الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département mathématiques et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en :mathématiques
Domaine : mathématiques et informatique
Filière : mathématique
Spécialité : Equations différentielles et modélisation

Thème

Sur la stabilisation de systèmes linéaires dans des espaces de Hilbert

Présenté Par : Dounia KADA-MAHAMMED

Devant le jury composé de :

Mr. Toufik Mami	Pr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mr. Hamid Khiar	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Mr. Mohamed Hariri	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadreur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le professeur Mohamed Hariri d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire , ses conseils , son aide précieux, sa gentillesse ,et son enthousiaste. Mes remerciements pour les membres du jury qui ont accepté d'examiner et d'évaluer mon travail

K. DOUNIA.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents, ma famille et à toute la promotion du Master Analyse Mathématique.

K. DOUNIA.

Résumé

Pour les systèmes dynamiques qui décrivent divers processus mécaniques, technologiques, économiques ou autres, la stabilité constitue une propriété qualitative fondamentale. L'étude de cette proprieté depuis Lyapunov a connu des développement considérables [3, 6].

Le système dynamique est stable (au sens de Lyapunov) si le comportement de ce système varie peu étant soumis à de petites perturbations. Si de plus ces variations s'estompent avec le temps, on parle alors de stabilité asymptotique ; Quand il s'agit de processus de contrôle donc soumis à des commandes, on parle dans ce cas de stabilisation.

Nous consacrons le présent travail à la stabilisation de systèmes linéaires contrôlés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Mots clés. Stabilité (au sens de Liapounov), stabilisation, théorie des semi-groupes, théorie spectrale, espaces de Hilbert, systèmes linéaires.

Principales notations utilisées

1. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'espace de Hilbert de tous les opérateurs linéaires bornés.
2. $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ des espaces dans $\mathcal{H}$.
3. $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ sons-espace de Hilbert.
4. I : opérateur d'identité.
5. $\mathbb{C}$: nombres complexes.
6. $\mathbb{C}^-$: demi-plan ouvert dans $\mathbb{C}$, $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$
7. $\sigma(T)$: spectre de opérateur T.
8. $\langle ., . \rangle$ produit scalaire de $\mathcal{H}$.
9. $||x|| = \sqrt{\langle ., . \rangle}$ norme de $x \in \mathcal{H}$.
10. P : opérateur de projection orthogonale de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$.
11. $Q = I - P$.
12. La restriction des opérateurs A. i.e., $A \mid_{D_k} = A_k$, $D_k \subset \mathcal{H}$, $k = 1, 2$.

Table des matières

Introduction

Le mémoire présenté s'intéresse à la théorie spectrale des opérateurs et son application à la théorie de stabilité et stabilisation au sens de Liaponov dans des espaces de Hilbert.

Ce mémoire se compose d'une introduction, de trois chapitres et d'une liste bibliographique de seize titres.

Dans le premier chapitre on rappelle les outils de base de la théorie spectrale élémentaire et la notion de stabilité [1, 5]. Le deuxième chapitre est consacré aux résultats de stabilisation en utilisant les approches de décomposition spectrale de l'espace et de systèmes [15, 16] .

Dans le dernier chapitre on va étendre les conditions nécessaires et suffisantes de stabilisations exponentielle, forte et faible pour les systèmes linéaires[4].

Rappelons que pour un système linéaire dont le comportement est décrit par l'équation :

$$x'(t) = Ax(t), \;\; t \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 sur $\mathcal{H}$ [2]. Le système (1) est asymptotiquement (exponentiellement) stable si est seulement si le spectre de l'opérateur A [3] vérifie :

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \;\; Re\lambda < 0\}.$$

Si on considère dans $\mathcal{H}$ un système linéaire contrôlé décrit par l'équation :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \;\; u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{H}. \tag{2}$$

où A et B sont des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et pour tout contrôle $u(t) \in \mathcal{H}$ tel que : $u(t) = Dx(t)$ (i.e, une commande en boucle fermée) tel que le système (2) obtenue :

$$x'(t) = (A + BD)x(t); t \geq 0. \tag{3}$$

soit asymptotiquement (exponentiellement) stable, on est intéressé par les conditions d'existence d'un opérateur linéaire lié à l'état du système : $D : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que l'opérateur en boucle fermé $A+BD$ soit le générateur d'un C_0 semi-groupe asymptotiquement (exponenetiellement) stable.

On distinguera différents types de stabilisation exponentielle : forte et faible, car en dimension infinie le comportement asymptotique est plus complexe. Dans le cas ou B est borné, il y a trois résultats principaux sur les conditions de stabilisation d'un système linéaire :

• Des conditions qui demandent des propriétes sur la structure de l'opérateur A (décomposition spectrale).

• Des conditions qui font intervenir la notion de contrôlabilité (décomposition canonique).

• Des conditions faisant intervenir l'équation de Lyapunov.

Dans ce travail, on essayera de faire des généralisations de ces résultats au cas où B est non borné, on s'intéressera particulierement à la décomposition spectrale.

Dans le premier chapitre on fait des rappels de certaines notions utilisées par la suite.

Le deuxième chapitre est consacré aux résultats de stabilisation exponentielle liés à la décomposition spectrale ; C'est en fait une généralisation des résultats de Rabah Rabah [11] dans le cas explicite.

Dans le dernier chapitre, on examinera les conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation exponentielle (forte et faible) dans le cas explicite. En introduisant une classe de Salamon et Curtain [4] de système (2).

Chapitre Premier

Notions préliminaires

Définition 1.0.1. *[5, 9]. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur le corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme* ***sesquilinéaire*** *sur $\mathcal{H}$, toute application $u : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$:*

1. $u(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha u(x_1, y) + \beta u(x_2, y)$.
2. $u(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} u(x, y_1) + \overline{\beta} u(x, y_2)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors u devient une forme bilinéaire.

Définition 1.0.2. *On appelle un* ***espace préhilbertien*** *tout espace vectoriel $\mathcal{H}$ muni de la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle_{\mathcal{H}}$ suivante*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathcal{H}}} \quad (x \in \mathcal{H}).$$

Définition 1.0.3. *On appelle espace* ***de Hilbert*** *(ou* ***hilbertien****) tout espace préhibertien complet.*

Exemple 1.0.4.

1. *$\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire*
   où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, est un espace de Hilbert de dimension finie.
   $$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$
2. *$l^2(\mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire*
   $$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_n}$$
   est un espace de Hilbert de dimension infinie.

La théorie des opérateurs joue un rôle important en analyse et surtout en équations différentielles et équations aux dérivées partielles.

Dans ce travail, toute application linéaire d'un espace vectoriel normé $\mathcal{H}_1$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $\mathcal{H}_2$ est dite **opérateur** [9].

Définition 1.0.5. *[5, 14]. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ est dit **inversible** s'il est bijectif et son inverse A^{-1} est continu.*

Dans toute la suite on va considérer deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.0.6. *On appelle adjoint de $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'application $u^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ (noté u^*) définie par :*

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2, \langle u(x), y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, u^*(y)\rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

L'application u^* est linéaire.

Théorème 1.0.7. *[1].*
Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux $\mathbb{K}$-espaces de Hilbert. Alors,

1. *Tout opérateur u de $\mathcal{L}_c\ (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ admet un adjoint unique u^* dans $\mathcal{L}_c\ (\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.*
2. *L'application $\psi : \mathcal{L}_c(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathcal{L}_c(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ donnée par :*

$$\psi(u) = u^*$$

est une isométrie semi-liéaire.

Définition 1.0.8. *[5, 9] Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel normé de dimension finie et T un opérateur de $\mathcal{L}_c(\mathcal{H})$, un nombre complexe λ est dit **valeur propre** de T si l'équation :*

$$Tx = \lambda x$$

admet des solutions non nulles, et on note l'ensemble des valeurs propres de T par :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ : \ \ \exists x \in \mathcal{H} - \{0\} : Tx = \lambda x\}.$$

On note aussi par S_λ l'ensemble de ses solutions et on a :

$$S_\lambda = \{x \in \mathcal{H} - \{0\} : Tx = \lambda x\} = \ker(\lambda I - T),$$

*S_λ est appelé le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ. Ses éléments s'appellent **vecteurs propres**.*

*L'inverse de $\lambda I - T$, quand il existe, est appelé **opérateur résolvant** ou **la résolvante de T**. On le note :*

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Définition 1.0.9. *[5] (valeurs et vecteurs propres). On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lorsqu'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^n$ tel que :*

$$Tv = \lambda v.$$

Un tel vecteur v s'appelle vecteur propre de T associé a la valeur propre λ.

Définition 1.0.10. *Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est dit valeur* ***régulière*** *de $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ si l'équation spectrale :*

$$Tx = \lambda x$$

n'admet pas de solutions non nulles. Autrement dit, une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est régulière si l'opérateur $\lambda I - T$ est inversible. Notons par $\rho(T)$ l'ensemble des valeurs régulières.

Remarque 1.0.1. *Dans le cas où $\mathcal{H}$ est de dimension finie on a seulement deux possibilités :*

1) *Si l'opérateur $\lambda I - T$ est inversible alors, la résolvante de T existe et est définie sur $\mathcal{H}$ tout entier, i.e $\lambda \in \rho(T)$.*

2) *Si l'opérateur $\lambda I - T$ n'est pas inversible alors, $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

La situation change lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension infinie ; En effet en plus des deux possibilités 1) et 2) nous avons la troisième éventualité suivante :

3) *La résolvonte $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ existe mais n'est pas définie sur l'espace $\mathcal{H}$ tout entier.*

L'ensemble, noté $\sigma_p(T)$, des valeurs propres de T est appelé **spectre ponctuel de** T, soit :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \ \text{ non injectif}\}$$

La partie restante du spectre (c'est-à-dire la partie constituée des éléments λ pour lesquels l'opérateur $(\lambda I - T)^{-1}$ existe mais n'est pas défini sur $\mathcal{H}$ tout entier) est appelée **spectre continu de** T, noté par : $\sigma_c(T)$, soit :

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \ \ injectif \ \ et \ \ Im(\lambda I - T) \neq \overline{Im(\lambda I - T)} = \mathcal{H}\}$$

Enfin, on note $\sigma_r(T)$ pour le spectre **résiduel** défini par :

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \ \ injectif \ \ et \ \ \overline{Im(\lambda I - T)} \neq \mathcal{H}\}$$

Ainsi toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est soit propre, soit régulière, soit un point du spectre continu, et on a :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \quad , \quad \rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T).$$

Exemple 1.0.11. *L'opérateur $I \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ admet une seule valeur propre $\lambda = 1$.*

En effet, c'est la seule valeur pour laquelle l'équation $Ix = \lambda x$ admet des solutions non nulles.

Proposition 1.0.12. *Les valeurs propres de $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ appartiennent à la boule fermée $\overline{B}(0, \|T\|)$. i.e*

$$\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Proposition 1.0.13. *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ est un opérateur hermitien (c-à-d : $T^* = T$) alors, les valeurs propres de T sont réelles.*

Proposition 1.0.14. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$. Si λ est une valeur propre de T alors, $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.*

Proposition 1.0.15. *Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'un opérateur hermitien $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ sont orthogonaux.*

Proposition 1.0.16. *Soit T un opérateur unitaire*[1]*. Alors,*

$$\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Définition 1.0.17. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit compact si, l'image directe par T de la boule unité $B(0,1)$ de $\mathcal{H}$ est relativement compacte.*

Proposition 1.0.18. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ un opérateur hermitien compact. L'un des deux nombres $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T.*

1.1 Types les plus simples de stabilité

Soit donné un système de deux équations différentielles homogènes à coefficients constants (stationnaire)[8, 10].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.1}$$

Pour étudier la stabilité du point de repos du système (1.1) il faut établir l'équation caractéristique

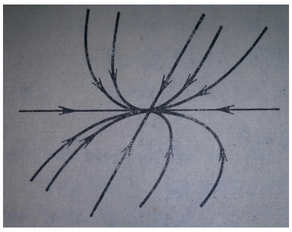
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2.

1. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes :

1. C'est à dire que T est surjectif et vérifie : $\forall x, y \in \mathcal{E}, \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.

(a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable).

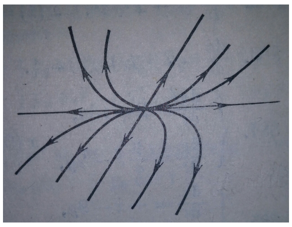


Exemple 1.1.1. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

est un noeud stable, car $\lambda = -\frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{21}}{2} < 0$.

(b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable).

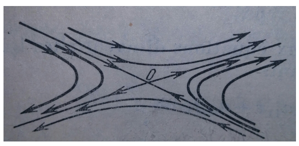


Exemple 1.1.2. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

est un noeud instable, car $\lambda = 3 \mp \sqrt{2} > 0$.

(c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est instable (col instable).

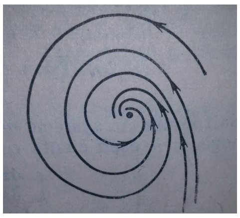


Exemple 1.1.3. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$$

est un col instable, car $\lambda_1 = -\sqrt{3} < 0$ *et* $\lambda_2 = \sqrt{3} > 0$.

2. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes : $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$
   (a) $p < 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable).

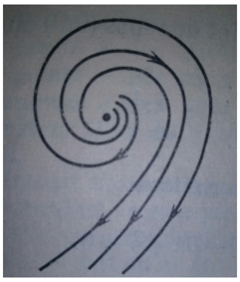


Exemple 1.1.4. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

est un foyer instable, car $\lambda = -1 \mp i\sqrt{2}$.

   (b) $p > 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est instable (foyer instable).

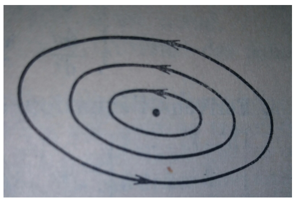


Exemple 1.1.5. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y, \end{cases}$$

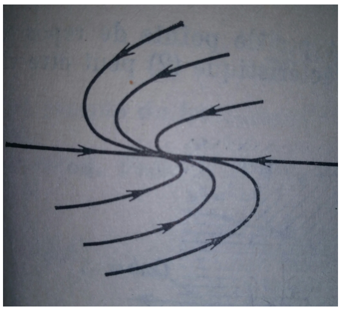
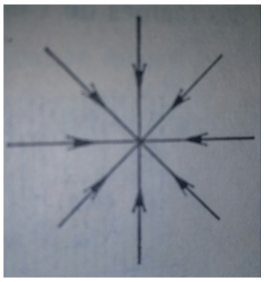
est un foyer instable, car $\lambda = 2 \mp i$.

   (c) $p = 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est stable (centre).



3. Les racines sont multiples :

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable).

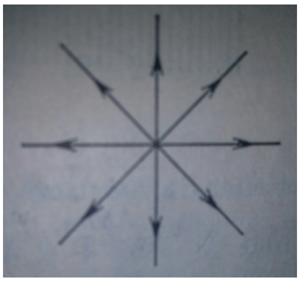
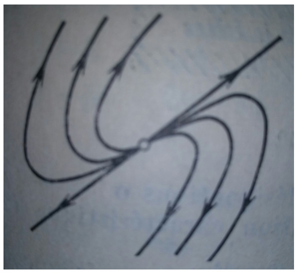



Exemple 1.1.6. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

est un noeud stable, car $\lambda = -1$ *est une racine double.*

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable).

Exemple 1.1.7. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x, \end{cases}$$

est un nœud instable, car $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 > 0$.

CHAPITRE DEUX

STABILITÉ ET STABILISATION EXPONENTIELLE

2.1 Stabilité exponentielle

1) Fonctions de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons le système :

$$x' = f(x) \quad , \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

tel que : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $f(0) = 0$ et admetttant $x_0 = 0$ comme équilibre.

Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine avec des dérivées partielles continues. On note :

$$\dot{F}(x) =< \frac{\partial F}{\partial x}(x), f(x) >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) f_i(x).$$

Définition 2.1.1. *On dit que F est une fonction de Lyapunov pour le système (2.1) en $x_0 = 0$ dans $\mathcal{H}$, si pour tout $x \in \Omega$, on a :*

1. *$F(x) > 0$ sauf en $x = 0$ où $F(0) = 0$.*
2. *$F'(x) \leq 0$*

Théorème 2.1.2.

1. *S'il existe une fonction de Lyapunov pour (2.1) en $x = 0$ dans un voisinage Ω de 0 alors, $x = 0$ est stable.*
2. *Si de plus $x \neq 0 \Rightarrow F'(x) < 0$ alors, $x = 0$ est asymptotiquement stable .*

3. *Si de plus,* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *et* $F(x) \longrightarrow \infty$ *quand* $||x|| \longrightarrow \infty$ *alors,* $x = 0$ *est globalement asymptotique stable.*

2) Stabilité et théorie de Lyapunov dans le cas linéaire

Dans cette partie, nous étudions d'abord les propriétés de stabilité de l'équilibre $x_0 = 0$ des systèmes homogènes linéaires autonomes :

$$x'(t) = Ax(t) \quad ; \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.1. *Le système (2.2) peut avoir :*

1. *Un point d'équilibre unique* $x_0 = 0$ *si* A *est inversible.*
2. *Une infinité de points d'équilibre si* A *n'est pas inversible.*

Théorème 2.1.3. *[3]. L'origine* x_0 *de système (2.2) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice définie positive* $Q \gg 0$ *il existe une matrice définie positive* $W \gg 0$ *telle que :*

$$Re(WA) \ll 0 \Longleftrightarrow A^T W + WA = -Q \tag{2.3}$$

Démonstration :

<u>Condition suffisante :</u>

Il suffit d'observer que $F(x) = x^T W x$ est une fonction de Lyapunov pour (2.2) en $x_0 = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \dot{F}(x) &= F'(x) \\ &= (x')^T W x + x^T W x' \\ &= x^T (A^T W + WA) x \\ &= -x^T Q x. \end{aligned}$$

Donc le théorème de Lyapunov s'applique et montre que $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable .

<u>Condition nécessaire :</u>

Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice $\lambda I - A$ vérifient $Re(\lambda_i) < 0$, et considérons la matrice W définie par :

$$W = \int_0^\infty e^{A^T s} Q e^{As} ds.$$

Cette intégrale est bien définie. La matrice W est clairement symétrique. En remplaçant l'équation de W dans (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
A^TW + WA &= \int_0^\infty [A^Te^{A^Ts}Qe^{As} + e^{A^Ts}Qe^{As}A]ds \\
&= \int_0^\infty \frac{d(e^{A^Ts}Qe^{As})}{ds}ds \\
&= e^{sA^T}Qe^{sA}|_0^\infty \\
&= -Q
\end{aligned}$$

Il reste maintenant de montrer qu'elle est définie positive. Supposons le contraire, il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $x^TWx = 0$. Comme la matrice e^{As} est inversible pour tout $t \geq 0$, il vient que :

$$\begin{aligned}
x^TWx &= 0 \Rightarrow \int_0^\infty x^Te^{A^Ts}Qe^{As}xds = 0 \\
&\Rightarrow e^{As}x = 0, \forall s \geq 0 \Rightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Cette contradiction montre que W est définie positive et qu'elle est bien une solution de l équation (2.3), appelée l'équation matricielle de Lyapunov.

Remarque 2.1.2. *Pour construire une fonction de Lyapunov pour le système, il faut passer par les étapes suivantes :*

1. *Choisir une matrice définie positive Q (par exemple $Q = I_n$)*
2. *Résoudre l équation de Lyapunov. Si on choisit Q symétrique alors, W sera symétrique aussi.*
3. *Vérifier que W est définie positive.*

Exemple 2.1.4. *Soient les matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix},$$

on doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} -2w_1 & 3w_1 - w_2 - 2w_4 \\ 3w_1 - 3w_3 & 3w_2 + 3w_3 - 4w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution :

$$W = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.1.5. *L'origine est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives .*

$$\sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(I, A)\} < 0.$$

si et seulement s'il existe une matrice $W \gg 0$ et $Q \gg 0$ telle que :

$$A^*W + WA = -Q.$$

2.2 Stabilisation exponentielle

Dans ce paragraphe, on va introduire les systèmes linéaires pour étudier la stabilisation exponentielle [7, 13].
Considérons le système :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad : \ t \geq 0; x \in \mathcal{H}, u \in U \subset \mathcal{H} \\ \\ \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.4}$$

où A et B sont des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'opérateur $A : D(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et $B : U \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire appelé opérateur de contrôle, U étant l'espace des commandes (espace de Hilbert) avec u une fonction intégrable au sens de Bochner.

Remarque 2.2.1. *On a deux classes de systèmes :*

1. *Lorsque l'opérateur B est borné (cas de contrôle distribué),*
2. *Lorsque B est non borné ce qui correspond à un contrôle local.*

Définition 2.2.1. *[2]. On appelle semi-groupe linéaire d'opérateurs bornés toute fonction : $S : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que :*
(i) S(0)=I;
(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$.

L'évolution d'un système à partir de x_0 (état du système en 0) à $x(t)$(état du système à l'instant t) est gouvernée par l'opérateur linéaire $S(t)$ de telle facon que :

$$x(t) = S(t)x_0$$

Définition 2.2.2. *[2]. Le semi-groupe $S(t)$ est dit fortement continu si la fonction $\Phi : t \to S(t)x$ est continue sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.*

Selon une terminologie généralement admise, un semi-groupe fortement continue est dit C_0 semi-groupe.

Définition 2.2.3. *(générateur infinitésimal d'un semi-groupe)[2]. Soit $S(t)$ un semi-groupe fortement continu. On appelle générateur infinitésimal de $S(t)$ l'opérateur A défini par :*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, x \in D(A)$$

où :

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad existe \right\},$$

Théorème 2.2.4. *(Théorème de Hille-Yosida)[9]. Une condition néccessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire fermé A à domaine dense dans $\mathcal{H}$ soit le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe est qu'il existe $N > 0$ et un réel μ tels que pour tout λ : $Re\lambda > \mu, \lambda \in \sigma(A)$, on a :*

$$\left\| R_\lambda(A)^n \leq \frac{N}{(Re\lambda - \mu)^n} \right\|, n \in \mathbb{N}^\star,$$

où $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est la résolvante de A. De plus on a :

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}, \quad t \geq 0, \quad M > 0.$$

Définition 2.2.5. *(Solution généralisée)[3]. x est dite solution généralisée (faible) du problème (2.4) ssi :*

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), x^* \rangle = \langle Ax(t), x^* \rangle + \langle f(t), x^* \rangle$$

pour tout $x^* \in D(A)$.

Théorème 2.2.6. *[11]. Si u est B-intégrable (intégrable au sens de Bochner) $x_0 \in \mathcal{H}$ alors, il existe une et une seule solution généralisée du problème (2.4) donnée par :*

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t - \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Définition 2.2.7. *[6]. Considérons le système (2.4) avec le contrôle $u(t) = Dx(t)$, (A, B et D sont des opérateurs linéaires bornés dans les espaces de Hilbert) si le système homogène correspondant*

$$x'(t) = (A + BD)x(t) = Fx(t), \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

avec $x(0) = x_0$, tel que le semi-groupe engendré par $F = A + BD$ noté $\{S_F(t), t \geq 0\}$.

Définition 2.2.8. *(Solution avec Feedback)[6, 16]. Soit D un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. On considère le contrôle $u(t) = Dx(t)$ en boucle fermée linéaire. Si $BD \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors, l'opérateur F génère un semi-groupe fortement continu $\{S_F(t), t \geq 0\}$ et qui est solution de l'équation intégrale :*

$$S_F(t)x = S(t)x + \int_0^t S(t-\tau)BDS_F(\tau)xd\tau.$$

Définition 2.2.9. *[11]. On dit que le système (2.4) est complètement stabilisable si :*

$$\forall \mu > 0, \ \exists N_1 > 0 \ \ et \ \ D : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

tel que :

$$\|e^{Ft}\| \leq N_1 e^{-\mu t}$$

ou encore :

$$\|e^{Ft}x_0\| \leq N_1 e^{-\mu t}\|x_0\|.$$

en plus, $||e^{Ft}x_0|| = x(t)$ est solution de système (2.5) et pour tout $\mu > 0$ il existe $u(t) = Dx(t)$ tel que le système (2.5) soit exponentiellement stable.

Proposition 2.2.10. *Si le système (2.4) est complètement stabilisable alors il est stabilisable. La réciproque est fausse.*
Soit le spectre de l'opérateur A : $\sigma(A) = \sigma(I, A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$ alors, le système (2.4) est exponentiellement stable avec $B = 0$ i.e. pas de commande ($u = 0$).
Le système (2.4) est stabilisable : $\|x(t)\| = \|e^{At}x_0\| \leq Me^{-\mu t}\|x_0\|$,$\forall x_0 \in \mathcal{H}$ et on a :

$$\sigma(F) = \sigma(I, F) = \sigma(I, A) = \sigma(A).$$

Exemple 2.2.11. *Considérons le systèeme (2.5) avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs propres de la matrice $\lambda I - A$:

$$det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda^2 - 2) = 0$$

d'où : $\lambda = -3$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$.
alors, le système (2.2) est instable (Col instable).

La question qui se pose maintenant : Existe-il une matrice D telle que : $F = A+BD$ et le système (2.5) soit stable ? La réponse est affirmative si on prend la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ainsi, la matrice F serait donnée par :

$$\begin{aligned}
F = A + BD &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On déduit donc que le système (2.5) est stabilisable et on voit bien que le spectre $\sigma(I, F) < 0$.

2.3 Approche de décomposition spectrale

Le problème de stabilisation du couple (A, B) est de trouver, si possible, un opérateur linéaire borné $D : \mathcal{H} \to \mathcal{U}$ tel que le semi-groupe fortement continu $S_F(t)$, $t \geq 0$ en $\mathcal{H}$, engendré par $F = A + BD$ avec un contrôle $u(t) = Dx(t)$, $C > 0$ et $D(A) = D(F) \subseteq \mathcal{H}$, satisfait :

$$\|S_F(t)x_0\| \leq Ce^{-\delta t}\|x_0\|, \quad \delta > 0, \quad t \geq 0$$

Notons :
- $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$,
- $\rho(A) = \rho(I, A)$ l'ensemble résolvant et $\sigma(A) = \sigma(I, A)$ le spectre de A,
- $\sigma_r(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_p(A)$ étant respectivement, son spectre résiduel , continu et ponctuel.

Pour un générateur infinitésimal F, on a :

$$\omega_0 = \omega_0(F) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln \|S_F(t)\|}{t} < 0$$

et pour tout $\omega > \omega_0$, il existe une constante M, telle que :

$$\|S_F(t)\| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0.$$

L'inégalité de base est la suivante :

$$\sup Re\sigma(F) \leq \omega_0. \tag{2.6}$$

De (2.6) et de la définition de ω_0, il s'ensuit que :

$$\|S_F(t)\| \leq N_\epsilon e^{\epsilon t}, t \geq 0, \quad implique \quad \sup(Re\sigma(F)) \leq -\epsilon, \;\; \epsilon > 0.$$

Soit le spectre de F qui est dans le cas analytique contenu dans un secteur fermé $\mathfrak{S}$ tel que :

$$\mathfrak{S} = \left\{ \lambda : \|arg(\lambda - a)\| \leq \rho_0, \quad a \in \mathbb{R} \quad , \frac{\pi}{2} < \rho_0 < \pi \quad \right\}$$

et

$$\|(\lambda I - F)^{-1}\| \leq M_1(1 + |\lambda|)^{-1} \quad pour \quad \lambda \in \mathfrak{S}.$$

Le semi groupe $S_F(t)$ est donnée par une formule explicite

$$S_F(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I - F)^{-1} d\lambda x \tag{2.7}$$

où Γ est composé des deux rayons $a + be^{i\rho}$ et $a + be^{-i\rho}$ tel que : $0 \leq b < \rho$.

1. **Décomposition de l'espace $\mathcal{H}$**

Soit $\delta > 0$ fixé à l'avance, considérons les parties $\sigma_u(A)$ et $\sigma_s(A)$ du spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A contenus, respectivement, dans le demi plan fermé : $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq -\delta\}$ et le demi plan ouvert : $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < -\delta\}$, soit :

$$\sigma_u(A) = \sigma(A) \cap \{\lambda : Re\lambda >= -\delta\}$$

et

$$\sigma_s(A) = \sigma(A) \cap \{\lambda : Re\lambda < -\delta\}.$$

Les indices u et s signifient respectivement **instable** et **stable** pour des raisons qui apparaîtront plus tard. Ensuite :

$$\sigma(A) = \sigma_u(A) \cup \sigma_s(A), \;\; \sigma_r(A) = \emptyset.$$

2. **Hypothèse de décomposition du spectre**

Supposons que l'ensemble $\sigma_u(A)$ est borné et est séparé de l'ensemble $\sigma_s(A)$ de telle sorte qu'une simple courbe rectifiable fermée (ou plus généralement, un nombre fini de telles courbes dessinées de manière à enfermer un ensemble ouvert contenant $\sigma_u(A)$ en son intérieur et $\sigma_s(A)$ dans son extérieur). Alors, le théorème de décomposition suivant est vrai [14].

Théorème 2.3.1.

- *L'opérateur A peut être décomposé selon la décomposition : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u + \mathcal{H}_s$ de l'espace, c'est à dire :*
  $PD(A) \subset D(A)$; $A\mathcal{H}_s \subset \mathcal{H}_s$, $A\mathcal{H}_u \subset \mathcal{H}_u$ (invariance de $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{H}_u$ sous A) où P est la projection sur $\mathcal{H}_u = P\mathcal{H}$ le long de $\mathcal{H}_s = (I-P)\mathcal{H}$.
- *$\sigma(A_s) = \sigma_s(A)$ et $\sigma(A_u) = \sigma_u(A)$ où : A_s et A_u sont, respectivement, les restrictions de A on $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{H}_u$. i.e. $A_s = A\mid_{\mathcal{H}_s}$, $A_u = A\mid_{\mathcal{H}_u}$.*
- *A_u est un opérateur borné sur $\mathcal{H}_u \subset \mathcal{H}$.*
- *P et $(I-P)$ commutent avec A, soit : $PA \subset AP$ et $(I-P)A \subset A(I-P)$.*
- *Par conséquent, le semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ engendré par A, commute aussi avec P et $(I-P)$.*

3. **Projection et décomposition de système**

Depuis $Px = x_u$ et $(I-P)x = x_s$, il s'ensuit que $Px' = x'_u$ et $(I-P)x' = x'_s$, puisque $P \in \mathcal{H}$. Appliquant P et $(I-P)$ aux deux cotés du systéme (**??**)

$$x'_u = A_u x_u + PBu \quad , \quad x_u(0) = Px_0 \in D(A_u) = \mathcal{H}_u \tag{2.8}$$

$$x'_s = A_s x_s + (I-P)Bu \quad , \quad x_s(0) = (I-P)x_0 \in D(A_s) = \mathcal{H}_s. \tag{2.9}$$

Les systèmes (2.8)et (2.9) seront appelées, dans la suite, projection de (2.4) sur $\mathcal{H}_u$ et $\mathcal{H}_s$, respectivement, selon $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{H}_u$.
Le système (2.4) peut alors s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x'_u(t) \\ \\ x'_s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_u & 0 \\ \\ 0 & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u(t) \\ \\ x_s(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PB \\ \\ (I-P)B \end{pmatrix} u(t).$$

Désignant également par $S_u(t)$ et $S_s(t)$, les restrictions sur $\mathcal{H}_u$ et $\mathcal{H}_s$ respectivement du semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu engendré par A sur $\mathcal{H}$. i.e.

$$S_s(t) = S(t)\mid_{\mathcal{H}_s}, \;\; S_u(t) = S(t)\mid_{\mathcal{H}_u}.$$

Théorème 2.3.2. *(suite du théorème) $S_u(t)$ et $S_s(t)$ sont des semi-groupes fortement continus sur $\mathcal{H}_u$ et $\mathcal{H}_s$ qui sont respectivement engendrés par : A_u et A_s.*

En fait, puisque S_u est borné sur $\mathcal{H}_u$, $S_u(t)$ est le groupe analytique uniformément continu, soit :

$$S_u(t) = e^{A_u t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_u^n t^n}{n!}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Le comportement de système (2.4) sur $\mathcal{H}$ peut alors être analysé en étudiant séparément le comportement de (2.8)et (2.9) sur $\mathcal{H}_u$ et $\mathcal{H}_s$.
Alternativement, on pourrait appliquer P et $(I-P)$ à la solution de système (2.4) .

$$x(t, x_0, u) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \tag{2.10}$$

Pour obtenir les solutions de (2.8)et (2.9), soit :

$$x_u(t, x_{0u}, u) = S_u(t)x_{0u} + \int_0^t S(t-s)PBu(s)ds, \tag{2.11}$$

et

$$x_s(t, x_{0S}, u) = S_s(t)x_{0s} + \int_0^t S_s(t-s)(I-P)Bu(s)ds. \tag{2.12}$$

Dans la décomposition ci-dessus, on avait :

$$\sup Re\sigma(A_s) = \sup Re\sigma_s(A) \leq -\delta.$$

donc, si A_s satisfait l'hypothèse de croissance déterminée par le spectre sur $\mathcal{H}_s$, on aurait :

$$\begin{aligned} \|S_s(t)\| &\leq K_{\delta-\epsilon}e^{-(\delta-\epsilon)t} \\ &\leq Me^{-\omega t}, \end{aligned}$$

avec : $\omega = (\delta - \epsilon) > 0$ et $t \geq 0$.

Chapitre Trois

Applications

3.1 Approche Salamon et Curtain

Dans les travaux de Rabah [11, 12, 16] et Ionescu (1986-1987) des conditions nécessaires et suffisantes ont été developpées sur la stabilisation faible et forte dans le cas où A est borné et la stabilisation faible et forte dans le cas où A est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe avec B borné. En utilisant la décomposition de l'espace en partie contrôlable et partie non-contrôlable. On généralisera ici ces résultats pour un système dans la classe de Salamon et Curtain [4] pour B non borné à domaine dense.

$$D_B = D(B) \subset \mathcal{H}_u \to \mathcal{H}_s$$

Définition 3.1.1. *Le système (2.4) est dit fortement stabilisable s'il existe un opérateur F linéaire et borné tel que : $\forall x \in \mathcal{H}$: $S_F(t)x \longrightarrow 0$ (pour la topologie forte) quand $t \longrightarrow \infty$.*

Définition 3.1.2. *Le système (2.4) est dit faiblement stabilisable s'il existe un opérateur F linéaire et borné tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad S_F(t)x \longrightarrow 0 \quad \text{quand } t \longrightarrow \infty,$$

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \quad \langle S_F(t)x, y\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quand } t \longrightarrow \infty.$$

Remarque 3.1.1. *En dimension finie, ces notions de stabilisation sont équivalentes.*

3.2 Stabilisation faible et forte

Proposition 3.2.1. *Si le systèeme (2.4) est exponentiellement stabilisable par $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors :*

(i) $x_u'(t) = PAx_u(t) + PBu(t)$ est exponentiellement stabilisable.

(ii) $x_s'(t) = A_s x_s(t)$ *est exponentiellement stable,* $u \equiv 0$.

Démonstration.

Le système (2.4) est exponentiellement stabilisable par $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. $S(t)$ l'unique solution de :

$$S_F(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-\tau)BDS_F(\tau)xd\tau.$$

vérifie :

$$\|S_F(t)x_0\| \leq Me^{-wt}\|x_0\|.$$

On considère : $F_u = F \mid_{\mathcal{H}u}$.

Montrons que : $S_F(t)x_u = S_{F_u}(t)x_u$.

L'invariance de $\mathcal{H}_u$ par $S(t)$ implique que $S_u(t) = S(t) \mid_{\mathcal{H}_u}$ est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{H}_u$; Donc, pour $x_u \in \mathcal{H}_u$, on a :

$$\begin{aligned} S_{F_u}(t) &= S_u(t)x_u + \int_0^t S_u(t-\tau)PBD_uS_{F_u}(\tau)x_ud\tau \\ &= S_u(t)x_u + \int_0^t S_u(t-\tau)PBD_uS_{F_u}(\tau)x_ud\tau. \end{aligned}$$

$S_{F_u}(t)$ étant un C_0- semi-groupe sur $\mathcal{H}_u$, on a :

$$S_{F_u}(t)x_1 = S(t)x_u + \int_0^t S(t-\tau)PBDS_{F_u}(\tau)d\tau.$$

comme : $F_ux_u = Fx_u$ et $\forall u \in U$, $B_u \in \mathcal{H}_u$, $\quad D = D_u + D_s$ avec :

$$D_s = D \mid_{\mathcal{H}_s}, D_u = D \mid_{\mathcal{H}_u} .$$

On a :

$$\begin{aligned} S_{F_1}(t)x_1 &= S(t)x_1 + \int_0^t S(t-\tau)BFS_{F1}(\tau)x_1d\tau \\ &= S_F(t)x_1, \end{aligned}$$

par unicité du semi-groupe ; D'où :

$$||S_{F_u}(t)x_u(t)|| \leq N_1e^{-\mu t}||x_u(0)||_{\mathcal{H}_u}$$

Proposition 3.2.2. *Si le système (2.4) est tel que $PA(I-P)$ est un opérateur borné alors,*

1. $x_u'(t) = PAx_u(t) + PBu(t)$ *est exponentiellement stabilisable sur $\mathcal{H}_u$ par $F_u \in \mathcal{H}_u$.*

2. *$x_s'(t) = Ax_s(t)$ est exponentiellement stable sur $\mathcal{H}_s$ et donc le système (2.4) est exponentiellement stabilisable.*

Démonstration.

La décomposition canonique du système (2.4) donne :

$$\begin{cases} x_u'(t) = PAx_u(t) + PAx_s(t) + PB_uDx_u(t) \\ \\ x_s' = (I-P)Ax_s \end{cases} \tag{3.1}$$

on peut formaliser cette décomposition par les expressions de A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} A_{u_1} & A_{u_2} \\ \\ 0 & A_s \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_u \\ \\ 0 \end{bmatrix}, B_s \equiv 0$$

Si on suppose que : $x_u'(t) = PAx_u + PB_u$ est exponentiellement stabilisable sur $\mathcal{H}_1$ par $F_u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_u, U)$, ceci implique que le semi-groupe $S_{F_u}(t)$ avec $F_u = A_{u_1} + B_uD_u$ qui est la solution unique de l'équation :

$$S_{F_u}(t)x_u = S_{_{u_1}}(t)x_u + \int_0^t S_{_{u_1}}(t-\tau)B_uD_uS_{F_u}(\tau)x_u d\tau. \tag{3.2}$$

est tel que l'opérateur :

$$S_{F_u}(t) \longrightarrow 0$$

exponenentiellement sur $\mathcal{H}_u$ si $t \to \infty$ et $S_{A_{u_1}}(t) = S(t) \mid_{\mathcal{H}_u}$, $\mathcal{H}_u$ étant invariant par $S(t)$.

Considérons alors : $F = (F_u, 0)$; Autrement dit, F est défini sur $\mathcal{H}$ par $Fx = F_ux_u$, où $x_u = Px$. On a alors :

$$\begin{cases} x_u(t) = S_{F_u}(t)x_u(0) \\ \\ x_s(t) = S_{A_s}(t)x_s(0) \end{cases} + \int_0^t S_{F_u}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau. \tag{3.3}$$

L'hypothèse (i) du proposition 3.2.1 et le théorème 2.2.4 donnent :

$$\|S_{F_u}(t)x_u(0)\| \leq Me^{-\mu t}\|x_u(0)\|$$

Par ailleurs,

$$S_{A_s}(t)x_s(0) = (I-P)S(t)(I-P)x(0)$$

En effet,

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

si $x \in \mathcal{H}_s \cap D(A)$, $Ax_s = A(I-P)x$ alors,

$$A(I-P)x = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)(I-P)x - (I-P)x}{t}.$$

ce qui donne :

$$(I-P)A(I-P)x = \lim_{t \to 0^+} \frac{(I-P)S(t)(I-P)x - (I-P)x}{t}.$$

d'où :

$$A_s x_s = \lim_{t \to 0^+} \frac{(I-P)S(t)(I-P)x - x}{t}.$$

avec : $A_s = (I-P)A$ et $x_s = (I-P)x$.

Par unicité du semi-groupe, il vient que : $S_{A_s}(t) = (I-P)S(t)(I-P)$; Par conséquent,

$$\|x_s(t)\| \leq \|(I-P)S(t)(I-P)\| \|x_s(0)\|$$

$$\leq \|(I-P)S^*(t)(I-P)\| \|x_2(0)\|$$

avec : $S^*(t) = S_{A_s}(t) = S(t) \mid \mathcal{H}_s$.

Mais, $(I-P)S^*(t)(I-P)$ est le semi-groupe dont le générateur infinitésimal est A restreint à $\mathcal{H}_s$. Et par suite, d'après l'hypothèse (ii) de la proposition 3.2.1 :

$$\|x_s(t)\| \leq N_1 e^{-\mu_1 t} \|x_s(0)\|$$

Comme :

$$x_u(t) = S_{F_u}(t)x_u(0) + \int_0^t S_{F_u}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d(\tau),$$

on obtient pour $x_u(t)$ la majoration :

$$\|x_u(t)\| \leq Ne^{-\mu t}\|x_u(0)\| + NN_1 e^{-\mu t}\|A_{u_2}\|\|x_s(0)\| \int_0^t e^{\tau(\mu - \mu t)} d\tau.$$

donc finalement,

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|x_0\|, \quad M, \alpha > 0.$$

Proposition 3.2.3. *Une condition nécessaire pour la stabilisation forte (resp. faible) du système (2.4) est donnée par les deux conditions suivantes :*

(i) $x'_u(t) = PAx_u + PBu$ *noté* (A_{u_1}, B_u) *est fortement (resp. faiblement) stabilisable.*
(ii) $x'_s(t) = A_s x_s$ *est fortement (resp. faiblement) stable.*

Démonstration.

Soit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ stablisant le systèeme (2.4) ; Alors à l'aide de la décomposition canonique généralisée on a :
$D = (D_u, D_s)$ avec : $D_u = D \mid_{\mathcal{H}_u}$ et $D_s = D \mid_{\mathcal{H}_s}$

$$B = \begin{pmatrix} B_u \\ \\ 0 \end{pmatrix} ; \; A + BD = \begin{pmatrix} A_{u_1} + B_u D_u & A_{u_2} + B_u D_s \\ \\ 0 & A_s \end{pmatrix}.$$

donc,

$$\begin{cases} x'_u(t) = (A_{u_1} + B_u D_u)x_u(t) + (A_{u_2} + B_u D_s)x_s(t) \\ \\ x'_s(t) = A_s x_s(t). \end{cases} \tag{3.4}$$

1. Pour $x_0 = (x_u(0), 0)$, on a :

$$\begin{cases} x_u(t) = S_{F_u}(t)x_u(0) \\ \\ x_s(t) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

donc, $x(t) = S_{F_u}(t)x_u(0) \longrightarrow 0$ fortement (resp. faiblement) d'où le système (A_{u_1}, B_u) est fortement (resp. faiblement) stabilisable.

2. La solution : $x(t) = \begin{pmatrix} x_u(t) \\ \\ x_s(t) \end{pmatrix} \longrightarrow 0$ fortement (resp. faiblement) donc $x_s(t) \longrightarrow 0$ fortement (resp. faiblement) c'est à dire :

$$x_s(t) = S_{A_s}(t)x_s(0) = (I - P)S(t)(I - P)x_s(0) \longrightarrow 0$$

fortement (resp. faiblement).

$x_s(t) \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty$ fortement.

$$\|(I - P)S(t)(I - P)x_s(0)\| = \|(I - P)S^*(t)(I - P)x_0^2\|$$

avec : $S^*(t) = S_{A_s}(t) = S(t) \mid \mathcal{H}_s$.
et, $(I - P)S^*(t)(I - P)x_s(0)$ est un C_0 semi-groupe dont le générateur infinitésimal

est : $A_s = A\mid_{\mathcal{H}_s}$ d'où : $x'_s = A^* x_s$ est fortement stable sur $\mathcal{H}_s$

$x_s(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$ faiblement pour $x \in \mathcal{H}_s$

$$\langle (I-P)S(t)(I-P)x, y\rangle \longrightarrow 0, \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

Ce qui implique que : $\langle x, (I-P)S^*(t)(I-P)y\rangle \longrightarrow 0$, d'où :

$x'_s = A_s x_s$ est faiblement stable sur $\mathcal{H}_s$.

Proposition 3.2.4. *Si le système* (2.4) *est tel que* A_{u_1} *est borné alors,*
(i) $x'_u = PAx_u + PB_u$ *(noté* (A_{u_1}, B_u)*) est fortement (resp. faiblement) stabilisable.*
(ii) $x'_s = A_s x_s$ *exponentiellement stable implique que* (2.4) *est fortement (resp. faiblement) stabilisable.*

Démonstration.

Supposons que le système (A_{u_1}, B_u) est fortement stabilisable par $F_u \in \mathcal{L}(x_u, U)$. Considérons alors :

$F = (F_u, 0)$ pour $x_0 = (x_u(0), x_s(0)$, on a :

$$\begin{cases} x_u(t) = S_{F_{u_1}}(t)x_u(0) + \displaystyle\int_0^t S_{F_{u_1}}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau \\ \\ x_s(t) = S_{A_s}(t)x_s(0). \end{cases}$$

Ainsi, l'hypothèse (ii) donne :

$$\|x_s(t)\| \leq Ne^{-\alpha t}\|x_s(0)\| \ \ (\alpha > 0 et N > 0)$$

par (i), on a $S_{F_{u_1}}(t)x_u(0) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$ (fortement) reste à évaluer le terme :

$$\int_0^t S_{A_{11}+B_1D_1}(t-\tau)A_{12}x_2(\tau)d\tau$$

Soit $T \in [0, t]$,

$$\begin{aligned} \int_0^t S_{F_{u_1}}(t-\tau)A_{u_1}x_s(\tau)d\tau &= \int_0^T S_{F_{u_1}}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau \\ &+ \int_T^t S_{F_{u_1}}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^t S_{F_{u_1}}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau) &= S_{F_{u_1}}(t-T)\textstyle\int_0^T S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau \\ &+ \int_T^t S_{F_{u_1}}(t-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)\end{aligned}$$

Posons :

$$x_T = \int_0^T S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau$$

comme :

$$S_{F_{u_1}}(t)x \longrightarrow 0 \quad fortement \quad \forall x \in \mathcal{H}_u,$$

alors, pour t assez grand, $t > T_1$ on a :

$$\|S_{F_{u_1}}(t-T)x_T\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, on considère :

$$\left\|\int_0^T S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau\right\|;$$

$$\left\|\int_T^\infty S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau\right\| \leq \int_T^\infty ||x_s(\tau)||d\tau$$

car

$$\left\|\int_T^\infty S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau\right\| \leq \int_T^\infty ||x_s(\tau)||d\tau$$

$$\left\|S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x(\tau)d\tau\right\| \leq M_1,$$

puisque : $S_{F_{u_1}}(t)x \to 0$, si $t \to \infty$

d'où :

$$\begin{aligned}\left\|\int_T^\infty S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau\right\| &\leq MN\int_T^\infty ||x_s(0)||d\tau \\ &= MN\tfrac{e^{-\alpha T}}{\alpha}||x_s(0)||\end{aligned}$$

où $\alpha > 0$. Pour T tel que $T > T_1$, i.e., T suffisamment grand on a :

$$\left\|\int_T^\infty S_{F_{u_1}}(T-\tau)A_{u_2}x_s(\tau)d\tau\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'où pour $t > \max\{T_1, T_2\}$

$$\left\| \int_0^{\infty} S_{F_{u_1}}(T-\tau) A_{u_2} x_s(\tau) d\tau \right\| \leq \epsilon.$$

par conséquent, $x(t) \longrightarrow 0$ avec : $t \longrightarrow \infty$.

L'approche est similaire si on suppose que (A_{u_1}, B_u) est faiblement stabilisable.

Conclusion et Perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la stabilisation des systèmes linéaires dans des espaces de Hilbert.

Les conditions de stabilisation liées à la décomposition spectrale (sous-espace contrôlable, sous-espace non contrôlable) [16] sont dégagées.

Les extensions de la notion de compacité aux ensembles non bornés permettent d'aboutir à la décomposition spectrale comme condition nécessaire. Il s'agit de la compacité d'une partie B dans le sens où $Re(A) < 0$ et $Re(A + BD) < 0$.

Enfin, une conditions nécessaire de stabilisation liée à l'équation de Lyapunov avec B non borné.

Comme perspectives on cherche à étendre les conditions de stabilisation liées à l'équation de Riccati avec B non borné.

Bibliographie

[1] H.Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod, Paris, (1999).

[2] P.L.Butzer and H.Berens. Semigroups of Operators and Approximations, Springer-Verlag, New York/ Berlin., (1967).

[3] J.L.Daletc´kiĭ , M.G.Krein. Stability of solutions of differential equations in Banach space, American Math Society Providence, 43(1975).

[4] R.F. Curtain, Salamon, Finite dimensional compensators for infinite dimensional systems with unbounded input operators. SIAM J. Control and optimization, Vol 24, n4, (1986).

[5] M.Hazi. Topologie au delà des travaux dirigés. Visite guidée dans les espaces normés. OPU. Tome 3, (2009).

[6] R.E.Kalman and J. E. Bertram, Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov, II Discrete-time systems, ASME J. Basic Engineering, ser 1. (1960) ;pp 394-400 .

[7] Kerner, Joachim, Laasri, Hafida, Mugnolo and Delio, Control Theory of Infinite-Dimensional Systems , J . Operator Theory : Advances and Applications, (2019).

[8] M.Krasnov, A.Kisselev, G. Makarenko. Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires, editions MIR. Moscou,(1984).

[9] P. Lévy-Bruhl. Introduction à la théorie spectrale, Dunod, Paris, (2003).

[10] M.V.Makarets and V.Yu.Reshetnyak. Ordinary differential equation and calculus of variation, Londan, (1995).

[11] R.Rabah, J.Karrakchou, On exact controllability and complete stabilizability for linear systems in Hilbert spaces, Applied Mathematics Letters, Elsevier. 10, (1), (1997), pp 35-40.

[12] R. Rabah and D. Iosescu. Stabilization problem in Hilbert spaces, Int. J. Control, Vol 46, n=6, pp 2035-2042, (1987).

[13] A.J. Pritchard and J. Zabczyk, Stability and stabilizability for infinite dimensional systems, SIAM, Review, vol 23, n 1, (1981).

[14] F. Riesz, B. Nagy. Leçons d'Analyse fonctionnelle. Paris,(1968).

[15] A.G. Rutkas , Spectral methods for studying degenerate differential-operator equations. Springer Science No 144, (2007) ;pp 4246-4263.

[16] R. Triggiani, On the stabilizability problem in Banach space, Journal of mathematical analysis and applications, 52, (1975), pp 383-403.