d'étudier ces fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach. Nous examinons leur théorie, en mettant l'accent sur leur mesure et leur intégration, en nous basant sur l'approche de la mesure de Lebesgue et les intégrales de Bochner.

Nous commençons par une introduction générale des fonctions mesurables. Par la suite, nous nous concentrons sur la notion de l'intégrale de Bochner, l'une des généralisations les plus importantes de l'intégrale de Lebesgue au contexte des espaces de Banach.

Dans la section suivante, nous étudions les distributions qui jouent un rôle important dans l'analyse et ont des applications dans de nombreux domaines, tels que les équations différentielles partielles et la physique théorique. Une extension naturelle de la théorie des distributions est l'étude des distributions à valeurs vectorielles, introduites par Laurent Schwartz.

Dans cette étude, nous mettons l'accent sur leur définition, l'étude des opérations telles que la dérivation et la translation, et nous examinerons comment ces opérations se généralisent du cas scalaire au cas vectoriel. Nous décrivons les différents types de convergence qui peuvent être utilisés. Nous terminons avec la convolution, qui n'est pas si évidente à comprendre.

Le dernier chapitre porte sur le problème de Cauchy,

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{si } t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

qui joue un rôle fondamental dans l'étude des EDP données avec des conditions initiales. L'étude de ce problème dans l'espace des distributions offre une perspective enrichissante, permettant une meilleure compréhension de la nature des solutions des EDP.

Pour cela, nous étudions les semi-groupes de distributions et leurs propriétés essentielles, en soulignant comment ces structures permettent de résoudre le problème de Cauchy dans l'espace des distributions. Nous présentons le lien entre les semi-groupes de distributions et le problème de Cauchy, et nous montrons qu'il est possible de déduire une solution au problème de Cauchy en associant à chaque équation différentielle un opérateur qui engendre un semi-groupe dans l'espace des distributions.

# Chapitre 1

# Espaces fonctionnels

Dans ce chapitre, on résume quelques résultats sur la théorie des fonctions à valeurs vectorielles, en particulier à valeur dans un espace de Banach. Nous présentons quelques résultats sur l'intégration et la différenciation des fonctions à une seule variable à valeurs dans un espace de Banach. Nous verrons l'intégration qui dans un sens grossier a les mêmes propriétés que celle des fonctions à valeurs scalaires. Pour plus de détails, voir par exemple [5]

## 1.1 Espaces des fonctions intégrables

Commençons par définir la notion de mesurabilité des fonctions à valeurs vectorielles, en supposant connue la théorie de l'intégrale de Lebesgue des fonctions réelles.

Tout au long de ce travail, on suppose que $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|$.

On note par $\chi_\Omega$ la fonction caractéristique de $\Omega$ définie par :

$$\chi_\Omega(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \Omega \end{cases}$$

La mesure de Lebesgue d'une partie $\Omega$ de $\mathbb{R}$ est notée par $|\Omega|$.

**Définition 1.1.1.** *On appelle une fonction simple toute fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ qui s'écrit sous la forme suivante*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\Omega_i},$$

*où $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ sont des sous-ensembles Lebesgue mesurables de l'ouvert $\Omega$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont des élements de $X$.*

Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ est dite convergente vers $x \in X$ dans $(X, \|\cdot\|)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

**Définition 1.1.2.** *Une fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ est dite mesurable, s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples telle que $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(t)$ dans $X$ pour presque tout $t$ dans $\Omega$.*

Voyons quelques propriétés de ces fonctions mesurables.

**Proposition 1.1.3.** *Soit $u$ une fonction mesurable définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$. On a les propriétés suivantes :*

1. La fonction norme définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par
$$\|u\| : t \mapsto \|u\|(t) := \|u(t)\|$$
est mesurable.
2. Si $\phi$, une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est mesurable, alors la fonction $\phi u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ par $\phi u : t \mapsto \phi u(t) := \phi(t)\, u(t)$ est mesurable aussi.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables telle que $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(t)$ dans $X$ pour presque tout $t$ dans $\Omega$, alors $u$ est mesurable .

Dans la théorie, il existe d'autres définitions des fonctions mesurables, on cite ici la notion de fonctions faiblement mesurables qui est définie comme suit.

**Définition 1.1.4.** *Une fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ est dite faiblement mesurable si pour tout élément $\omega \in X'$, le dual de $X$, la fonction définie sur $\Omega$ à valeurs réelle par*
$$\langle \omega, u\rangle(t) = \omega(u(t)), \tag{1.1}$$
*est mesurable au sens de Lebesgue.*

La relation entre mesurable et faiblement mesurable est donnée dans la proposition suivante :

**Proposition 1.1.5.** *Une fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ est mesurable si et seulement si $u$ est faiblement mesurable et il existe un ensemble $\mathcal{N} \subset \Omega$ de mesure nulle tel que $u(\Omega\backslash\mathcal{N})$ est séparable.*

**Remarque 1.1.6.** *Dans la proposition précédente, si $X$ est de plus séparable, pour montrer que $u$ est mesurable, il suffit alors de vérifier que pour tout élément $\omega \in X'$, la fonction définie dans ( 1.1) est mesurable au sens de Lebesgue.*

La définition de l'intégrale de Lebesgue comme borne supérieure des intégrales de fonctions simples ne s'étend pas directement aux intégrales à valeurs vectorielles. Salomon Bochner a étendu la définition de l'intégrale de Lebesgue aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach comme limite d'intégrales de fonctions étagées. Les propriétés de cette intégrale sont similaires à celles de l'intégrale de Lebesgue.

**Définition 1.1.7.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k} \subset X$ et $(\Omega_i)_{1\leq i\leq k} \subset \Omega$, tels que pour tout $1 \leq i \leq k$, $|\Omega_i| < \infty$. L'intégrale de Bochner de la fonction simple $u$, donnée par $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{\Omega_i}$, est définie comme suit :*

$$\int_\Omega u\,(t)\,dt := \sum_{i=1}^{k} |\Omega_i|\,\alpha_i \in X.$$

Il est clair que cette intégrale est linéaire par rapport à la fonction simple $u$ et qu'elle est indépendante de la représentation de celle-ci. De plus, grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \int_\Omega u\,(t)\,dt \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \| |\Omega_i|\,\alpha_i \| = \int_\Omega \|u\,(t)\|\,dt, \tag{1.2}$$

où l'intégrale du membre droite est l'intégrale usuelle d'une fonction à valeurs scalaire. De plus, on montre facilement que si $T$ est un opérateur linéaire continu de $X$ dans $Y$ un espace de Banach, alors $T\,(u)$ est intégrable et on a

$$T\left( \int_\Omega u\,(t)\,dt \right) = \int_\Omega T\,(u\,(t))\,dt. \tag{1.3}$$

On va étendre cette définition à une plus grande classe de fonctions.

**Définition 1.1.8.** *Une fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ est dite intégrable au sens de Bochner si elle est mesurable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|(u - u_n)\,(t)\|\,dt = 0,$$

*où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de fonctions simples qui converge vers $u$ dans $X$. Dans ce cas, on pose*

$$\int_\Omega u\,(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\,(t)\,dt.$$

La valeur de l'intégrale de Bochner est indépendante de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposition 1.1.9.** *Soit $u$ une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$, $u$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si $u$ est mesurable et $\int_\Omega \|u(t)\|\, dt < \infty$.*

**Preuve.** Si $u$ est intégrable au sens de Bochner, alors elle est mesurable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|(u - u_n)(t)\|\, dt = 0,$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de fonctions simples qui converge vers $u$ dans $X$. Donc en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\int_\Omega \|u(t)\|\, dt \leq \int_\Omega \|(u - u_n)(t)\|\, dt + \int_\Omega \|u_n(t)\|\, dt < \infty.$$

Inversement, si $u$ est mesurable, alors il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples qui converge presque partout vers $u$ dans $\Omega$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{t \in \Omega,\ \|v_n(t)\| \leq 2\|u(t)\|\} \text{ et } u_n = v_n \chi_{A_n},$$

et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers $u$ dans $\Omega$. Distinguons deux cas, si $u(t) = 0$, alors $u_n(t) = 0$ et il n'y a rien a montré. Ensuite si $u(t) \neq 0$, $\forall t \in \Omega$, alors $\|u(t)\| > 0$ et puisque $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = u(t)$, donc pour

$$\varepsilon = \|u(t)\|, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|u(t) - v_n(t)\| \leq \|u(t)\|$$

ce qui implique que pour $n \geq n_0$,

$$\|v_n(t)\| \leq \|u(t) - v_n(t)\| + \|u(t)\| \leq 2\|u(t)\|.$$

Ainsi pour $n \geq n_0$, $u_n(t) = v_n(t)$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ et

$$\|u(t) - u_n(t)\| \leq \|u(t)\| + \|v_n(t)\| = 3\|u(t)\|,\ \forall n \geq n_0$$

Et puisque par hypothèse $\int_\Omega \|u(t)\|\, dt < \infty$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue (pour les fonctions à valeurs réelles) et trouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|(u - u_n)(t)\|\, dt = 0.$$

■

**Exemple 1.1.10.** *Considérons la fonction $u$ définie sur $]0,1[$ à valeurs dans l'espace $L^2\left(]0,1[\right)$ par $u(t) = \chi_{]0,t[}$. On va montrer que $u$ est intégrable au sens de Bochner en utilisant la proposition précédente. Commençons par montrer qu'elle est mesurable, en se servant de la remarque 1.1.6.*
*Puisque $L^2\left(]0,1[\right)$ est séparable et isomorphe à $\left(L^2\left(]0,1[\right)\right)'$, on vérifie seulement la mesurabilité usuelle de la fonction $\omega$ définie par (1.1). Pour tout $\omega \in L^2\left(]0,1[\right)$, on a*

$$\langle \omega, u \rangle_{L^2}(t) = \int_\Omega \omega(s)\, u(t)(s)\, ds = \int_0^t \omega(s)\, ds.$$

*Ainsi $\langle \omega, u \rangle_{L^2} : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ est continue et donc mesurable.*
*Ensuite vérifions que $\int_0^1 \|u(t)\|_2\, dt < \infty$, en effet*

$$\|u(t)\|_2^2 = \int_0^1 |u(t)(s)|^2\, ds = \int_0^t ds = t.$$

*Donc $\int_0^1 \|u(t)\|_2\, dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt < \infty$.*

On va présenter maintenant quelques propriétés de l'intégrale de Bochner qui sont similaires à celle de l'intégrale de Lebesgue.

**Proposition 1.1.11.** *Soit $u$ une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ intégrable au sens de Bochner. On a les propriétés suivantes :*

1. $\left\| \int_\Omega u(t)\, dt \right\| \leq \int_\Omega \|u(t)\|\, dt$.
2. *Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, alors la restriction de $u$ à $\Omega_1$ (resp. à $\Omega_2$) est intégrable au sens de Bochner et*
$$\int_\Omega u(t)\, dt = \int_{\Omega_1} u(t)\, dt + \int_{\Omega_2} u(t)\, dt$$
3. *Si $\mathcal{N} \subset \Omega$ est de mesure nulle, alors $\int_{\mathcal{N}} u(t)\, dt = 0$.*
4. *Si $T$ est un opérateur linéaire continu de $X$ dans $Y$ un espace de Banach, alors $T(u)$, définie sur $\Omega$ à valeurs dans $Y$, est intégrable au sens de Bochner et on a*
$$T\left(\int_\Omega u(t)\, dt\right) = \int_\Omega T(u(t))\, dt.$$

**Preuve.** Soit $u$ une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ intégrable au sens de Bochner. Par définition, $u$ est mesurable et il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|(u - u_n)(t)\|\, dt = 0.$$

1. On a

$$\left|\int_{\Omega}\|u_n(t)\|\,dt-\int_{\Omega}\|u(t)\|\,dt\right|\leq\int_{\Omega}|\|u_n(t)\|-\|u(t)\||\,dt\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Par l'inégalité (1.2), on a

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Omega}u(t)\,dt\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}u_n(t)\,dt\right\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_{\Omega}u_n(t)\,dt\right\|\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|u_n(t)\|\,dt\\ &\leq \int_{\Omega}\|u(t)\|\,dt\end{aligned}$$

2. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u$ presque partout sur $\Omega$, alors la suite $(\chi_{\Omega_1}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\chi_{\Omega_2}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge vers $\chi_{\Omega_1}u$ (resp. $\chi_{\Omega_2}u$). On aura alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}u(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}u_n(t)\,dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega}\chi_{\Omega_1}(t)\,u_n(t)\,dt+\int_{\Omega}\chi_{\Omega_2}(t)\,u_n(t)\,dt\right)\\ &= \int_{\Omega}\lim_{n\to\infty}(\chi_{\Omega_1}(t)\,u_n(t))\,dt+\int_{\Omega}\lim_{n\to\infty}(\chi_{\Omega_2}(t)\,u_n(t)\,dt)\\ &= \int_{\Omega}\chi_{\Omega_1}(t)\,u(t)\,dt+\int_{\Omega}\chi_{\Omega_2}(t)\,u(t)\,dt\\ &= \int_{\Omega_1}u(t)\,dt+\int_{\Omega_2}u(t)\,dt\end{aligned}$$

3. Si $\mathcal{N}\subset\Omega$ tel que $|\mathcal{N}|=0$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{N}}u(t)\,dt &= \int_{\Omega}\chi_{\mathcal{N}}(t)\,u(t)\,dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega}\chi_{\mathcal{N}}(t)\,u_n(t)\,dt\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathcal{N}}u_n(t)\,dt\right)=0\end{aligned}$$

Car $\int_{\mathcal{N}}u_n(t)\,dt$ n'est autre qu'une somme d'ensemble de mesure nulle.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions simples qui converge vers $u$ presque partout sur $\Omega$, alors par linéarité de $T$, $T(u_n)$ est aussi une fonction simple et par continuité de $T$, on a $\lim_{n\to\infty} T(u_n) = T(u)$ et

$$\int_\Omega \|T(u(t)) - T(u_n(t))\|_Y \ dt \leq \|T\| \int_\Omega \|u(t) - u_n(t)\| \, dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

c'est-à-dire la fonction $T(u)$ est intégrable au sens de Bochner. Par l'inégalité (1.3) et la continuité de $T$, on obtient

$$\begin{aligned} T\left(\int_\Omega u(t)\, dt\right) &= T\left(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(t)\, dt\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(\int_\Omega u_n(t)\, dt\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega T(u_n(t))\, dt = \int_\Omega T(u(t))\, dt \end{aligned}$$

■

Le théorème de convergence dominé reste vrai pour les intégrales au sens de Bochner, comme ceci est montré dans la proposition suivante :

**Proposition 1.1.12.** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ intégrable au sens de Bochner, telle que $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(t)$ dans $X$ pour presque tout $t \in \Omega$ et s'il existe une fonction $v$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ intégrable au sens de Bochner telle que*

$$\|u_n(t)\| \leq v(t) \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et presque tout } t \in \Omega.$$

*Alors, $v$ est intégrable au sens de Bochner et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n(t)\, dt = \int_\Omega u(t)\, dt \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \|u - u_n\|\, dt = 0.$$

La définition des espaces de Lebesgue des fonctions à valeurs vectorielles et analogue à celle des fonctions à valeurs scalaire.

**Définition 1.1.13.** *1. Pour $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega, X)$ comme l'ensemble des fonctions $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ qui sont mesurables sauf sur un sous-ensemble de $\Omega$ de mesure nulle et telle que $\int_\Omega \|u(t)\|^p\, dt < \infty$.*

*2. Pour $p = \infty$, on définit l'espace $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ comme l'ensemble des fonctions $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ qui sont mesurables sauf sur un sous-ensemble de $\Omega$ de mesure nulle et telle qu'il existe $C > 0$, $\|u(t)\| < C$ pour presque tout $t \in \Omega$.*

Comme dans le cas scalaire, pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega, X)$ comme l'ensemble quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega, X)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout sur $\Omega$, c'est-à-dire c'est l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation . Par abus de notation, on utilisera le même symbole pour une fonction $u$ et pour sa classe d'équivalence.
Pour $u \in L^p(\Omega, X)$ , on note

$$\|u\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in \Omega} \|u(t)\| < \infty & \text{si} \qquad p = \infty \end{cases}$$

où sup désigne la borne supérieure essentielle.Comme dans le cas scalaire, pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega, X)$ comme l'ensemble quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega, X)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout sur $\Omega$, c'est-à-dire c'est l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation . Par abus de notation, on utilisera le même symbole pour une fonction $u$ et pour sa classe d'équivalence.
Pour $u \in L^p(\Omega, X)$ , on note

$$\|u\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in \Omega} \|u(t)\| < \infty & \text{si} \qquad p = \infty \end{cases}$$

où sup désigne la borne supérieure essentielle.

**Proposition 1.1.14.** *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Pour $u, v \in L^p(\Omega, X)$ , on a l'inégalité de Minkowski*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

2. *$\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega, X)$ .*
3. *Pour $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ et $v \in L^q(\Omega, X)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a l'inégalité de Hölder*

$$\int_\Omega \|u(t) v(t)\| \, dt \leq \|u\|_p \|v\|_q .$$

Comme conséquence de ces propriétés, on a le résultat suivant.

**Théorème 1.1.15.** *[?] Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $\left(L^p(\Omega, X), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace vectoriel normé complet, autrement dit c'est un espace de Banach.*

On ajoute des résultats de densité.

**Proposition 1.1.16.** *Pour* $1 \leq p < \infty$, *l'espace des fonctions simples est dense dans* $L^p(\Omega, X)$.

La caractérisation de l'espace dual de $L^p(\Omega, X)$ est aussi analogue au cas des fonctions à valeurs scalaires, mais elle est un peu plus délicate.

**Théorème 1.1.17.** *[?] Soit* $1 \leq p < \infty$, *$X$ un espace de Banach réflexif et $X'$ son dual. Le dual de $L^p(\Omega, X)$ est isomorphe à l'espace $L^q(\Omega, X')$ où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ainsi le produit de deux fonctions dans $\mathbb{R}$ qui est défini dans l'application qui identifie $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ à $L^q(\Omega, \mathbb{R})$ est remplacé par le produit de dualité entre $X$ et $X'$, comme suit :
Si $v \in L^q(\Omega, X')$ et $u \in L^p(\Omega, X)$, alors le produit de dualité entre $L^q(\Omega, X')$ et $L^p(\Omega, X)$ est défini par

$$\langle v, u \rangle = \int_\Omega v(t)(u(t))\, dt.$$

**Proposition 1.1.18.**
1. *Pour tout* $1 \leq p < \infty$, *si $X$ est un espace de Banach séparable, alors l'espace $L^p(\Omega, X)$ est aussi séparable.*
2. *Pour tout* $1 < p < \infty$, *si $X$ est un espace de Banach séparable réflexif, alors l'espace $L^p(\Omega, X)$ est aussi réfléxif.*

Pour $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h$ l'opérateur de translation, défini par $\tau_h u(t) = u(t+h)$, pour $t \in \Omega$.

**Proposition 1.1.19.** *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$. *On a*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h u - u\|_p = 0.$$

## 1.2 Espaces des fonctions régulières

Dans cette section, on va parler de la continuité et de la différentiabilité des fonctions à valeurs vectorielles. Voir [3]
On suppose que $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|$.

**Définition 1.2.1.** *Une fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ est dite continue au point $t$ de $\Omega$, si seulement si pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ qui converge vers $t$, la suite $(u(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(t)$ dans $X$, c'est-à-dire*

$$\lim_{n \to +\infty} \|u(t_n) - u(t)\| = 0.$$

*La fonction $u$ est dite continue sur $\Omega$ si elle est continue en tout point $t \in \Omega$.*

**Définition 1.2.2.** *Une fonction $u$ définie sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ est dite dérivable au point $t \in \Omega$ si $\lim_{h \to 0} \dfrac{u(t+h) - u(t)}{h}$ existe dans $X$. Dans ce cas,*

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

*La fonction $u$ est dite dérivable sur $\Omega$ si elle est dérivable en tout point $t \in \Omega$. Si de plus, la fonction $u'$ est continue, alors $u$ est dite continûment dérivable sur $\Omega$.*

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note par $\mathcal{C}^k(\Omega, X)$ l'espace des fonctions à valeurs dans $X$ dont la dérivée jusqu'à l'ordre $k$ est continue. On pose

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}),\ \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{E}(\Omega, X) = \mathcal{C}^\infty(\Omega, X).$$

**Définition 1.2.3.** *Soit $u$ une fonction définie et continue sur $\Omega$ à valeurs dans $X$. Le support de $u$, noté par* $\operatorname{supp}(u)$, *est l'ensemble*

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega,\ u(x) \neq 0\}}.$$

L'ensemble des fonctions tests $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, X)$, noté par $\mathcal{D}(\Omega, X)$, est l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, X)$ dont le support est compact dans $\Omega$. On note aussi par

- $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$
- $\mathcal{D}_+(\Omega)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, X)$ dont le support est borné à gauche,
- $\mathcal{D}_-(\Omega)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, X)$ dont le support est borné à droite,
- $\mathcal{D}_0(\Omega)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ à support dans $[0, +\infty[$.

Nous terminons cette section par des résultats utiles. On note par $L^1_{loc}(\Omega, X)$ l'espace des fonctions mesurables définies sur $\Omega$ à valeurs dans $X$ qui sont intégrables sur tout compact $K$ de $\Omega$, autrement dit

$$L^1_{loc}(\Omega, X) = \left\{ u : \Omega \to X,\ \forall K \text{ compact de } \Omega,\ \int_K \|u(t)\|\, dt < \infty \right\}.$$

**Proposition 1.2.4.**
1. *Si $u \in L^1(\Omega, X)$, alors on a $u(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds$.*
2. *Si $u \in L^1_{loc}(\Omega, X)$ et $\int_\Omega u(t)\varphi(t)\, dt = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $u = 0$ sur $\Omega$.*

On va maintenant présenter la notion de convolution pour les fonctions à valeurs vectorielles, mais juste quelques résultats de régularisation et d'approximation qui seront utiles dans la suite.

**Proposition 1.2.5.** *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Si* $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *alors la convolution définie par*

$$(u * \varphi)(t) := \int_{\mathbb{R}} u(t-s)\,\varphi(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} u(s)\,\varphi(t-s)\,ds$$

*existe pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et vérifie ce qui suit :*

1. $u * \varphi \in L^p(\mathbb{R}, X)$ *et* $\|u * \varphi\|_p \leq \|u\|_p \|\varphi\|_1$.
2. $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, X)$ *et pour tout* $m \in \mathbb{N}$, $(u * \varphi)^{(m)} = u * \varphi^{(m)}$.

**Définition 1.2.6.** *On appelle suite régularisante sur* $\mathbb{R}$, *toute suite* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *qui vérifie :*

1. $\rho_n(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.
3. $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt = 1$.

Pour construire un exemple de suite régularisante, on utilise un résultat qui dit qu'on peut trouver une fonction $\rho$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, qui satisfait $\rho(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}(\rho) \subset \overline{B(0,1)}$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt = 1$. Si on pose

$$\rho_n(t) = n\rho(nt),\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N},$$

alors on peut vérifier que cette suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite régularisante.

**Proposition 1.2.7.** *Soit* $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$ *et* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite régularisante, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u * \rho_n - u\|_p = 0.$$

# Chapitre 2

# Semi-groupes distributions

## 2.1 Espaces des distributions à valeurs vectorielles

Bien que les équations aux dérivées partielles issues de la physique soient en général à valeurs réelles, nous considérons les distributions à valeurs dans un espace de Banach. Ceci est utile dans les équations d'évolution pour séparer le temps $t$ de la variable d'espace $x$. Ainsi, dans l'étude de ces équations, nous retrouvons le besoin d'étudier les fonctions à valeurs vectorielles introduites dans le chapitre 1, ainsi que les distributions à valeurs vectorielles que nous aborderons dans cette section.

Nous présenterons les éléments essentiels pour l'étude de la section qui suit. La théorie des distributions à valeurs vectorielles a été créée et développée par L. Schwarz., voir [13] et [14]. Pour approfondir votre compréhension et consulter les démonstrations des théorèmes présentés dans cette section, consulter [1, 2, 7].

**Définition 2.1.1.** *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si :*

1. *Il existe un ensemble compact $K \subset\subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Pour tout $k \geq 0$, la suite $\left(\varphi_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi^{(k)}$ uniformément sur $\Omega$, c'est-à-dire*
$$\forall k \geq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\Omega} \left|\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)\right| = 0.$$

On va définir les distributions à valeurs vectorielles.

**Définition 2.1.2.** *Une distribution $U$ sur $\Omega$ à valeurs dans l'espace de Banach $X$ est une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $X$ vérifiant la propriété de continuité suivante :*

*Pour tout compact $K$ de $\Omega$ , il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$, tels que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ où* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, *on a*

$$\|\langle U, \varphi\rangle\| \leq C \sup_{0 \leq l \leq k} \sup_{t \in K} \left|\varphi^{(l)}(t)\right|.$$

L'espace des distributions, noté $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $X$. On note aussi par :

- $\mathcal{D}'_+(\Omega, X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_-(\Omega)$ dans $X$. Cet espace coïncide avec le sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ formé des distributions à support borné à gauche.
- $\mathcal{D}'_-(\Omega, X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_+(\Omega)$ dans $X$.
- $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$.

**Exemple 2.1.3.** *A toute fonction $u$ de $L^1_{loc}(\Omega, X)$, on associe l'application définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $X$ par*

$$U^u : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(t)\, u(t)\, dt.$$

*qui est une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$.*
*En effet, $\int_\Omega \varphi(t)\, u(t)\, dt$ est bien définie pour tout $t \in \Omega$ car $\varphi(t)\, u(t) \in X$ et*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|\varphi(t)\, u(t)\|\, dt &\leq \int_\Omega |\varphi(t)|\, \|u(t)\|\, dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathrm{supp}(\varphi)} |\varphi(t)| \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \|u(t)\|\, dt < \infty.\end{aligned}$$

*La linéarité de l'intégrale entraine la linéarité de $U_u$ et pour tout compact $K$ de $\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, *on a*

$$\begin{aligned}\|\langle U^u, \varphi\rangle\| &\leq \int_\Omega \|\varphi(t)\, u(t)\|\, dt \\ &\leq \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \|u(t)\|\, dt \sup_{t \in \mathrm{supp}(\varphi)} |\varphi(t)|.\end{aligned}$$

*Ainsi $C = \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \|u(t)\|\, dt$ et $k = 1$.*

**Remarque 2.1.4.** *La proposition 1.2.4-*(2) *et l'exemple ci-dessus nous permet d'injecter $L^1_{loc}(\Omega, X)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ et à cet effet, on identifie dorénavant une fonction $u$ de $L^1_{loc}(\Omega, X)$ et sa distribution associée $U^u$.*

On peut aussi définir une distribution en utilisant le résultat suivant.

**Proposition 2.1.5.** *Une application $U$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $X$ est une distribution si elle est linéaire et pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(\langle U_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle U, \varphi\rangle$ dans $X$.*

Soit $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, on note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de $X$ dans $Y$.

**Exemple 2.1.6.**

1. *Si $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x \in X$, alors l'application notée par $U \otimes x$ et définie par*
$$\langle U \otimes x, \varphi\rangle = \langle U, \varphi\rangle\, x, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.1}$$
*est une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$.*
*En effet, l'expression $\langle U, \varphi\rangle\, x$ a bien un sens vu que $\langle U, \varphi\rangle \in \mathbb{K}$ et $x \in X$, en plus il est facile de voir que $U \otimes x$ est linéaire et pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a*
$$\lim_{n\to+\infty} \|\langle U \otimes x, \varphi_n - \varphi\rangle\| = \lim_{n\to+\infty} \|\langle U, \varphi_n - \varphi\rangle\, x\| = \lim_{n\to+\infty} |\langle U, \varphi_n - \varphi\rangle|\, \|x\| = 0.$$

2. *Si $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $A$ est un opérateur linéaire de $X$ à valeurs dans $Y$, alors de la même manière on vérifie que l'application notée par $U \otimes A$ et définie par*
$$\langle U \otimes A, \varphi\rangle\, x := \langle U, \varphi\rangle\, Ax, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.2}$$
*est une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{L}(X, Y))$.*

On va présenter quelques définitions utiles des distributions à valeurs vectorielles.

**Définition 2.1.7.** *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$, on dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des distribution vers $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(\langle U_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle U, \varphi\rangle$ dans $X$, c'est-à-dire*
$$\lim_{n\to+\infty} \|\langle U_n, \varphi\rangle - \langle U, \varphi\rangle\| = 0, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cette convergence est bien sur la convergence faible d'une suite de fonctions définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $X$. On va définir maintenant la convergence dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ mais d'abord on introduit la notion suivante.

**Définition 2.1.8.** *Un ensemble $K$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est borné si pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K$ et toute suite de nombre réelles $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $0$, on a*
$$\lim_{n\to+\infty} (\varepsilon_n \varphi_n) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

**Définition 2.1.9.** *Une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ *est dite convergente vers* $U$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ *si et seulement si* $(\langle U_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\langle U, \varphi\rangle$ *uniformément sur tout ensemble borné de* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Autrement dit, pour tout* $K$ *borné de* $\mathcal{D}(\Omega)$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\varphi\in K} \|\langle U_n - U, \varphi\rangle\| = 0.$$

La dérivée d'une distribution à valeurs vectorielles se définit de la même manière que dans le cas scalaire.

**Définition 2.1.10.** *Soit* $U$ *une distribution de* $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ *et* $m \in \mathbb{N}$, *la dérivée d'ordre* $m$ *de* $U$ *est la distribution* $U^{(m)} \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$ *définie par*

$$\left\langle U^{(m)}, \varphi\right\rangle = (-1)^m \left\langle U, \varphi^{(m)}\right\rangle, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Proposition 2.1.11.** *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$, *si* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ *qui converge au sens des distributions vers* $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$, *alors sa dérivée d'ordre* $m$, $\left(U_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens des distributions vers* $U^{(m)}$.

**Preuve.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\left\langle U_n^{(m)} - U^{(m)}, \varphi\right\rangle\right\| = \lim_{n\to+\infty} \left\|(-1)^m \left\langle U_n - U, \varphi^{(m)}\right\rangle\right\| = 0.$$

■

**Proposition 2.1.12.** *Si* $U$ *est une distribution de* $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ *qui vérifie* $U^{(m)} = 0$, *pour un certain* $m \in \mathbb{N}$, *alors*

$$U = P$$

*où* $P$ *est le polynôme défini par* $P(t) = \sum_{i=0}^{m-1} x_i t^i$, $t \in \Omega$, $(x_i)_{0\leq i\leq m-1} \subset X$.

**Preuve.** Commençons par considérer le cas $m = 1$. Puisque $U' = 0$, alors

$$\langle U, \varphi'\rangle = 0, \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\int_\Omega \phi(t)dt = 0$ équivaut à dire que $\phi = \psi'$ où $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En effet, supposons que $\Omega = ]a, b[$, supp$\phi \subset ]c, d[$ et $\int_\Omega \phi(t)dt = 0$, si on pose $\psi(t) = \int_a^t \phi(s)ds$, alors il est facile de voir que

$$\psi \in \mathcal{D}(]c, d[) \text{ et } \psi'(t) = \phi(t), \ \forall t \in \Omega.$$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque et posons

$$\phi(t) = \varphi(t) - \xi(t) \int_\Omega \varphi(t)dt, \ \forall t \in \Omega$$

où $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\int_\Omega \xi(t)dt = 1$, une telle fonction existe. On aura alors

$$\int_\Omega \phi(t)dt = \int_\Omega \varphi(t)\,dt - \int_\Omega \xi(t)\,dt \int_\Omega \varphi(t)dt = 0$$

Donc d'après ce qui précède, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi' = \phi$, c'est-à-dire

$$\varphi(t) = \psi'(t) + \xi(t) \int_\Omega \varphi(t)dt, \ \forall t \in \Omega.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle U, \varphi \rangle &= \left\langle U, \psi' + \xi \int_\Omega \varphi(t)dt \right\rangle \\ &= \langle U, \psi' \rangle + \left( \int_\Omega \varphi(t)dt \right) \langle U, \xi \rangle \\ &= \langle U, \xi \rangle \left( \int_\Omega \varphi(t)dt \right), \end{aligned}$$

on prend alors $x_0 = \langle U, \xi \rangle \in X$.
Si $m > 1$ et $U^{(m)} = 0$, on utilise le raisonnement par récurrence et on écrit

$$U^{(m)} = (U')^{(m-1)} = 0,$$

donc $U' = P$ où $P(t) = \sum_{i=0}^{m-2} x_i t^i$. Ensuite, si on pose

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} x_{i-1} t^i, \ \text{pour } t \in \Omega,$$

on aura alors $Q' = P$ et $(U - Q)' = 0$ donc d'après ce qui précède

$$U - Q = x$$

c'est-à-dire $U = \sum_{i=0}^{m-1} y_i t^i$. ∎
Si $X$ et $Y$ sont deux espaces de Banach, on dit que $X$ s'injecte de manière continue dans $Y$ et on note $X \hookrightarrow Y$ si

$$X \subset Y \text{ et } \|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \text{ pour tout } x \in X. \tag{2.3}$$

**Proposition 2.1.13.** *Soit $X$ et $Y$ sont deux espaces de Banach tels que $X \hookrightarrow Y$, on a alors*

1. $\mathcal{D}'(\Omega, X) \subset \mathcal{D}'(\Omega, Y)$.
2. *Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ converge vers $U$ dans $\mathcal{D}'(\Omega, X)$, alors elle converge vers $U$ dans $\mathcal{D}'(\Omega, Y)$*

**Preuve.**

1. Si $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$, c'est-à-dire $U : \mathcal{D}(\Omega) \to X$ est linéaire, alors $U : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ est linéaire aussi car $X \subset Y$. De plus, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $(\langle U, \varphi_n\rangle)_n$ converge vers $\langle U, \varphi\rangle$ dans $X$ et par (2.3)
$$\|\langle U, \varphi_n - \varphi\rangle\|_Y \leq C \|\langle U, \varphi_n - \varphi\rangle\|_X \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
Finalement, $U \in \mathcal{D}'(\Omega, Y)$.
2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ qui converge vers $U$ dans $\mathcal{D}'(\Omega, X)$, c'est-à-dire
$$\|\langle U_n - U, \varphi\rangle\|_X \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
En utilisant (2.3), on obtient pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$$\|\langle U_n - U, \varphi\rangle\|_Y \leq C \|\langle U_n - U, \varphi\rangle\|_X \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

■

On dit qu'une distribution $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$ s'annule sur un sous-ensemble $\Omega' \subset \Omega$ si
$$\langle U, \varphi\rangle = 0$$
pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que supp$(\varphi) \subset \Omega'$.
On définit ainsi le support de $U$ comme le complémentaire dans $\Omega$ de l'union de tous les ouverts de $\Omega$ sur lesquels $U$ s'annule. Autrement dit, si on note par $\Psi$ cette union, alors
$$\text{supp}(U) = \Omega\backslash\Psi.$$
Il est clair que le support de $U$ est un fermé et on peut montrer que $U = 0$ sur $\Omega\backslash\text{supp}(U)$.
On note par :

- $\mathcal{D}'_0(\Omega, X)$ le sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ formé des distributions qui s'annulent sur $]-\infty, 0[$.

- $\mathcal{E}'(\Omega, X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $X$, c'est l'espace des distributions à support compact.
- $\mathcal{E}'_0(\Omega, X)$ le sous-espace de $\mathcal{E}'(\Omega, X)$ contenant les distributions à support dans $[0, +\infty[$.

Dans les résultats suivants, on va montrer qu'une distribution n'est rien d'autre que la dérivée au sens des distributions d'une fonction continue. Pour ce faire, on aura besoin des notions suivantes.
Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions scalaires de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact $K \subset \Omega$, noté par $\mathcal{D}^k(K)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{0 \le l \le k} \sup_{t \in K} \left|\varphi^{(l)}(t)\right|.$$

Ces fonctions peuvent être approchées par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, comme ceci est mentionné dans ce qui suit.

**Lemme 2.1.14.** *Soit $K$ un compact de $\Omega$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}^k(K)$, alors il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset \{t \in \Omega |\ d(t, K) \le \varepsilon\} \ \ et \ \ \|\varphi - \psi\|_k \le \varepsilon.$$

**Théorème 2.1.15.** *[7] Soit $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$ et $\Omega'$ un sous-ensemble ouvert borné de $\Omega$ tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Alors ils existent un entier $m \in \mathbb{N}$ et une fonction continue $f$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $X$, tels que*

$$U = f^{(m)} \ \ dans\ \Omega'. \tag{2.4}$$

**Preuve.** Soit $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$, $\varepsilon > 0$ et $K_\varepsilon = \left\{t \in \Omega |\ d\left(t, \overline{\Omega'}\right) \le \varepsilon\right\}$ un compact de $\Omega$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C \ge 0$, tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_\varepsilon$, on a

$$\|\langle U, \varphi\rangle\| \le C \sup_{0 \le l \le k} \sup_{t \in K_\varepsilon} \left|\varphi^{(l)}(t)\right|.$$

D'après le lemme 2.1.14, pour $\varphi \in \mathcal{D}^k(K_\varepsilon)$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset \{t \in \Omega |\ d(t, K_\varepsilon) \le \varepsilon\} \ \ \text{et} \ \ \|\varphi - \psi\|_k \le \varepsilon.$$

Et par suite, on peut montrer qu'on peut prolonger par continuité $U$ à l'espace $\mathcal{D}^k(K_\varepsilon)$, autrement dit on aura, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^k(K_\varepsilon)$,

$$\|\langle U, \varphi\rangle\| \le C \sup_{0 \le l \le k} \sup_{t \in K_\varepsilon} \left|\varphi^{(l)}(t)\right|.$$

Ensuite considérons la fonction $\eta$ de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ définie par

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

et la fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(\chi) \subset K_\varepsilon$ et $\chi = 1$ sur $\overline{\Omega'}$ et posons pour $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \langle U, \chi \tau_{-t} \check{\eta} \rangle .$$

La fonction $f$ est bien définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $X$, en effet, $\chi \tau_{-t} \eta \in \mathcal{D}^k(K_\varepsilon)$ et pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ qui converge vers $t$, on a

$$\|f(t_n) - f(t)\| = \|\langle U, \chi(\tau_{-t_n}\check{\eta} - \tau_{-t}\check{\eta})\rangle\| \leq C \sup_{0 \leq l \leq k} \sup_{s \in K_\varepsilon} \left| \left(\chi(\tau_{-t_n}\check{\eta} - \tau_{-t}\check{\eta})\right)^{(l)}(s) \right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

car la fonction $\chi(\tau_{-t_n}\eta - \tau_{-t}\eta)$ n'est autre que la somme de dérivées de fonctions continues.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega'$, en utilisant l'approximation de l'intégrale avec les sommes de Riemann, la linéarité et la continuité de $U$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \langle U, \chi \tau_{-t} \check{\eta} \rangle\, dt \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \left\langle U, \chi \tau_{-\frac{k}{n}} \check{\eta} \right\rangle \\ &= \left\langle U, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \chi \tau_{-\frac{k}{n}} \check{\eta} \right\rangle \end{aligned}$$

or pour $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \chi(s)\, \tau_{-\frac{k}{n}} \check{\eta}(s) &= \chi(s) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \tau_{-t} \check{\eta}(s)\, dt \\ &= \chi(s) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \check{\eta}(s-t)\, dt \\ &= \chi(s)\, (\check{\eta} * \varphi)(s) . \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t)\, dt = \langle U, \chi(\check{\eta} * \varphi) \rangle .$$

Finalement, en prenant $m = k+2$, on aura

$$\begin{aligned} \left\langle f^{(m)}, \varphi \right\rangle &= (-1)^m \left\langle f, \varphi^{(m)} \right\rangle \\ &= (-1)^m \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(t) f(t)\, dt \\ &= (-1)^m \left\langle U, \chi \left( \check{\eta} * \varphi^{(m)} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

et en utilisant l'intégration par partie $(m-1)$ fois, on montre que

$$\left( \check{\eta} * \varphi^{(m)} \right)(s) = (-1)^m \varphi(s)$$

et puisque $\chi = 1$ sur $\overline{\Omega'}$, on obtient

$$\left\langle f^{(m)}, \varphi \right\rangle = \langle U, \varphi \rangle \text{ sur } \overline{\Omega'}.$$

■

**Remarque 2.1.16.** *Dans le théorème précédent,*

1. *Si $U = 0$ sur $]-\infty, a[$, alors $f(t) = 0$ pour $t \in ]-\infty, a[$.*
2. *Si $U \in \mathcal{E}'(\Omega, X)$, alors on peut montrer que $U = f^{(m)}$ dans $\Omega$ et pour cela, il suffit de choisir un ouvet $\Omega'$ qui contient le support de $U$.*

Rappelons que pour tout point $t_0 \in \Omega$, on définit la distribution de Dirac $\delta_{t_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par ce qui suit

$$\langle \delta_{t_0}, \varphi \rangle = \varphi(t_0) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a le corollaire suivant qui concerne les distributions dont le support est réduit à un point.

**Corollaire 2.1.17.** *Si $U \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$ et $\operatorname{supp}(U) = \{t_0\}$, alors il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0 \leq k \leq m} \subset X$ tels que*

$$U = \sum_{k=0}^{m} \delta_{t_0}^{(k)} \otimes x_k.$$

Le procédé le plus courant de régularisation utilise la notion de produit de convolution par une suite régularisante. C'est pour cette raison que cette notion est d'un grand intérêt. Dans la section ci-dessous, nous présenterons la convolution dans le cadre des distributions. Nous commencerons par définir la convolution entre une

fonction à valeurs scalaires et une distribution à valeurs vectorielles, avec quelques propriétés. Ensuite, nous étendrons cette définition au cadre de deux distributions à valeurs vectorielles.
Si $\varphi$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $X$, on note par $\check{\varphi}$ la fonction définie par

$$\check{\varphi}(t) = \varphi(-t), \; t \in \mathbb{R}.$$

**Définition 2.1.18.** *Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, alors*

1. *La distribution $\check{U}$ est définie par $\langle \check{U}, \varphi \rangle := \langle U, \check{\varphi} \rangle$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*
2. *Pour $h \in \mathbb{R}$, la distribution $\tau_h U$ est définie par $\langle \tau_h U, \varphi \rangle := \langle U, \tau_{-h} \varphi \rangle$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*
3. *Pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution $U * \psi$ est définie par $(U * \psi)(t) := \langle U, \tau_{-t} \check{\psi} \rangle$, $t \in \mathbb{R}$.*

Voici quelques propriétés de la convolution qui résultent de la définition.

**Proposition 2.1.19.** *Si $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors :*

1. *$U * \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$.*
2. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(U * \psi)^{(m)} = U * \psi^{(m)} = U^{(m)} * \psi$.*
3. *$\operatorname{supp}(U * \psi) \subset \operatorname{supp}(U) + \operatorname{supp}(\psi)$.*
4. *Si de plus $\operatorname{supp}(U)$ est compact, alors*
   (a) *$U * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$.*
   (b) *$U * \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$, pour tout $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.*

Voici maintenant l'action de certain operateur sur la convolution.

**Proposition 2.1.20.** *Si $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors :*

1. *$U * \psi = \psi * U$.*
2. *Pour $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h (U * \psi) = (\tau_h U) * \psi = U * (\tau_h \psi)$.*
3. *$(U \overset{\vee}{*} \psi) = \check{U} * \check{\psi}$.*

Le théorème suivant donne une caractérisation importante de la convolution qui nous sera utile dans la section suivante.

**Théorème 2.1.21.** *[2] Soit $T$ une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, X)$ qui commute avec la translation, c'est-à-dire pour tout $h \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_h \varphi \rangle$. Alors il existe une unique distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ telle que*

$$\langle T, \varphi \rangle = U * \varphi, \; \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Cette notion de convolution n'est pas si simple dans le cadre de deux distributions à valeurs vectorielles, on se contentera de présenter l'essentiel. Commençons par le cas suivant.

Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, d'après ce qui précède, l'application $\varphi \mapsto V * \varphi$ est bien définie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et l'application $\psi \mapsto U * \psi$ est aussi bien définie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$, donc l'application

$$\varphi \mapsto U * (V * \varphi)$$

est aussi bien définie de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$.

De plus, par la proposition 2.1.20, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$U * (V * \tau_h \varphi) = U * \tau_h (V * \varphi) = \tau_h (U * (V * \varphi))$$

Finalement, en appliquant le théorème 2.1.21, on trouvera une unique distribution $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ qui vérifie

$$U * (V * \varphi) = W * \varphi, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

La distribution $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ n'est rien d'autre que la convolution $U * V$. On va résumer ce résultat dans la proposition suivante.

**Proposition 2.1.22.** *Si $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors la convolution $U * V$ est bien définie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et elle vérifie*

$$(U * V) * \varphi = U * (V * \varphi), \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{2.5}$$

Ainsi la convolution de deux distributions n'est défini que si l'une des distributions est à support compact, d'où la proposition suivante.

**Proposition 2.1.23.** *On a :*

1. *Si $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $U * V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$.*
2. *Si $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $U * V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$.*
3. *Si $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $U * V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, X)$.*

Ci-dessous, on va présenter quelques propriétés élémentaires.

**Proposition 2.1.24.** *Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si l'une des distributions est à support compact, alors :*

1. *$U * \delta = U$, où $\delta$ est la distribution de Dirac au point* 0.

2. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, $(U * V)^{(m)} = U * V^{(m)} = U^{(m)} * V$.
3. *Pour* $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h (U * V) = (\tau_h U) * V = U * (\tau_h V)$.
4. $(U \overset{\vee}{*} V) = \check{U} * \check{V}$

**Preuve.**

1. Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et puisque $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $U * \delta$ est bien définie et appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\langle U * \delta, \varphi \rangle = ((U * \delta) * \check{\varphi})(0)$$

or pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(\delta * \check{\varphi})(t) = \langle \delta, \tau_{-t}\varphi \rangle = \varphi(-t)$ et par la propriété $(2.5)$, on a

$$\begin{aligned} \langle U * \delta, \varphi \rangle &= (U * (\delta * \check{\varphi}))(0) \\ &= \left\langle U, (\delta \overset{\vee}{*} \check{\varphi}) \right\rangle \\ &= \langle U, \varphi \rangle \end{aligned}$$

2. Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. En utilisant les propriétés utilisées dans le $(1)$, on aura pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left\langle (U * V)^{(m)}, \varphi \right\rangle &= (-1)^m \left\langle U * V, \varphi^{(m)} \right\rangle \\ &= (-1)^m \left( (U * V) * \overset{\vee}{\varphi^{(m)}} \right)(0) \\ &= \left( (U * V) * \check{\varphi}^{(m)} \right)(0) \\ &= \left( U * \left( V * \check{\varphi}^{(m)} \right) \right)(0) \\ &= \left( U * \left( V^{(m)} * \check{\varphi} \right) \right)(0) \\ &= \left\langle U * V^{(m)}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

3. et 4. Se démontre de la même manière.

■

**Proposition 2.1.25.** *Si* $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ *et* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite régularisante, alors :*

*(i) La suite* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\delta$ *dans* $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ *quand* $n \to +\infty$.

*(ii) La suite* $(U * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $U$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ *quand* $n \to +\infty$.

**Preuve.**

$(i)$ Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite régularisante définie par

$$\rho_n(t) = n\rho(tn) \text{ où } \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \rho(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{supp}(\rho) \subset [-1, 1] \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt = 1$$

Pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \rho_n - \delta, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho(tn)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right)dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis, on aura

$$\begin{aligned} |\langle \rho_n - \delta, \varphi \rangle| &\leq \int_{B(0,1)} \rho(t)\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| dt \\ &\leq \sup_{|t|\leq 1}\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| \int_{B(0,1)} \rho(t)dt \\ &\leq \varepsilon \sup_{|t|\leq 1}|\varphi'(t)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ borné de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, on peut dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\varphi\in\mathcal{B}} \langle \rho_n - \delta, \varphi \rangle = 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \delta$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

$(ii)$ Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle U * \rho_n, \varphi \rangle = (U * (\rho_n * \check{\varphi}))(0) = \left\langle U, \rho_n \overset{\vee}{*} \check{\varphi} \right\rangle$$

or pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n \overset{\vee}{*} \check{\varphi}(t) = \lim_{n\to+\infty} (\rho_n * \check{\varphi})(-t) = \lim_{n\to+\infty} \langle \rho_n, \tau_t\varphi \rangle = \langle \delta, \tau_t\varphi \rangle = \varphi(t).$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \langle U * \rho_n, \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle$$

■

On va terminer cette section en étendant ces définitions au cas de deux distributions à valeurs vectorielles. Pour le faire, on a besoin de supposer qu'une multiplication soit définie entre deux espaces de Banach.
Dans ce qui suit supposons que, pour $1 \leq i \leq 3$, $X_i$ sont trois espaces de Banach et l'application

$$\begin{array}{rccc} \bullet : & X_1 \times X_2 & \to & X_3 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \bullet x_2 \end{array} \tag{2.6}$$

soit une multiplication bien définie.

**Théorème 2.1.26.** *[2] Si $U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X_1)$ et $U_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, X_2)$, alors il existe une unique distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X_3)$ qui définit la convolution par rapport à la multiplication définie dans (2.6). On la note $U_1 *_\bullet U_2$ et on a*

$$(V_1 \otimes x_1) *_\bullet (V_2 \otimes x_2) = (V_1 * V_2) \otimes (x_1 \bullet x_2)$$

*pour $V_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $V_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.*

**Remarque 2.1.27.** *La preuve de ce théorème se base sur le fait qu'on peut démontré que tout élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ peut être approché par un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \otimes X$, c'est-à-dire de la forme $V \otimes x$ pour $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $x \in X$.*

Pour pouvoir discuter de l'associativité, la commutativité et la distributivité de $*_\bullet$, nous aurons besoin de conditions supplémentaires sur la multiplication définie dans (2.6). Pour notre travail, nous nous contenterons des propriétés les plus importantes, qui sont citées ci-dessous.

**Proposition 2.1.28.** *Si $U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X_1)$ et $U_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, X_2)$, alors*

1. $\langle U_1 *_\bullet U_2, \varphi \rangle = U_1 *_\bullet (U_2 * \check{\varphi})(0)$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, $(U_1 *_\bullet U_2)^{(m)} = U_1 *_\bullet U_2^{(m)} = U_1^{(m)} *_\bullet U_2$.
3. $\overset{\vee}{(U_1 *_\bullet U_2)} = \check{U}_1 *_\bullet \check{U}_2$.
4. *Pour* $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h (U_1 *_\bullet U_2) = (\tau_h U_1) * U_2 = U_1 * (\tau_h U_2)$.

La proposition suivante donne la définition de la convolution dans le cas ou les distributions sont régulières.

**Proposition 2.1.29.** *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X_1)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X_2)$ telles que l'une d'entre elle est à support compact, alors la convolution de $f$ et $g$ est bien définie et on a $f *_\bullet g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X_3)$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$*

$$(f *_\bullet g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) \bullet g(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} f(s) \bullet g(t-s)\, ds. \tag{2.7}$$

**Exemple 2.1.30.** *Soit* $X_1, X_2, X_3$ *des espaces de Banach.*

1. *Le produit de convolution entre l'espace* $\mathcal{E}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_1, X_2))$ *et* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X_1)$ *peut être défini où le produit* (2.6) *peut être donné comme suit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X_1, X_2) \times X_1 & \to & X_2 \\ (T, x) & \mapsto & T \bullet x := T(x) \end{array},$$

*ainsi pour* $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_1, X_2))$ *et* $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X_1)$, *on a*

$$U *_{\bullet} V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X_2).$$

2. *Le produit de convolution entre l'espace* $\mathcal{E}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_1, X_2))$ *et* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_3, X_1))$ *peut être défini où le produit* (2.6) *peut être donné comme suit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X_1, X_2) \times \mathcal{L}(X_3, X_1) & \to & \mathcal{L}(X_3, X_2) \\ (T_1, T_2) & \mapsto & T_1 \bullet T_2 = T_1 \circ T_2 \end{array},$$

*ainsi pour* $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_1, X_2))$ *et* $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_3, X_1))$ *on a*

$$U *_{\bullet} V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_3, X_2)).$$

Dans la suite du travail, on va utiliser la même notation $*$ pour tous les types de convolution et selon les espaces sur lesquels on travaille on distinguera de quelle convolution s'agit-il.

## 2.2 Semi-groupes distributions

Dans le cadre des fonctions, la notion de semi-groupes sert à construire la solution des problèmes de Cauchy bien définis. Cette manière de construire les solutions peut aussi être établie dans le cadre des problèmes de Cauchy pour les distributions, d'où la nécessité de connaître la notion de semi-groupes distributions, qui a été introduite et étudiée par J. L. Lions.

Pour une explication plus détaillée et des démonstrations des théorèmes abordés dans cette section, référer vous à [9, 10].

On suppose que $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|$. On va considérer la distribution $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X))$ et pour tout $x \in X$, on définit la distribution $\mathcal{G}_x \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, X)$ par

$$\langle \mathcal{G}_x, \varphi \rangle = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}).$$

et l'ensemble

$$Rg(\mathcal{G}) := \{\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x,\ \varphi \in \mathcal{D}_0,\ x \in X\}.$$

**Définition 2.2.1.** *Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,X))$, on dit que $\mathcal{G}$ est un semi-groupe distribution dans l'espace de Banach $X$ si les conditions suivantes sont vérifiées.*

*(i)* $\langle \mathcal{G}, \varphi * \psi \rangle = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \langle \mathcal{G}, \psi \rangle$, *pour tout* $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$.

*(ii) Si* $x \in X$ *et* $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = 0$, *pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, *alors* $x = 0$.

*(iii) Pour tout* $y \in Rg(\mathcal{G})$, *on a* $\mathcal{G}_y = \omega$ *où* $\omega$ *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $X$, *continue sur* $[0, +\infty[$ *et vérifie*

$$\omega(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \omega(0) = y.$$

*(iv) L'ensemble* $Rg(\mathcal{G})$ *est dense dans* $X$, $\overline{Rg(\mathcal{G})} = X$.

**Remarque 2.2.2.** *Si $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,X))$ est un semi-groupe distribution, alors avec ces propriétés, il est dit non dégénéré, régulier dont le rang est dense.*

A présent, on va construire le générateur infinitésimal d'un semi-groupe distribution. Pour cela on a besoin de définir de façon plus générale les opérateurs $\mathcal{G}(T)$ définis à partir du semi-groupe $\mathcal{G}$ et d'une distribution $T$ à support compact qui s'annule sur $]0, +\infty[$.
Commençons par définir le domaine de cet opérateur.

**Définition 2.2.3.** *Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,X))$ un semi-groupe distribution et $T \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{R})$. Le domaine de l'opérateur $\mathcal{G}(T)$ est noté par $D(\mathcal{G}(T))$ et est défini comme suit :*
*$x \in D(\mathcal{G}(T))$ s'il existe une suite régularisante $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ telle que $(\langle \mathcal{G}, \rho_n \rangle x)_n$ converge vers $x$ dans $X$ et il existe $y \in X$ telle que $(\langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle x)_n$ converge vers $y$ dans $X$.*
*On pose alors*

$$\mathcal{G}(T)x := \lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle x. \tag{2.8}$$

Cette définition a bien un sens, puisque pour tout $T \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $T * \varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$. De plus, elle ne dépend pas du choix de la suite régularisante, en effet, pour $x \in X$, supposons qu'il existe une autre suite régularisante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les mêmes propriétés, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, \alpha_n \rangle x = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, T * \alpha_n \rangle x = z$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, en utilisant la définition du semi-groupe et les propriétés de la convolution, on obtient

$$\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle x = \langle \mathcal{G}, \varphi * T * \rho_n \rangle x = \langle \mathcal{G}, T * \varphi * \rho_n \rangle x$$

Et puisque la suite $(\rho_n)_n$ converge vers $\delta$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $(T * \varphi * \rho_n)_n$ converge vers $T * \varphi$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle x = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle y = \langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle x$$

De la même manière, on montre que $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle z = \langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle x$. On a trouvé alors

$$\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle (y - z) = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}),$$

et en vertu de la définition 2.2.1-$(ii)$, on aura $y = z$, d'où le résultat.
Etudions maintenant les propriétés de cet opérateur $\mathcal{G}(T)$ qui est défini sur $D(\mathcal{G}(T))$ et à valeurs dans $X$.

**Proposition 2.2.4.** *Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X))$ un semi-groupe distribution et $T \in \mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$. L'opérateur $\mathcal{G}(T)$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \in D(\mathcal{G}(T))$ et*
$$\mathcal{G}(T) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle x. \tag{2.9}$$
2. *$D(\mathcal{G}(T))$ est dense dans $X$, c'est-à-dire $\overline{D(\mathcal{G}(T))} = X$.*
3. *Pour tout $x \in D(\mathcal{G}(T))$ et $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, on a*
$$\mathcal{G}(T) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \mathcal{G}(T) x.$$

**Preuve.** Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X))$, $T \in \mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ et l'opérateur $\mathcal{G}(T)$. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ une suite régularisante quelconque.

1. Soit $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, par la propriété de $(i)$ du semi-groupe, on a
$$\langle \mathcal{G}, \rho_n \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \langle \mathcal{G}, \rho_n * \varphi \rangle x.$$
Et puisque la suite $(\rho_n)_n$ converge vers $\delta$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $(\rho_n * \varphi)_n$ converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, donc
$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{G}, \rho_n \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x$$
De plus, en utilisant les mêmes arguments, on trouvera
$$\begin{aligned} \mathcal{G}(T) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x &= \lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \\ &= \lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{G}, T * \rho_n * \varphi \rangle \\ &= \langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle. \end{aligned}$$
D'où le résultat.

2. Puisque pour tout $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, on a $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \in D(\mathcal{G}(T))$, on déduit alors que $Rg(\mathcal{G}) \subset D(\mathcal{G}(T))$, donc

$$Rg(\mathcal{G}) \subset D(\mathcal{G}(T)) \subset X$$

D'après la définition 2.2.1$-(iv)$, l'ensemble $\overline{Rg(\mathcal{G})} = X$, donc

$$X \subset \overline{D(\mathcal{G}(T))} \subset X$$

c'est-à-dire $\overline{D(\mathcal{G}(T))} = X$.

3. Soit $x \in D(\mathcal{G}(T))$ et $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle x = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \mathcal{G}(T) x,$$

d'autre part, d'après la définition 2.2.1$-(i)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \langle \mathcal{G}, T * \rho_n \rangle x = \lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, T * \varphi * \rho_n \rangle x = \langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle x$$

Finalement, en utilisant (1), on aura

$$\mathcal{G}(T) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \mathcal{G}(T) x.$$

■

Les opérateurs du type $\mathcal{G}(T)$ ne sont probablement pas fermés, pour cela on va considérer leur plus petit prolongement linéaire fermé, mais avant rappelons quelques définitions.

**Définition 2.2.5.** *Soit $A$ un opérateur linéaire de $D(A) \subset X$ dans $X$.*

1. *On dit que l'opérateur $A$ est fermé si pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que $(x_n)_n$ converge vers $x$ dans $X$ et $(Ax_n)_n$ converge vers $y$ dans $X$, on a*

$$x \in D(A) \text{ et } y = Ax_n$$

2. *On dit que l'opérateur linéaire $B$ défini sur de $D(B)$ dans $X$ est un prolongement de $A$ si :*
   (a) *$D(A) \subset D(B)$.*
   (b) *$Ax = Bx$ pour tout $x \in D(A)$.*
3. *On dit que l'opérateur $A$ est fermable s'il admet un prolongement fermé.*

**Proposition 2.2.6.** *Soit $A$ un opérateur linéaire de $D(A) \subset X$ dans $X$.*

1. *$A$ est fermable si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ où*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} Ax_n = y,$$

   *on a $y = 0$.*

2. *Si $A$ est fermable, alors le plus petit prolongement fermé de $A$ est appelé la fermeture de $A$ et noté $\overline{A}$.*

Pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit la distribution $\psi_+ \in \mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ par

$$\psi_+(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

**Proposition 2.2.7.** *Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,X))$ un semi-groupe distribution, $T \in \mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}(T)$ l'opérateur défini dans 2.2.3.*

1. *L'opérateur $\mathcal{G}(T)$ est fermable et son plus petit prolongement fermé $\overline{\mathcal{G}(T)}$ vérifie*

$$\overline{\mathcal{G}(T)} \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \mathcal{G}(T) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x, \ \forall x \in X \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}),$$

2. *Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a*

$$\overline{\mathcal{G}(\psi_+)} = \mathcal{G}(\psi).$$

**Preuve.**

1. On va utiliser la proposition (2.2.6) pour démontrer que $\mathcal{G}(T)$ est fermable. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{G}(T))$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} x_m = 0 \text{ et } \lim_{m\to\infty} \mathcal{G}(T) x_m = y.$$

   Pour montrer que $y = 0$, il suffit grâce à la définition 2.2.1-($ii$) de montrer que $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle y = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$. En effet, puisque $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle$ et $\langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle$ sont des opérateurs continus, alors

$$\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle y = \lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \mathcal{G}(T) x_m = \lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{G}, T * \varphi \rangle x_m = 0$$

   Par définition du prolongement, puisque $\forall x \in X$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \in D(\mathcal{G}(T))$, alors $\overline{\mathcal{G}(T)} \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = \mathcal{G}(T) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x$.

2. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi_+$ définie par $(2.10)$. D'après ce qui précède, pour tout $x \in X$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, on a

$$\overline{\mathcal{G}(\psi_+)}\langle \mathcal{G}, \varphi\rangle x = \mathcal{G}(\psi_+)\langle \mathcal{G}, \varphi\rangle x = \langle \mathcal{G}, \psi_+ * \varphi\rangle x.$$

Ainsi, si on montre que

$$\mathcal{G}(\psi_+)\langle \mathcal{G}, \varphi\rangle x = \mathcal{G}(\psi)\langle \mathcal{G}, \varphi\rangle x,$$

alors en utilisant le fait que $\overline{D(\mathcal{G}(\psi_+))} = X$, on déduira que

$$\overline{\mathcal{G}(\psi_+)}x = \mathcal{G}(\psi)x, \quad \forall x \in X.$$

Posons $y = \langle \mathcal{G}, \varphi\rangle x \in Rg(\mathcal{G})$, d'après la définition 2.2.1-$(iii)$, il existe une fonction $\omega$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $X$, continue sur $[0, +\infty[$, vérifie

$$\omega(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \omega(0) = y$$

et telle que $\mathcal{G}_y = \omega$. Donc

$$\mathcal{G}(\psi)\langle \mathcal{G}, \varphi\rangle x = \mathcal{G}(\psi)y = \langle \mathcal{G}_y, \psi\rangle = \int_0^{+\infty} \omega(t)\psi(t)\,dt.$$

Par ailleurs, si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ est une suite régularisante, alors

$$\langle \mathcal{G}, \rho_n\rangle \mathcal{G}(\psi_+)y = \langle \mathcal{G}, \psi_+ * \rho_n\rangle y = \langle \mathcal{G}_y, \psi_+ * \rho_n\rangle = \int_0^{+\infty} \omega(t)(\psi_+ * \rho_n)(t)\,dt.$$

Par $(2.8)$, on a

$$\mathcal{G}(\psi_+)y := \lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{G}, \psi_+ * \rho_n\rangle y$$

et puisque $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\delta$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \omega(t)(\psi_+ * \rho_n)(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \omega(t)\psi(t)\,dt.$$

Donc $\mathcal{G}(\psi_+)y = \int_0^{+\infty} \omega(t)\psi(t)\,dt = \mathcal{G}(\psi)y.$

■

**Définition 2.2.8.** *Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,X))$ un semi-groupe distribution, son générateur est défini par $A := \overline{\mathcal{G}(-\delta')}$.*

# Chapitre 3

# Problèmes de Cauchy

Tout au long de ce chapitre, on se donne un espace de Banach $X$ muni de la norme $\|\cdot\|$ et $A$ un opérateur linéaire défini sur son domaine $D(A) \subset X$ et à valeurs dans l'espace $X$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{si } t \geq 0 \\ \quad u(0) = x \end{cases} \tag{CP}$$

où $T \leq \infty$ et $x \in X$ admet une solution unique sous des conditions imposées sur la résolvante de l'opérateur $A$.

Dans ce chapitre, on va considérer ce problème de Cauchy (CP) pour tout $x$ dans l'espace des distributions. Notre objectif est d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème soit bien posé dans cet espace. Pour plus de détails, voir [10].

## 3.1 Définitions et propriétés

Introduisons quelques notions nécessaires à la compréhension de cette section. Rappelons quelques résultats sur le problème de Cauchy dans le cadre des fonctions classiques.

**Définition 3.1.1.** *Une fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\,, X) \cap \mathcal{C}([0,+\infty[\,, D(A))$ est appelée solution classique du problème de Cauchy $(CP)$ si $u$ satisfait l'équation pour $t \geq 0$ et la condition initiale pour $t = 0$.*

**Définition 3.1.2.** *Le problème de Cauchy $(CP)$ est dit bien posé sur $E \subset X$ s'il admet une solution unique pour tout $x \in E$ et pour tout $T > 0$ la solution dépend de façon continue par rapport à la condition initiale.*

**Théorème 3.1.3.** *Si $A$ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans $X$. Alors on a les équivalences suivantes :*

1. *Le problème de Cauchy $(CP)$ est uniformément bien posé sur $D(A)$.*
2. *L'opérateur $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.*
3. *Il existe $K > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ où $\Re\lambda > \omega$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left\| R_A^{(k)}(\lambda) \right\| \leq \frac{Kk!}{(\Re\lambda - \omega)^{k+1}}.$$

*Dans ce cas, la solution de $(CP)$ est donnée par $u(t) = U(t)x$, $x \in D(A)$.*

Dans la proposition ci-dessous, on va voir ce qu'on obtient si on considère la distribution associée à une solution classique du problème de Cauchy. Mais avant cela, on va voir un lemme.

**Lemme 3.1.4.**
1. *Soit $U \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Y))$ et $x \in X$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a*
   (a) $\langle U * (\delta \otimes x), \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle x$.
   (b) $\left\langle U * \left(\delta^{(k)} \otimes x\right), \varphi \right\rangle = \left\langle U^{(k)}, \varphi \right\rangle x$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Si $U \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X)$ et $A$ est un opérateur linéaire de $X$ dans $X$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\langle \delta^{(k)} \otimes A * U, \varphi \rangle = A \left\langle U^{(k)}, \varphi \right\rangle \tag{3.1}$$

**Preuve.**
1. Soit $U \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Y))$, $x \in X$.
   (a) Par le théorème 2.1.15, ils existent $m \geq 0$, $f$ une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X,Y)$ telles que pour un certain $c > 0$.

$$U = f^{(m)} \text{ sur } ]-\infty, c[$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ où $\text{supp}(\varphi) \subset ]-\infty, c[$, par la proposition 2.1.28, on a

$$\begin{aligned} \langle U * (\delta \otimes x), \varphi \rangle &= U * ((\delta \otimes x) * \check{\varphi})(0) \\ &= f^{(m)} * ((\delta \otimes x) * \check{\varphi})(0) \\ &= f * \left((\delta \otimes x)^{(m)} * \check{\varphi}\right)(0) \end{aligned}$$

D'autre part, par $(2.1)$, on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left((\delta \otimes x)^{(m)} * \check{\varphi}\right)(t) &= \left\langle (\delta \otimes x)^{(m)}, \tau_{-t}\varphi \right\rangle \\
&= (-1)^m \left\langle (\delta \otimes x), \tau_{-t}\varphi^{(m)} \right\rangle \\
&= (-1)^m \left\langle \delta, \tau_{-t}\varphi^{(m)} \right\rangle x \\
&= (-1)^m \left(\tau_{-t}\varphi^{(m)}\right)(0)\, x \\
&= (-1)^m \varphi^{(m)}(-t)\, x.
\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{supp}(\delta \otimes x)$ est compact, alors par la proposition 2.1.19,

$$(\delta \otimes x)^{(m)} * \check{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$$

et puisque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Y))$, alors on utilise la proposition (2.1.29)

$$\begin{aligned}
f * \left((\delta \otimes x)^{(m)} * \check{\varphi}\right)(0) &= \int_{\mathbb{R}} f(-s) \left((\delta \otimes x)^{(m)} * \check{\varphi}\right)(s)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(-s) \left((-1)^m \varphi^{(m)}(-s)\, x\right) ds \\
&= (-1)^m \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(-s)\, f(-s)(x)\, ds \\
&= (-1)^m \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m)}(s)\, f(s)(x)\, ds \\
&= \langle U, \varphi \rangle\, x
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, par les calculs précédent, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle U * \left(\delta^{(k)} \otimes x\right), \varphi \right\rangle &= U * \left(\left(\delta^{(k)} \otimes x\right) * \check{\varphi}\right)(0) \\
&= f^{(m)} * \left(\left(\delta^{(k)} \otimes x\right) * \check{\varphi}\right)(0) \\
&= f * \left((\delta \otimes x)^{(m+k)} * \check{\varphi}\right)(0) \\
&= (-1)^{m+k} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m+k)}(s)\, f(s)(x)\, ds \\
&= (-1)^k \left\langle U, \varphi^{(k)} \right\rangle x \\
&= \left\langle U^{(k)}, \varphi \right\rangle x.
\end{aligned}$$

2. Par $(2.1)$, on a $\delta^{(k)} \otimes A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,X))$ et puisque $U \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X)$, alors par $(2.1.30)$,

$$\delta^{(k)} \otimes A * U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X),$$

ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par la même manière de calcul, on obtient

$$\langle \delta^{(k)} \otimes A * U, \varphi \rangle = A \left\langle U^{(k)}, \varphi \right\rangle .$$

■

On a déjà vu dans l'exemple (2.1.6) que si $A$ est un opérateur linéaire défini sur son domaine $D(A) \subset X$ et à valeurs dans l'espace $X$, alors

$$P = \delta' \otimes I - \delta \otimes A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_A, X))$$

où $X_A := (D(A), \|x\|_A)$ et $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$.

**Proposition 3.1.5.** *Si $u$ est une solution classique de*

$$u'(t) = Au(t) \ \textit{pour } t \geq 0 \ \textit{et } u(0) = x \in X,$$

*alors $U$ la distribution associée à $u$ est une solution de l'équation*

$$P * U = \delta \otimes x$$

*où $P = \delta' \otimes I - \delta \otimes A$.*

**Preuve.** Si $u$ est une solution classique de (CP), alors $u$ vérifie les conditions de la définition 3.1.1 et la distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$ associée est définie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle U, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(t) u(t) dt.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle P * U, \varphi \rangle = \langle \delta' \otimes I * U, \varphi \rangle - \langle \delta \otimes A * U, \varphi \rangle$$

Par le lemme (3.1.4), pour tout

$$\begin{aligned}
\langle \delta' \otimes I * U, \varphi \rangle &= I \langle U', \varphi \rangle \\
&= -\int_0^\infty \varphi'(t) u(t) dt \\
&= [\varphi(t) u(t)]_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(t) u'(t) dt \\
&= \varphi(0) u(0) + \int_0^\infty \varphi(t) u'(t) dt \\
&= \varphi(0) x + \int_0^\infty \varphi(t) u'(t) dt \\
&= \varphi(0) x + \int_0^\infty \varphi(t) A(u(t)) dt \\
&= \varphi(0) x + A \int_0^\infty \varphi(t) u(t) dt
\end{aligned}$$

or

$$\int_0^\infty \varphi(t)Au(t)dt = \int_0^\infty A\left(\varphi(t)u(t)\right)dt = A\int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt$$

et

$$\begin{aligned}\langle \delta\otimes A * U,\varphi\rangle &= A\langle U,\varphi\rangle \\ &= A\int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt\end{aligned}$$

Ainsi

$$\langle P*U,\varphi\rangle = \varphi(0)x = \langle\delta,\varphi\rangle x = \langle \delta\otimes x,\varphi\rangle.$$

■

**Définition 3.1.6.** *Une distribution $U\in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R},X_A)$ est dite solution aux sens des distributions du problème de Cauchy*

$$U'(t) = AU(t) \text{ pour } t\geq 0 \text{ et } U(0) = x\in X, \tag{CP}$$

*si $U$ est une solution du problème*

$$P*U = \delta\otimes x, \tag{$DP$}$$

*où $P=\delta'\otimes I-\delta\otimes A$.*

## 3.2 Problèmes de Cauchy bien posés

**Définition 3.2.1.** *Le problème de Cauchy $(CP)$ est dit bien posé au sens des distributions ou simplement le problème $(DP)$ est bien posé si*

*$(i)$ Pour tout $x\in X$, il existe une unique solution $U\in\mathcal{D}_0'(\mathbb{R},X_A)$ de $(DP)$.*

*$(ii)$ Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ qui converge $0$, la solution du problème*

$$U_n'(t) = AU_n(t) \text{ pour } t\geq 0 \text{ et } U(0) = x_n\in X,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

*est une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $0$ dans $\mathcal{D}_0'(\mathbb{R},X_A)$.*

A présent on va donner des conditions pour que le problème de Cauchy soit bien posé au sens des distributions.

**Proposition 3.2.2.** *Si $A$ est un opérateur linéaire fermé dans $X$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème de Cauchy* $(CP)$ *est bien posé au sens des distributions.*
2. *Il existe une distribution* $S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ *qui vérifie*

$$P * S = \delta \otimes I \tag{3.2}$$

*et*

$$S * P = \delta \otimes J \tag{3.3}$$

*où* $I = I_X$ *et* $J = I_{X_A}$. *Dans ce cas, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *et* $x \in X$, *on a*

$$\langle U, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \ x.$$

**Preuve.**

1. On commence par la première implication, on suppose que le problème de Cauchy (CP) est bien posé au sens des distributions, c'est-à-dire pour tout $x \in X$, il existe une unique solution $U \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X_A)$ de

$$P * U = \delta \otimes x$$

Posons pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $x \in X$,

$$\langle S, \varphi \rangle x = \langle Sx, \varphi \rangle := \langle U, \varphi \rangle.$$

On a pour tout $x \in X$, $Sx \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X_A)$.
En effet $Sx$ est bien définie et linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $X_A$, de plus si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\|\langle Sx, \varphi_n \rangle\|_A = \|\langle U, \varphi_n \rangle\|_A \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On a aussi $S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$, en effet pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle S, \varphi \rangle$ qui est bien définie et linéaire de $X$ dans $X_A$ et de plus par $(3.2.1) - (ii)$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge 0, alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la solution associée converge vers 0 dans $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X_A)$, ce qui implique que

$$\|\langle S, \varphi \rangle x_n\|_A = \|\langle U_n, \varphi \rangle\|_A \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ainsi $\langle S, \varphi \rangle \in \mathcal{L}(X, X_A)$.
Ensuite, $S$ est évidement linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(X, X_A)$, il reste à vérifier sa continuité. Pour cela, considérons une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$, tel que

$$\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall k \geq 0, \ \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in K} \left|\varphi_n^{(k)}(t)\right| = 0.$$

Or $Sx \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, X_A)$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\|\langle Sx, \varphi_n \rangle\|_A \leq C \sup_{0 \leq l \leq m} \sup_{t \in K} \left|\varphi_n^{(l)}(t)\right|$$

donc pour tout $x \in M$, un ensemble borné, on aura $\lim_{n \to +\infty} \|\langle S, \varphi_n \rangle\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} = 0$.

Passons à $(3.2)$, pour cela on va utiliser le théorème 2.1.15, ainsi ils existent $m, p, q \geq 0$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_A, X))$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ et $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X_A)$ telles que pour un certain $c > 0$

$$P = g^{(p)}, \quad S = f^{(m)}, \quad Sx = h^{(q)} \text{ sur } ]-\infty, c[$$

Puisque $P \in \mathcal{E}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_A, X))$ et $S \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$, alors d'après 2.1.30-(2),

$$P * S \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X))$$

et pour tout $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{D}_-(\mathbb{R})$ où $\operatorname{supp}(\varphi) \subset ]-\infty, c[$, par la proposition (2.1.28) et (2.1.29), on a

$$\left(f * \check{\varphi}^{(m+p)}\right)(s)\, x = \int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}^{(m+p)}(s-t)\, f(t)\, x dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m+p)}(t-s)\, f(t)\, x dt$$

et en utilisant l'approximation de l'intégrale avec les sommes de Riemann

$$\begin{aligned}
\langle P * S, \varphi \rangle x &= \left\langle g^{(p)} * f^{(m)}, \varphi \right\rangle x \\
&= (-1)^{(m+p)} \left\langle g * f, \varphi^{(m+p)} \right\rangle x \\
&= (-1)^{(m+p)} g * \left(f * \check{\varphi}^{(m+p)}\right)(0)\, x \\
&= (-1)^{(m+p)} \left(\int_{\mathbb{R}} g(s) \left[\left(f * \check{\varphi}^{(m+p)}\right)(-s)\right] ds\right) x \\
&= (-1)^{(m+p)} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \left[\left(f * \check{\varphi}^{(m+p)}\right)\left(-\frac{k}{n}\right)\right]\right) x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P * S, \varphi \rangle x &= (-1)^{(m+p)} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \left[\left(f * \check{\varphi}^{(m+p)}\right)\left(-\frac{k}{n}\right) x\right] \\
&= (-1)^{(m+p)} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(m+p)}\left(t + \frac{k}{n}\right) f(t)\, x dt\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P * S, \varphi \rangle x &= (-1)^p \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \left[\int_{\mathbb{R}} f^{(m)}(t) \left(\tau_{\frac{k}{n}} \varphi^{(p)}(t)\, x\right) dt\right] \\
&= (-1)^p \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \left[\left\langle f^{(m)}, \tau_{\frac{k}{n}} \varphi^{(p)} \right\rangle x\right] \\
&= (-1)^p \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \left[\left\langle S, \tau_{\frac{k}{n}} \varphi^{(p)} \right\rangle x\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P * S, \varphi \rangle x &= (-1)^p \int_{\mathbb{R}} g(s) \left[\left\langle Sx, \tau_s \varphi^{(p)} \right\rangle\right] ds \\
&= (-1)^p \int_{\mathbb{R}} g(s) \left[\left\langle h^{(q)}, \tau_s \varphi^{(p)} \right\rangle\right] ds \\
&= (-1)^{(p+q)} \int_{\mathbb{R}} g(s) \left[\int_{\mathbb{R}} h(t)\, \varphi^{(p+q)}(t+s)\, dt\right] ds \\
&= (-1)^{(p+q)} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(p+q)}(t) \int_{\mathbb{R}} g(s) \left[h(t-s)\right] ds dt \\
&= (-1)^{(p+q)} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(p+q)}(t) \int_{\mathbb{R}} g(s) \left[h(t-s)\right] ds\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P * S, \varphi \rangle x &= (-1)^{(p+q)} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(p+q)}(t) \int_{\mathbb{R}} g(s) \left[h(t-s)\right] ds\ dt \\
&= (-1)^{(p+q)} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(p+q)}(t) \left(g * h\right)(t)\ dt \\
&= \left\langle g^{(p)} * h^{(q)}, \varphi \right\rangle \\
&= \langle P * Sx, \varphi \rangle \qquad (3.4) \\
&= \langle P * U, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes x, \varphi \rangle \\
&= \langle \delta \otimes I, \varphi \rangle x
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que $S * P = \delta \otimes J$. D'après les calculs précédents, on a pour tout $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}_- (\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle P * S'x, \varphi \rangle &= \langle P * S', \varphi \rangle x \\ &= \left\langle (P * S)', \varphi \right\rangle x \\ &= - \langle P * S, \varphi' \rangle x \\ &= - \langle \delta \otimes x, \varphi' \rangle \\ &= - \langle \delta, \varphi' \rangle x \\ &= \delta' \otimes x \end{aligned}$$

et pour $x \in D(A)$, $\langle P * SAx, \varphi \rangle = \langle P * S, \varphi \rangle Ax = \langle \delta \otimes Ax, \varphi \rangle$. D'autre part, par définition de $P$ et $(3.1)$, on a pour $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \langle P * (\delta \otimes x), \varphi \rangle &= \langle (\delta' \otimes I - \delta \otimes A) * (\delta \otimes x), \varphi \rangle \\ &= \langle (\delta' \otimes I) * (\delta \otimes x), \varphi \rangle - \langle (\delta \otimes A) * (\delta \otimes x), \varphi \rangle \\ &= I \left\langle (\delta \otimes x)', \varphi \right\rangle - A \langle \delta \otimes x, \varphi \rangle \\ &= \langle \delta' \otimes x, \varphi \rangle - A (\langle \delta, \varphi \rangle x) \\ &= \langle \delta' \otimes x, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle Ax \\ &= \langle \delta' \otimes x - \delta \otimes Ax, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle P * (\delta \otimes x), \varphi \rangle &= \langle \delta' \otimes x - \delta \otimes Ax, \varphi \rangle \\ &= \langle P * S'x, \varphi \rangle - \langle P * SAx, \varphi \rangle \end{aligned}$$

ce qui implique que $P * (S'x - SAx - \delta \otimes x) = 0$ et puisque le problème de Cauchy est bien posé, alors pour $x \in D(A)$

$$S'x - SAx = \delta \otimes x$$

d'où le résultat.

2. On passe à la deuxième implication, soit $S \in \mathcal{D}'_0 (\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ tel que 3.2 et 3.3 soient vérifiées. Posons pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $x \in X$,

$$\langle U, \varphi \rangle := \langle S, \varphi \rangle x = \langle Sx, \varphi \rangle.$$

Il est clair que $U \in \mathcal{D}'_0 (X)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle P * U, \varphi \rangle &= \langle P * Sx, \varphi \rangle \\ &= \langle P * S, \varphi \rangle x \\ &= \langle \delta \otimes I, \varphi \rangle x \\ &= \langle \delta \otimes x, \varphi \rangle \end{aligned}$$

et de plus si on suppose qu'il existe une autre solution $V$ de $(DP)$, alors on a

$$V = \delta \otimes J * V = (S * P) * V = S * (P * V) = S * (\delta \otimes x) = Sx$$

Par conséquent, le problème $(DP)$ admet une solution unique. Il reste à vérifier $(3.2.1) - (ii)$, pour cela considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ qui converge 0, et montrons que $(Sx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X_A)$. Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ un ensemble borné de $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|\langle Sx_n, \varphi \rangle\|_A &\leq \|\langle S, \varphi \rangle x_n\|_A \\
&\leq \|\langle S, \varphi \rangle x_n\| + \|A \langle S, \varphi \rangle x_n\| \\
&\leq \|\langle S, \varphi \rangle x_n\| + \|\langle S', \varphi \rangle x_n\| + \|\varphi(0) x_n\| \\
&\leq \Big( \|\langle S, \varphi \rangle\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} + \|\langle S, \varphi' \rangle\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} + |\varphi(0)| \Big) \|x_n\|
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{B}$ est un borné de $\mathcal{D}(\Omega)$, alors il existe un compact $K$ tel que supp$\varphi \subset K$ pour tout $\varphi \in K$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\exists C_i > 0$, tel que

$$\forall \varphi \in K, \ \sup_{t \in K} \left| \varphi^{(i)}(t) \right| \leq C_i$$

Par le Théorème 2.1.15, il existe $m \geq 0$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ telle que

$$S = f^{(m)} \text{ sur } K.$$

Ainsi pour tout $\varphi \in K$,

$$\begin{aligned}
\|\langle S, \varphi \rangle\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} &= \left\| \int_K f(t) \ \varphi^{(m)}(t) dt \right\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} \\
&\leq \sup_{t \in K} \left| \varphi^{(m)}(t) \right| \left\| \int_K f(t) \ dt \right\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} \\
&\leq C_m \left\| \int_K f(t) \ dt \right\|_{\mathcal{L}(X, X_A)} = C
\end{aligned}$$

Finalement, $\exists C' > 0$ qui ne dépend pas de $\varphi$ tel que

$$\|\langle Sx_n, \varphi \rangle\|_A \leq C' \|x_n\|.$$

■

Le théorème ci-dessus a montré que le problème $(DP)$ admet une solution distribution. Maintenant on va montrer que cette solution distribution coïncide avec un semi-groupe distribution dont le générateur est l'opérateur $A$.

**Théorème 3.2.3.** *Si $A$ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans $X$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

*(i) Il existe une distribution $S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ qui satisfait $P * S = \delta \otimes I$ et $S * P = \delta \otimes J$.*

*(ii) $A$ est le générateur d'un semi-groupe distribution $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ dont l'ensemble $Rg(\mathcal{G})$ est dense.*

*Dans ce cas $S = \mathcal{G}$ .*

**Preuve.**

1. On commence par la deuxième implication. Soit $\mathcal{G}$ un semi-groupe distribution dont le générateur est l'opérateur $A$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi_+ \in \mathcal{E}'_0(\mathbb{R})$ la distribution introduite dans $(2.10)$, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle \delta' * \psi_+, \varphi \rangle &= (\delta' * \psi_+ * \check{\varphi})(0) \\
&= \delta' * (\psi_+ * \check{\varphi})(0) \\
&= \left\langle \delta', \check{\psi}_+ * \varphi \right\rangle \\
&= -\left(\check{\psi}_+ * \varphi'\right)(0) \\
&= -\langle \psi_+, \varphi' \rangle \\
&= -\int_0^{+\infty} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt \\
&= \psi(0)\, \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \psi'(t)\, \varphi(t)\, dt
\end{aligned}$$

donc $\delta' * \psi_+ = \psi(0)\,\delta + \psi'_+$. Par la proposition $(2.2.4)$, on a pour tout $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}, \delta' * \psi_+ * \varphi \rangle x &= \langle \mathcal{G}, \psi(0)\,\delta * \varphi \rangle x + \left\langle \mathcal{G}, \psi'_+ * \varphi \right\rangle x \\
&= \psi(0)\, \mathcal{G}(\delta) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x + \mathcal{G}\left(\psi'_+ * \varphi\right) x \\
&= \psi(0) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x + \mathcal{G}\left(\psi'_+ * \varphi\right) x \\
&= \mathcal{G}(\delta')\, \mathcal{G}(\psi_+ * \varphi)\, x \\
&= -A\mathcal{G}(\psi_+ * \varphi)\, x \\
&= -A\mathcal{G}(\psi_+) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \\
&= \mathcal{G}(\psi_+) \langle \mathcal{G}, \delta' * \varphi \rangle x \\
&= \mathcal{G}(\psi_+)(-A) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x
\end{aligned}$$

Par la proposition 2.2.7-(2) si on prend $y = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x$, alors

$$
\begin{aligned}
-A \langle \mathcal{G}, \psi \rangle y - \langle \mathcal{G}, \psi' \rangle y &= -A \langle \mathcal{G}, \psi \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x - \langle \mathcal{G}, \psi' \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x && (3.5)\\
&= \psi(0) \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x && (3.6)\\
&= \psi(0) y && (3.7)
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
-\langle \mathcal{G}, \psi \rangle Ay - \langle \mathcal{G}, \psi' \rangle y &= -\langle \mathcal{G}, \psi \rangle A \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x - \langle \mathcal{G}, \psi' \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x\\
&= A \langle \mathcal{G}, \psi \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x - \langle \mathcal{G}, \psi' \rangle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x\\
&= \psi(0) y && (3.8)
\end{aligned}
$$

Puisque $Rg\,(\mathcal{G})$ est dense dans $X$ et $A$ est un opérateur fermé, alors on a $\langle \mathcal{G}, \psi \rangle y \in D(A)$ et (3.5) est vrai pour tout $y \in X$.
Soit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ qui converge 0, alors (3.5) nous donne

$$\lim_{n \to +\infty} \| A \langle \mathcal{G}, \psi \rangle y_n \| = 0,$$

c'est-à-dire $\langle \mathcal{G}, \psi \rangle \in \mathcal{L}\,(X, X_A)$. Maintenant si on prend une suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}\,(\mathbb{R})$ qui converge 0 dans (3.5), alors

$$\lim_{n \to +\infty} \| \langle \mathcal{G}, \psi_n' \rangle \| = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \| A \langle \mathcal{G}, \psi_n \rangle \| = 0$$

et puisque $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'\,(\mathbb{R}, \mathcal{L}\,(X, X))$, alors $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_0'\,(\mathbb{R}, \mathcal{L}\,(X, X_A))$.
Montrons ensuite qu'on a (3.8) pour tout $y \in D(A)$, pour cela considérons $x \in D\,(\mathcal{G}\,(-\delta'))$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite régularisante qui converge vers $\delta$. Par (3.5), on aura

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{G}, \rho_n \rangle x = x \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{G}, \delta' * \rho_n \rangle x = -Ax$$

et on a pour tout $x \in D\,(\mathcal{G}\,(-\delta'))$

$$-\langle \mathcal{G}, \psi \rangle Ax = \mathcal{G}\,(\psi')\,x + \psi(0)x\,. \tag{3.9}$$

et vu que pour tout $x \in D(A)$, il existe $(x_n)_n \subset D\,(\mathcal{G}\,(-\delta'))$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \to +\infty} Ax_n = Ax$$

alors (3.9) est aussi vrai pour tout $x \in D(A)$. Finalement,

$$P * \mathcal{G} = \delta \otimes I \text{ et } \mathcal{G} * P = \delta \otimes J.$$

2. On passe à la première implication. Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, X_A))$ vérifiant

$$P * \mathcal{G} = \delta \otimes I \text{ et } \mathcal{G} * P = \delta \otimes J.$$

Pour tout $F \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, X)$, la distribution $U = \mathcal{G} * F$ est une solution de

$$P * U = F \tag{3.10}$$

qui est au fait unique car $\mathcal{G} * P = \delta \otimes J$. Ainsi, le problème (3.10) est bien posé si et seulement si le problème $(DP)$ est bien posé aussi.
On va montrer maintenant que $\mathcal{G}$ est bien un semi-groupe.
Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et considérons l'équation (3.10) avec $F = \check{\varphi} \otimes x$ (resp. $F = (\check{\psi} * \varphi_1) \otimes x$ resp. $F = \check{\psi} \otimes u(0)$), les solutions de ces équations sont $u$ (resp. $v$ resp. $w$), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u' - Au &= \check{\varphi} \otimes x,\ u(0) = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x \\ v' - Av &= (\check{\psi} * \check{\varphi}) \otimes x,\ v(0) = \langle \mathcal{G}, \psi \rangle u(0) \\ w' - Aw &= \check{\psi} \otimes u(0),\ w(0) = \langle \mathcal{G}, \varphi * \psi \rangle x \end{aligned} \tag{3.11}$$

La solution $u = (\mathcal{G} * \check{\varphi})\, x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, D(A))$ et il en est de même pour $v$ et $w$.
Par (3.11), on a

$$-A(u * \varphi_1) + (u * \check{\varphi})' = (\check{\varphi} * \check{\psi}) \otimes x$$

donc

$$w(t) = u * \check{\varphi} \text{ et } w(0) = u(\psi).$$

Considérons $H$ la fonction de Heaviside, on a

$$\begin{aligned} -A(Hu) + (Hu)' &= H(t)(-Au + u') + \delta \otimes u(0) \\ &= (H\check{\varphi}) \otimes x + \delta \otimes u(0) \\ &= \delta \otimes u(0) \end{aligned} \tag{3.12}$$

et $-A((Hu) * \check{\psi}) + ((Hu) * \check{\psi})' = \check{\psi} \otimes u(0)$

$$u = (Hu) * \check{\psi},\ v(0) = \int_0^\infty u(t)\psi(t)dt$$

et pour tout $\psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $v(0) = \langle u, \psi \rangle = w(0)$ donc pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathcal{G}, \varphi * \psi \rangle = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle \langle \mathcal{G}, \psi \rangle.$$

Encore une fois considérons $z$ la solution de (3.10) où $F = \delta \otimes y$ et $y = \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x$ pour $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ et $x \in X$. Par (3.12) et $u(0) = y$, on a

$$z(t) = \mathcal{G}_y = H(t)u(t)$$

et $\mathcal{G}_y$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
Soit $x$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = 0$, donc $\mathcal{G}_x = 0$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{G}_x = 0$ sur $]-\infty, 0[$ car $\mathcal{G} \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, X_A))$.
Donc par la proposition 2.1.17, $\exists m \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0 \leq k \leq m} \subset X_A$ tels que

$$\mathcal{G}_x = \sum_{k=0}^{m} \delta^{(k)} \otimes x_k.$$

Puisque $\mathcal{G}_x$ est une solution de l'équation $-AU + U' = \delta \otimes x$, alors

$$\delta^{(m+1)} \otimes x_k + \sum_{k=0}^{m} \delta^{(k)} \otimes (x_{k-1} - Ax_k) = 0.$$

Finalement, $x_k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq m$.
Soit $X'$ et $X'_A$ les espaces dual de l'espace $X$ et $X_A$ et posons

$$\langle \mathcal{G}^*, \varphi \rangle := (\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle)^*$$

alors $\langle \mathcal{G}^*, \varphi \rangle \in \mathcal{L}(X'_A, X')$, $\mathcal{G}^* \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X'_A, X'))$ et $A^* \in \mathcal{L}(X', X'_A)$.
Par (3.8), on a

$$\mathcal{G}^*(\frac{d}{dt} - A^*) = \delta \otimes I_{X'} \text{ et } (\frac{d}{dt} - A^*)\mathcal{G}^* = \delta \otimes I_{X'}$$

Donc $\mathcal{G}^* \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X', X'))$ est un semi-groupe distribution qui vérifie (2.2.1)$-$ $(ii)$ comme $\mathcal{G}$.
Donc si $z^* \in X'_A$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ et $x \in X$,

$$\langle \langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x, z^* \rangle = \langle x, \langle \mathcal{G}^*, \varphi \rangle z^* \rangle = 0.$$

Par conséquent, si $\langle \mathcal{G}^*, \varphi \rangle z^* = 0$, alors $z^* = 0$ et $\overline{Rg(\mathcal{G})} = X$.
Il nous reste à montrer que si $A_1$ est le générateur de $\mathcal{G}$, alors $A_1 = A$.
En effet, puisque le problème (3.10) est bien posé, alors l'application $f \mapsto \mathcal{G} * f$ est un isomorphisme defini sur $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X)$ dans $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X_A)$ et puisque $A_1$ est un générateur de $\mathcal{G}$, alors cette application est un isomorphisme défini sur $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X)$ dans $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}, X)$, donc

$$D(A) = D(A_1).$$

Par

$$-A\mathcal{G}_x + \mathcal{G}'_x = \delta \otimes I\,(x) = -A_1\mathcal{G}_x + \mathcal{G}'_x$$

on a $A\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x = A_1\langle \mathcal{G}, \varphi \rangle x$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_0\,(\mathbb{R})$ et $x \in X$. On conclut que $A = A_1$ vu que $\overline{Rg\,(\mathcal{G})} = X$.

■

On termine par un résultat sur la résolvante dont la preuve est omise.

**Théorème 3.2.4.** *[10] Si $A$ est un opérateur linéaire fermé dans $X$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

*(i) Il existe $S \in \mathcal{D}'_0\,(\mathbb{R}, \mathcal{L}\,(X, X_A))$ qui satisfait $P * S = \delta \otimes I$ et $S * P = \delta \otimes J$.*

*(ii) Il existe $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{M\,|\lambda|^n}{\ln(1+|\lambda|)}.$$

*Pour tout*

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{C},\ \Re\,(\lambda) > \frac{n}{\tau}\ln(1+|\lambda|) + \frac{1}{\tau}\ln\frac{C}{\gamma} \right\}$$

*où*

$$\tau \in \left]0, T\right[,\ C > 0,\ 0 < \gamma < 1.$$

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons résumé quelques résultats sur l'intégration et la différenciation des fonctions à une seule variable à valeurs dans un espace de Banach. Dans un sens général, nous avons vu que l'intégrale de Bochner pour ces fonctions généralise bien les définitions que nous connaissons dans le cadre des fonctions à valeurs scalaires et qu'elles ont les mêmes propriétés, souvent avec des preuves similaires.

Même les définitions des distributions ont été généralisées, ainsi elles ont gardé presque les mêmes propriétés. Néanmoins, l'existence de certaines notions pour ces fonctions ou distributions qui prennent des valeurs dans un espace de Banach introduit de nouveaux problèmes qui ne se posent pas dans le cas scalaire, comme c'était le cas dans la définition de la convolution qui nécessitait la définition d'une multiplication entre deux espaces de Banach.

Enfin, le problème de Cauchy dans l'espace des distributions a été étudié, ce qui a aussi imposé l'introduction des semi-groupes distributions, dont les définitions et les propriétés diffèrent de celles des semi-groupes d'opérateurs.

# Références


[1] Amann, H., *Linear and quasilinear parabolic problems*, Vol. 1. Basel-Birkhäuser, (1995).

[2] Amann, H., *Vector-valued distributions and Fourier multipliers*. Unpublished manuscript 49, N 60 (2003).

[3] Bhattacharyya, P. K., *Distributions : Generalized functions with applications in Sobolev spaces*. Berlin : De Gruyter, (2012).

[4] Bochner S., *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind*. Fund. Math. Vol 20, 262-276. (1933).

[5] Bourbaki N., *Integration, Chapitre 5,*. Hermann, Paris, (1967).

[6] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maıtrise, (1983).

[7] Fattorini, H. O., *The cauchy problem.* Cambridge University Press. Vol. 13517, (1983).

[8] Fujiwara, D., *Acharacterisation of exponential distribution semi-groups.* Journal of the Mathematical Society of Japan, 18(3), 267-274, (1966).

[9] Lions, J. L., *Les semi groupes distributions*. Portugaliae mathematica, 19, 141-164, (1960).

[10] Melnikova, I. V., Filinkov, A., *Abstract Cauchy problems : three approaches.* CRC Press, (2001).

[11] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Science & Business Media. Vol. 44, (2012).

[12] Schwartz, L., *Théorie des distributions.* Hermann, (1966)

[13] Schwartz, L., *Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I.* Annales de l'institut Fourier. Vol. 7. (1957).

[14] Schwartz, L., *Théorie des distributions à valeurs vectorielles. II.* Annales de l'institut Fourier. Vol. 8. (1958).

[15] Ushijima, T., *Some properties of regular distribution semi-groups.* Proceedings of the Japan Academy 45.4, 224-227, (1969).

## Résumé

Ce mémoire se focalise sur l'étude du problème de Cauchy dans le contexte de l'espace des distributions. Nous avons exploré les fonctions intégrables et régulières qui ont des valeurs dans un espace de Banach. De plus, nous avons abordé le concept de semi-groupes de distributions.

En conclusion, nous avons examiné les conditions requises pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans l'espace des distributions.



**Mots clés :** Fonctions à valeurs vectorielles, Distributions à valeurs vectorielles, Semi-groupe distributions, Problème de Cauchy.



## Abstract

This work is devoted to the study of the Cauchy problem within the context of the distribution space. We have explored integrable and regular functions that hold values in a Banach space. Furthermore, we have tackled the concept of distribution semi-groups.

In conclusion, we have examined the necessary conditions for the Cauchy problem to be well-posed in the distribution space.



**Keywords:** Vector-valued functions, Vector-valued Distributions, Semi-group distributions, Cauchy problem.