

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université -Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département : Génie Mécanique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en :
Domaine : Technologie
Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Construction Mécanique
Thème

Analyse du comportement vibratoire des arbres tournants

Présenté par :

- 1) Melle. SEBIE Dalia
- 2) Melle. RAHIL Hanane

Devant le jury composé de :

Dr. BELOUFA.A	M C A	U.A.T.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. BELHENINI.S	M C A	U.A.T.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr. ASSEM.H	M C B	U.A.T.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant
Dr. SAIMI.A	M C A	Université de Blida	Co-Encadrant

Année Universitaire 2022/2023



Remerciements

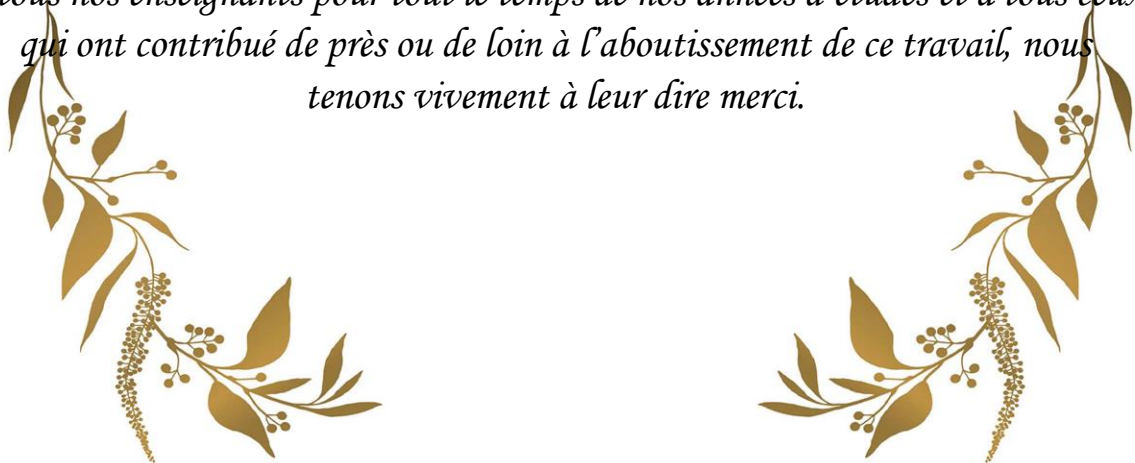
*Au nom de DIEU le Clément et le Miséricordieux
Louange à ALLAH le Tout-puissant*

Tout d'abord et avant tout, Nous remercions ALLAH le Tout-puissant, qui nous a guidées dans le bon sens durant notre vie, et qui nous a donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à messieurs ASSEM.H et SAIMI.A, pour leurs précieux conseils, leurs soutiens, leurs encouragements qu'ils nous ont donnés durant ce travail, pour nous permettre de réussir.

Nous adressons également nos sincères remerciements aux membres du jury Dr BELHENINI et Dr BELOUFA qui ont accepté d'examiner ce travail, soyez assuré de notre plus profond respect.

En fin nous adressons nos vifs remerciements et notre profonde gratitude aussi à tous nos enseignants pour tout le temps de nos années d'études et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, nous tenons vivement à leur dire merci.



Dédicace

Je dédie ce travail :

*A ceux qui m'ont tant aimée et encouragé, a ceux qui
n'ont jamais cessés de croire en moi.*

*A mon soutien moral, mon cher père **SEBIE Ahmed,***

*A ma force, ma mère **SEBIE Setti,***

*A mes chères frères **Mohamed Bedreddin et Salem***

*A mes chères sœurs **Sabrina et Habiba,***

*A ma chère binôme **Hanane***

*A mes chères amies **Asma, Souha et Soheir***

Pour leurs soutiens affectueux

SEBIE Dalia

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes chers parents,

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs, et qui je souhaite une bonne santé.

A mes chers frères et à leurs chères femmes,

*A ma chère nièce **Alaa**,*

*A ma chère binôme **Dalia**,*

Pour son entente et sa sympathie.

*A mes chères amies **Soheir, Asma et Souha***

Pour leurs aides et supports moraux dans les moments difficiles.

A toute ma famille.

RAHIL Hanane

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions le comportement vibratoire d'un rotor reposant sur des paliers rigides et portant un disque. Ce rotor est sous l'effet gyroscopique, l'origine de ce phénomène a été défini et leur effet sur les fréquences propres des vibrations d'un rotor avec disque a été expliqué. La modélisation du système étudié est faite par la méthode des éléments finis standard version h, pour cela un élément de type poutre a deux nœuds (i,j) avec un disque placé sur le nœud j, est développée et analysée. Les fréquences vibratoires obtenues ont été discutées et présentées par des diagrammes de Campbell pour diverses conditions aux limites et l'évolution des vitesses critiques du système tournant sont discutées.

Mots clés : comportement dynamique, rotor, vibration, la méthode des éléments finis, diagramme de Campbell.

ملخص

في هذا العمل، ندرس السلوك الاهتزازي للدوار الذي يستقر على محامل صلبة ويحمل قرصًا. يقع هذا الدوار تحت تأثير الجير وسكوبي، وقد تم تحديد أصل هذه الظاهرة وتم شرح آثارها على الترددات المحددة لاهتزازات الدوار مع القرص. تتم نمذجة النظام المدرس من خلال النسخة القياسية من طريقة العنصر المحدود h ، لهذا العنصر من نوع الشعاع له محورين (i, j) مع وضع قرص على المحور j ، ويتم تطويره وتحليله. تمت مناقشة ترددات الاهتزاز التي تم الحصول عليها وتقديمها بواسطة مخططات كامبل لظروف حدودية مختلفة وتمت مناقشة تطور السرعات الحرجة للنظام الدوار.

الكلمات المفتاحية: السلوك الديناميكي، الدوار، الاهتزازات، طريقة العناصر المحدودة، مخطط كامبل.

Abstract

In this paper we study the vibratory behavior of a rotor resting on rigid bearings and carrying a disc. This rotor is under the gyroscopic effect, the origin of this phenomenon has been defined and its effect on the specific frequencies of the vibrations of a rotor with disc have been explained. The modeling of the studied system is done by the standard finite element method version h, for this a beam type element has two nodes (i,j) with a disk placed on node j, is developed and analyzed. The vibration frequencies obtained were discussed and presented by Campbell diagrams for various boundary conditions and the evolution of critical speeds of the rotating system is discussed.

Keywords: dynamic behavior, rotor, vibrations, finite element method, Campbell diagram.

Table des matières :

Résumé

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des symboles

INTRODUCTION GENERALE..... 1

Chapitre I : Etude Bibliographie

1. Introduction :	2
2. Revue aux modelés du rotor Rankine et jeffcott :	2
3. Définition d'un rotor :	4
3.1. Disque :	4
3.2. Arbre :	4
3.3. Paliers :	5
3.3.1. Type des paliers :	5
4. Domaines d'utilisation :	6
4.1. Aéronautique :	6
4.2. Moteurs et turbines :	7
5. Type de rotor :	7
5.1. Rotor rigide :	7
5.2. Rotor flexible :	7
6. Classifications des rotors :	8
6.1. Selon le paramètre géométrique :	8
6.1.1. Modèle usuel à long arbre :	8
6.1.2. Modèle de disque rotor :	8
6.1.3. Modèle de rotor aubage :	8
6.1.4. Modèle de rotor libre :	9

6.2.	Suivant les paramètres mécaniques :	9
6.2.1.	Modèle de rotor rigide :	9
6.2.2.	Modèle de rotor de Jeffcott :	9
6.2.3.	Modèle de rotor réel :	9
7.	Liaison palier-rotor :	9
7.1.	Rotor rigide palier rigide :	10
7.2.	Rotor rigide palier flexible :	10
7.3.	Rotor flexible palier rigide :	10
7.4.	Rotor flexible palier flexible :	10
8.	Vibration des rotors :	10
8.1.	Causes des vibrations :	10
8.1.1.	Effort de balourd :	10
8.1.2.	Couple gyroscopique :	11
8.2.	Les dangers des vibrations :	12
9.	Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor :	12
9.1.	Notion de vitesse critique et diagramme de Campbell :	13
10.	Les avantages et les inconvénients des rotors :	14
10.1.	Les avantages :	14
10.2.	Les Inconvénients :	14
11.	Conclusion :	14

Chapitre II : Equations fondamentales de la dynamique du rotor

1.	Introduction :	15
2.	Modélisation du rotor :	15
2.1.	L'arbre :	16
2.1.1.	Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre :	16
2.1.2.	L'énergie cinétique :	19
2.1.3.	Energie de déformation :	20

2.2.	Le disque :	23
2.3.	Paliers :	23
3.	Equation du mouvement :	24
4.	Conclusion :	25

Chapitre III : Modélisation du rotor par la méthode des éléments finis

1.	Introduction :	26
2.	Historique de la M.E.F :	26
3.	Définition :	27
4.	Domaines d'application de la MEF :	27
5.	Avantages de la MEF :	27
6.	Types de problèmes MEF :	28
6.1.	Problèmes d'équilibre statique :	28
6.2.	Problème aux valeurs propres :	28
6.3.	Problèmes liés au temps :	28
6.4.	Problèmes physiques :	29
7.	Modélisation par la méthode des éléments finis :	29
7.1.	La Version h :	30
8.	Elément fini de rotor :	30
8.1.	L'arbre :	30
8.1.1.	Formulation de l'arbre par la méthode des éléments finis :	30
8.2.	Disque :	34
8.2.1.	Détermination des matrices de disque :	35
8.3.	Paliers :	38
8.3.1.	Détermination des matrices dues aux paliers :	38
9.	Equation du mouvement :	39
10.	Résolution de l'équation du mouvement :	40
10.1.	Description du problème aux valeurs propres :	40

11. Conclusion :	40
------------------------	----

Chapitre IV : Résultat et interprétation

1. Introduction :	42
2. Présentation de logiciel :	42
3. Interprétation :	42
3.1. Influence de condition aux limites :	42
3.2. Observations :	46
3.3. Diagramme de Campbell :	47
3.4. Vitesse critiques :	49
3.5. Observations :	51
4. Conclusion :	52
CONCLUSION GENERALE.....	53
Références bibliographiques	

Liste des figures :

Chapitre I : Etude Bibliographie

Figure I. 1:Modèle de rotor Rankine	3
Figure I. 2:Modèle de rotor jeffcott.....	3
Figure I. 3:Présentation d'un rotor simple	4
Figure I. 4:Palier d'un rotor.....	5
Figure I. 5:Modèle d'un palier flexible	6
Figure I. 6:Turboréacteur	6
Figure I. 7:Rotors des turbines	7
Figure I. 8:Eléments d'un turboréacteur	8
Figure I. 9:Effet de balourd	11
Figure I. 10 : Effort de couple	12
Figure I. 11:Diagramme de Campbell	14

Chapitre II : Equations fondamentales de la dynamique du rotor

Figure II. 1:Exemple de rotor avec les paliers A1 et A2	15
Figure II. 2: Coordonnée fixes et mobiles de l'arbre en rotation	17
Figure II. 3:Rotation de l'arbre autour de l'axe OY	17
Figure II. 4: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor	20
Figure II. 5:Amortissements et raideurs des paliers	23

Chapitre III : Modélisation du rotor par la méthode des éléments finis

Figure III. 1 : Différents types des problèmes physiques en éléments finis.....	29
Figure III. 2 : Représentation d'un élément de poutre	30
Figure III. 3 : Degrés de liberté d'un élément d'arbre.	31
Figure III. 4 : Degrés de liberté d'un élément de disque.....	35

Chapitre IV : *Résultat et interprétation*

Figure IV. 1: Eléments d'un rotor.....	47
--	----

Liste des graphes :

Graphe IV 1: Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre appuis-appuis.....	43
Graphe IV 2 : Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre encastré-encastré	44
Graphe IV 3 : Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre appuis-encastré	45
Graphe IV 4: Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre encastré libre	46
Graphe IV 5 : Diagramme de Campbell.....	48
Graphe IV 6 : Évolution de la vitesse critique sur l'axe Ox (ωx)	49
Graphe IV 7: Évolution de la vitesse critique sur l'axe Oy (ωy)	50
Graphe IV 8 : Évolution de la vitesse critique sur l'axe Oz (ωz).....	51

Liste des tableaux :

Tableau IV. 1 : Présentation de l'application	42
Tableau IV. 2: Caractéristiques du rotor symétrique	47
Tableau IV. 3: Eléments de discrétisation.....	48

Liste des symboles :

ω	L'amplitude de mouvement giratoire.
m_{cr}	La vitesse critique.
m_{nf}	La fréquence normale (transversale).
N	Vitesse de rotation du rotor
F_e	Fréquence de rotation du rotor.
m_0	Masse non-équilibrée.
e	Excentricité de la masse.
α	Angle d'inclinaison du disque.
I_{dy}	Moment d'inertie polaire.
I_{dx}	Moment d'inertie diamétral.
E_c	L'énergie cinétique.
E_d	L'énergie de déformation.
δW	Le travail virtuel.
q_i	Les coordonnées généralisées indépendantes.
F_{q_i}	Le vecteur forces généralisées
$\{\dot{Q}\}$	Matrice vitesse rotation.
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$	Vitesse de rotation.
$R(X, Y, Z)$	Repère mobile.
$R(x, y, z)$	Repère fixe.

$\{R_p\}$	Vecteur position.
$\{Q\}$	Matrice de passage du repère fixe au repère mobile.
$\{B\}$	Vecteur déplacement.
ξ	La coordonnée adimensionnelle.
u, v, w	Le déplacement suivant par ox, oy, oz .
ρ	La masse volumique.
C	Le centre géométrique.
$B(x,y)$	Point typique de section.
$[N_u]$	Matrice des fonctions de forme suivant l'axe x .
$[N_w]$	Matrice des fonctions de forme suivant l'axe y .
L_{ae}	La longueur d'un élément de l'arbre
$u^*(y,t)$ et $w^*(y,t)$	Déplacements du centre géométrique (dans le repère mobile).
$\varepsilon_l = \varepsilon_{yy}$	La déformation linéaire en flexion.
σ	Contrainte de flexion.
dv	Élément de volume de l'arbre.
E	Module de Young.
L	La longueur de l'arbre.
I_x et I_y	Moments d'inertie du disque suivant x et y
I_m	Moment d'inertie moyenne.
I_a	Moment d'inertie asymétrique.
e	Épaisseur de disque.

$k_{xx}, k_{zz}, k_{xz}, k_{zx}$	La rigidité des paliers.
$C_{xx}, C_{zz}, C_{xz}, C_{zx}$	L'amortissement des paliers.
λ	Facteur scalaire
p	Amplitude de la grandeur complexe $q(t)$
[M]	Matrice masse.
[C _g]	Matrice gyroscopique.
[C _p]	Matrice d'amortissement due aux paliers
[K _A]	Matrice de raideur de l'arbre.
[K _p]	Matrice de raideur des paliers.
[C _{gA}]	Matrice gyroscopique de l'arbre.
E_{dA}	Énergie de déformation de l'arbre.
E_{cA}	Energie cinétique du disque.
E_{cA}	Energie cinétique de l'arbre.
E_{dR}	Energie de déformation du rotor.

***INTRODUCTION
GENERALE***

INTRODUCTION GENERALE

Dans les secteurs industriels tels que : la mécanique automobile ou industrie mécanique, l'industrie nucléaire, et la mécanique aéronautique, etc. Les machines tournantes sont connues comme des équipements essentiels qui sont souvent trouvées dans différents domaines de la technologie moderne. Elles comprennent deux éléments principaux, une partie fixe s'appelle supports ou paliers et une partie tournante s'appelle le rotor, ils sont destinés pour assurer une fonction bien précise en dynamique des rotors.

La dynamique des rotors est l'étude du comportement vibratoire et de la stabilité des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Deux phénomènes vibratoires en dynamique des rotors sont particulièrement dangereux et peuvent conduire à des niveaux vibratoires inacceptables. Il s'agit des vitesses de rotation critiques et des régimes linéairement instables, dont les conséquences sont souvent catastrophiques (endommagement et rupture).

Le comportement dynamique des rotors est principalement dû aux vibrations de flexion qui peuvent être excitées par plusieurs différentes causes. L'une des causes les plus connues est l'excentricité du centre de gravité de l'arbre tournant induite par une mauvaise distribution de la matière autour de l'axe causant un déséquilibre tout le long de l'arbre.

Pour étudier le comportement dynamique d'un système tournant, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation du rotor. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des roues ou des disques. Dans le cas de la dynamique de l'ensemble, le repère fixe est le plus approprié.

La mise en équation est effectuée par le Lagrangien. Pour l'étude dynamique des rotors, on se place dans le cas des petits déplacements, on suppose que la vitesse de rotation est constante.

Pour réaliser ces études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation, parmi eux la méthode des éléments finis qui prend en considération des particularités géométriques de la structure tournante et de ces propriétés physiques.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude du comportement dynamique vibratoire d'un rotor. Il comprend une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les rotors des machines tournantes industrielles, description, classification ainsi que leurs applications.

Le deuxième chapitre présente les formulations mathématiques des équations de mouvement de la dynamique des rotors.

Troisième chapitre : la modélisation par éléments finis du système tournant et l'obtention de l'équation différentielle définissant le mouvement vibratoire du rotor, et sa résolution.

Le quatrième chapitre traite tous les résultats obtenus par l'application et leurs interprétations.

Chapitre I : Etude
Bibliographie

1. Introduction :

L'étude du comportement dynamique et vibratoire des rotors est un domaine clé de l'ingénierie mécanique qui se concentre sur l'analyse et la compréhension du mouvement et des vibrations des rotors en rotation. Cette discipline est cruciale pour garantir le bon fonctionnement, la fiabilité et la sécurité des machines et des systèmes qui utilisent des rotors, tels que les turbines, les moteurs, les compresseurs et les générateurs.

Avant d'entreprendre l'analyse dynamique du rotor, il est conseillé de fournir une introduction sur le rotor, en expliquant sa définition, son domaine d'application, ainsi que les différents type et classifications qui existent. Ensuite, il est important de présenter une perspective sur les vibrations des rotors et les causes qui les provoquent.

2. Revue aux modelés du rotor Rankine et jeffcott :

La dynamique de rotor a une histoire remarquable du développement, en grande partie due à l'effet entre sa théorie et sa pratique). La dynamique de rotor a été conduite plus par la pratique que par théorie. Ce rapport est particulièrement approprié à l'histoire des débuts de la dynamique de rotor. La recherche sur la dynamique industrielle de rotor enjambe plus de 15 décennies de l'histoire. En 1869, Rankine a exécuté la première analyse d'un axe de rotation (voir la figure I.1). Il a prévu cela au-delà d'une certaine vitesse de rotation, Il a défini cette certaine vitesse en tant que vitesse de tourbillonnement de l'axe.

En fait, il peut montrer qu'au-delà de cette vitesse de tourbillonnement le débattement radial du modèle de Rankine augmente sans limite, qui n'est pas vraie dans la réalité. Cependant, Rankine a ajouté le tourbillonnant au vocabulaire de dynamique de rotor.

Le tourbillonnement se rapporte au mouvement du centre du disque guidé (ou des disques) dans une perpendiculaire d'avion à l'axe de roulement (voir la figure I.2).

Généralement la fréquence du mouvement giratoire, ν , dépend de la rigidité et de l'atténuation du rotor, comme avec le cas de la vibration libre d'un système. L'amplitude de mouvement giratoire est une fonction de la fréquence de la force d'excitation et sa grandeur ω . La vitesse critique m_{cr} se produit quand la fréquence d'excitation coïncide avec la fréquence normale (transversale) m_{nf} du rotor.

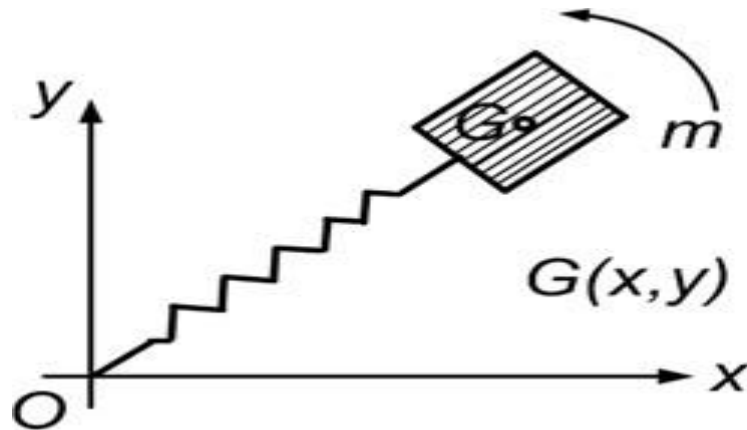


Figure I. 1:Modèle de rotor Rankine [1]

Le système peut mener aux amplitudes excessives de vibration. Rankine a négligé l'accélération de Coriolis dans son analyse, qui a mené à des conclusions incorrectes qui ont confondu les ingénieurs de pratique pour la moitié par siècle. La turbine construite par Parsons en 1884 a fonctionné aux vitesses d'environ 18.000 tr/mn, qui était 50 fois plus rapidement que le moteur existant à ce moment-là. En 1887, l'ingénieur suédois De Laval a développé une turbine à vapeur en une seule étape d'impulsion (voir la figure I.2) (baptisée du nom de lui) pour des applications marines et réussi à l'actionner à 42.000 tr/mn. Il a visé le d'auto-centrage du disque au-dessus de la vitesse critique, un phénomène qu'il a instinctivement identifié. Il a utilisé la première fois un rotor rigide, mais plus tard a utilisé un rotor flexible et a prouvé qu'il était possible d'utiliser au-dessus de la vitesse critique par le fonctionnement à une vitesse de rotation environ sept fois la vitesse. [1]

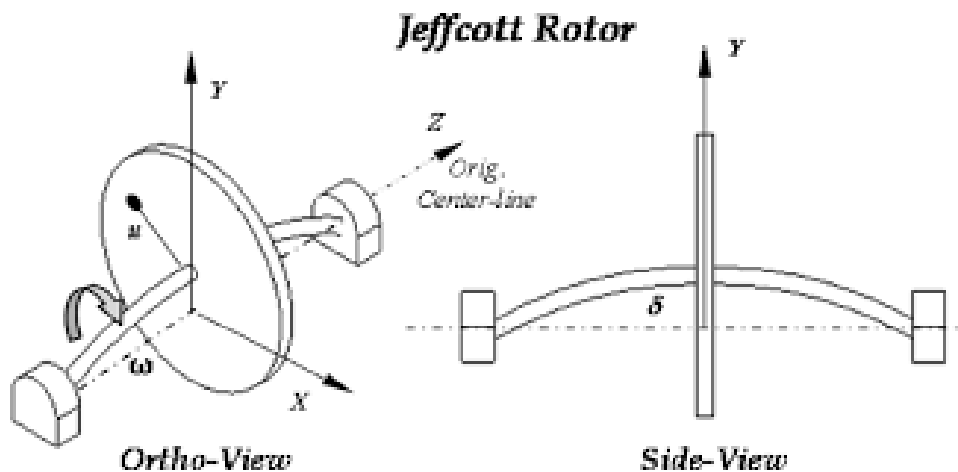


Figure I. 2:Modèle de rotor jeffcott [2]

3. Définition d'un rotor :

Un rotor, est un ensemble de pièces associées à l'arbre de la machine qui tourne autour d'un axe fixe. Le rôle principal des rotors est de transformer la carte de puissance selon les applications prévues (aéronautique, industrie pétrolière, centrale électrique, hydrolysa, électronique, industrie pharmaceutique, ... etc.), souvent composé de plusieurs sections et soumis à des pressions d'origines différentes. [3]

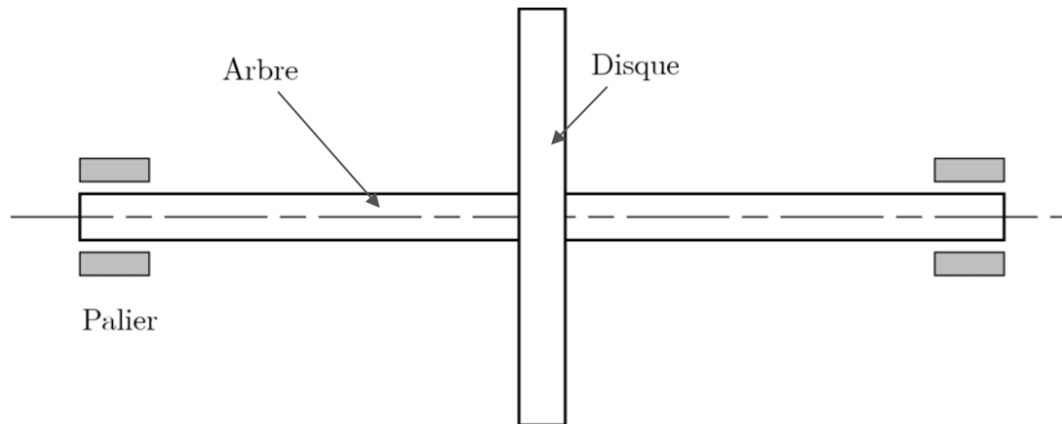


Figure I. 3:Présentation d'un rotor simple [4]

Il y a différentes pièces fonctionnant dans la machine rotative qui sont :

- Les arbres sont les principaux composants des machines rotatives.
- Les éléments de support et de positionnement sont les suivants : paliers hydrauliques, roulements, etc.
- Éléments de transmission : engrenages, boucles, joints d'accouplement, embrayages, etc.
- Les éléments fonctionnels sont les roues, les roulettes, les ventilateurs, etc. [3]

3.1. Disque :

Le disque appelé aussi roue peut être attachée à l'arbre par clavette et peut être déformable ou rigide.

3.2. Arbre :

L'arbre est la pièce maitresse d'une machine tournante. Il peut être seul dans le cas d'un arbre de transmission ou avec disques dans le cas d'une turbine ou turbopropulseur.

3.3. Paliers :

Les paliers ou support assurant le guidage en rotation du système tournant. Il peut être flexible ou rigide

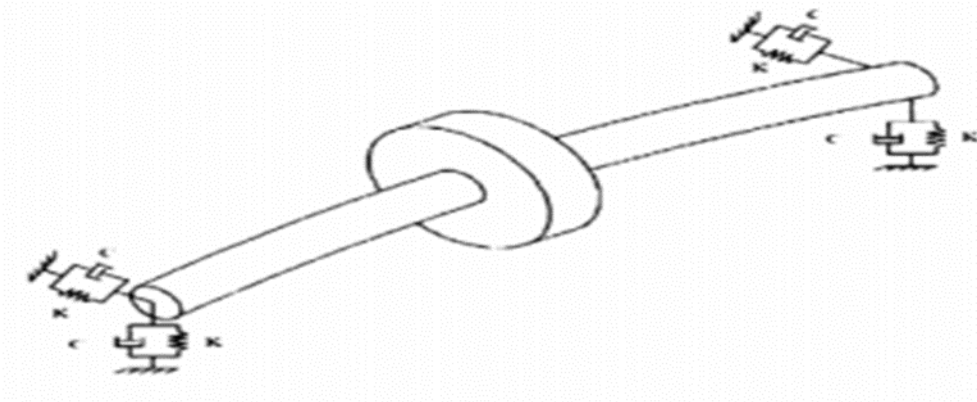


Figure I. 4:Palier d'un rotor [5]

3.3.1. Type des paliers :

Il existe plusieurs types de paliers :

3.3.1.1. Palier rigide :

Si la rigidité du palier est supérieure à la rigidité de l'arbre.

3.3.1.2. Palier flexible :

Si la rigidité du palier est inférieure la rigidité de l'arbre (figure I.5). Les paliers flexibles sont les plus utilisés dans le guidage des rotors surtout ceux tournant à très grandes vitesses. Les paliers flexibles sont de deux types.

3.3.1.2.1. Paliers isotropes :

On appelle palier isotrope si sa rigidité est constante dans toutes les directions : $K_{xx} = K_{zz} = K_{xz} = K_{zx}$, c'est-à-dire que la réaction qu'il applique sur le rotor pendant sa rotation est identique de toutes les directions.

3.3.1.2.2. Paliers anisotropes :

Lorsque la rigidité du palier est différente d'une direction à une autre, le palier est dit anisotrope : $K_{xx} \neq K_{zz} \neq K_{xz} \neq K_{zx}$. [5]

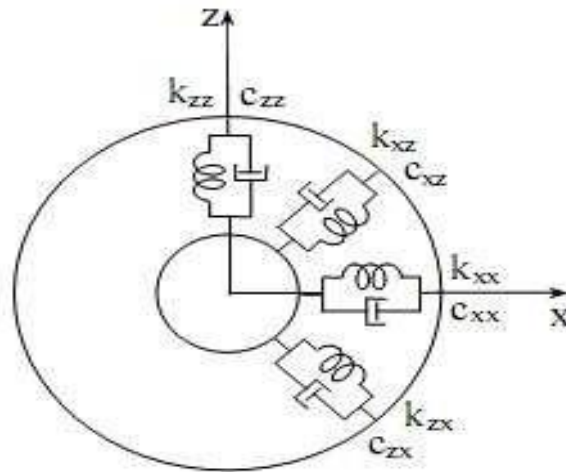


Figure I. 5:Modèle d'un palier flexible [6]

Les coefficients de rigidité et d'amortissement sont obtenus après linéarisation des forces hydrodynamiques (problème mécanique de fluide) au palier. Ces coefficients dépendent de :

- La nature du lubrifiant (viscosité).
- La vitesse de rotation. - etc.... [7]

4. Domaines d'utilisation :

Les rotors sont utilisés dans différentes domaines en citant :

4.1. Aéronautique :

L'arbre et l'hélice dans les moteurs d'avions à hélices, l'arbre et les disques des turboréacteurs des avions de transports. [7]

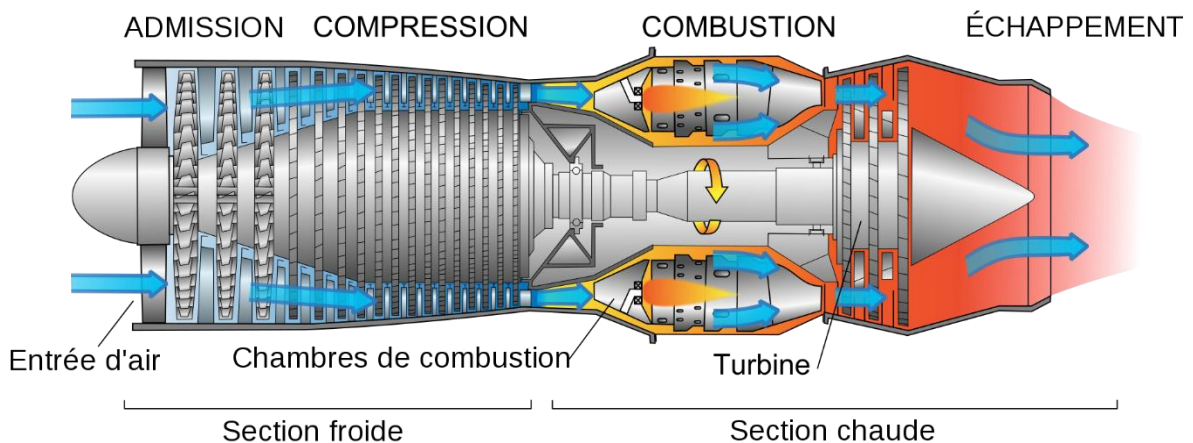


Figure I. 6:Turboréacteur [8]

4.2. Moteurs et turbines :

Le rotor est un arbre portant des disques sur lesquelles, les pales sont installées pour assurer la fonction d'aspiration, de compression, et d'échappement des machines turbocompresseurs. [7]

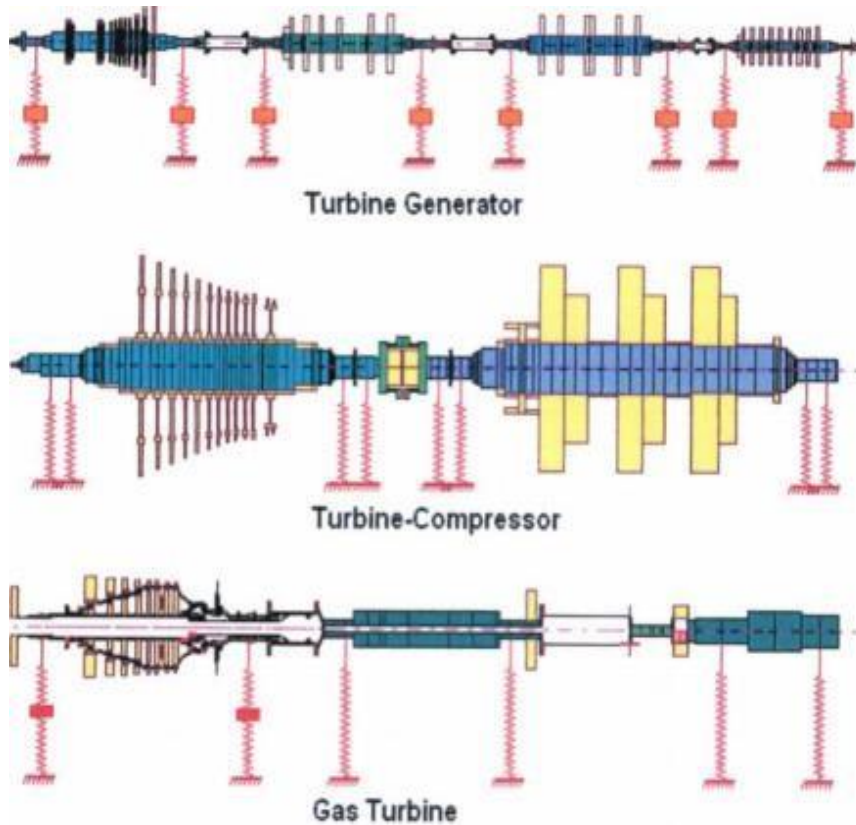


Figure I. 7:Rotors des turbines [7]

5. Type de rotor :

Il existe deux types de rotors :

5.1. Rotor rigide :

La déformation de l'arbre rotatif est négligeable dans la plage des vitesses de fonctionnement.

5.2. Rotor flexible :

L'arbre se déformé remarquablement à une certaine vitesse. On ne peut pas dire si un rotor est rigide ou flexible par considération seulement de ses dimensions. Car la déformation d'un rotor devienne très élevée à proximité de la vitesse critique (vitesse de résonance). Alors la plage de vitesse relative à ces vitesses critiques détermine si le rotor est rigide ou flexible. [5]

6. Classifications des rotors :

Un rotor est souvent constitué par un arbre tournant qui peut porter un ou plusieurs disques. On peut les classer suivant les éléments principaux de rotor (arbre, disque, support) on peut classer les rotors industriels selon deux paramètres.

6.1. Selon le paramètre géométrique :

6.1.1. Modèle usuel à long arbre :

Les dimensions de l'arbre sont plus grandes par rapport à celles du disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur, ...etc.). La majorité des travaux de recherche concernant l'étude du comportement vibratoire et dynamique des machines industrielles sont focalisées sur ce modèle.

6.1.2. Modèle de disque rotor :

Les dimensions du disque sont plus grandes par rapport à celles de l'arbre. Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement dynamique de quelques machines industrielles par exemple, turbine hydraulique, machine à poinçonner....

6.1.3. Modèle de rotor aubage :

Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubage (hélicoptère, aérogénérateur, fan de turboréacteur, soufflerie industrielle...etc.). [3]

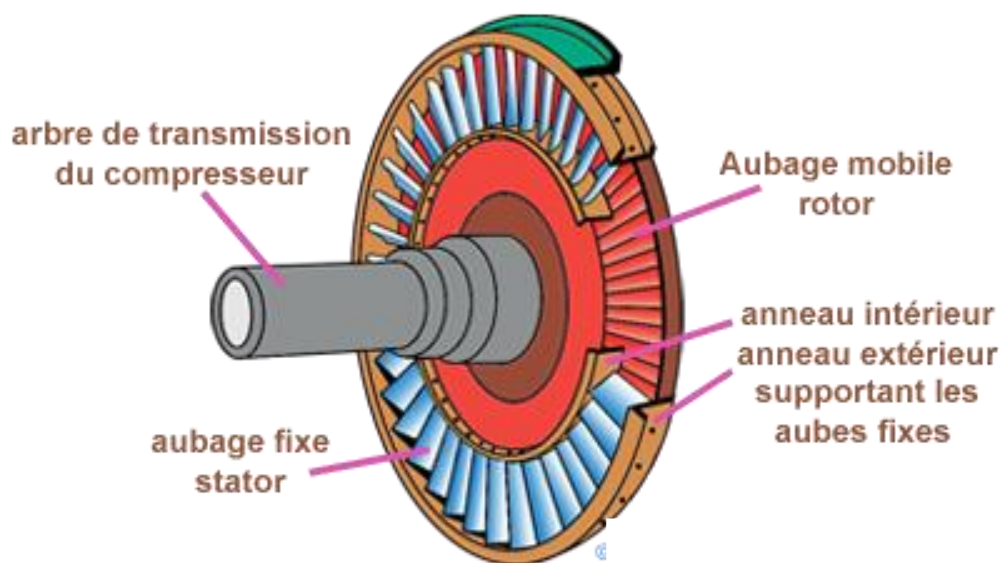


Figure I. 8:Eléments d'un turboréacteur [9]

L'étude du comportement dynamique de ce modèle reste assez compliquée, car le mode vibratoire du rotor est lié aux différents phénomènes combinatoires (aérodynamique, aéroélasticité, hydrodynamique...etc.).

6.1.4. Modèle de rotor libre :

Ce modèle de rotor ne comporte aucun système de suspension (roulements, support). Les chercheurs se sont intéressés ces dernières années au développement et à l'étude du comportement dynamique des missiles et des satellites géostationnaires.[3]

6.2. Suivant les paramètres mécaniques :

6.2.1. Modèle de rotor rigide :

Un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre. Outre la simplicité du modèle découlant d'une telle hypothèse, la réalisation des calculs pour un rotor rigide est intéressante d'un point de vue de dimensionnement de bâti. En effet, puisque les éléments tournants ne se déforment pas, la charge dynamique est entièrement transmise au palier.

6.2.2. Modèle de rotor de Jeffcott :

C'est un modèle simple utilisé pour étudier le comportement dynamique en flexion des rotors industrielle, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopiques. Leur comportement dynamique a été étudié par Jeffcott en 1919 ce modèle est très souvent utilisé par les chercheurs dans un but phénoménologique, car il permet une interprétation plus directe de l'influence de quelque phénomène sur le comportement dynamique du système tournant.

6.2.3. Modèle de rotor réel :

La combinaison entre le modèle de rotor rigide et le modèle de rotor de Jeffcott ne représente que de manière très approximative la dynamique d'un rotor réel, par contre le modèle de rotor flexible est proche du réel quand il tourne avec des vitesses supérieures à la première vitesse critique. [10]

7. Liaison palier-rotor :

Prenant compte le facteur rigidité entre le rotor et ses paliers, on distingue les quatre cas possibles pour un modèle du rotor :

7.1. Rotor rigide palier rigide :

Quand la rigidité des paliers et du rotor n'est influencée ni par les efforts d'excitation ni par les efforts résultant de rotation du système.

7.2. Rotor rigide palier flexible :

Lorsque la rigidité du rotor est nettement supérieure à la rigidité des paliers et que les efforts d'excitation ne déforment que les paliers.

7.3. Rotor flexible palier rigide :

On dit que le rotor est considéré flexible, lorsqu'il se déforme dans son état d'exploitation, sous l'effet des efforts dû à la rotation du système. Alors que ses paliers restent rigides.

7.4. Rotor flexible palier flexible :

Dans ce cas le système complet se déforme sous les efforts dus à la rotation du système, donc on dit que le rotor et les paliers sont flexibles. Les rotors sont souvent soumis à un effet gyroscopique (effet de Coriolis). Cet effet est d'autant plus ressenti dans le cas de modèle de rotors flexibles-paliers flexibles.

8. Vibration des rotors :

Les vibrations est un problème de préoccupation perpétuelle pour les fabricants des machines rotatives en raison de leur rôle central dans la performance, la sécurité et la fiabilité des machines. [7]

8.1. Causes des vibrations :

Ces vibrations sont nuisibles et indésirables, en particulier dans le cas des rotors tombants à vitesse élevée. On cite les principales causes :

8.1.1. Effort de balourd :

Dus aux couples massiques non équilibrés (m_0e) (figure I.9). Cet effort est de la forme :

$$F(t) + m_0e\Omega^2\sin(\Omega t) = 0 \quad \Omega = 2\pi\left(\frac{N}{60}\right) \quad f_r = \left(\frac{N}{60}\right) \quad (1.1)$$

N : Vitesse de rotation du rotor (t/min).

Ω : pulsation du rotor (t/min).

f_r : Fréquence de rotation du rotor (Hz).

m_0 : Masse non-équilibrée (kg).

e : Excentricité de la masse.

Cet effort est synchrone, sa pulsation égale à la pulsation de rotation du rotor, et son intensité varie avec le carré de la variation de la pulsation de rotation du rotor. Les efforts de balourd sont les plus dangereux à cause des vibrations excessives qui peuvent engendrer à la résonance. [7]

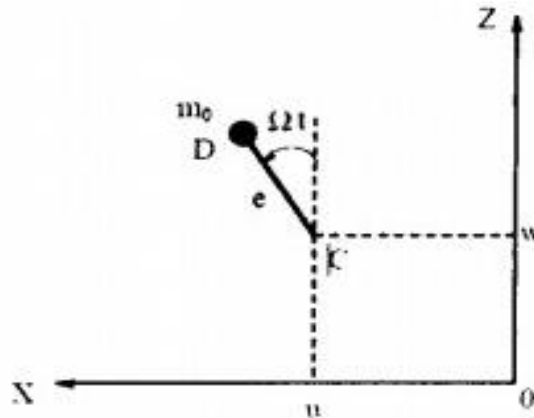


Figure I. 9: Effet de balourd [7]

8.1.2. Couple gyroscopique :

Ce couple est, généralement, dû à la non perpendicularité du disque par rapport à l'axe de rotation du rotor. Ce couple se traduit par deux réactions tournantes, de même intensité et de sens opposés aux niveaux des paliers. Les projections de ces réactions sur les axes X et Z sont synchrones, leur module varie en fonction du carré de la pulsation de rotation.

$$\begin{aligned} R_{xz}(t) &= \frac{(I_{dy} - I_{dx})}{2l} \sin(2\alpha) \Omega^2 * \sin(\Omega t) \\ R_{xz}(t) &= \frac{(I_{dy} - I_{dx})}{2l} \sin(2\alpha) \Omega^2 * \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

α : Angle d'inclinaison du disque $\alpha = (\widehat{y, Y})$.

I_{dy} : Moment d'inertie polaire (m^4).

I_{dx} : Moment d'inertie diamétral (m^4).

L : Longueur entre paliers (m). [7]

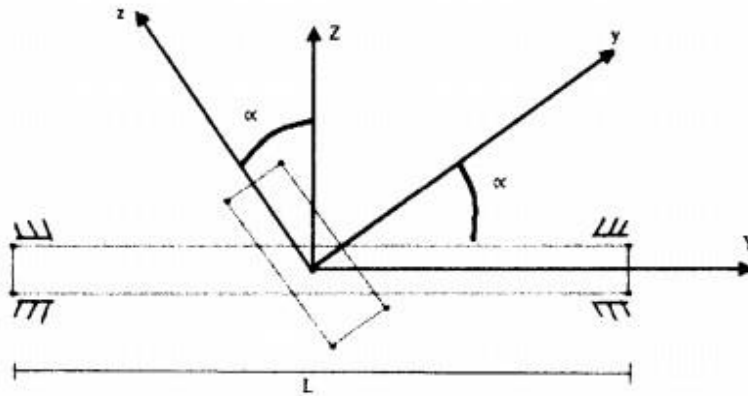


Figure I. 10 : Effort de couple [7]

8.1.3. Déformation de l'arbre du rotor :

La déformation de l'arbre se trouve la plupart du temps dans les grands systèmes de rotation, cette déformation crée un arc dans l'arbre, alors une force d'un déséquilibre massique synchrone apparaît dans le système, d'où elle a une relation directe avec la vitesse de rotation du rotor. [7]

8.2. Les dangers des vibrations :

Les dangers des vibrations peuvent être mortels pour les personnes et catastrophique du côté matériel. Ces vibrations sont excessives au voisinage des vitesses critiques raison de quoi chercher ces vitesses dans un système rotatif. De plus la surveillance de ces vibrations est un objectif indispensable dans le domaine d'industrie pour la sécurité et la réduction des pannes qui influent directement ou à long terme sur les machines. [7]

9. Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor :

Toute machine tournante en fonctionnement génère des vibrations dont les amplitudes dépendent essentiellement :

- De la géométrie du rotor ;
- De la raideur des paliers ;
- De l'amortissement des paliers.
- Des propriétés mécaniques constituant l'arbre du rotor.
- De la vitesse de rotation du rotor. [7]

L'étude du comportement dynamique et vibratoire d'un rotor peut être faite pour déterminer les vitesses critiques et trouver les plages de fonctionnements de ces rotors sans vibrations excessifs ou pour faire une étude de stabilité. [7]

9.1. Notion de vitesse critique et diagramme de Campbell :

L'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin de XVIII siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley. Il définit alors la vitesse critique comme une vitesse dangereuse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournant, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés. De nos jours la notion de vitesse critique a évolué d'une manière à se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant « la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences vibratoires propres du système tournant ». [7]

L'analyse dynamique de système montre que pour un système (rotor) en rotation, les modes propres dues aux effets gyroscopiques ont des formes complexes deux à deux conjugués et dont les pulsations et les fréquences sont purement imaginaires avec une forte dépendance de la vitesse de rotation Ω . Ce dernier permet nous de construire un utile de base pour déterminer les vitesses critiques de façon à tracer le graphe représentant l'évolution de fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation, ce graphe s'appelle le diagramme de Campbell.

Le diagramme de Campbell illustré sur la figure I.11 est caractérisé un rotor axisymétrique. La fréquence propre au repos est double : du fait de la symétrie, il existe deux modes de vibration de déformées identiques qui sont dans deux plans orthogonaux qui s'intersectent sur l'axe longitudinal du rotor. Lorsque les forces gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à un mode direct excitable par la force de balourd et un mode rétrograde non sollicité par l'excitation synchrone.

L'excitation majeure par les forces synchrones des balourds, permet de détecter les phénomènes de résonance et donc les vitesses critiques en reportant la droite d'équation $f = \Omega$, appelée droite d'excitation synchrone, sur le diagramme de Campbell. Les points d'intersection avec les courbes des fréquences propres directes fournissent les vitesses auxquelles les résonances ont lieu donc les vitesses critiques de système. Les points d'intersection avec les fréquences propres rétrogrades n'ont pas d'intérêt à première vue puisqu'elles ne peuvent être excitées par un balourd. [10]

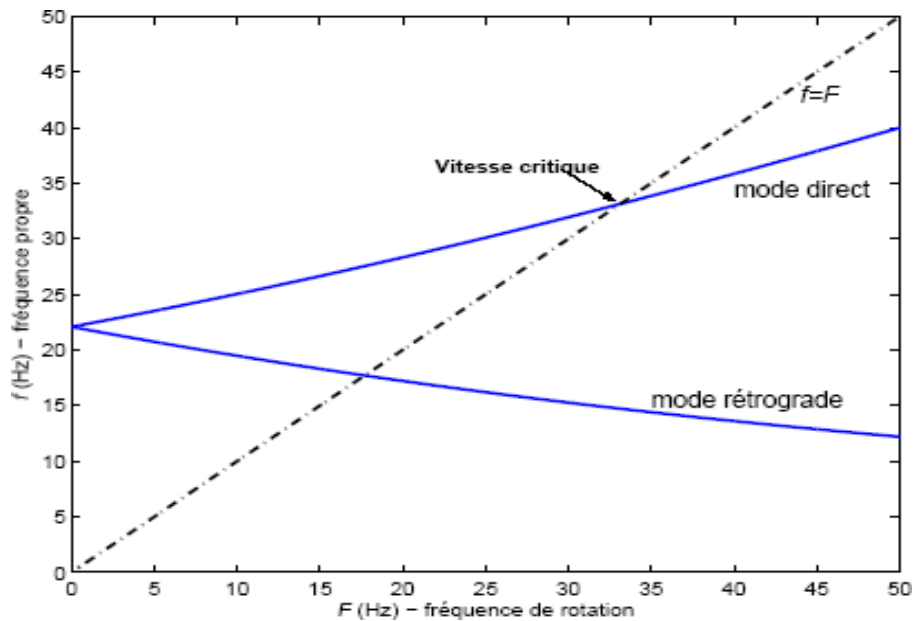


Figure I. 11: Diagramme de Campbell [10]

10. Les avantages et les inconvénients des rotors :

10.1. Les avantages :

Le rotor génère un mouvement rotatif à vitesse élevée afin de maximiser la puissance de sortie qu'elle conduit à :

- Un rendement plus élevé, donc une meilleure performance.
- Une énergie cinétique plus grande, donc plus d'utilité et d'efficacité dans tous les domaines.

10.2. Les Inconvénients :

Le mouvement de rotation génère des vibrations qui sont nuisibles au bon fonctionnement des rotors et des machines tournantes en générale.

Ces vibrations peuvent conduire à des avaries entraînant des dysfonctionnements du système tournant. [7]

11. Conclusion :

Ce chapitre vise à fournir un rappel des notions et des définitions essentielles concernant les rotors et leurs composants (tels que l'arbre, le disque et les paliers), ainsi que leurs domaines d'application et leurs classifications. De plus, il aborde les causes des vibrations et les risques associés. L'objectif de ce chapitre est de donner une vue d'ensemble du domaine d'étude.

Chapitre II :

*Equations fondamentales de
la dynamique du rotor*

1. Introduction :

Les équations fondamentales de la dynamique du rotor constituent un ensemble d'équations mathématiques essentielles qui décrivent le comportement et les mouvements d'un rotor en rotation. Ces équations permettent de comprendre et de prédire les réponses dynamiques, les vibrations, les contraintes et les déformations subies par un rotor dans diverses applications industrielles.

Cette partie se concentre sur le développement des équations du mouvement afin de prédire le comportement dynamique d'un rotor. Elle commence par examiner les caractéristiques de chaque élément constituant un rotor.

2. Modélisation du rotor :

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle Éléments Finis à usage plus général.

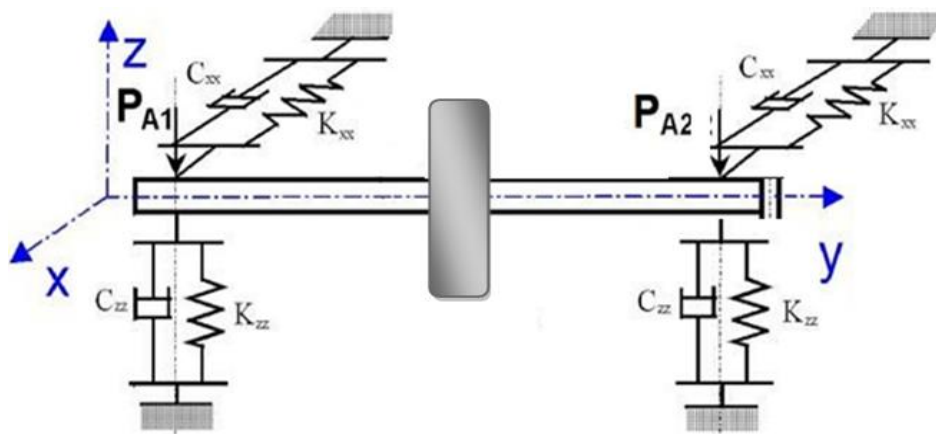


Figure II. 1:Exemple de rotor avec les paliers A1 et A2 [3].

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, le disque et les paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque (figure II.1). L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre, le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- L'énergie cinétique E_C , l'énergie de déformation E_D et le travail virtuel δW sont calculés pour tous les éléments de système.
- Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.

➤ Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement.

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = Fq_i \quad (2.1)$$

q_i : sont les coordonnées généralisées indépendantes et Fq_i : est le vecteur forces généralisées.

2.1. L'arbre :

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérise par ses énergies cinétique et potentielle. [3]

2.1.1. Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre :

Le repère mobile d'un arbre en rotation possède en général trois composantes de vitesse et sa matrice vitesse de rotation est définie par $\dot{\phi}$: [11]

$$\{\dot{\phi}\} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Avec : Ω_1 : vitesse de rotation autour de l'axe ox

Ω_2 : vitesse de rotation autour de l'axe oy

Ω_3 : vitesse de rotation autour de l'axe oz

Soient deux repères $R(X, Y, Z)$ un repère mobile, et un repère $r(x, y, z)$ un repère fixe.

La rotation de l'arbre s'effectue autour de l'axe OY (repère mobile) et oy (repère fixe) qui sont confondus et la matrice vitesse de rotation peut s'écrire sous la forme suivante.

On pose :

$$\Omega = \Omega_2 \quad (2.3)$$

$$\{\dot{\phi}\} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La position d'un point p de la section droite de l'arbre par rapport au repère fixe est donnée par le vecteur position $\{R_p\}$. [12]

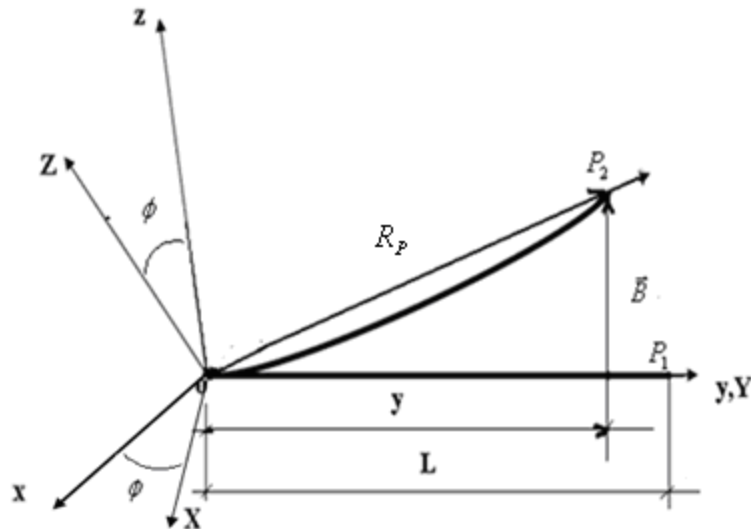


Figure II. 2: Coordonnée fixes et mobiles de l'arbre en rotation [12]

P_1 : point avant déformation.

P_2 : point après déformation.

$$\{R_p\} = \{y\} + \{B\} \quad (2.5)$$

La position d'un point p de la section droite de l'arbre par rapport au repère mobile est donnée en fonction de la matrice de passage $\{Q\}$ du repère fixe au repère mobile.

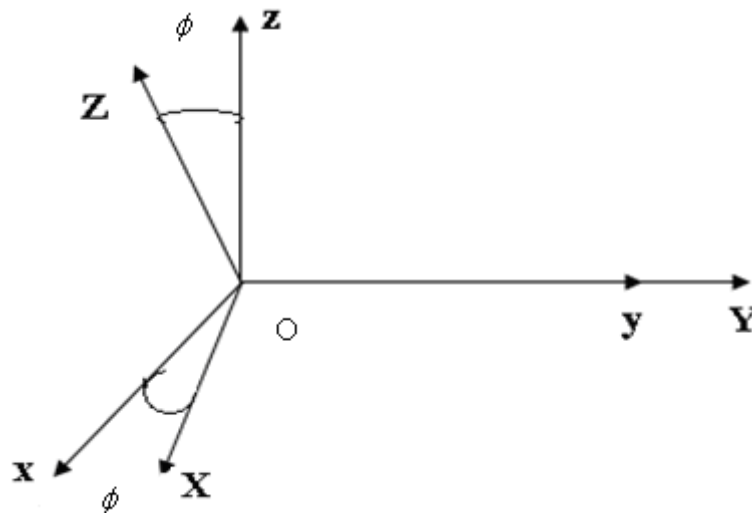


Figure II. 3: Rotation de l'arbre autour de l'axe OY [12].

$$\vec{r}_p = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\vec{R}_p = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Soient $\{r_p\}$ vecteur position de P_2 dans le repère mobile et $\{R_p\}$ vecteur position dans le repère fixe, la position d'un point dans le repère fixe est donnée par la relation suivante :

$$\{r_p\} = [Q]\{R_p\} \quad (2.8)$$

Où $[Q]$ est la matrice de passage du repère mobile au repère fixe.

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La dérivée par rapport au temps donne :

$$\{\dot{r}_p\} = [\dot{Q}]\{R_p\} + [Q]\{\dot{R}_p\} \quad (2.10)$$

La dérivée de la matrice de transformation est donnée par :

$$[\dot{Q}] = \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (2.11)$$

En substituant $[\dot{Q}]$ dans la relation (2.10) on a :

$$\{\dot{r}_p\} = \dot{\phi} \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} \{R_p\} + [Q]\{\dot{R}_p\} \quad (2.12)$$

En substituant R_p dans la relation (2.11) :

$$\{\dot{r}_p\} = \dot{\phi} \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) + [Q]\{\dot{B}\} \quad (2.13)$$

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\{B\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Avec : u : le déplacement suivant la direction ox

v : le déplacement suivant la direction oy

w : le déplacement suivant la direction oz

2.1.2. L'énergie cinétique :

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est définie par l'expression suivante :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\} dv \quad (2.15)$$

En substituant $\{\dot{r}_p\}$ par sa valeur donnée (2.13) dans la relation (2.15) on obtient :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_v \left(\phi \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) + [Q] \{\dot{B}\} \right)^T \left(\phi \frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) + [Q] \{\dot{B}\} \right) dv \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} E_{CA} &= \frac{1}{2} \rho \phi \int_v \left(\frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right)^T \left(\frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right) dv \\ &+ \frac{1}{2} \rho \phi \int_v \left(\frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right)^T ([Q] \{\dot{B}\}) dv \\ &+ \frac{1}{2} \rho \phi \int_v ([Q] \{\dot{B}\})^T \left(\frac{\partial [Q]}{\partial \phi} (\{y\} + \{B\}) \right) dv + \frac{1}{2} \rho \int_v ([Q] \{\dot{B}\})^T ([Q] \{\dot{B}\}) dv \end{aligned}$$

(2.17)

En négligeant les termes qui sont fonction du déplacement longitudinal $\{y\} = 0$, la forme de l'énergie cinétique de l'arbre est donnée par :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] [\phi] \{B\} dv + \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv + \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (2.18)$$

Notre étude est sans de rigidification centrifuge, donc l'énergie cinétique de l'arbre a la forme finale :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv + \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (2.19)$$

Avec le premier terme qui contribue à la formation la matrice masse et le dernier terme à la matrice gyroscopique. [12]

2.1.3. Energie de déformation :

L'énergie de déformation ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre. Dans ce calcul, le disque est supposé par hypothèse comme rigide, seules les déformations dues à la flexion de l'arbre sont prises en compte, l'arbre pour ce rotor est modélisé par :

Les notations suivantes sont utilisées (figure II.4) :

C est le centre géométrique de l'arbre, B (x,z) est un point typique de section.

Soient $u^*(y,t)$ et $w^*(y,t)$ sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes x et z (dans le repère mobile). [3]

Le déplacement d'un point de la section droite s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.

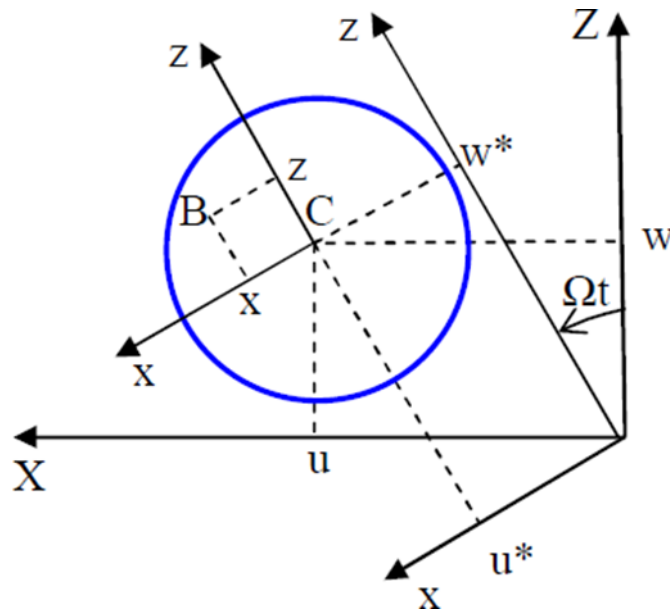


Figure II. 4: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor [7]

Les projections d'un point de la section droite déformée sur le repère fixe

$$\begin{cases} u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* = u \sin \Omega t - w \cos \Omega t \end{cases} \quad (2.20)$$

La déformation linéaire en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées x et z dans le repère lié à l'arbre est :

$$\epsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2.21)$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon_l \sigma dv \quad (2.22)$$

σ : Contrainte de flexion.

dv : Élément de volume de l'arbre.

La relation entre contrainte et déformation est :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_l \quad (2.23)$$

E : Module de Young.

ε_l : Déformation linéaire.

L'énergie de déformation E_{dA} prend la forme :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_v (\varepsilon_l^2) dv \quad (2.24)$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_{-L}^L \int_s \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (2.25)$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_{-L}^L \int_s \left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (2.26)$$

Par symétrie le troisième terme de l'intégrale (2.26) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \int_s z^2 dS \quad (2.27)$$

$$I_z = \int_s x^2 dS$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_{-L}^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.28)$$

En remplaçant u^* et w^* par leurs valeurs (2.20) dans (2.28) :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_{-L}^L \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.29)$$

En prenant en considération de la relation :

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{I_x + I_z}{2} \\ I_a &= \frac{I_x - I_z}{2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

L'énergie de déformation de l'arbre en fonction des relations (2.30) :

$$\begin{aligned} E_{dA} &= \frac{E}{2} \int_{-L}^L \left[(I_m - I_a) \left(\cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \right] dy \\ &\quad + \frac{E}{2} \int_{-L}^L \left[(I_m + I_a) \left(\cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \right] dy \end{aligned} \quad (2.31)$$

En développant les termes en moment d'inertie moyen et moment d'inertie asymétrique :

$$\begin{aligned} E_{dA} &= \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_m \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_m \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2I_m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right. \\ &\quad \left. - I_a \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - I_a \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2I_a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right. \\ &\quad \left. + I_m \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_m \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2I_m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right. \\ &\quad \left. + I_a \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_a \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2I_a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right] dy \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} E_{dA} &= \frac{E}{2} \int_{-L}^L \left[I_m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 (\cos \Omega t - \sin \Omega t) \right. \\ &\quad \left. + I_a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 (\cos \Omega t - \sin \Omega t) + 4I_a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (\cos \Omega t - \sin \Omega t) \right] dy \end{aligned} \quad (2.33)$$

En tenant compte qu'on est en présence d'un arbre symétrique :

$$I_x = I_z \text{ donc } I_a = 0$$

Finalement, l'énergie de déformation de l'arbre prend la forme suivante :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^L I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (2.34)$$

2.2. Le disque :

Le disque d'épaisseur e est supposé rigide, seule son énergie cinétique est considérée.

L'expression de l'énergie cinétique du disque est donnée par analogie avec celle de l'arbre et qui peut s'écrire : [12]

$$E_{cD} = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (2.35)$$

2.3. Paliers :

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés (Figure II.5). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre par rapport au support. Le travail virtuel δW_p , des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme : [3]

$$\begin{aligned} \delta W_p = & k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w \\ & - c_{zx} \dot{u} \delta w \end{aligned} \quad (2.36)$$

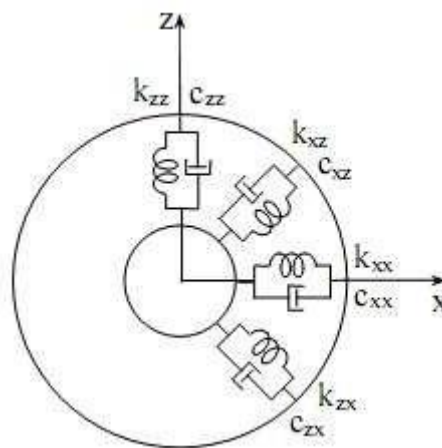


Figure II. 5:Amortissements et raideurs des paliers [6]

Ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta q_w \quad (2.37)$$

Où F_u et F_w sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (figure II.6). En utilisant les deux équations (2.36) et (2.37) il vient :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

[3]

En général les termes de raideur et d'amortissement sont différents, Pour cette étude on suppose que les termes de raideur verticales, horizontales et croisés sont égaux :

$$K_{xx} = K_{yy} = K_{xy} = K_{yx} \quad (2.39)$$

Et les termes d'amortissement verticales, horizontales et croisés sont égaux :

$$C_{xx} = C_{yy} = C_{xy} = C_{yx} \quad (2.40)$$

L'équation (2.39) montre que, si $k_{xx} \neq k_{zz}$ la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations. [12]

3. Equation du mouvement :

Tous les systèmes physiques sont continus représentant un nombre des degrés de liberté finie. Soit une modélisation simple de système tournant : rotor + disque. On considère les déformations de l'arbre libre dans le plan YOX et YOZ. On suppose que la courbure dans la poutre est constante pour $0 \leq Y < L$.

Pour simplifier le problème, on adopte pour notre étude un système de poutre d'Euler Bernoulli avec deux nœuds. [3]

On doit tenir compte des approximations suivantes :

- L'arbre est déformable.
- Le disque est rigide.
- Le rotor tourne avec une vitesse constante
- On se place dans de cas d'Euler Bernoulli.

4. Conclusion :

Les équations du mouvement du rotor sont bien développées dans ce chapitre. Issus de l'élaboration analytique des équations de mouvement régissant tout système tournant déformable, nous concentrons nos études sur un simple rotor en déterminant leurs énergies cinétique et potentielle. Enfin en simplifiant l'équation de Lagrange est bien adaptée pour trouver l'équation du mouvement.

*Chapitre III : Modélisation du
rotor par la méthode des
éléments finis*

1. Introduction :

La méthode des éléments finis est connue parmi les méthodes les plus importantes et le plus efficace pour modéliser et résoudre les problèmes complexes dans les sciences de l'ingénieur, et en particulier en dynamique des rotors. Dans ce chapitre, les équations du mouvement du rotor sont développées selon cette approche en élucidant les matrices fondamentales des différents éléments du rotor (arbre, disque, paliers). Après avoir introduit les éléments de modélisation dans le rotor, il semble trivial de considérer des manières intéressantes de résoudre le système. Après avoir introduit les éléments de modélisation dans le rotor, il semble intéressant d'envisager des façons de résoudre le système d'équations obtenu.

2. Historique de la M.E.F :

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formation énergétique de la mécanique des structures dont la formulation des théorèmes énergétiques de l'élasticité a été effectuée au siècle dernier, en 1819 NAVIER définit une méthode d'étude des systèmes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité par MAXWELL en 1864 et CASTIGLIANO en 1878. Et d'autre part les méthodes d'approximation, c'est au début du 20^{ème} siècle qu'ont été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de RITZ en 1902 et de GARLEKIN en 1915 puis en 1943 COURANT établit les bases de la M.E.F. En 1954 DENKE systématise la méthode des forces. En fin de 1955 AGURIS présente une approche unifiée des méthodes de déplacement et des forces, puis l'année suivante TURNER et CLOUTH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements, ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes.

Dès lors, on laisse au développement de nouveaux éléments tels que membranes, plaques, coques. Par ailleurs le domaine d'application de la M.E.F limité au début à la statique linéaire s'étend maintenant à la dynamique. Cette histoire perçut incomplète si l'on omet de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse, à partir de années 60, ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement abouti à faire rentrer la M.E.F dans la pratique industrielle. Il est certain que d'une part, la M.E.F se prête bien à la programmation sur ordinateur (les procédures numériques peuvent être rendues automatiques et modulaires) et que d'autre part, la M.E.F se caractérise par son universalité et son adoptabilité au traitement des problèmes les plus divers. [1]

3. Définition :

La méthode des éléments finis est l'une des outils des mathématiques appliquées. Il s'agit d'un problème de construction d'un algorithme de mathématiques discrets qui cherche des solutions approchées et/ou des intérieurs compacts d'équations aux dérivées partielles (ou EDP) sur des domaines compacts avec des conditions de bord, en utilisant des principes hérités de formulations oscillatoires ou faibles. [13]

4. Domaines d'application de la MEF :

- Analyse structurale, transfert de chaleur, mécanique des solides, fluides, électromagnétisme, écoulement souterrain, combustion, diffusion polluante, etc... [14]
- Les principaux domaines d'application de MEF sont les trois suivants :
 - Problèmes d'équilibre et de statique : le comportement du système ne change pas dans le temps,
 - Problèmes de dynamique et de stabilité (valeurs propres) : Ce sont des extensions des problèmes d'équilibre où l'on détermine des valeurs spécifiques ou critiques pour certains paramètres,
 - Problèmes de propagation : ils traitent de phénomènes dont le comportement dépend de facteurs temporels. [15]

5. Avantages de la MEF :

La MEF est général et présente les avantages suivants par rapport aux autres méthodes numériques :

- Applicable à tout type de problèmes dans les champs, analyse des contraintes, transfert de chaleur, etc.,
- Il n'impose aucune contrainte géométrique, le corps ou domaine à modéliser peut avoir n'importe quelle forme,
- Aucune restriction sur les conditions aux limites et les types de charge,
- Il n'y a aucune restriction sur les propriétés du matériau. Par conséquent, ces propriétés ne se dégradent pas jusqu'à l'isotropie et peuvent varier d'un élément à l'autre,
- Il est possible de combiner des éléments (modèles mathématiques) avec différents comportements (tels que des ossatures de murs dans des structures 3D), de sorte qu'un seul modèle d'éléments finis (EF) peut contenir des barres, des poutres, des plaques, etc.

- La structure modélisée par élément fini représente la possibilité de la structure réelle ou du domaine à analyser.
- L'approximation peut être facilement améliorée en développant la taille du maillage en augmentant le nombre d'éléments. [15]

6. Types de problèmes MEF :

Trois grands types de problèmes peuvent être résolus par la méthode des éléments finis :

6.1. Problèmes d'équilibre statique :

Dans ce type de problème, le comportement est défini comme un système d'équations linéaires à variables nodales en termes d'état, de géométrie, de charges et de conditions aux limites du système. Cette catégorie comprend l'équilibre statique et le flux constant, le transfert de chaleur et les états électromagnétiques.

6.2. Problème aux valeurs propres :

Ce sont des vibrations instables ou des phénomènes statiques. Les modes naturels de vibration, le flambement des structures ou les instabilités de l'écoulement laminaire entrent tous dans cette catégorie.

6.3. Problèmes liés au temps :

Si l'état d'un système dépend de son historique ou de paramètres de sortie, le système devient interdépendant et ne peut pas être résolu directement. Ces cas incluent le comportement non linéaire (matériaux et géométrie), la dynamique non linéaire (amortissement, rigidité, etc.), les transitoires et les fissures dans les pièces. [5]

6.4. Problèmes physiques :

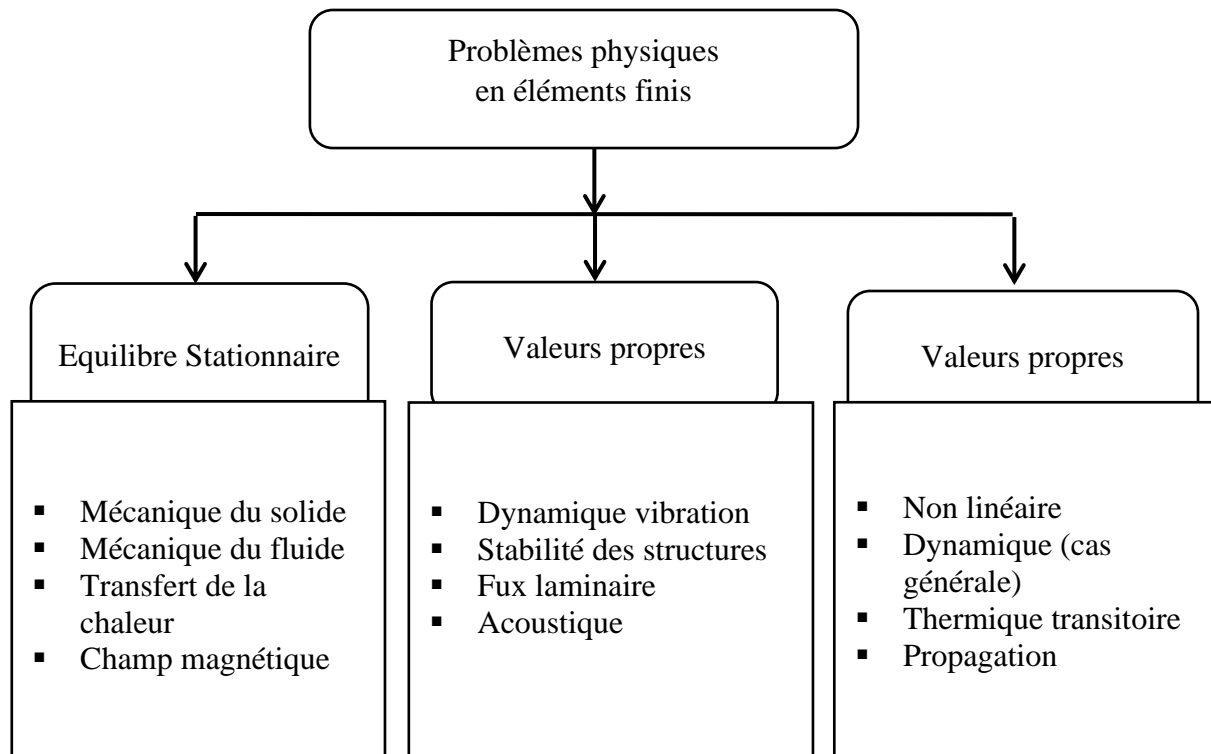


Figure III. 1 : Différents types des problèmes physiques en éléments finis. [5]

7. Modélisation par la méthode des éléments finis :

Les calculs par éléments finis ont incité de nombreux scientifiques à étudier cette méthode, qui repose sur deux types de versions différentes et leurs combinaisons, qui sont :

- ❖ **Versión h** : dans cette version le nombre de fonction de forme est fixé pour chaque élément et les fonctions de formes sont des polynômes linéaires.
- ❖ **Versión p** : appelée aussi méthode des éléments finis hiérarchique –MEF, les degrés des fonctions polynomiales peuvent être augmenté tout en gardant la taille de la maille constante, généralement le degré polynomial est noté par ‘P’ cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide.
- ❖ **Versión h-p** : Une approximation d’éléments finis est dite hiérarchique si le passage du nœud ‘1’ au nœud ‘2’ ne modifie pas les fonctions de formes, cette formulation présente plusieurs avantages.

Beaucoup de chercheurs scientifiques se sont concentrés sur ce chemin et ont créés plusieurs codes d’éléments finis. [16]

7.1. La Version h :

La méthode des éléments finis a une très large gamme d'applications en génie mécanique, telles que : l'automobile, la construction navale et la construction aérospatiale et aéronautique.

Une caractéristique de la méthode des éléments finis est que le domaine dans lequel la solution est recherchée est divisé en sous-domaines appelés "éléments finis". Les inconnues telles que les déplacements sont représentées au sein de chaque élément par des polynômes appelés "fonctions de forme".

Pour de telles formules, le choix de la subdivision appelée "grille" détermine la précision de l'approximation. Pour la version h, le principe est d'affiner le maillage en augmentant le nombre de subdivisions. [5]

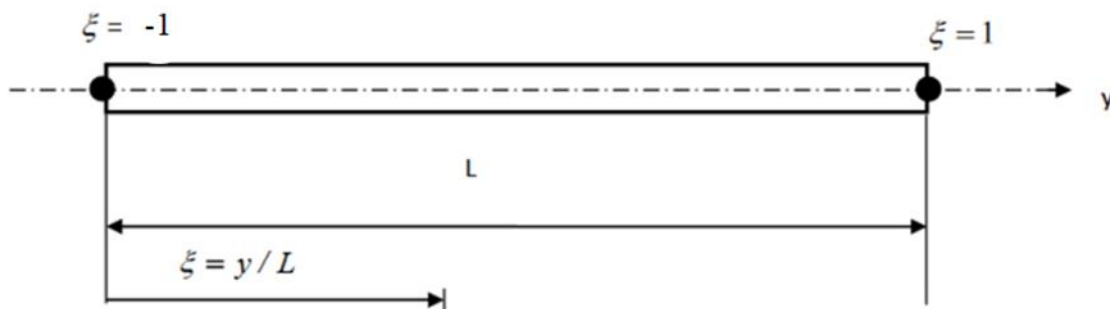


Figure III. 2 : Représentation d'un élément de poutre [5]

8. Élément fini de rotor :

Si l'état d'un système dépend de son historique ou de paramètres de sortie, le système devient interdépendant et ne peut pas être résolu directement. Ces cas incluent le comportement non linéaire (matériaux et géométrie), la dynamique non linéaire (amortissement, rigidité, etc.), les transitoires et les fissures dans les pièces. [5]

8.1. L'arbre :**8.1.1. Formulation de l'arbre par la méthode des éléments finis :**

L'arbre est discrétisé en plusieurs éléments finis, chaque élément utilisé est un élément de poutre de section circulaire limité par deux nœuds.

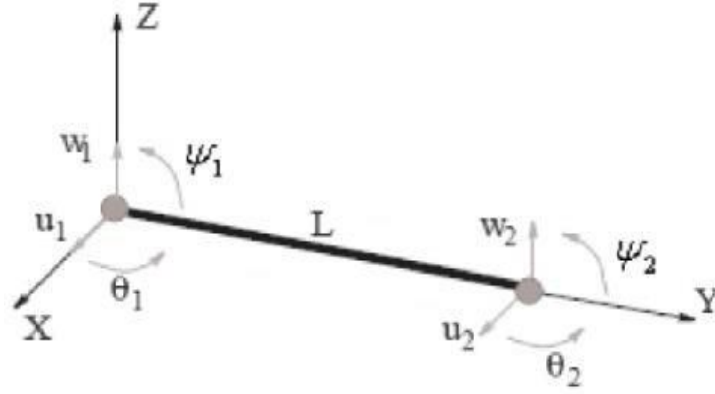


Figure III. 3 : Degrés de liberté d'un élément d'arbre. [10]

Soit $\{B\}$ le vecteur déplacement exprimer par les fonctions de formes.

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N(\xi = -1; 1)q(t) \quad (3.1)$$

$q(t)$: Vecteur déplacement généralisé : [16]

$$\{B\} = [N]\{q\} = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Les fonctions de forme représentent les déplacements et rotations réels de chaque nœud d'un élément : [5]

$$[N_u] = [N_w] = \begin{cases} f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_2(\xi) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right) l_{ae} \\ f_3(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_4(\xi) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right) l_{ae} \end{cases} \quad (3.3)$$

[5]

$$u_0 = N_u q_u \quad (3.4)$$

$$\theta_0 = \frac{\partial N_u}{\partial y} q_u \quad (3.5)$$

$$w_0 = N_w q_w \quad (3.6)$$

$$\psi_0 = \frac{\partial N_w}{\partial y} q_w \quad (3.7)$$

N_u et N_w sont les fonctions de forme des poutres en flexion suivant deux directions. x et z , q_u et q_w sont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions x et z . [16]

8.1.1.1. Détermination des matrices de l'arbre.

La détermination des matrices : masse et gyroscopique sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (3.8)$$

8.2.1.1.1. Matrice masse de l'arbre $[M_A]$:

Le premier terme de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse :

$$E_{CA}(M_A) = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (3.9)$$

En substituant le vecteur déplacement par les fonctions de forme et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_{CA}(M_A) = \frac{\rho S_A}{2} \left(\int_{-1}^1 \{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\} d\xi + \int_{-1}^1 \{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} d\xi \right) \quad (3.10)$$

Les composantes de la matrice de masse sont :

$$\begin{aligned} [M_{Au}] &= \rho S_A L \int_{-1}^1 [N_u]^T [N_u] d\xi \\ [M_{Aw}] &= \rho S_A L \int_{-1}^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

La matrice masse peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

8.2.1.1.2. Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$:

Le deuxième terme de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique de l'arbre :

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{\phi}\} \{B\} dv \quad (3.13)$$

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (3.14)$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gA}) = \rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 (-[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w] \{q_w\} [N_u]^T \{\dot{q}_u\}^T) d\xi \quad (3.15)$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour avoir une séparation des vecteurs de coordonnées généralisées dans la relation (3.14) :

a. Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_u\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = 2\rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 ([N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\}) d\xi \quad (3.16)$$

$$C_{gA1} = 2\rho S_A e \Omega \int_{-1}^1 ([N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\}) d\xi \quad (3.17)$$

b. Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_w\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = -2\rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt} (-[N_u]^T [N_w]^T \{\dot{q}_u\}) \right) d\xi \quad (3.18)$$

$$C_{gA2} = -2\rho S_A e \Omega \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt} (-[N_u]^T [N_w]^T \{\dot{q}_u\}) \right) d\xi \quad (3.19)$$

On peut dire que :

$$C_{gA1} = -C_{gA2} \quad (3.20)$$

La matrice gyroscopique de l'arbre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[C_{gA}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{gA2}] \\ [C_{gA2}] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

8.2.1.1.3. Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$:

La matrice rigidité de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation. Par substitution du champ de déplacement en termes de fonctions de forme et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_{-1}^1 \left[I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (3.22)$$

L'énergie de déformation donnée par la coordonnée adimensionnelle :

$$E_{dA} = \frac{E}{2L^3} \int_{-1}^1 \left[I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 \right) \right] d\xi \quad (3.23)$$

$$E_{dA} = \frac{EI_m}{2L^3} \int_{-1}^1 \left[\left(\{q_u\}^T [N_u]'' [N_u] \{q_u\} \right) + \left(\{q_w\}^T [N_w]'' [N_w] \{q_w\} \right) \right] d\xi \quad (3.24)$$

Avec les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 N_u}{\partial \xi^2} = N_u'' \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} = N_w'' \quad (3.26)$$

Par raison de symétrie des deux plans YOX et YOZ on a : [16]

$$[K_{dA}] = \begin{bmatrix} [K_{dAu}] & 0 \\ 0 & [K_{dAw}] \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

8.2. Disque :

La modélisation par éléments finis du disque présentée ici est la modélisation correspond au cas où le disque est symétrique et non courbe nous pouvons modéliser.

Le disque d'un nœud a quatre degrés de liberté : deux translations u et w suivant x et z, et deux rotations θ et ψ autour de x et z.

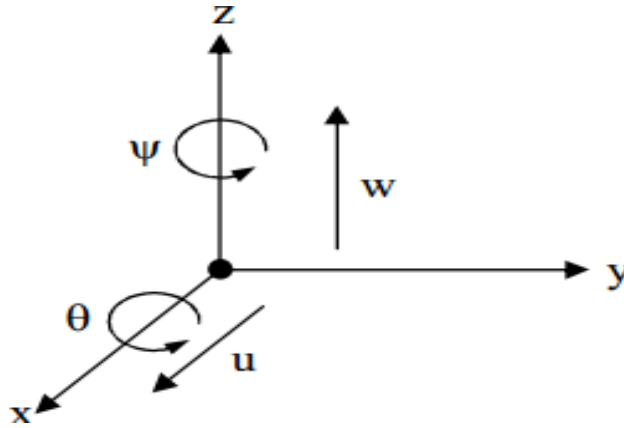


Figure III. 4 : Degrés de liberté d'un élément de disque. [1]

Ces quatre degrés de libertés sont modélisés par deux déplacements u, w et par deux rotations θ, ψ . [3]

8.2.1. Détermination des matrices de disque :

La détermination des matrices : masse et gyroscopique sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique du disque.

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \tag{3.28}$$

Après intégration, l'expression de l'énergie cinétique prend la forme suivante :

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho S e \left(\{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) + \rho S e \Omega \left(\{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} \right) \tag{3.29}$$

Avec $\{B\}$ le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de forme, le disque est placé au milieu

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N \left(\xi = \frac{Y}{L} \right) q(t) \tag{3.30}$$

Avec le premier terme qui contribue à la formation de la matrice de masse et le deuxième terme à la matrice gyroscopique. [16]

8.2.1.1. Matrice masse de disque $[M_D]$:

Le premier terme de la relation (3.29) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse.

$$E_c(M_D) = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv \quad (3.31)$$

L'énergie cinétique du disque peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_c(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\}) \quad (3.32)$$

L'énergie cinétique du disque exprimée par les fonctions de forme :

$$E_c(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}\}) \quad (3.33)$$

En introduisant les deux plans on obtient.

$$E_c(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\}) + \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\}) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} [M_{Du}] &= \rho S_D e([N_u]^T [N_u]) \\ [M_{Dw}] &= \rho S_D e([N_w]^T [N_w]) \end{aligned} \quad (3.35)$$

La matrice globale de masse est donnée :

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [M_{Du}] & 0 \\ 0 & [M_{Dw}] \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Avec $[M_{Du}]$ la matrice de masse dans le plan YOX et $[M_{Dw}]$ la matrice de masse dans le plan YOZ, ces deux composantes de matrice peuvent être exprimées par les fonctions de formes. [16]

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [\rho S_D e([N_u]^T [N_u])] & 0 \\ 0 & [\rho S_D e([N_w]^T [N_w])] \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

8.2.1.2. Matrice gyroscopique de disque $[C_{gD}]$:

Le deuxième terme de la relation (3.28) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique du disque :

$$E_c(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{\phi}\} \{B\} dv \quad (3.38)$$

Substituons la matrice des vitesses et le vecteur déplacement par leurs valeurs dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient

$$E_c(C_{gD}) = \rho \int_v \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.39)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.40)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} \quad 0 \quad \Omega \dot{u}\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.41)$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} u \quad 0 \quad \Omega \dot{u} w\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (3.42)$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gD}) = \rho \Omega \int_v -([N_u]\{q_u\}[N_w]^T\{\dot{q}_w\}^T + [N_w]\{q_w\}[N_u]^T\{\dot{q}_u\}^T) dv \quad (3.43)$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour déterminer l'expression des sous matrices gyroscopiques dans les plans YOX et YOZ.

a. Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_u\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = \rho \Omega \int_v \left(\frac{d}{dt} ([N_w]\{q_w\}[N_u]^T) + [N_u]\{\dot{q}_w\}[N_w]^T \right) dv \quad (3.44)$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = 2\rho S_D e \Omega ([N_u]^T [N_w]\{\dot{q}_w\}) \quad (3.45)$$

b. Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_w\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = \rho \Omega \int_v \left(\frac{d}{dt} (-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T) - [N_w]\{\dot{q}_u\}[N_u]^T \right) dv \quad (3.46)$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = 2\rho S_D e \Omega (-[N_u]^T [N_w]^T \{\dot{q}_u\}) \quad (3.47)$$

En conclusion on peut dire que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} \right) \quad (3.48)$$

Ou encore en posant :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = 2\rho S_D e \Omega ([N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\}) = C_{gD1} \quad (3.49)$$

Et :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = -2\rho S_D e \Omega ([N_u]^T [N_w] \{\dot{q}_w\}) = C_{gD2} \quad (3.50)$$

On remarque que :

$$C_{gD1} = -C_{gD2} \quad (3.51)$$

Et la matrice gyroscopique du disque peut s'écrire se mettre sous la forme : [16]

$$[C_{gD}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{gD2}] \\ [C_{gD2}] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

8.3. Paliers :

Les caractéristiques principales relient les forces et les déplacements. L'influence des pentes et des moments de flexion est négligée.

8.3.1. Détermination des matrices dues aux paliers :

La détermination des matrices de la rigidité $[K_p]$ et la matrice d'amortissement $[C_p]$.

8.3.1.1. Matrices raideurs et amortissements :

Par hypothèse on a supposé que les composantes de la matrice raideur sont de l'ordre de $10^8 N/m$ et la matrice d'amortissement est déduite de la relation suivante :

$$\xi' = \frac{C_p}{2M_t \omega_1} \quad (3.53)$$

ξ' : Constante d'amortissement est de l'ordre 10^{-2} .

M_t : Masse totale du rotor

ω_1 : Première pulsation obtenue avec $K_p = 10^8 N/m$.

8.3.1.1.1. Matrice amortissement des paliers :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de l'amortissement $[C_p]$ dus aux paliers sont par hypothèse égaux. La matrice de l'amortissement $[C_p]$ dus aux paliers.

$$[C_p] = \begin{bmatrix} [C_{xx}] & 0 \\ 0 & [C_{yy}] \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

8.3.1.1.2. Matrice de rigidité des paliers :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de la rigidité $[K_p]$ dus aux paliers sont par hypothèse égaux, la matrice de la rigidité $[K_p]$ due aux paliers.

$$[K_p] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & 0 \\ 0 & [K_{yy}] \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

La matrice raideur et la matrice d'amortissement sont en général symétriques et peuvent varier d'une manière significative avec la vitesse de rotation. [16]

9. Equation du mouvement :

Les équations de Lagrange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis, le vecteur des déplacements du rotor est noté $\{q\}$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{cR}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cR}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{dR}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.56)$$

Avec l'énergie cinétique du rotor :

$$E_{cR} = E_{cD} + E_{cA} \quad (3.57)$$

$$E_{dR} = E_{dA}$$

E_{cR} : Energie cinétique du rotor.

E_{dR} : Energie de déformation du rotor.

E_{cD} : Energie cinétique du disque.

E_{cA} : Energie cinétique de l'arbre.

E_{dA} : Energie de déformation de l'arbre. [16]

On obtient l'équation finale du mouvement du rotor :

$$[M]\ddot{q} + (\Omega[C_g] + [C_p])\dot{q} + ([K_A] + [K_p])q = 0 \quad (3.58)$$

$[M]$: Matrice masse.

$[C_g]$: Matrice gyroscopique.

$[C_p]$: Matrice d'amortissement due aux paliers

$[K_A]$: Matrice de raideur de l'arbre.

$[K_p]$: Matrice de raideur des paliers.

10. Résolution de l'équation du mouvement :

La relation (3.58) est l'équation différentielle du mouvement du rotor (arbre et disque), la solution de cette équation est donnée par la recherche des fréquences vibratoire propre de système tournant. Les fréquences représentent les valeurs propres et les vecteurs propres de l'équation différentielle :

$$([M_A] + [M_D])\ddot{q} + (\Omega[C_{gA}] + [C_{gD}] + [C_p])\dot{q} + ([K_A] + [K_p])q = 0 \quad (3.59)$$

On pose :

$$M = M_A + M_D \quad (3.60)$$

$$K = K_A + K_p \quad (3.61)$$

$$C = C_{gA} + C_{gD} + C_p \quad (3.62)$$

L'équation du mouvement prend la forme suivante :

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = 0 \quad (3.63)$$

10.1. Description du problème aux valeurs propres :

Les solutions générales de l'équation (3.62) représentent les fréquences vibratoires de mouvement du rotor ils sont du type exponentiel :

$$q(t) = pe^{\lambda t} \quad (3.64)$$

Où : λ : Facteur scalaire

p : Amplitude de la grandeur complexe $q(t)$

Vu la nature quadratique de cette dernière équation, le système homogène de n équations linéaires admet 2n solutions non triviales définissant les fréquences propres de vibration de la structure.

11. Conclusion :

Ce chapitre présente la modélisation mathématique du rotor par la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli. Nous avons introduit les éléments qui composent le rotor : l'arbre, le disque et les paliers. L'arbre et le disque sont caractérisés par leur énergie cinétique. La souplesse de l'arbre induit son énergie de déformation, la raideur de l'arbre provient donc de celle-ci. Les matrices de masse, de raideur et d'effets gyroscopiques sont

obtenues à partir des équations du mouvement en appliquant les équations de Lagrange au travail dû aux paliers et aux différentes énergies.

*Chapitre IV : Résultat et
interprétation*

1. Introduction :

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en utilisant l’application App-Rotor développée et validée au laboratoire IS2M. Tlemcen, cette application est élaborée sous un programme source en langage Matlab.

2. Présentation de logiciel :

APPROTOR un logiciel des éléments finis (h, p, et hp) destiné à prévoir le comportement dynamique des rotors. Développé par l’équipe Interaction fluide structure et dynamique des machines (IFS-DM) du laboratoire Ingénierie des systèmes mécanique et matériaux (IS2M).

❖ **Caractéristiques principales :**

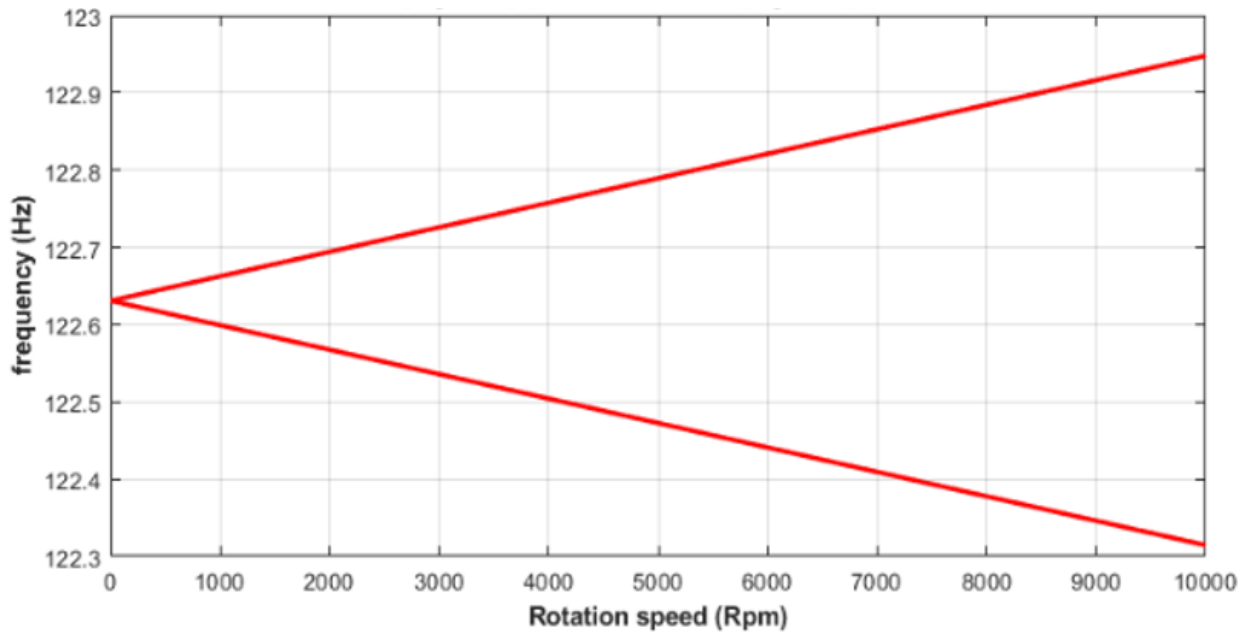
Possibilités	Sorties graphiques
<ul style="list-style-type: none"> • Déformée statique (forces, moments, gravité). • Fréquences et forme des modes, amortissements modaux, instabilités. • Réponse sous balourd. • Réponse asynchrone. • Réponse harmonique fixée dans l'espace. • Efforts maximum, chargement maximum des paliers. • Energies sur les éléments. 	<ul style="list-style-type: none"> • Géométrie. • Modèle éléments finis. • Modes de la base modale. • Diagramme de Campbell. • Modes en rotation. • Déformée sous balourd, force asynchrone, force harmonique. • Réponse sous balourd, asynchrone, harmonique.

Tableau IV. 1 : Présentation de l’application

3. Interprétation :

3.1. Influence de condition aux limites :

1^{er} exemple arbre sans disque soutenu aux deux extrémités avec un diamètre de 0,05 (m) et une longueur de 0,9 (m), le module de Young et la masse volumique sont respectivement de $2,10^{11}$ (N/m²) et 7800 (kg/m³).

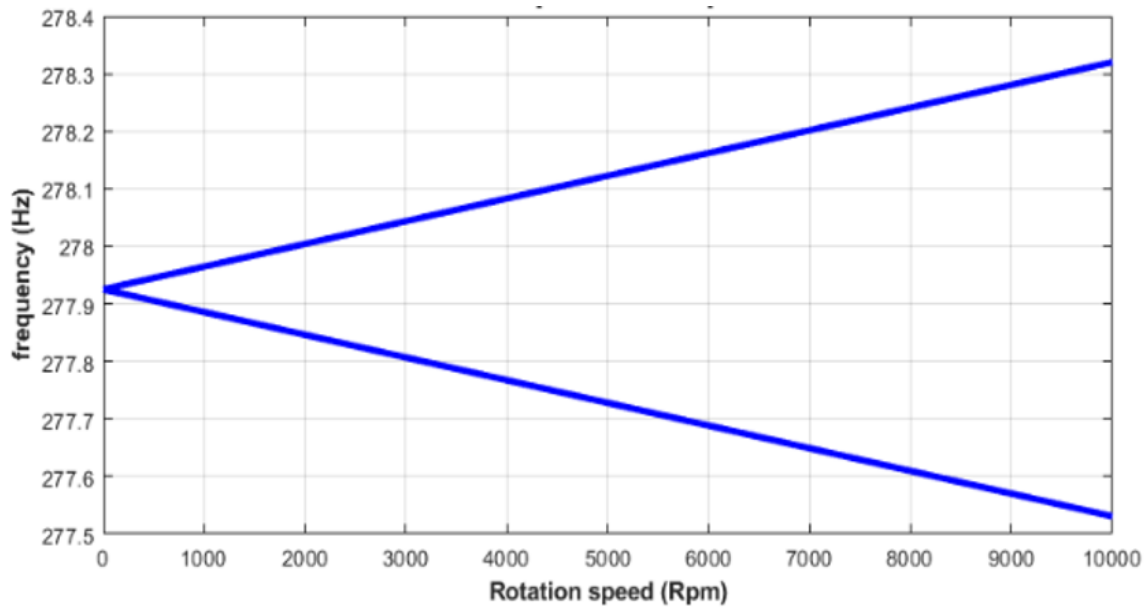


Grphe IV 1: Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre appuis-appuis

Le graphe IV.1 montre le comportement vibratoire d'un arbre sans disque en position appuyé-appuyé A-A. Le rotor tourne avec une symétrie des paliers, et l'évolution de ses fréquences vibratoires sont définies par la branche représentant la précession directe et la précession rétrogradée. On constate aussi l'effet gyroscopique qui apparait clairement pour de très grande vitesse.

Pour la précession directe les fréquences varient respectivement pour une vitesse angulaire comprise entre 0 et 10000 t/min de 122.64 Hz à 122.95 Hz approximativement et pour la précession rétrogradée les fréquences varient respectivement de 122.64 Hz à 122.31 Hz

Pour une vitesse bien définie exemple 10000 t/min on constate que l'effet gyroscopique est de l'ordre de $(122.95-122.31) = 0.65$ Hz pour cette condition aux limites A-A.

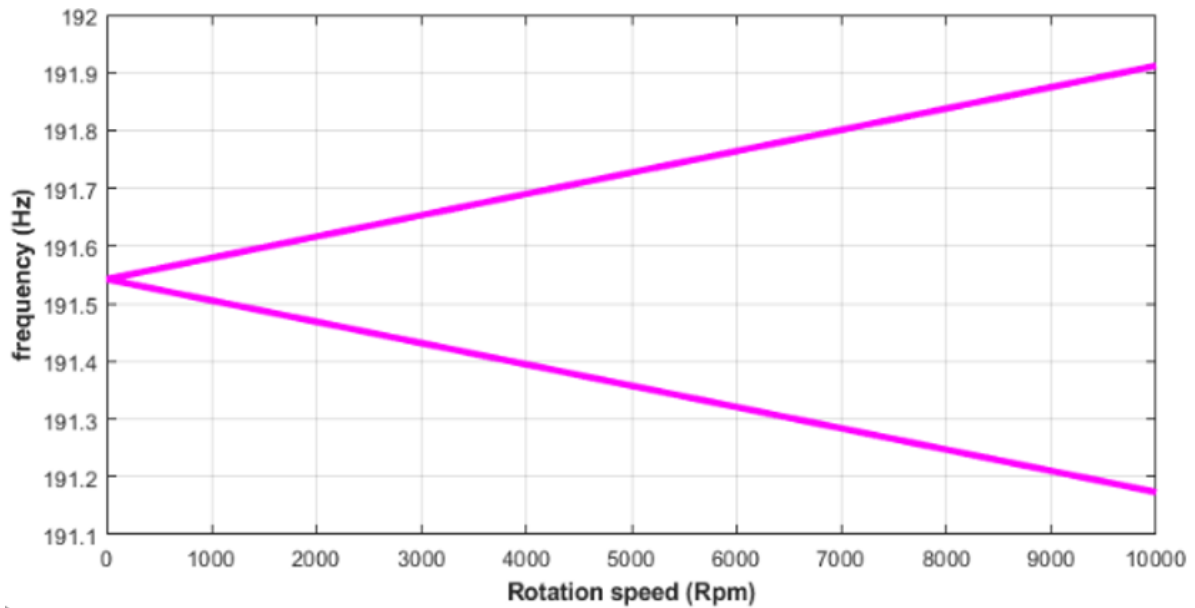


Graphe IV 2 : Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre encastré-encastré

Le graphe IV.2 montre le comportement vibratoire d'un arbre sans disque en position encastré-encastré E-E. Le rotor tourne avec une symétrie des paliers, et l'évolution de ses fréquences vibratoires sont définies par la branche représentant la précession directe et la précession rétrogradée. On constate aussi l'effet gyroscopique qui apparaît clairement pour de très grande vitesse.

Pour la précession directe les fréquences varient respectivement pour une vitesse angulaire comprise entre 0 et 10000 t/min de 277.92 Hz à 278.31 Hz approximativement et pour la précession rétrogradée les fréquences varient respectivement de 277.92 Hz à 277.52 Hz

Pour une vitesse bien définie exemple 10000 t/min on constate que l'effet gyroscopique est de l'ordre de $(278.31 - 277.52) = 0.79$ Hz pour cette condition aux limites E-E.

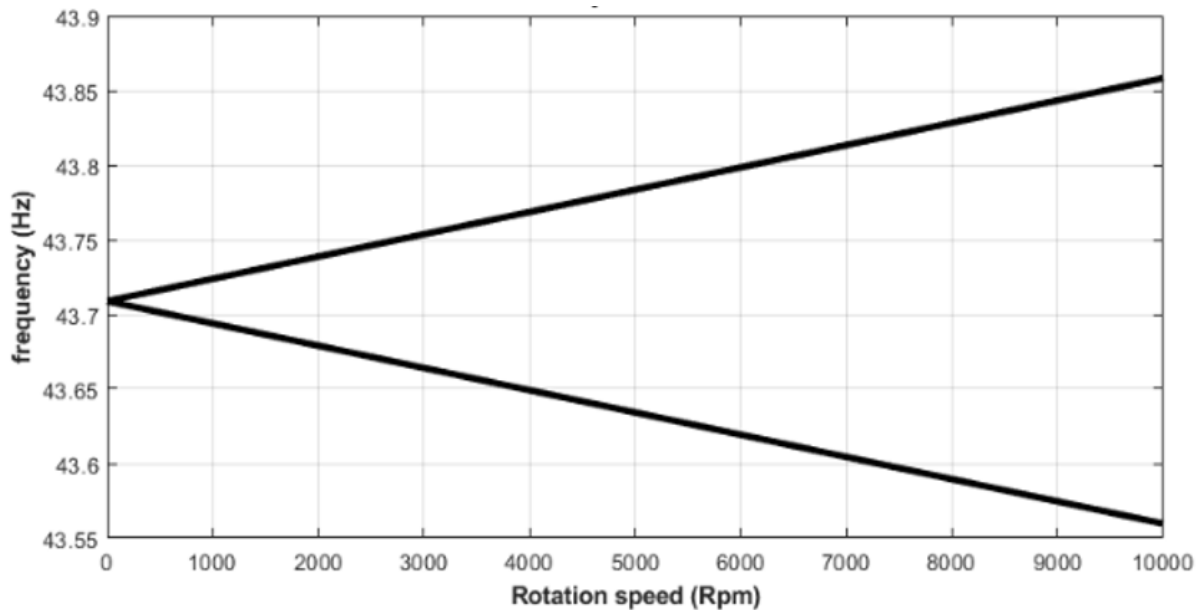


Graphe IV 3 : Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre appuis-encasté

Le graphe IV.3 montre le comportement vibratoire d'un arbre sans disque en position appuyé-encasté A-E. Le rotor tourne avec une symétrie des paliers, et l'évolution de ses fréquences vibratoires sont définies par la branche représentant la précession directe et la précession rétrogradée. On constate aussi l'effet gyroscopique qui apparait clairement pour de très grande vitesse.

Pour la précession directe les fréquences varient respectivement pour une vitesse angulaire comprise entre 0 et 10000 t/min de 191.55 Hz à 191.9 Hz approximativement et pour la précession rétrogradée les fréquences varient respectivement de 191.55 Hz à 191.19 Hz

Pour une vitesse bien définie exemple 10000 t/min on constate que l'effet gyroscopique est de l'ordre de $(191.9-191.19) = 0.71$ Hz pour cette condition aux limites A-E .



Grphe IV 4: Influence de condition aux limites sur le comportement dynamique de l'arbre encastré libre

Le graphe IV.4 montre le comportement vibratoire de l'arbre sans disque dans la position E-L encastré libre. Le rotor tourne symétriquement dans des paliers, et l'évolution de sa fréquence de vibration est définie par des branches représentant la pulsation directe et indirecte.

Il y a aussi l'effet gyroscopique qui apparaît clairement à très haute vitesse. Pour la précession directe, la fréquence varie de 43,71 Hz à 43,86 Hz pour des vitesses angulaires entre 0 et 10000 t/min, respectivement, et pour la précession rétrograde, la fréquence varie de 43,71 Hz à 43,56 Hz, respectivement. Pour l'exemple de vitesse bien défini 10000 t/min, on note que pour cette condition aux limites E-L, l'effet gyroscopique est de l'ordre de $(43.86 - 43.56) = 0.3$ Hz.

3.2. Observations :

Pour les quatre conditions aux limites on constate que le rotor tourne avec une symétrie complète des paliers, aussi l'effet gyroscopique agit avec un grand effet sur les conditions aux limites E-E ensuite A-E et il s'affaiblit pour A-A et E-L, on dit que le rotor se rigidifie linéairement quand la vitesse de rotation augmente.

3.3. Diagramme de Campbell :

2^{ème} exemple arbre avec disque sous l'influence des excitations du support :

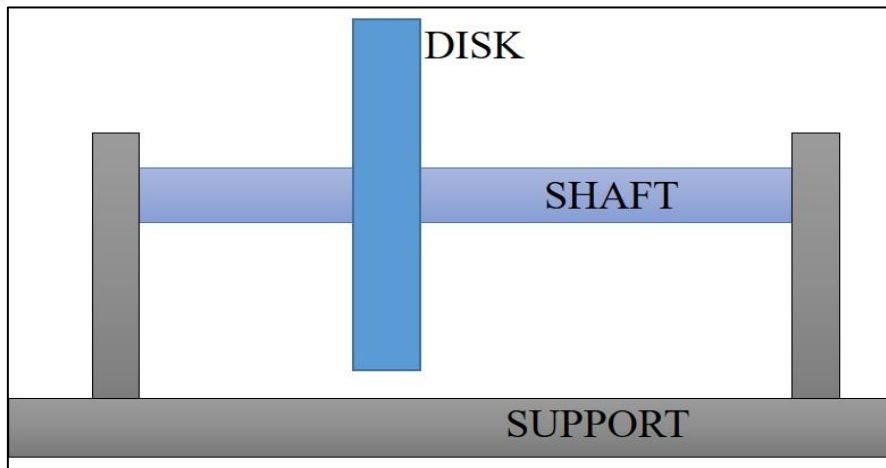


Figure IV. 1: Eléments d'un rotor

Densité du matériau du disque	$\rho_d = 7800 \text{ kg/m}^3$
Rayon extérieur du disque	$r_d = 0.15 \text{ m}$
Épaisseur du disque	$e_d = 0.03 \text{ m}$
Emplacement du disque	$y_d = 0.4/3 \text{ m}$
Densité du matériau de l'arbre	$\rho_a = 7800 \text{ kg/m}^3$
Rayon de l'arbre	$r_a = 0.01 \text{ m}$
Longueur de l'arbre	$l_a = 0.4 \text{ m}$
Module d'arbre YOUNG	$E_a = 2 * 10^{11} \text{ N/m}^2$

Tableau IV. 2: Caractéristiques du rotor symétrique




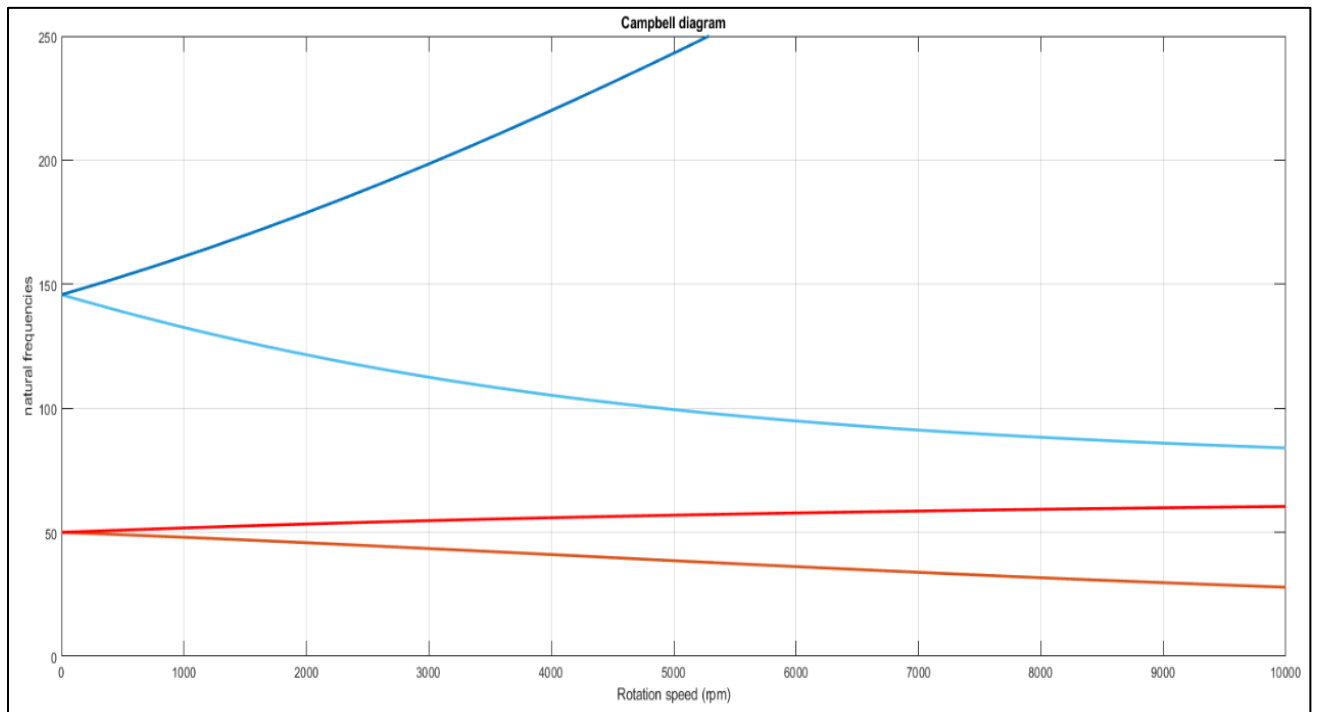
	Premier élément (arbre)	Deuxième élément (disque)	Troisième élément (arbre)
			
Rayon extérieur (m)	0.01	0.15	0.01
Rayon intérieur (m)	0	0	0
Longueur (m)	0.11	0.03	0.22

Tableau IV. 3: Eléments de discrétisation



Graphe IV 5 : Diagramme de Campbell

On constate sur ce graphe la présence du comportement vibratoire de l'arbre précédemment définit dans le tableau par les propriétés mécaniques et géométriques.

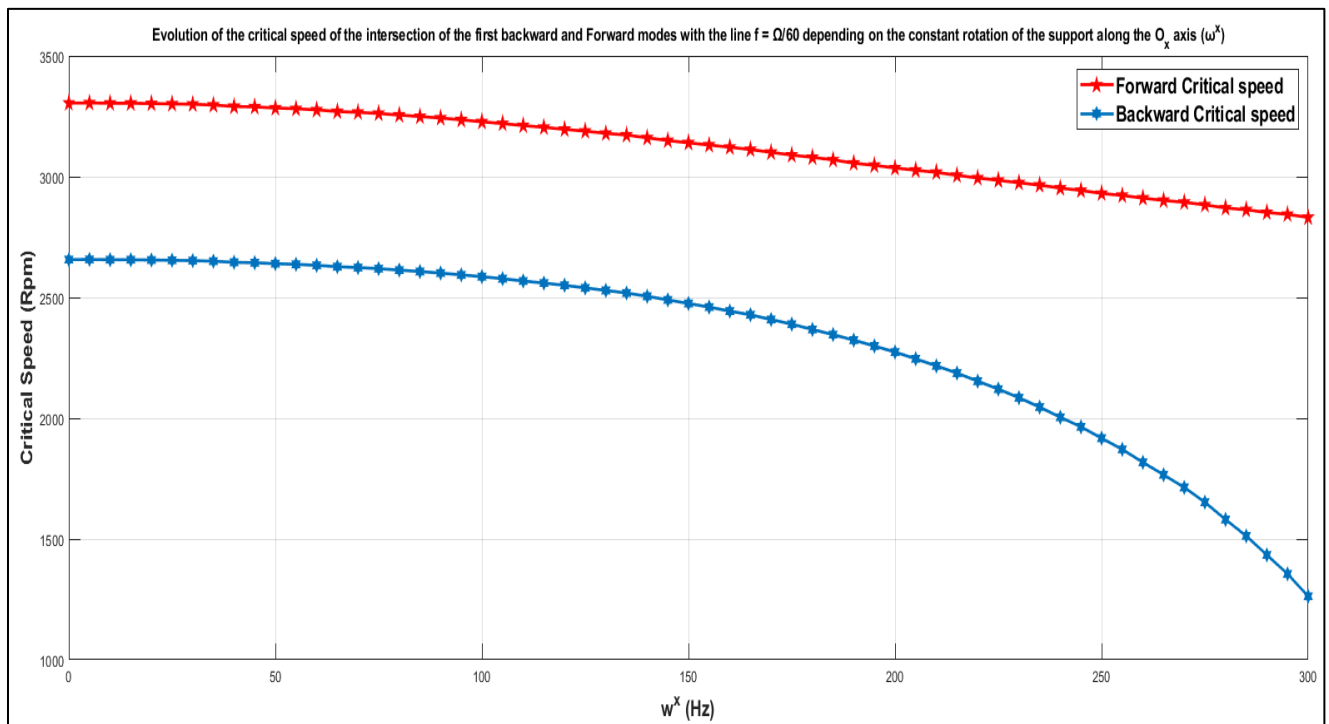
Ce rotor possède des fréquences vibratoires définies par deux modes de vibrations qui sont le premier mode (en rouge) ayant la fréquence vibratoire de 50 Hz et le deuxième mode (en bleu) ayant la fréquence de vibration égale à 149 Hz. Ces deux modes vibratoires sont définis par une branche de fréquence vibratoire appelée la précession directe et une deuxième branche de fréquence vibratoire appelée la précession rétrogradée.

On constate aussi la présence de l'effet gyroscopique qui agit sur le rotor pour faire le couplage entre les plans de vibrations et qui tend à assouplir ou à rigidifier la structure tournante, on peut déterminer les vitesses critique propres du système tournant en reportant la droite $f=\Omega$ sur ce graphe et l'intersection de cette avec la branche directe donne la vitesse critique qui correspond à la vitesse de résonnante du système tournant c'est-à-dire une vitesse dangereuse qui peut provoquer des avaries aux fonctionnement du système ou des accidents graves.

Aussi on constate que l'effet gyroscopique au 1^{er} mode est faible par rapport au 2^{ème} mode qui est très grand cela et due aux fréquences de vibration qui commence par des valeurs faibles au 1^{er} mode ensuite des valeurs grandes au second mode.

Mode 2, La branche directe, on constate que cette branche a des fréquences qui augmentent rapidement à partir de la fréquence de 250 Hz c'est que l'arbre du rotor devient plus rigide pour cette valeur de fréquence. On dit que le rotor est sous l'effet d'une rigidification centrifuge.

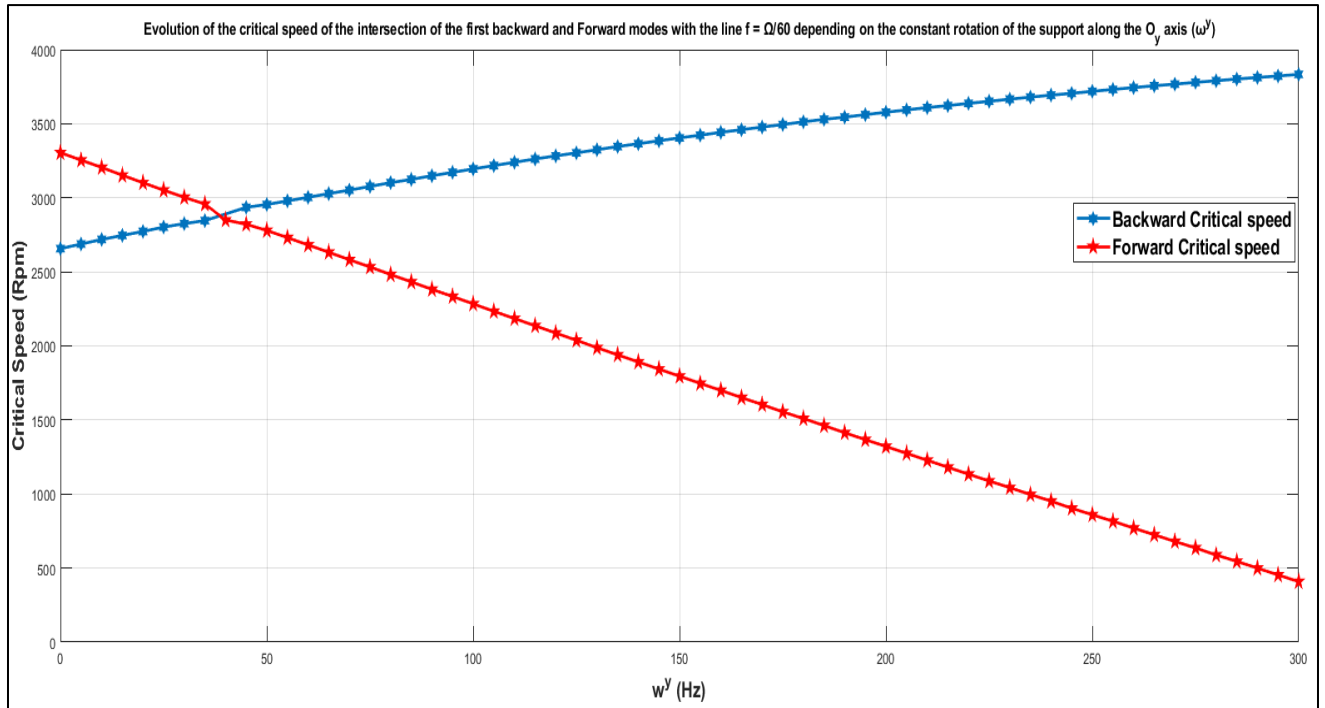
3.4. Vitesse critiques :



Graphe IV 6 : Évolution de la vitesse critique sur l'axe O_x (ω^x)

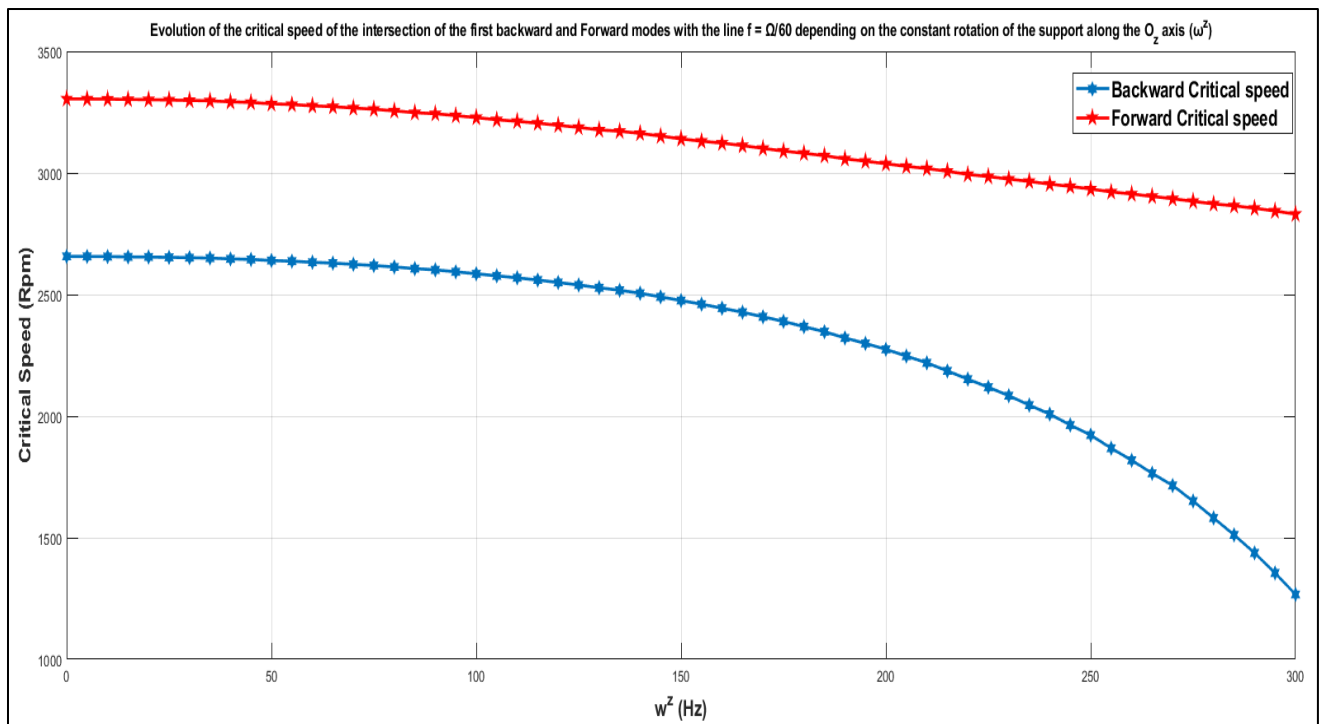
Graphe IV 7 : cette évolution de la vitesse critique est généralement basée sur l'évolution de la vitesse critique de la branche directe ou de la branche propre du système tournant, la plus importante étant définie comme vitesse de rotation très élevée ou fréquence de vibration élevée, on voit sur cette figure que la branche directe évolue en fonction de la fréquence de

vibration, ces vitesses critiques diminuent lorsque la fréquence de vibration augmente, et leur plage est comprise environ entre 2900 Hz et 3300 Hz.



Graphe IV 8: Évolution de la vitesse critique sur l'axe O_y (ω^y)

Graphe IV 9 : cette évolution des vitesses critiques est généralement basée sur l'évolution des vitesses critiques de la branche directe ou branche propre du système tournant et surtout est définie pour de très grandes vitesses de rotations ou grande fréquences vibratoires pour cela , on constate sur ce graphe l'évolution de la branche directe en fonction des fréquences vibratoires , ces vitesses critiques diminuent avec l'augmentation des fréquences de vibrations et son comprennent entre 490 Hz et 3560Hz approximativement.



Grphe IV 10 : Évolution de la vitesse critique sur l'axe O_z (ω^2)

Grphe IV 11 : cette évolution de la vitesse critique est généralement basée sur l'évolution de la vitesse critique de la branche directe ou de la branche propre du système tournant, la plus importante étant définie comme vitesse de rotation très élevée ou fréquence de vibration élevée, on voit sur cette figure que la branche directe évolue en fonction de la fréquence de vibration, ces vitesses critiques diminuent lorsque la fréquence de vibration augmente, et leur plage est comprise environ entre 2850 Hz et 3350 Hz.

3.5. Observations :

Les vitesses critiques sont généralement des vitesses des résonances ou des vitesses dangereuses pour le système tournant cela veut qu'il faut éviter ces vitesses de grande amplitudes de vibrations , car les amplitudes de vibrations à la raisonnante augmentent rapidement et génèrent des détériorations au système arbre tournant et cause des défaillances soit à l'arbre par la création des fissures ou des vibration excessives ou elles peut toucher aux paliers et induire des sifflements et des vibrations jusqu'à l'arrêt total de la machine tournante.

4. Conclusion :

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont les résultats de recherche du comportement vibratoire d'un rotor en utilisant la méthode des éléments finis version h sur le logiciel APPROTOR, et montrent le comportement vibratoire de l'arbre avec disque pour condition aux limites. Les résultats présentés déterminent les fréquences propres, les formes de modes et les vitesses critiques du rotor sur diverses configurations de modes propres et tracer le diagramme de Campbell.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, on s'intéresse au comportement dynamique des rotors. L'objet principal de ce travail de recherche est le problème des vibratoires, qui sont l'une des principales causes que subissent les machines tournantes dans le monde industriel actuel et pour donner plus de performance et diminuer encore plus ce phénomène.

Le premier chapitre est basé à partir d'une synthèse bibliographique sur le comportement dynamique et vibratoire d'un rotor simple. Il synthétise les généralités sur les rotors des machines tournantes, l'historique et les travaux de recherche qui contribuent au développement de la dynamique des rotors.

Le deuxième chapitre est consacré à la dynamique des rotors définie par les équations fondamentales du mouvement du rotor. On a déterminé les énergies (cinétiques et déformation), on a appliqué les équations de Lagrange pour trouver finalement les équations du mouvement du rotor.

Le troisième chapitre a pour but de traité la formulation du problème vibratoire par une modélisation mathématique qui est la méthode des éléments finis. On a déterminé les différentes matrices des paramètres dynamiques du rotor, matrice de masse, matrice d'amortissement et raideur des paliers, matrice de rigidité et matrice gyroscopique, enfin, on a constaté l'exactitude et l'efficacité de la version standard « h » de la méthode des éléments finis.

Enfin, l'étude menée au dernier chapitre est les résultats affichés ont été obtenus par l'utilisation de l'application APPROTOR. Ces résultats s'articulent sur l'élaboration et l'obtention de toutes les courbes définissant le comportement vibratoire du système tournant, et leurs interprétations données par des diagrammes de Campbell sous diverses conditions aux limites pour divers modes de vibration du rotor et la détermination et l'évolution dans l'espace de la vitesse critique du premier mode vibratoire du rotor.

Ce travail ouvre des perspectives de recherche pour d'autres analyses des rotors étagés ou des rotors travaillants avec une fissure.

Références bibliographiques :

- [1] A. Nouredine, *Etude dynamique d'un rotor pa éléments finis*, M'sila: Université MOHAMED BOUDIAF, 2018-2019.
- [2] M. R. J. Campos, «SEMANTIC SCHOLAR,» 2005. [En ligne]. Available: <https://www.semanticscholar.org/paper/Rotordynamic-modeling-using-bond-graphs%3A-modeling-Campos-Crawford/08b2caa5e4b6af3bde484e0c66a7bd464d45047b>.
- [3] S. A. S. Eddine, *Contribution à l'étude du comportement dynamique des rotor verticaux*, Guelma: Université du 8 Mai 1945, 2014-2015.
- [4] S. Roques. [En ligne]. Available: https://www.researchgate.net/figure/Rotor-de-Jeffcott-Laval_fig2_30514153.
- [5] K. F. & M. A. N. E. Houda, *Etude par éléments finis des rotors FGM sous un gradient thermique*, Ain Témouchent: Université Belhadj Bouchaib, 2021-2022.
- [6] A. Hfaifa, «ResearchGate,» [En ligne]. Available: https://www.researchgate.net/figure/Rotor-de-Jeffcott-Laval_fig2_30514153.
- [7] B. Chaouki, *Etude dynamique d'un rotor*, Biskra: Université Mohamed Khider, 2020-2021.
- [8] [En ligne]. Available: http://www4.ac-nancy-metz.fr/ciras/cahierdubia/GTR/groupe_turbo_reacteur.html.
- [9] «L'avionnaire,» [En ligne]. Available: <https://www.lavionnaire.fr/MotorElements.php>.
- [10] B. Hamza, *Etude de comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d'un rotor flexible*, Boumerdès: Université M'hamed BOUGARA, 2009-2010.
- [11] S. & Bensaid.I, *Micropoutres constituées par un matériau à prosoité en utilisant la diffrentielle quadrature combiné à la méthode des éléments finis hierarchique*, Advances in Aircraf science 8 (2)-97-122, 2023.
- [12] A. & H. & Siami.A, *Analyse numérique du comportement vibratioue des rotors FGM sous l'influence de la température en utilisant la version hp de la méthode des éléments finis*, Mechanics Based Design of Structures and Machines 50 (11), 3925-3948, 2022.
- [13] [En ligne]. Available: <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Methode-des-elements-finis.html>.
- [14] D. A. M. & D. B. M. Amine, *Cours et applications de la méthode des éléments finis*, Ain Témouchent: Université BELHADJ Bouchaib, 2021.
- [15] K. Abdelhak, *METHODES DES ELEMENTS FINIS*, chlef: Université Hassiba benbouali.
- [16] H. S. N. D. Eddine, *Analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratiore d'un rotor*, Ain Témouchent : Université Belhadj Bouchaib, 2021-2020.