الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالـي والبحــث العلمــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques
Thème

Problème de Sturm Liouville

Présenté Par :
Melle Rahal Wahiba

Devant le jury composé de :

Dr Sakhi Hanane	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Présidente
Dr Mekhalfi Kheira	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr Mammar Imane	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2022/2023

Remerciement

Mes remerciements au Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné durant toutes ces années d'études .

je voudrais remercier mon encadrent :
Mme Mammar Imane pour m'avoir proposé ce sujet, ainsi que pour le soutien et ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

je remercier également les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant d'examiner mon travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail tout d'abord :

A mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant soufferts et qui ont sacrifiés tellement de choses pour que je sois heureuse, Pour leurs conseils, leur affection et leurs encouragements, je les remercie, pour tout les efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège et vous bénisse la vie.

A mes très chéres sœurs et mes frères qui m'ont encouragé le long de mon parcours universitaire.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Sommaire

Notations et abréviations

EDO	Une équation différentielle ordinaire.
EDP	Une équation aux dérivées partielles.
E	Ensemble non vide .
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$	L'ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	L'ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	L'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$E(x)$	La partie entière de x .
$< \cdot, \cdot >$	Le produit scalaire.
$n!$	$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$.
$L^2(a, b)$	L'espace vectorielle des fonctions intégrable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^n([a, b])$	L'espace des fonctions définies de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ n-fois continûment dérivables $(n \in \mathbb{N})$.
$\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$	L'espace des fonctions définies de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ n-fois continûment dérivables $(n \in \mathbb{N})$.
$L_n(x)$	Le polynôme de Laguerre d'ordre n .
$H_n(x)$	Le polynôme de Hermite d'ordre n .
$P_l(x)$	Le polynôme de Legendre d'ordre l .

Introduction Générale

Les mathématiques ont été décrites "comme une méthode de base pour la physique" et la physique a été décrite comme "une riche source d'inspiration et de connaissances en mathématiques"[1].

Les **Problèmes de Sturm Liouville** ont été posé par **Joseph Liouville** (24 mars 1809 **Saint-Omer** - 8 septembre 1882 (Paris) et **Charles-François Sturm** (29 septembre 1803 **Genève**- 15 décembre 1855 Paris), Sturm et Liouville ont publié une série d'articles sur le calcul ordinaire du second degré et ont étudier les caractéristiques de base liées aux valeurs propres et fonctions propres [[15],[3],[2]]. Ces caractéristiques aident dans la modélisation de certains problèmes de physique, par exemple, la modélisation de la réfraction de la lumière, dans la mécanique quantique (équation de Laguerre et Hermite) [[4], [18]].

Depuis cette époque la thèse de Sturm est devenue célèbre, cette théorie de Sturm reste un bon et vaste domaine de recherche avec de nombreuses applications en mathématiques.

Les problèmes de Sturm Liouville sont des problèmes aux limites qui surviennent naturellement lors de la résolution de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles en utilisant une méthode de "séparation de variables" [17].

Le Problème de Sturm Liouville concerne les valeurs des paramètre réel λ pour lesquelles l'équation différentielle linéaire homogène.

$$Lu - \lambda ru = 0$$

où L est un opérateur différentiel d'ordre n à coefficients continus sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et r est une forme continue strictement positive sur cet intervalle, a des solutions non nulles vérifiant n conditions aux limites données.

Le mémoire est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre contient quelques définitions et concepts liés aux équations différentielles et les méthodes appropriées pour les résoudre, et des rappels qui seront utilisé.

Dans **le deuxième chapitre** on présente le Problème de Sturm Liouville où les propriétés principales de l'opérateur différentiel, les valeurs propres et les fonctions propres sont étudiés et cités,

Finalement, Dans **le troisième chapitre** quelques applications sur le Problème de Sturm Liouville sont étudiés en vérifiant les propriétés obtenues dans certaines équations de la physique mathématique.

Des conclusions sont données à la fin de ce mémoire, qui se termine par une bibliographie.

Chapitre I

Préliminaires

Dans ce chapitre on va présenter quelques définitions, théorèmes et résultats préliminaires qu'on a utilisé dans ce travail.

I.1 Équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle ordinaire est une équation différentielle dont la où les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

D'une manière générale.

Les EDO sont écrites sous la forme suivante [16],

$$F(x, u(x), u'(x), \cdots, u^{(n)}(x)) = 0. \tag{I.1}$$

Où

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \cdots, u^{(n-1)}(x)), \tag{I.2}$$

avec f et F des fonctions données définies sur $I \times U$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert d'un corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Remarque I.1.1. *On appelle* ***ordre*** *d'une équation différentielle ordinaire le plus grand ordre de dérivées à coefficients non nulles.*

Définition I.1.1. *On appelle* ***solution*** *de l'équation différentielle ordinaire (I.2) toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^n$ vérifiant l'équation (I.2).*

I.2 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n

Définition I.2.1. *Une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre n est une équation du type*

$$a_0(x).u^{(n)}(x) + a_1(x).u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x).u(x) = f(x), \tag{I.3}$$

avec $a_0 \neq 0$ *et* $a_i, i = \overline{1,n}$ *et* f *sont des fonctions définies au moins sur un intervalle* $I \subseteq U$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* U *un ouvert de* ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$).

Théorème I.2.1. *[3] Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est une équation de la forme :*

$$a_0(x)u^{(n)(x)} + a_1(x)u^{(n-1)(x)} + \cdots + a_n(x)u(x) = 0 \quad \forall x \in I. \tag{I.4}$$

Si $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ *sont des solutions linéairement indépendantes de (I.4), alors la solution générale de l'équation (I.4) est donnée par :*

$$u_h = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x),$$

où $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *sont des constantes.*

I.2.1 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 suivante

$$a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = f(x), \tag{I.5}$$

où $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, f sont des fonctions continues sur $I \subseteq \mathbb{R}$, posons

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

$$Q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)},$$

et

$$F(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)},$$

l'équation (I.5) devient

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = F(x). \tag{I.6}$$

Si $F(x) = 0$, alors

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0. \tag{I.7}$$

Définition I.2.2. *Si* u_1 *et* u_2 *sont deux solutions linéairement indépendante de l'équation (I.7), alors la solution de l'équation homogène est donnée par :*

$$u_h = c_1u_1 + c_2u_2,$$

où c_1 et c_2 étant des constantes.

Proposition I.2.1. *La solution générale de l'équation (I.6) est donnée par*

$$u = u_h + u_p,$$

où u_h est la solution du problème homogène et u_p est une solution particulière de l'équation (I.6).

Théorème I.2.2. *Soit le problème suivant*

$$\begin{cases} u'' + P(x)u' + Q(x)u = F(x) \\ u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u_1. \end{cases}$$

où P, Q, et F sont des fonctions données définies de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $u_0, U_1 \in \mathbb{R}$.

Si P, Q et F sont des fonctions continues sur I, alors il existe une seule solution $\varphi(x)$ dans tout l'intervalle ouvert I.

I.2.2 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables est l'une des techniques les plus largement utilisé pour résoudre les problèmes aux limites relatives aux EDOs. elle consiste de chercher des solutions particulières de la forme séparable [17]

$$\frac{du(x)}{dx} = X(x)T(u(x)),$$

où X et T sont des fonctions de x et $u(x)$ respectivement.

On sépare les « variables » x et u :

$$\frac{du}{g(u)} = f(x)dx,$$

et on intègre en choisissant les bornes adéquates.

I.2.3 Wronskien

Définition I.2.3. *[3] On appelle **système fondamental des solutions** d'une équation différentielle tout ensemble de solutions $\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\}$ de l'équation homogène (I.5) telle que $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ soient linéairement indépendantes.*

c'est à dire $\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\}$ forme une base dans l'espace des solutions .

Définition I.2.4. *Le **Wronskien** est le déterminant d'une famille de solutions d'un système différentiel linéaire homogène* $\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\}$*, c'est la quantité :*

$$W(x) = W(u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pour $n = 2$ *on a*

$$W(x) = W(u_1(x), u_2(x)) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = u_1(x) \times u_2'(x) - u_2(x) \times u_1'(x).$$

Exemple I.2.1. *On a l'équation différentielle*

$$u'' + 5u' + 6u = 0,$$

qui a les deux solutions $u_1 = e^{-2x}$ *et* $u_2 = e^{-3x}$*, le Wronskien de ces deux fonctions est*

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2\ e^{-2x} & -3\ e^{-3x} \end{vmatrix} = -\ e^{-5x}.$$

Remarque I.2.1. *Si* u_1 *et* u_2 *sont linéairement dépendants, alors l'un d'eux est un multiple constant de l'autre, et donc* $W(u_1, u_2)(x) = 0$ *sur* I*.*

I.3 Équations aux dérivées partielles

Définition I.3.1. *[17] Une équation aux dérivées partielle ou EDP pour la fonction* $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une relation entre* $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *et un nombre fini de dérivées partielles .*

Une EDP est écrite sous la forme

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}, \cdots, \partial x_n^{k_n}}\right) = 0. \tag{I.8}$$

Où $k_1, k_2, \cdots, k_n$ *sont des entiers positifs tel que :* $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$*. l'équation (I.8) est considérée dans domaine* I *dans* $\mathbb{R}^n$*.*

On dit que u *est une solution de l'équation aux dérivées partielles (I.8) dans* $I \subset \mathbb{R}^n$*, si après substitution de* u *et de ses dérivées partielles,* F *s'annule pour tout* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in I$*.*

Exemple I.3.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Les fonctions $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3$ *et* $u(x_1, x_2) = sin(x_1 - x_2)$ *sont toutes deux des solutions de cette équation.*

Définition I.3.2. *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation.*

Définition I.3.3. *Si une équation aux dérivées partielles est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles, alors on peut l'écrire sous la forme*

$$L(u) = f.$$

L : l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.

I.4 Méthode de Frobenius

Soit l'équation suivante [4]

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + xq(x)\frac{du}{dx} + r(x)u = 0, \tag{I.9}$$

où $q(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions développables en séries entières ($q(x)$ et $r(x)$ sont analytiques),

c'est à dire on peut les écrire sous la forme

$$q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m, \tag{I.10}$$

$$r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r_m x^m, \tag{I.11}$$

convergentes pour un certain range de x.

Le but de la méthode de Frobenius est de trouver une solution de l'équation (I.9) de la forme suivante

$$u(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} x^s(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}, \tag{I.12}$$

avec $a_0 \neq 0$ et $s \in \mathbb{N}$.

De la relation précédente (I.12) on a

$$\frac{du}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1}, \tag{I.13}$$

et

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}. \tag{I.14}$$

En remplaçant (I.12),(I.13) et (I.14) dans l'équation (I.9), et en utilisant (I.10) et (I.11) on trouve

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + xq(x)\frac{du}{dx} + r(x)u = 0.$$

Alors

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2} + xq(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1} + r(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}q_m a_n(n+s)x^{n+m+s} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}r_m a_n x^{n+m+s} = 0. \tag{I.15}$$

Le premier membre de l'équation (I.15), qui est une série de puissance de x convergente dans un certain domaine, et qui doit être nuls, ce qui nécessite que tous les coefficients des puissances de x soit nuls.

Le coefficient de x^0 doit être nul et notons que x^0 apparaît seulement si $m = 0, n = 0$, on a

$$a_0 s(s-1) + a_0 q_0 s + a_0 r_0 = 0.$$

Et le coefficient de x^1 doit être nul et notons que x^1 découle de l'équation (I.15) en choisissant dans le premier terme $n = 1$ et dans le second et le troisième terme $n + m = 1$, on a alors

$$a_1(s+1)s + (a_1 q_0(s+1) + a_0 q_1 s) + (a_1 r_0 + a_0 r_1) = 0.$$

Nous pouvons maintenant écrire une équation générale pour le coefficient de x^i qui doit être nul.

Dans le premier terme de l'équation (I.15) choisissons $n = i$ et dans le deuxième et le troisième terme en choisissant $n + m = i$ (ie, $n = i, m = 0$ ou $n = i - 1, m = 1$ ou

$n = i-2, m = 2, \cdots, n = 0, m = i$), on obtient

$$a_i(s+i)(s+i-1) + (a_i q_0(s+i) + a_{i-1}q_1(s+i-1 + a_{i-2}q_2(s+i-2)$$
$$+ \cdots + (a_0 q_i s) + (a_i r_0 + a_{i-1}r_1 + a_{i-2}r_2 + \cdots + a_0 r_i) = 0,$$

c'est à dire

$$a_i[(s+i)(s+i-1) + q_0(s+i) + r_0] + (a_{i-1}q_1(s+i-1)$$
$$+ a_{i-2}q_2(s+i-2) + \cdots + a_0 q_i s) + (a_{i-1}r_1 + a_{i-2}r_2 + \cdots + a_0 r_i) = 0. \quad \text{(I.16)}$$

Donc

$$a_i f(s+i) + (a_{i-1}q_1(s+i-1) + a_{i-1}q_2(s+i-2) + ... + a_0 q_i s) + (a_{i-1}r_1 + a_{i-2}r_2 + \cdots + a_0 r_i) = 0, \quad i \geq 1, \quad \text{(I.17)}$$

où nous avons rassemblé tous les termes qui contiennent a_i et on a noté le coefficient de a_i par

$$f(s+i) = (s+i)(s+i-1) + q_0(s+i) + r_0.$$

De l'équation (I.15) avec l'hypothèse $a_0 \neq 0$, on obtient

$$s^2 + (q_0 - 1)(s) + r_0 = 0. \quad \text{(I.18)}$$

qui s'appelle équation indicielle, qui est du second degré en s et qui nous donnera deux racines s_1 et s_2.

Dans le cas où ces racines sont réelles, on suppose que $s_2 \geq s_1$.

Notons que l'équation (I.18) n'est autre que $f(s) = 0$, et on a immédiatement

$$f(s) = (s - s_1)(s - s_2),$$

On peut donc s'attendre à ce que ces deux racines s_1 et s_2 conduisent aux deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle d'origine. On peut montrer facilement que cela est vrai en dehors de certains cas exceptionnels, à savoir

1. les deux racines de l'équation indicielle sont égales.

2. les deux racines de l'équation indicielle différentes d'un nombre entier.

Par l'utilisation de l'équation (I.16) et les calcules on obtient la formule générale des coefficients a_i :

pour $i = 1$ on trouve

$$a_1 f(s+1) + a_0 q_1 s + a_0 r_1 = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-a_0(q_1 s + r_1)}{f(s+1)} \\ &= \frac{a_0 h_1(s)}{f(s+1)}, \end{aligned}$$

tel que

$$h_1(s) = -(q_1 s + r_1).$$

Pour $i = 2$

$$a_2 f(s+2) + [a_1 q_1 (s+1) + a_0 q_2 s] + [a_1 r_1 + a_0 r_2] = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{[a_1 q_1(s+1) + a_0 q_2 s] + [a_1 r_1 + a_0 r_2]}{f(s+2)}, \\ &= \frac{a_0 h_2(s)}{f(s+1) f(s+2)}, \end{aligned}$$

tel que

$$h_2(s) = -[h_1(s)(s + r_1 + 1) + f(s+1)(q_2 s + r_2)].$$

On en déduit que

$$a_i = a_0 \frac{h_i(s)}{f(s+1) f(s+2) \cdots f(s+i)}, \tag{I.19}$$

où $h_i(s)$ est un polynôme de s.

Si nous utilisons la relation (I.19), on obtient la série

$$u(x,s) = a_0 x^s \left\{ + \frac{h_1(s)}{f(s+1)} x + \frac{h_2(s)}{f(s+1) f(s+2)} x^2 + \cdots + \frac{h_i(s)}{f(s+1) f(s+2) \ldots f(s+i)} x^i + \ldots \right\}. \tag{I.20}$$

Il ne reste maintenant qu'a trouver deux solutions linéairement indépendantes, de l'équation différentielle (I.9).

En utilisant la série $u(x,s)$ donnée par (I.20) et la relation (I.17) on peut déduire quatre différents cas

1. Si les racines s_1 et s_2 de l'équation indicative sont distinct et ne différent pas d'un entier alors les deux solutions indépendantes sont données par $u(x, s_1)$ et $u(x, s_2)$.
2. Si les racines s_1 et s_2 , $s_2 > s_1$ différent par un entier et l'un des coefficients de la série

pour $u(x,s)$ est infini lorsque $s = s_2$, les deux solutions indépendantes sont données par :

$$[(s-s_1)u(x,s)]_{s=s_1} \quad \text{et} \quad \left[\frac{d}{ds}(s-s_1)u(x,s)\right]_{s=s_1}.$$

3. Si les racines s_1 et s_2, $s_2 > s_1$ différent par un entier et l'un des coefficients de la série pour $u(x,s)$, disons a_r, est indéterminé lorsque les deux solutions indépendantes sont obtenues entre $u(x,s_2)$, en gardant a_0 et a_r comme constantes arbitraires.
4. Si les racines de l'équation indicielle sont égaux, disons $s = s_1$, alors les deux solutions indépendantes sont données par :

$$u(x,s_1) \quad \text{et} \quad \left[\frac{d}{ds}u(x,s)\right]_{s=s_1}.$$

I.5 Produit scalaire et orthogonalité dans L^2

Définition I.5.1. *[11] **Un espace vectorielle** sur $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), est un ensemble X sur lequel deux opérations, addition*

$$+ : X \times X \longrightarrow X,$$

et multiplication

$$. : E \times X \longrightarrow X,$$

sont définit tels que :

1. *X est un groupe commutatif par addition, c'est-à-dire*
   — $u + v = v + u$ *pour tout* $u, v \in X$,
   — $u + (v + w) = (u + v) + w$ *pour tout* u, v *et* $w \in X$,
   — *il existe un élément non nul* $0 \in X$ *tel que* $u + 0 = u$ *pour tout* $u \in X$,
   — *pour chaque* $u \in X$ *il existe un inverse additif* $-u \in X$ *tel que* $u + (-u) = 0$.
2. *La multiplication entre les éléments de E et X satisfait*
   — $\forall (a,b) \in E^2$, $\forall u \in X$, $a.(b.u) = (ab).u$,
   — $\forall u \in X$, $1.u = u$.
3. *Les deux propriétés distributives*
   — $\forall a \in E$, $\forall (u,v) \in X^2$, $a.(u+v) = a.u + a.v$,
   — $\forall (a,b) \in E^2$, $\forall u \in X$, $(a+b).u = a.u + b.u$.

X est appelé un espace vectoriel réel où complexe selon E, $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$. Les éléments de X sont appelés vecteurs et ceux de E scalaire.

Définition I.5.2. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle* ***produit scalaire*** *sur X qu'on note $< \cdot, \cdot >$, toute forme bilinéaire symétrique et définie positive telle que*

1. $\forall u, v, w \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $< \alpha u + \beta v, w >= \alpha < u, w > +\beta < v, w >$.
2. $\forall u, v, w \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $< w, \alpha u + \beta v >= \alpha < w, u > +\beta < w, v >$.
3. $\forall u, v \in X$, $< u, v >=< v, u >$.
4. $\forall u \in X, < u, u >= 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
5. $< u, u >> 0$ *pour tout* $(u \neq 0) \in X$.

Un ***espace préhilbertien*** *est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe X muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.*

Définition I.5.3. *Une norme sur un espace vectoriel X vérifie*

1. $\forall u \in X$, $||u|| \geqslant 0$.
2. $u = 0 \Longleftrightarrow ||u|| = 0$.
3. $||\alpha u|| = |\alpha| ||u||$.
4. $\forall u, v \in X$: $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$.

Définition I.5.4. *En mathématique,* ***l'espace*** *L^2 est la cas particulier $p = 2$ de l'espace L^p.*

On note $L^2(I)$ l'ensemble des fonction de carré intégrable sur un intervalle I. Une fonction u défini sur I à valeurs complexes est dite de carré intégrable si u est mesurable et $u^2 \in L^1(I)$. On défini alors la norme sur L^2

$$||u||_{L^2} = \left(\int_I |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L^2 est un espace vectoriel.

Définition I.5.5. *Soit f est une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sauf pour un nombre fini de points, alors f est appelé* ***fonction continue par morceaux*** *sur I, si elle a au plus un nombre fini de points de discontinuité, et si à un point f admet des limites gauche et droite (une telle discontinuité est appelé discontinuité de saut).*

Définition I.5.6. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue sauf peut être aux extrémités et intégrable sur $]a, b[\subset I$, telle que*

$$\int_a^b w(x)dx > 0.$$

Une telle fonction est dite ***fonction poids****. Soient u et v deux fonctions continues définis sur un espace vectoriel $X(a,b)$ le produit scalaire de u et v défini par*

$$< u, v >_w = \int_a^b u(x)v(x)w(x)dx \quad \forall u, v \in X(a,b).$$

Remarque I.5.1. *Le produit scalaire induit une norme définie par $||u||_w =< u, u >_w^{\frac{1}{2}}$, qui satisfait les propriétées des normes telles que*

Pour tout $u, v \in X$,

1. $| < u, v >_w | \leq ||u||_w + ||v||_w$ *(Inégalité de Cauchy-Schwartz).*
2. $||u + v||_w \leq ||u||_w + ||v||_w$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition I.5.7. *[3] Soit X un espace vectoriel et A un opérateur linéaire dans X.*

Un nombre complexe λ est dit une ***valeur propre*** *de A s'il existe un vecteur non nul $u \in X$ tel que*

$$Au = \lambda u,$$

et dans ce cas u est dit ***vecteur propre*** *de l'opérateur A associé à la valeur propre λ.*

Définition I.5.8.

1. *Une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $n \in \mathbb{N}$ définie sur l'espace X converge vers $u \in X$ en norme si $||u_n - u||_w \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.*
2. *Une famille $\{u_n(x)\}_n \subset X$ de vecteurs non nuls est dite* ***orthogonale*** *pour la fonction poids $w(x)$ si chaque paire dans X est orthogonale,*

   C'est à dire $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, n \neq m :< u_n, u_m >_w = 0 \quad$ pour tout $u_n, u_m \in \{u_n\}_n$.
3. *Une famille $\{u_n\}_n \subset X$ de vecteurs non nuls orthogonaux est dite* ***orthonormale*** *pour la fonction poids w, si $||u_n||_w = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

   C'est à dire pour tout $u_n, u_m \in \{u_n\}_n :< u_n, u_m >_w = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$.

Théorème I.5.1. *[10] Soit $\{u_n\}_{n=1}^{N}$, $n, N \in \mathbb{N}$, une famille orthonormale de vecteurs et $X_N =< u_1, \cdots, u_N >$. pour $u \in X$, on définit*

$$v = \sum_{n=1}^{N} < u, u_n > u_n.$$

v est dite la projection orthogonale de u sur X_N.

Théorème I.5.2. *Soit $\{u_n\}$ une famille orthonormale de vecteurs ($n \in \mathbb{N}$) et $u \in X$. Alors, on a l'inégalité de Bessel*

$$\sum_{n=1}^{N} < u, u_n >^2 \leq ||u||^2,$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} < u, u_n >= 0.$$

Définition I.5.9. *1. Une famille orthonormale de vecteurs $\{u_n\}_{n=1}^N$ est dite **complète** dans X si*

$$\sum_{n=1}^{N} (u, u_n)^2 = ||u||^2, \qquad \forall u \in X \quad \textit{(l'égalité de Parseval)}$$

*2. Soit $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ une famille complète. Les termes (u, u_n) sont les **coefficients de Fourier** et $\sum_{n=1}^\infty (u, u_n) u_n$ est la **série généralisée** de u.*

Chapitre II

Le Problème de Sturm Liouville

II.1 Opérateur différentiel autoadjoint

Considérons la forme générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre[13]

$$p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u = 0, \tag{II.1}$$

où $p \in \mathcal{C}^2$, $q \in \mathcal{C}^1$ et $r \in \mathcal{C}$.

Nous souhaitons maintenant étudier les propriétés d'orthogonalité de ses solutions. Cela signifie qu'il faut chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ qui se trouvent dans $L^2(\mathbb{R})$.

L'équation (II.1) peut s'écrite sous la forme

$$Lu = 0,$$

avec

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x), \quad \forall x \in I \subseteq \mathbb{R}. \tag{II.2}$$

est un opérateur différentiel linéaire de seconde ordre, et u appartient à $\mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I)$, qui est un espace vectoriel linéaire, étant l'intersection de deux de ces espaces avec les mêmes opérations.

Définition II.1.1. *[15]*

Un opérateur linéaire A dans un espace vectoriel X est une application $A : X \longrightarrow X$ qui satisfait

$$A(au + bv) = aAu + bAv \qquad \textit{pour tout} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \textit{ou} \quad \mathbb{C} \quad \textit{et} \quad u, v \in X.$$

Si X est un espace préhilbertien, l'adjoint de A, s'il existe, est l'opérateur A' qui vérifie

$$< Au, v > = < u, A'v >, \qquad \textit{pour tout} \quad u, v \in X.$$

Si $A = A'$, Alors A est dit opérateur ***auto-adjoint****.*

Si X est un espace préhilbertien de dimension finie n, on sait que tout opérateur linéaire est représenté, par rapport à la base orthonormée $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$, par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

son adjoint est donné par

$$A' = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = (\bar{a}_{ij}) = \bar{A}^T,$$

Où $\bar{A}$ est le complexe conjugué de A,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

et $\bar{A}^T$ est sa transposée

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proposition II.1.1. *[6] D'après l'algèbre linéaire, nous savons que, si A est une matrice auto-adjointe (ou hermitienne), alors*

— *Les valeurs propres de A sont toutes des nombres réels.*

— *Les vecteurs propres de A correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

— *Les vecteurs propres de A forment une base de X.*

Trouvons la forme de l'adjoint de l'opérateur $L : L^2(I) \cap \mathcal{C}^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ défini par l'équation (II.2), où nous supposons que les coefficients p, r et q sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Notons que $\mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I) = \mathcal{C}^2(I)$ lorsque I est un intervalle fermé et borné.

Définition II.1.2. *On appelle l'adjoint de L l'opérateur L', telle que*

$$< Lu, v >=< u, L'v > \qquad \textit{pourtout} \quad u, v \in \mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I). \tag{II.3}$$

Corollaire II.1.1. *On a*

$$< Lu, v >= \int_a^b (pu'' + qu' + ru)\bar{v}dx.$$

Démonstration II.1.1. *On utilise l'intégration par parties pour manipuler le membre gauche de l'équation (II.3) afin de déplacer l'opérateur différentiel de u à v. Ainsi*

$$\begin{aligned}< Lu, v > &= pu'v|_a^b - \int_a^b u'(p\bar{v})'dx + du\bar{v}|_a^b - \int_a^b u(q\bar{v})'dx + \int_a^b ur\bar{v}dx \\ &= [pu'\bar{v} - u(p\bar{v})']_a^b + \int_a^b u(p\bar{v})''dx \\ &+ qu\bar{v}|_a^b - \int_a^b u(q\bar{v})'dx + \int_a^b ur\bar{v}dx \\ &=< u, (\bar{p}v)'' - (\bar{q}v)' + \bar{r}v > +[p(u'\bar{v} - u\bar{v}') + (q - p')u\bar{v}]_a^b,\end{aligned}$$

où les intégrales sont considérées comme impropres si (a, b) est infini ou si l'un des intégrands est illimité en a ou b. Notez que le membre droite de l'équation ci -dessus est bien défini si $p \in \mathcal{C}^2(a, b)$, $q \in \mathcal{C}^1(a, b)$ et $r \in \mathcal{C}(a, b)$. Le dernier terme, bien sûr, doit être interprété comme la différence entre les limites en a et en b. On a donc, pour tout $u, v \in L^2(I) \cap \mathcal{C}^2(I)$,

$$< Lu, v >=< u, L^*v > +[p(u'\bar{v} - u\bar{v}') + (q - p')u\bar{v}]_a^b, \tag{II.4}$$

où

$$\begin{aligned}L^*v &= (\bar{p}v)'' - (\bar{q}v)' + \bar{r}v \\ &= \bar{p}v'' + (2\bar{p}' - \bar{q})v' + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})v.\end{aligned}$$

Corollaire II.1.2. *L^* est dit l'adjoint formel de L si*

$$L^* = \bar{p}\frac{d^2}{dx^2} + (2\bar{p}' - \bar{q})\frac{d}{dx} + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r}).$$

Théorème II.1.1. *Soit $L : L^2(a, b) \cap \mathcal{C}^2(a, b) \longrightarrow L^2(a, b)$ un opérateur différentiel linéaire de second ordre défini par*

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \qquad x \in (a, b),$$

où $p \in \mathcal{C}^2(a, b)$, $q \in \mathcal{C}^1(a, b)$ et $r \in \mathcal{C}(a, b)$, alors

1. *L est formellement auto-adjoint, c'est-à-dire que $L^* = L$, si les coefficients p, q et r sont réels et $q = p'$.*

2. L est auto-adjoint, c'est-à-dire, $L' = L$, si L est formellement auto-adjoint.

Démonstration II.1.2. *L est dit* ***formellement auto-adjoint*** *quand $L^* = L$, c'est -à-dire quand*

$$\bar{p} = p, \qquad 2\bar{p}' - \bar{q} = q, \qquad \bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r} = r. \tag{II.5}$$

Ces trois équations de (II.5) sont satisfaites si et seulement si les fonctions p, q et r sont réelles et $q = p'$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} Lu &= pu'' + p'u' + ru \\ &= (pu')' + ru. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque L est formellement auto-adjoint, il a la forme

$$L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + r.$$

Et l'équation (II.4) est réduite à

$$< Lu, v >=< u, Lv > +p(u'\bar{v} - u\bar{v}')|_a^b. \tag{II.6}$$

En comparant les équations (II.3) et (II.6), on trouve que l'opérateur L est auto-adjoint si

$$p(u'\bar{v} - u\bar{v}')|_a^b = 0, \qquad u, v \in \mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I). \tag{II.7}$$

Remarque II.1.1. *Lorsque $q = p'$, le terme $\bar{p}'' - \bar{q}'$ dans l'expression de L^* disparaît, donc la continuité de p'' et q' n'est plus nécessaire.*

II.2 Problème aux valeurs propres

Nous nous intéressons au problème aux valeurs propres pour l'opérateur $-L$, c'est-à-dire aux solutions de l'équation

$$Lu + \lambda u = 0. \tag{II.8}$$

Lorsque $u = 0$, cette équation est bien sûr satisfaite pour chaque valeur de λ.

Lorsque $u \neq 0$, elle peut être satisfaite pour certaines valeurs de λ. Ce sont les valeurs propres de $-L$. Toute fonction $u \neq 0 \in \mathcal{C}^2 \cap L^2$ qui satisfait l'équation (II.8) pour un certain nombre complexe λ est une fonction propre de $-L$ correspondant à la valeur propre λ.

Nous nous référons également aux valeurs propres et fonctions propres de $-L$ en tant que valeurs propres et fonctions propres de l'équation (II.8), comme cette équation est homogène, les fonctions propres de $-L$ déterminées à une constante multiplicative prés. Lorsque des conditions aux limites appropriées sont ajoutées à (II.8), le système résultant est appelé **un problème aux valeurs propres de Sturm Liouville** [3].

L'opérateur $-L$ est auto-adjoint si et seulement si L est auto-adjoint.

Remarque II.2.1. *La raison pour laquelle nous recherchons les valeurs propres de $-L$ plutôt que L est qu'il s'avère que L a des valeurs propres négatives lorsque p est positif.*

Théorème II.2.1. *Si L auto-adjoint, alors les valeurs propres de l'équation*

$$Lu + \lambda u = 0,$$

sont toutes réelles et toutes paires de fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonale dans $L^2(a,b)$.

Démonstration II.2.1. *Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $-L$. Alors il existe une fonction $u \in L^2(a,b) \cap \mathcal{C}^2(a,b)$, $u \neq 0$, telle que*

$$Lu + \lambda u = 0,$$

on a

$$\lambda ||u||^2 =< \lambda u, u >= - < Lu, u > .$$

Comme L auto-adjoint,

$$- < Lu, u >= - < u, Lu >=< u, \lambda u >= \bar{\lambda}||u||^2,$$

d'où

$$\bar{\lambda}||u||^2 = \lambda ||u||^2,$$

car

$$||u|| \neq 0, \bar{\lambda} = \lambda.$$

Si α est une valeur propre de $-L$ associée à la fonction propre $v \in L^2(a,b) \cap \mathcal{C}^2(a,b)$, alors

$$\lambda < u, v >= - < Lu, v >= - < u, Lv >= \alpha < u, v >,$$

ainsi

$$(\lambda - \alpha) < u, v >= 0,$$

et donc

$$\lambda \neq \alpha \Rightarrow < u, v >= 0.$$

Exemple II.2.1. *L'opérateur* $-\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$ *est formellement auto-adjoint avec* $p = -1$ *et* $r = 0$*. pour déterminer ses fonctions propres dans* $\mathcal{C}^2(0, \pi)$*, il faut résoudre l'équation*

$$u'' + \lambda u = 0.$$

Considérons d'abord le cas où $\lambda > 0$*. La solution générale du l'équation est donnée par*

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \tag{II.9}$$

Sous les conditions aux limites

$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

l'équation (II.7) est satisfaite, donc $-(\frac{d^2}{dx^2})$ *est, en fait, auto-adjoint. En appliquant les conditions aux limites à (II.9), on obtient*

$$u(0) = c_1 = 0,$$

et

$$u(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \Longrightarrow \lambda = n^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi les valeurs propres de $-(\frac{d^2}{dx^2})$ *sont données par la suite*

$$(n^2 : n \in \mathbb{N}) = (1, 4, 9, \cdots),$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$(\sin nx; n \in \mathbb{N}) = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots).$$

Remarquons que nous avons choisi $c_2 = 1$ *par souci de simplicité, puisque les conditions aux limites ainsi que l'équation aux valeurs propres sont toutes homogènes. On pourrait aussi diviser chaque fonction propre par sa norme* $||\sin nx|| = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 x dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *pour obtenir les fonctions propres normalisées*

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx : n \in \mathbb{N}\right).$$

Si $\lambda = 0$*, la solution de l'équation différentielle est donne par* $c_1 x + c_2$*, et si* $\lambda < 0$ *elle est donnée par* $c_1 \cosh \sqrt{-\lambda} x + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda} x$*. Dans les deux cas, la demande des conditions aux* *limites* $x = 0$ *et* $x = \pi$ *conduit à la conclusion que* $c_1 = c_2 = 0$.

Mais la solution triviale n'est pas admissible comme fonction propre, donc nous n'avons pas de valeurs propres dans l'intervalle $(-\infty, 0]$. *Les valeurs propres* $\lambda_n = n^2$ *sont des nombres réels, et les fonctions propres* $u_n(x) = \sin nx$ *sont orthogonales sur* $L^2(0, \pi)$ *car, pour tout* $n \neq m$,

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi = 0.$$

Corollaire II.2.1. *Si* $L^2(a,b) \cap \mathcal{C}^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$ *est un opérateur linéaire auto-adjoint et* w *est une fonction poids positive et continue sur* $[a,b]$, *alors les valeurs propres de l'équation*

$$Lu + \lambda wu = 0, \tag{II.10}$$

sont toutes réelles et toute paires de fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $L^2_w(a,b)$.

Remarque II.2.2. *Dans ce corollaire, les valeurs propres et fonctions propres de l'équation (II.10) sont en fait les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur* $-w^{-1}L$.

Définition II.2.1. *Soit* L *un opérateur formellement auto-adjoint de la forme*

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + r(x).$$

L'équation aux valeurs propres

$$Lu + \lambda wu = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{II.11}$$

soumis aux conditions aux limites homogènes séparées

$$B_a(u) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \tag{II.12}$$

$$B_b(u) = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0, \tag{II.13}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ *et* β_2 *sont des constantes réelles, est appelé* ***Problème aux valeurs propres de Sturm Liouville.***

Remarque II.2.3. *1. Comme* L *auto-adjoint sous ces conditions aux limites, nous avons d'après le corollaire*$(II.2.1)$ *que, si elles existent, les valeurs propres de l'équation (II.11) sont réelles et ses fonctions propres sont orthogonales en* $L^2_w(a,b)$. *lorsque l'intervalle borné et que* p *s'annule pas sur* $[a,b]$, *le système d'équations (II.11) à (II.13) est appelé* ***Problème de Sturm Liouville régulier***, *sinon il est* *singulier(c'est-à-dire : si la fonction p s'annule au moins à un point dans l'intervalle* $[a, b]$*, ou elle est discontinue, ou si le problème est défini sur un intervalle non borné).*

2. *Le Problème de Sturm Liouville périodique est représenté par*

$$Lu + \lambda w(x)u = 0 \qquad x \in [a, b]$$

$$u(a) = u(b), u'(a) = u'(b) \tag{II.14}$$

Proposition II.2.1. *L'équation différentiel linéaire du seconde ordre*

$$M(u) = a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = F(x),$$

peut se mettre sous la forme d'un Problème de Sturm Liouville

$$L(u) = (p(x)u')' + r(x)u = f(x).$$

En effet, On pose

$$p(x) = e^{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$$

et on multiplie $M(u)$ *par* $\frac{p(x)}{a_0(x)}$ *on obtient*

$$L(u) = \frac{p(x)}{a_0(x)} M(u) = p(x)u'' + p'(x)u' + \frac{p(x)}{a_0} a_2(x)u$$

$$= (p(x)u')' + r(x)u = f(x)$$

et nous voyons que l'opérateur M *est équivalent à un opérateur Sturm Liouville* L*, avec* $r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)} a_2(x), f(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)} F(x)$.

Proposition II.2.2. *Soient* u_λ *et* v_λ *deux fonctions qui forment une base du sous-espace des solutions de*

$$Lu + \lambda wu = 0 \quad a < x < b$$

$$B_a(u) = B_b(u) = 0$$

Alors λ *est une valeur propre du problème de Sturm Liouville si*

$$\begin{vmatrix} B_a(u_\lambda) & B_a(v_\lambda) \\ B_b(u_\lambda) & B_b(v_\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

II.2.1 Fonction de Green

Fonction de Green pour l'opérateur différentiel auto-adjoint

$$L = p\frac{d^2}{dx^2} + p'\frac{d}{dx} + r,$$

dans les conditions aux limites

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0,$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0,$$

est une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes

1. G est symétrique, c'est à dire $G(x,t) = G(t,x) \quad x,t \in [a,b]$. et G satisfait les conditions aux limites dans chaque variable x et t.
2. G est une fonction continue sur $[a,b] \times [a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b] \times [a,b] \setminus \{(x,t) : x = t\}$, où G satisfait l'équation différentielle

$$L_x G(x,t) = p(x)G_{xx}(x,t) + p'(x)G_x(x,t) + r(x)G(x,t) = 0.$$

3. La dérivée $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ a une discontinuité au point $x = t$ donnée par

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial G}{\partial x}(t^+,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t^-,t) & = & \lim\limits_{\xi \longrightarrow 0^+} [\frac{\partial G}{\partial x}(t+\xi,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-\xi,t)] \\ & = & \frac{1}{p(t)}. \end{array}.$$

Théorème II.2.2. *Il existe une fonction G :$[a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (dite fonction de Green) telle que, pour chaque $f \in \mathcal{C}([a,b])$, la fonction $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ est solution du problème*

$$(P_0) \begin{cases} L(u) = (pu')' + ru = f(t) & sur[a,b] \\ \begin{cases} B_a(u) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ B_b(u) = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

si seulement si,

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

avec

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(x)}{p(t)W[u_1,u_2](t)} = G_1(x,t), & si \quad a \le t < x \\ \frac{u_2(t)u_1(x)}{p(t)W[u_1,u_2](t)} = G_2(x,t), & si \quad x \le t \le b, \end{cases}$$

où u_1 *et* u_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes du problème homogène* $L(u) = (pu')' + ru = 0$ *avec les conditions aux bords* $B_a(u) = 0$ *et* $B_b(u) = 0$.

Démonstration II.2.2. *La solution générale de l'équation différentielle suivante*

$$(p(t)u(t)')' + r(t)u(t) = f(t), \tag{II.15}$$

est de la forme $u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + u_p(t)$. *avec* C_1, C_2 *constantes, et* u_1, u_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène*

$$(p(t)u'(t))' + r(t)u(t) = 0, \tag{II.16}$$

et u_p *est la solution particulière de (II.15). Par la variation de la constante on obtient*

$$u_p(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t), \tag{II.17}$$

v_1, v_2 *sont fonctions à déterminer.*

Dérivons (II.17),

$$u_p'(t) = v_1'(t)u_1(t) + v_1(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2(t) + v_2(t)u_2'(t),$$

il existe des paires infinies de fonctions v_1 *et* v_2 *pour lesquelles* u *satisfait (II.15). on sait que*

$$v_1'(t)u_1(t) + v_2'(t)u_2(t) = 0. \tag{II.18}$$

Alors

$$u_p'(t) = v_1(t)u_1'(t) + v_2(t)u_2'(t),$$

et

$$u_p''(t) = v_1'(t)u_1'(t) + v_1(t)u_1''(t) + v_2'(t)u_2'(t) + v_2(t)u_2''(t).$$

En remplaçant dans l'équation (II.15)

$$\begin{aligned} &v_1(t)[p(t)u_1''(t) + p'(t)u_1'(t) + r(t)u_1(t))] \\ &+v_2(t)[p(t)u_2''(t) + p'(t)u_2'(t) + r(t)u_2(t)] \\ &\quad +p(t)[v_1'(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2'(t)] = f(t). \end{aligned}$$

Comme u_1 *et* u_2 *sont solutions de l'équation homogène (II.16), et en tenant compte de* *l'égalité précédente ($p(t)$ étant positif) on obtient*

$$v_1'(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2'(t) = \frac{f(t)}{p(t)}.$$

Du système

$$\begin{cases} v_1'(t)u_1(t) + v_2'(t)u_2(t) = 0, \\ v_1'(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2'(t) = \frac{f(t)}{p(t)}. \end{cases}$$

On a

$$v_1'(t) = \frac{f(t)u_2(t)}{p(t)W[u_1, u_2](t)}. \tag{II.19}$$

$$v_2'(t) = -\frac{f(t)u_1(t)}{p(t)W[u_1, u_2](t)}. \tag{II.20}$$

Montrons que $W(u_1, u_2)(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Supposons que pour $t_0 \in [a, b]$

$$W[u_1, u_2](t) = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t) = 0,$$

alors le système

$$\begin{cases} a_1u_1(t_0) + a_2u_2(t_0) = 0 \\ a_1u_1'(t_0) + a_2u_2'(t_0) = 0 \end{cases}.$$

a une solution non trivial, car $a_1, a_2 \neq 0$.

Donc la fonction $f(t) = a_1u_1(t) + a_2u_2(t)$ est solution du problème

$$\begin{cases} (p(t)u'(t))' + r(t)u(t) = 0 \\ f(t_0) = f'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Mais ce problème n'a qu'une solution triviale. donc $f = 0$, cela signifie que u_1 et u_2 sont linéairement dépendantes ($u_1 = Cu_2$ avec C constante) .

Par conséquent, u_1 satisfait à la fois les conditions aux limites $B_a(u_1) = 0$, et $B_b(u_1) = 0$, contradiction avec l'hypothèse, donc $W[u_1, u_2](t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, Comme $W[u_1, u_2] \neq 0$, $p(t) > 0$ et $p(t)W[u_1, u_2] =$ constante et différent à zéro, alors $C = \frac{1}{p(t)W[u_1,u_2](t)} \neq 0$.

En intégrant (II.19) et (II.20) on obtient

$$v_1(x) = \int_a^x Cu_2(t)f(t)dt,$$
$$v_2(x) = -\int_b^x Cu_1(t)f(t)dt,$$

cela donne finalement

$$\begin{aligned}
u_p(x) &= v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \\
&= u_1(x)\int_a^x Cu_2(t)f(t)dt - u_2(x)\int_b^x Cu_1(t)f(t)dt \\
&= \int_a^x \frac{u_1(t)u_2(x)f(t)}{p(t)W[u_1,u_2](t)}dt + \int_x^b \frac{u_2(t)u_1(x)f(t)}{p(t)W[u_1,u_2](t)}dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on définit la fonction de Green comme

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(x)f(t)}{p(t)W[u_1,u_2](t)} = G_1(x,t), & si \quad a \leq t \leq x \\ \frac{u_2(t)u_1(x)f(t)}{p(t)W[u_1,u_2](t)} = G_2(x,t), & si \quad x \leq t \leq b \end{cases}.$$

On peut alors écrire

$$u_p(x) = \int_a^x G_1(x,t)f(t)dt + \int_x^b G_2(x,t)f(t)dt = \int_a^b G(x,t)f(t)dt.$$

Exemple II.2.2. *Soit le problème à deux points suivants*

$$\begin{cases} u''(t) = f(t) & pour \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases},$$

on a $r(t) = 0, p(t) = 1$ *le problème homogène associé est*

$$\begin{cases} u''(t) = 0 & pour \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

d'où $u''(t) = 0 \rightarrow u(t) = \alpha t + \beta$ *avec les conditions aux limites on a*

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

par conséquent la seule solution du problème homogène est $u \equiv 0$*, donc la fonction de Green existe,*

$$Pour \quad \begin{cases} u''(t) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(t) = \alpha t + \beta \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad pour\ \alpha = 1 \quad on\ a \quad u_1(t) = t.$$

Pour $\begin{cases} u''(t) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(t) = \alpha t + \beta \\ \alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = -\beta \end{cases}$ *pour* $\alpha = 1, \beta = -1$ *on a* $u_2(t) = t - 1.$

Vérifions que u_1 *et* u_2 *sont linéairement indépendante, en effet*

$$W(t, u_1, u_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

D'où la fonction de Green est définie par

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1) & 0 \leq t \leq x \\ x(t-1) & x \leq t \leq 1 \end{cases} = G(t,x) = \begin{cases} x(t-1) & 0 \leq x \leq t \\ t(x-1) & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

finalement la solution est donnée par

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G(x,t) f(t) dt \\ &= \int_0^x t(x-1) f(t) dt + \int_x^1 x(t-1) f(t) dt. \end{aligned}$$

II.3 Les propriétés générales des Problèmes de Sturm Liouville

Propriété II.3.1. *[2] Soit L l'opérateur de Sturm Liouville*

$$L(u) = (p(x)u')' + r(x)u.$$

Alors L est un opérateur symétrique, c'est-à-dire $< Lu, v >=< Lv, u >$.

Démonstration II.3.1. *Pour* $u, v \in \mathcal{C}^2(a,b)$, *on a :*

$$\begin{aligned} < Lv, u > - < Lu, v > &= u(pv')' + uqv - v(pu')' - vru \\ &= (upv')' - u'pv' - (vpu')' + u'pv'. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$< Lv, u > - < Lu, v >= [p(uv' - vu')]'. \tag{II.21}$$

Cette égalité est appelée ***Identité de Lagrange.***

Par intégration de l'équation (II.21) sur l'intervalle $[a, b]$ *on trouve*

$$\int_a^b < Lv, u > - < Lu, v > dx = [p(uv' - vu')]_a^b.$$

Supposons que u *et* v *vérifient les conditions aux limites (II.12) et (II.13) dans le cas régulier, ou (II.14) dans le cas périodique. alors, il est claire que*

$$[p(uv' - vu')]_a^b = 0.$$

Par conséquent, pour tels u *et* v*, nous avons*

$$\int_a^b < Lv, u > - < Lu, v > dx = 0. \tag{II.22}$$

Propriété II.3.2. *Soient* u *et* v *deux fonctions propres associées aux valeurs propres* λ_n *et* λ_m *respectivement, avec* $\lambda_n \neq \lambda_m$*. Alors*

$$< u, v >_w = 0.$$

Démonstration II.3.2. *Soient* u *et* v *deux fonctions propres associées aux valeurs propres* λ_n *et* λ_m *d'où*

$$-Lu = \lambda_n wu. \tag{II.23}$$

$$-Lv = \lambda_m wv. \tag{II.24}$$

De plus, u *et* v *vérifient les conditions aux limites (II.12) et (II.13). En multipliant (II.23) par* v *et (II.24) par* u*, en intégrant sur* $[a, b]$*, puis en prenant la différence entre les deux équations ainsi obtenues, on trouve*

$$-\int_a^b (< Lu, v >_w - < Lv, u >_w)dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b u(x)v(x)w(x)dx.$$

Puisque u *et* v *vérifient les conditions aux limites (II.12) et (II.13), nous pouvons utiliser l'expression (II.22) pour déduire que*

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b u(x)v(x)w(x)dx = 0.$$

Mais $\lambda_n \neq \lambda_m$*, Alors* $< u, v >_w = 0$.

Propriété II.3.3. *Un Problème de Sturm Liouville régulier n'admet que des valeurs propres réelles.*

De plus, cette proposition est valable dans le cas périodique et aussi dans le nombreux cas singuliers.

Démonstration II.3.3. *Supposons que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre non réelle avec une fonction propre* u*. Alors*

$$(pu')' + ru + \lambda wu = 0, \tag{II.25}$$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \tag{II.26}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \tag{II.27}$$

Rappelons que les coefficients de (II.25)-(II.27) sont tous réels. En formant le conjugué complexe de (II.25)-(II.27), et en échangeant l'ordre de conjugaison et de différentiation, nous obtenons

$$\overline{Lu + \lambda wu} = L\bar{u} + \bar{\lambda} w\bar{u} = 0,$$

$$\alpha_1 \bar{u}(a) + \alpha_2 \bar{u}'(a) = 0,$$

$$\beta_1 \bar{u}(b) + \beta_2 \bar{u}'(b) = 0.$$

Par conséquent, $\bar{u}$ *est une fonction propre avec une valeur propre* $\bar{\lambda}$ *Par notre hypothèse* $\lambda \neq \bar{\lambda}$ *et par la propriété* $(II.3.2)$ *nous avons*

$$0 =< \bar{u}, u >_w = \int_a^b \bar{u}(x)u(x)w(x)dx = \int_a^b |u(x)|^2 w(x)dx.$$

En revanche, puisque $u \neq 0$ *et* $w(x) > 0$ *sur* $[a, b]$*, il s'ensuit que*

$$\int_a^b |u(x)|^2 w(x)dx > 0,$$

ce qui conduit à une contradiction.

Propriété II.3.4. *Un Problème de Sturm Liouville régulier n'admet que des valeurs propres simples.*

Démonstration II.3.4. *Soient* u *et* v *deux fonctions propres associées à la même valeur propre* λ*. Alors*

$$Lu = -\lambda wu,$$

$$Lv = -\lambda wv,$$

Donc

$$< Lu, v >_w - < Lv, u >_w = 0.$$

D'aprés l'identité de Lagrange

$$< Lu, v >_w - < Lv, u >_w = [p(vu' - uv')]',$$

par conséquent

$$u(x) = p(vu' - uv') = constante.$$

D'autre part, on a les deux fonctions qui vérifient les mêmes conditions aux limites régulières, pour cette raison on a

$$u(a) = u(b) = 0,$$

et puisque p *est une fonction positive sur tout l'intervalle fermé* $[a, b]$*, il s'ensuit que le Wronskien*

$$W = vu' - uv',$$

s'annule aux extrémités. On rappelle que u *et* v *sont des solutions de la même équation différentielle ordinaire linéaire, et donc le Wronskien est identique à zéro.*

Par conséquent, les fonctions u *et* v *sont linéairement dépendantes.*

Propriété II.3.5. *Soit un problème de Sturm Liouville régulier pour lequel* $q(t) \geq 0$*, alors ce admet une infinité des valeurs propres* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_i < \cdots$ *avec* $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} \lambda_i = +\infty$*.*

Propriété II.3.6. *Soit* $\{u_n\}$ *un système de fonctions propres de problème de Sturm Liouville orthogonales est dite* ***complet*** *dans* $[a, b]$ *si, pour chaque fonction continue par morceaux* $f(x)$ *dans l'intervalle fermé* $[a, b]$*,*

$$\lim_{m \to +\infty} \int_a^b [f(x) - \sum_{n=1}^{m} a_n u_n(x)]^2 w(x) dx = 0.$$

Définition II.3.1. *Soit le système orthonormé* $\{u_n\}$ *de toutes les fonctions propres de problème de Sturm Liouville par rapport à la fonction poids* $w(x)$ *sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et soit* f *une fonction arbitraire.*

Considérons le problème de développement de $f(x)$ *en série de Fourier de fonctions orthonormales* $u_1, u_2, \cdots$*, on a pour toute* $x \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(x). \tag{II.28}$$

On veut déterminer les a_n*. en multipliant par* $u_m w(x)$ *et en intégrant de* a *à* b*, on obtient*

$$\int_a^b f(x) u_m(x) w(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_a^b u_n(x) u_m(x) w(x) dx,$$

et

$$\int_a^b u_n(x)u_m(x)w(x)dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}.$$

Où

$$a_n = \int_a^b f(x)u_n(x)w(x)dx \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{II.29}$$

La série (II.28) de coefficients a_n donnée par (II.29) est dite ***la série de Fourier généralisé****(ou simplement série de Fourier) d'une fonction f par rapport au système orthonormale $\{u_n\}$ de toutes les fonctions propres d'un problème de Sturm Liouville.*

II.4 Problème de Sturm Liouville non homogène

Considérons le problème non homogène de Sturm Liouville [2]

$$Lu(x) = (p(x)u')' + r(x)u + \lambda w(x)u = f(x),$$

avec conditions aux limites

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ &\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{aligned}.$$

Supposons λ_n et u_n et sont les valeurs propres et les fonction propres du problème homogène

$$(p(x)u')' + r(x)u + \lambda w(x)u = 0$$

avec les mêmes conditions aux limites.

Supposons que nous puissions écrire $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n u_n(x)$, puisque $Lu_n(x) = 0 \rightarrow (p(x)u_n')' + r(x)u_n + \lambda_n w(x)u_n = 0$.

Nous avons

$$(p(x)u_n')' + r(x)u_n + \lambda w(x)u_n = (\lambda - \lambda_n)w(x)u_n,$$

ainsi on obtient

$$Lu(x) = f(x) \Longrightarrow (p(x)u')' + r(x)u + \lambda w(x)u = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n[(p(x)u_n')' + r(x)u_n + \lambda w(x)u_n] = f(x)$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\lambda - \lambda_n)w(x)u_n.$$

i.e. si $\frac{f(x)}{w(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n$, alors $a_n = b_n(\lambda - \lambda_n)$.

Les coefficients a_n dans développement de fonction propre de $\frac{f(x)}{w(x)}$ sont obtenus comme d'habitude par

$$a_n = \frac{\int_a^b (\frac{f(x)}{w(x)}) u_n(x) w(x) dx}{\int_a^b u_n(x)^2 w(x) dx} = \frac{\int_a^b f(x) u_n(x) dx}{\int_a^b u_n(x)^2 w(x) dx}.$$

Exemple II.4.1. *Considérons le problème de Sturm Liouville non homogène suivant*

$$u''(x) + \lambda u(x) = x, \quad u(0) = 0, u(1) = 0.$$

Le problème homogène correspondant

$$u''(x) + \lambda u = 0$$

a des valeurs propres $\lambda_n = (n\pi)^2$ *et des fonctions propres* $u_n(x) = \sin(n\pi x)$. *L'expansion de la valeur propre est la série de Fourier sur l'intervalle* $[0, 1]$. *On a*

$$a_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1},$$

et

$$b_n = \frac{2}{n\pi(2 - n^2\pi^2)}(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

La solution est donnée par

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

Chapitre III

Applications de Problème de Sturm Liouville

Dans ce chapitre on va présenter quelques application sur les problème de Sturm Liouville, nottamment l'équation de Laguerre, l'équation d'Hermite et l'équation d'ordre deux.

III.1 Équation de Laguerre

L'équation différentielle de Laguerre s'écrit sous la forme

$$x\frac{d^2u}{d^2x} + (1-x)\frac{du}{dx} + \lambda u = 0, \qquad 0 < x < +\infty. \tag{III.1}$$

Théorème III.1.1. *L'équation de Laguerre (III.1) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre* 2 *et se réécrit sous la forme d'un problème de Sturm Liouville*

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{du}{dx}\right] + \lambda e^{-x}u = 0, \tag{III.2}$$

pour tout x dans $(0, +\infty)$.

De ce théorème, cette équation a des solutions non singulières seulement si λ est un entier positive. nous concluons que toutes les caractéristiques de l'opérateur de Sturm Liouville sont satisfaites pour les valeurs propres de l'équation (III.2) et pour les fonctions propres liès. nous appliquons la méthode de Frobenius et pour $a_0 = 1$ on définit la solution standard qui est le polynôme de Laguerre d'ordre n noté $L_n(x)$ par

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r.$$

En remarquant que les valeurs propres $\lambda_n = n$ sont réelles et les polynômes de Laguerre L_n sont réelles et distincts pour chaque valeur propre.

les polynômes de Laguerre forment donc une base orthogonale dans l'espace $L^2_{e^{-x}}(0, \infty)$, qu'on peut exprimer à l'aide de la **Formule de Rodrigues** suivante.

Théorème III.1.2. ***(la Formule de Rodrigues*** *) pour $n \in N$ on peut définir les polynômes de Laguerre par la relation*

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}].$$

Démonstration III.1.1. *En utilisant la formule de Leibniz (la dérivation de produit) donné par*

$$\frac{d^n}{dx^n}(ab) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{d^{n-r}a}{dx^{n-r}}\frac{d^r b}{dx^r} \text{ pour tout } a, b > 0$$

on a

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}x^n \frac{d^r}{dx^r}e^{-x},$$

mais pour $p < q$

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dx^p}x^q &= q(q-1)\cdots(q-p+1)(q-p)x^{q-p}\\ &= \frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}x^n &= \frac{n!}{r!}x^r\\ \frac{d^r}{dx^r}e^{-x} &= (-1)^r e^{-x},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] &= \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x}\\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r\\ &= L_n(x).\end{aligned}$$

Théorème III.1.3. *Les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ admettent la fonction génératrice suivante*

$$w(x,t) = \frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t},$$

c'est à dire

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n.$$

Démonstration III.1.2. *En utilisant le Développement de Taylor, on a*

$$\begin{aligned}\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} &= \frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r t^r}{r!}(\frac{1}{1-t})^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r t^r}{r!}(\frac{1}{1-t})^{r+1},\end{aligned}$$

mais

$$(\frac{1}{1-t})^{r+1} = \frac{1}{0!} + \frac{(r+1)t}{1!} + \frac{(r+1)(r+2)t^2}{2!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(r+s)!}{r!s!}t^s.$$

Alors

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r t^r x^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(r+s)!t^s}{r!s!}.$$

prenons $n = r + s \Longrightarrow s = n - r$ *et* $r = n - s$ *d'où*

$$\begin{aligned}\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r n! x^r}{(r!)^2(n-r)!})t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n.\end{aligned}$$

Théorème III.1.4. *[10] La famille de polynôme de Laguerre est orthonormée dans* $L^2_{e^{-x}}(0,\infty)$ *c'est à dire*

$$\langle L_n(x), L_r(x)\rangle_{e^{-x}} = \int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_r(x)dx = \delta_{n,r} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}.$$

Démonstration III.1.3. *D'après le théorème de la fonction génératrice, nous avons*

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n,$$

et

$$\frac{\exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right)}{1-s} = \sum_{r=0}^{\infty}L_r(x)s^r,$$

on peut en déduire que

$$\sum_{n,r=0}^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_r(x)t^n s^r = e^{-x}\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t}\frac{\exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right)}{1-s},$$

donc $\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_r(x)dx$ *est le coefficient de* $t^n s^r$ *dans l'expression .*

Calculons l'intégrale suivante

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} \frac{\exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right)}{1-s} dx \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty \exp\left[-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})\right] dx \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[-\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}} \exp\{-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})\}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{1-st} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n.
\end{aligned}
$$

Ainsi le coefficients de $t^n s^r$ est 1 si $n = r$ et 0 si $n \neq r$.

III.1.1 Série de Fourier Laguerre

L'ensemble de polynômes de Laguerre $\{u_n(x) = L_n(x), n = 0.1 \cdots\}$ est orthogonal relativement à la fonction poids $w(x) = e^{-x}$ sur $[0, \infty]$. c'est à dire

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_r(x) dx = \delta_{n,r} = \begin{cases} 0 & n \neq r \\ 1 & n = r \end{cases} .$$

pour toute fonction continue par morceaux $f(x)$ sur $(0, +\infty)$ la série de Fourier Laguerre est donnée par comme[1]

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x),$$

où

$$a_n = \int_{-1}^{1} e^{-x} L_n(x) L_r(x) dx, \qquad n \geq 0.$$

III.2 Équation d'Hermite

L'équation différentielle de Hermite s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2\lambda u = 0, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{III.3}$$

Théorème III.2.1. *L'équation de Hermite (III.3) est une équation différentielle linaire homogène d'ordre 2 et se réécrit sous la forme d'un problème de Sturm Liouville*

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}\frac{du}{dx}] + 2\lambda e^{-x^2} u = 0,$$

pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Nous appliquons la méthode de Frobenius et pour $a_n = 2^n$ on définit la solution standard qui est le Polynôme de Hermite d'ordre n noté $H_n[x]$

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}n]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r},$$

On remarque que les valeurs propres $\lambda_n = 2n$ sont réelles et les polynômes Hermite H_n sont trivialement réelles et distincts pour chaque valeur propre.

Théorème III.2.2. *la fonction génératrice des polynômes de Hermite est*

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

Démonstration III.2.1. *On a*

$$\begin{aligned} e^{2tx-t^2} &= e^{2tx}e^{-t^2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2tx)^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^s}{s!} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^r x^r}{r!s!} t^{r+2s}. \end{aligned}$$

On prend $n = r + 2s$ ie $r = n - 2s$ et puisque $r = n - 2s \geq 0$ alors $s \leq \frac{n}{2}$ et par la suite

$$\begin{aligned} e^{2tx-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^s \frac{2^{n-2s} x^{n-2s}}{(n-2s)!s!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \end{aligned}$$

Théorème III.2.3. ***(la Formule de Rodrigues)*** *pour $n \in \mathbb{N}$ on peut définir les polynômes de Hermite $H_n(x)$ par la relation*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}].$$

Démonstration III.2.2. *pour la preuve, on rappelle la fonction génératrice de $H_n(x)$ par*

$$\exp(2tx - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x),$$

et on utilisons le développement limité de Taylor

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{d^n E}{dt^n}) \frac{t^n}{n!},$$

on a

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2-(x-t)^2}\right]_{t=0} \\ &= e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}. \end{aligned}.$$

Mais $\dfrac{\partial}{\partial t} g(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} g(x-t)$, *ainsi*

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} g(x-t) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x-t).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathrm{e}^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} \\ &= (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \\ &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Théorème III.2.4. *La famille des polynômes de Hermite est orthogonal dans* $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

Démonstration III.2.3. *On a*

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad et \quad e^{-s^2+2sx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x),$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx \\ &= e^{-(t^2+s^2)} e^{(s+t)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-(s+t))^2} dx. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $v = x - (s+t)$ *on obtient*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = e^{2ts} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dx = e^{2st} \sqrt{\pi}.$$

Car une intégrale de Gauss est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur l'ensemble des réels. sa valeur est reliée à la constante π *par la formule*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Alors

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!}.$$

Donc par identification, on en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \begin{cases} 0 & si \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & si\ n = m \end{cases}.$$

Théorème III.2.5. *Pour tout entier positif* n*, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

et donc, la famille $\sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$ *est une famille orthonormée, et la constante* $\sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$ *est dite la constante de normalisation .*

Démonstration III.2.4. *on a*

$$\begin{aligned} ||H_n||^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{d^n}{dx^n} H_n(x)] e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

car

$$(-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} H_n(x) dx = (-1)^{m-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2} H_n^{(n)}(x) dx,$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} H_n(x) &= \frac{2^n n!}{(n-m)!} H_{n-m} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! e^{-x^2} dx \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (\ car\ 0! = 1\ \ et\ H_0 = 1) \\ &= 2^n n! \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

III.2.1 Série de Fourier Hermite

L'ensemble de polynôme de Hermite $\{u_n = H_n(x), n = 0, 1, \cdots\}$ est orthogonal relativement à la fonction poids $w(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

pour tout fonction continue par morceaux $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ la série de Fourier Hermite apparait comme [1]

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x),$$

où

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx, \qquad n \geq 0.$$

III.3 Équation d'ordre deux

Soient les équations différentielles partielles, de la chaleur [17]

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0 \tag{III.4}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad & 0 < x < l \end{aligned}$$

Où $u(x,t)$ est la température dans un conducteur d'une dimension. la valeur $u(x,t)$ dépend du temps $t \geqslant 0$ et de la position x. et c une constante positive donnée .

Et l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < l; \qquad t > 0 \tag{III.5}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad & 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad & 0 < x < l \end{aligned} \tag{III.6}$$

Où l'équation (III.5) exprime les vibrations transversales d'un fil idéal qui court entre deux points fixes $x = 0$ et $x = l$, et $u(x, t)$ décrit le déplacement de ce fil au point x à l'instant t, et la dernière condition de (III.3) représente la vitesse initiale .

Et on a aussi l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial u^2}(x,t) \qquad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Avec les conditions

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < l.$$

Selon la méthode de séparation des variables, on suppose que la solution est de la forme suivante

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{III.7}$$

Par différentiation de (III.7) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (III.4), on obtient

$$XT'(t) = cX''(x)T(t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

d'où

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{cX''(x)}{X(x)}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appellée constante de séparation) telle que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{cX''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{III.8}$$

Comme on cherche des solutions qui ne s'annulent pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$ par consequent, on obtient

$$\begin{cases} u(0,T_0) = X(0)T(t_0) = 0 \\ u(l,t_0) = X(l)T(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(0) = X(l) = 0.$$

L'équation (III.8) conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{III.9}$$

Et

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0. \tag{III.10}$$

Ces deux problèmes (III.9) et (III.10) correspondent à un problème de Sturm Liouville que nous recherchons les solutions non nulles.

Souvent, la nature de la solution du problème de Sturm Liouville, dépend du signe de λ, nous considérons donc trois cas

1^{er} **Cas** ($\lambda < 0$), écrivons $\lambda = -\beta^2$, où $\beta > 0$ l'équation prendra la forme

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \beta^2 X = 0,$$

et sa solution générale est

$$X(x) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x.$$

Par la condition au limite $X(0) = 0$ on trouve $k_2 = 0$, par $X(l) = 0$, nous trouvons $k_1 \sin \beta l = 0$, mais $\sin \beta l \neq 0$ sauf pour $l = 0$, nous en déduisons que $k_1 = 0$. Alors pour $\lambda < 0$ la seule solution c'est $x \equiv 0$.

$2^{éme}$ **Cas** ($\lambda = 0$) Ici la solution générale de l'équation différentielle est

$$X(x) = k_1 x + k_2,$$

Les conditions aux limite donne $k_1 = k_2 = 0$. Donc, la seule solution est la solution nulle.

$3^{éme}$ **Cas** ($\lambda > 0$), écrivons $\lambda = \beta^2$ où $\beta > 0$. l'équation devient

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \beta^2 X = 0,$$

et sa solution générale est de la forme

$$X(x) = k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x.$$

De $X(0) = 0$ on a $k_1 = 0$, donc

$$X(x) = k_2 \sin \beta x$$

Par la deuxième condition aux limite on obtient $k_2 \sin \beta l = 0$, mais les solutions recherchées sont les solutions non nulles, donc nous prenons $k_2 \neq 0$, d'où $\sin \beta l = 0$.

et donc

$$\beta = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

et les λ_n sont les valeurs propres du problème (III.9). Les fonctions propres associés sont alors

$$X_n = k_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Il est évident que les valeurs propres sont réelles. De plus, à chaque valeur propre correspond une seule fonction propre.

Remarque III.3.1. *On choisit $k_n = 1$ pour tout n pour simplicité, car nous pouvons avoir des fonctions propres juste par multiplication par une constante.*

Proposition III.3.1. *Les fonctions propres de problème $(III.9)$ associées à des valeurs propres distincts sont orthogonales.*

De plus, on a la constante de normalisation $K = \frac{l}{2}$.

Démonstration III.3.1. *pour la preuve on va démontrer que pour tout $n \neq r$ on a*

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{r\pi x}{l} dx = 0,$$

Par intégration sur $[0, l]$ on a

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{r\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l (\cos \frac{(n+r)\pi x}{l} + \cos \frac{(n-r)\pi x}{l}) dx$$

$$= \frac{1}{2} [\frac{l}{(n+r)\pi} \sin \frac{(n+r)\pi x}{l} - \frac{l}{(n-r)\pi} \sin \frac{(n-r)\pi x}{l}]_0^l$$

$$= 0.$$

Maintenant pour la constante de normalisation on rappelle que $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^l (\sin \frac{n\pi x}{l})^2 dx &= \int_0^l \frac{1 - \cos 2(\frac{n\pi x}{l})}{2} \\
&= \left[\frac{x}{2}\right]_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{2n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{l}{2} - \frac{1}{2} [\frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l}]_l^0 \\
&= \frac{l}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, Nous avons étudié quelques propriétés principales du Problème de Sturm Liouville.

Premièrement, nous avons montré que toutes les équations différentielles ordinaires homogènes du second ordre peuvent être mises sous la forme d'un problème de Sturm Liouville. puis nous avons indiqué les propriétés principales avec leurs preuves .

Nous avons clôturé ce mémoire avec quelques équations tirées de la physique qui expriment certains phénomènes naturels, et on a vérifié certaines des propriétés que nous avons prouvé précédemment, on a utilisé les valeurs propres et les fonctions propres du problème de Sturm Liouville.

Bibliographie

[1] *R.P.Agarwal.D.O'Regan,Ordinary and Partial Differential Equations,With Special Functions,Fourier Series,and Boundary Value Problems,Springer,2008.*

[2] *W.AIPING,S.JIONG,H.XIAOLING,Y.SIQIN,Completeness of eigenfunctions of Sturm Liouville Problems with transmission conditions,International Press,Vol.16,No.3,2009.*

[3] *M.A.AL-Gwaiz,Sturm-Liouville Theory and its Applications,Springer,2007.*

[4] *W.W.Bell, Special functions for scientists and engineers,Van Nostrand,1968.*

[5] *Birkhoff,G.and G.-C. Rota,Ordinary Differential Equations,2nd edn.,John Wiley,New York,1969.*

[6] *W.Cheney,D,Kincaid,Linear Algebra Theory and Applications,Jones and Bartlett,2009.*

[7] *Coddington,E.A.and N.Levinson,Theory of Ordinary Differential Equations,McGraw-Hill,New York,1955.*

[8] *Courant,R.and F.John,Introduction to Calculus and Analysis,vol.II,John Wiley,New York,1974.*

[9] *S.Djebali, Problème aux limites associés aux EDO du second ordre, cours polycopié.E.N.S.-Kouba,2006.*

[10] *C.F.Dunkl,Yuan Xu, Orthogonal Polynomials of Several Variables,Cambridge University Press,2014.*

[11] *N.El Hage Hassan, Topologie et espaces normés,Dunod.2011.*

[12] *A.R.Forsyth-Theory of Differential Equations,Vol3,Part2,University of Michigan Library,2005.*

[13] *I.Gohberg.S.Goldberg,Basic Operator Theory,Birkhauser,1981.*

[14] *P.Grisvard ,Calcul différentiel et équations différentielles,O.P.U.1980.*

[15] *R.B.Guenther, J.W.Lee,Sturm-Liouville Problems,Theory and Numerical Implementation,CRC Press,2018.*

[16] *Ince.,E.L,Ordinary Differential Equations,Dover,New York,1956.*

[17] *John,F.,Partial Differential Equations, 4th edn ,Springer,New York , 1982.*

[18] *R.S.Johnson Second-order ordinary differential equations Special Functions,Sturm-Liouville theory and transforms.*

[19] *J.C.Robinson,An Introduction to Ordinary,Cambridge University Press,2004.*

[20] *Rudin,W., Principles of Mathematical Analysis,McGraw-Hill,New York,1964.*

[21] *L.E.Ting,Sturm Liouville theory ,Theses Digitization Project.1206,1996.*