

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Génie Mécanique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en :
Domaine : SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Construction Mécanique
Thème

Analyse numérique par la version hp de la MEF des Rotors creux FGM à protection interne en céramique

Présenté Par :

- 1) Mr. FELIDJ Sidi Mohammed
- 2) Mr. KAMBOUZ Ahmed Amine

Devant le jury composé de :

Dr. BAHRAM Kadour	M C B	Univ. Ain Temouchent	Président
Dr. BELOUFA Amine	M C A	Univ. Ain Temouchent	Examineur
Dr. ASSEUM Hassan	M C A	Univ. Ain Temouchent	Encadrant
Dr. SAIMI A	M C B	Univ. Blida	Co-encadrant

Année Universitaire 2022/2023

Table des matières

CHAPITRE 1 :

La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

q_v et q_wsont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions x et z.	14
1	Introduction.....	19
2	Définition de la céramique :.....	19
3	Propriétés des céramiques :.....	19
3.1	Propriétés physiques :.....	19
3.2	Propriétés thermomécaniques.....	19
3.3	Propriétés mécaniques.....	20
3.3.1	Module d'élasticité.....	20
3.3.2	Dureté.....	21
3.3.3	Ténacité.....	21
3.4	Propriétés chimiques :.....	22
3.4.1	Méthode de préparation :.....	23
4	Mécanismes de rupture des céramiques :.....	23
5	Les domaines d'utilisation des céramiques :.....	23
5.1	Médical.....	24
5.2	Automobile :.....	24
5.3	Aéronautique :.....	25
5.4	Défense :.....	26
5.5	Nucléaire :.....	26
5.6	Electrotechnique :.....	26
6	Divers types de céramiques techniques.....	27
7	Définition des matériaux à gradient des propriétés FGM :.....	30
8	Application en industrie des matériaux à gradient des propriétés :.....	31
9	Formulation des matériaux FGM.....	32
9.1	Modélisation des structures rotors P-FGM.....	32
	Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp.....	36
1	Introduction.....	37

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

2	Définition	37
3	Types de questions MEF :	39
3.1	Problème d'équilibre statique :	39
3.2	Problème aux valeurs propres :	39
3.3	Problèmes liés au temps :	40
4	Approche générale:	40
4.1	Analyse du problème:	40
4.2	Définition du modèle de calcul:	40
4.3	Maillage :	40
5	Le calcul est effectué par ordinateur.	41
5.1	Affichage des résultats, vérification de la cohérence et post-traitement.	41
6	Domaines d'applications de la MEF :	41
7	Modélisation par la méthode des éléments finis version hp.	43
	Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations. La structure est caractérisée par sa géométrie, le ou les matériaux qui la constituent, Elle est soumise à des sollicitations, des efforts, des déplacements, des flux de chaleurs et des vitesses. Pour un dimensionnement optimal de la structure il faut connaître :	43
	• Les déplacements en tout point.	43
	• Les déformations, les contraintes.	43
	• Les températures.....	43
	• Les fréquences propres ...etc.....	43
	La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel, la méthode utilisée pour cette étude est la méthode des éléments finis version hp développée par Ivo Babuška. BQ et GUO 1992[9]. La caractéristique particulière de cette méthode et que l'arbre est modélisé par un raffinement du maillage de la version h et un raffinement du maillage de la version p et que la précision du résultat est obtenue en augmentant l'ordre de raffinement des deux maillages.	43
8	Méthode des éléments finis version hp :	43
9	Fonctions de forme.	44
	Ou [N] est la matrice des fonctions de formes.....	47
10	Champs des déplacements :	47
	Le vecteur déplacement généralisé:.....	50
	$Nu, v, w, \beta x, \beta y, \phi, = f1, f2, f3, f4, \dots, fpu, pv, pw, p\beta x, p\beta y, p\phi$	50
11	Formulation de l'arbre par la méthode des éléments finis hiérarchiques	50
	$B = v0y, t\theta0y, tw0y, t\psi0y, t = N\xi = -1; 1qt$	51

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

q_v et q_w sont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions x et z. 51

12 Détermination des matrices de l'arbre. 51

La détermination des matrices : masse, gyroscopique et rigidification centrifuge sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation (1.17) suivant : 51
(1.17) 51

13 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre $[R_A]$: 52

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho S e \left(\{B\}^T [\dot{\phi}] [\dot{\phi}] \{B\} \right) + \frac{1}{2} \rho S e \left(\{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) + \rho S e \Omega \left(\{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} \right). \dots\dots\dots 52$$

Substituons la matrice des vitesses par sa valeur on obtient : 52

$$E_C(R_A) = \frac{\rho}{2} \int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \{B\} dv \dots\dots\dots 52$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho \Omega^2}{2} \int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} dv \dots\dots\dots 52$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho \Omega^2}{2} \int_v \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} dv \dots\dots\dots 52$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L \Omega^2}{2} \int_0^1 \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} d\xi \dots\dots\dots 52$$

On a que deux déplacements u et w, donc la matrice de rigidification centrifuge de l'arbre exprimée par les fonctions de formes est : 53

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L \Omega^2}{2} \left(\int_{-1}^1 \{q_v\}^T [N_v]^T [N_v] \{q_v\} d\xi + \int_{-1}^1 \{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\} d\xi \right) \dots\dots\dots 53$$

$$[R_A] = \begin{bmatrix} [R_{Av}] & 0 \\ 0 & [R_{Aw}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots 53$$

14 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$ 53

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Av}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots 54$$

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

15	Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$:	54
16	Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$:	55
	La matrice rigidité de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation. Par substitution du champ de déplacement en termes des fonctions de forme et de la coordonnée adimensionnelle, on a :	55
17	Description du problème aux valeurs propres :	57
1	Introduction.....	60
2	Rotor FGM avec la version Hp-FEM avec disque a protection interne	60
3	Mélange graduel FGM SUS304 - Zirconne :	61
4	Interprétation :	62
5	Le mélange graduel SUS304-Zirconne a un indice de volume fraction égale à 0.5.....	62
6	Mode n1 de vibration du rotor FGM :	62
7	Pour la branche indirecte	63
8	Mode n2 de vibration du rotor FGM :	63
9	Les vitesses critiques.....	63
9.1	Vitesse critique propre du système tournant.....	63
9.2	Vitesse critique due aux balourds du système tournant.....	63
10	Rotor a une vitesse de rotation.....	65
11	Variation de la précession directe :	65

Remerciement

Remerciement

Toute notre parfaite gratitude et remerciement infini avant tous à ALLAH le plus puissant qui nous a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science, qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.

Nous remercions particulièrement notre encadrant Mr. HACEN ASSEM d'avoir accepté de diriger ce travail avec beaucoup de disponibilité et d'efficacité, pour nous avoir fait partager son expérience, pour les conseils et encouragements qu'il a sus nos prodiguer pendant toute la durée de ce travail.

Nous remercions les membres du jury qui nous font l'honneur d'examiner ce travail.

Nous remercions très chaleureusement nos parents, nos frères, sœurset toute la famille.

Un grand remerciement a tous les enseignants du département de génie mécanique Université BELHADJ Bouchaib d'Ain Temouchent et nos collègues et tous nos amis.

Résumé :

Ce travail a pour but de l'étude numérique et dynamique de rotor des matériaux à gradient fonctionnel FGM creux à protection interne en céramique. On a utilisé le modèle mathématique par les éléments finis version hp qui est combinaison de la version standard h et de la version p à ce rotor en supposant ce dernier comme élément poutre type hp. Une étude dynamique et cinématique du model est faite en utilisant les équations de LAGRANGE pour la détermination des équations différentielles du mouvement du système tournant, ces équations différentielles sont constituées par des éléments sous forme des matrices. Ces derniers éléments on était déterminé dans le chapitre 2 formulations des éléments finis MEF. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de diagramme de Campbell et qui sont discutées et interprétées.

Mots-clés : Rotor, Matériaux fonctionnellement gradués, méthode des éléments finis.

Abstract

This work aims at the numerical and dynamic study of the rotor of hollow FGM functional gradient materials with internal ceramic protection. One used the mathematical model by the finite elements version hp which is combination of the standard version h and the version p with this rotor by supposing this last like element beam type hp. A dynamic and kinematic study of the model is made using the LAGRANGE equations for the determination of the differential equations of the movements of the rotating system, these differential equations are constituted by elements in the form of matrices. these last elements one was determined in the chapter 2 formulations of the finite elements MEF. The results obtained are presented in the form of a Campell diagram and are discussed and interpreted.

Keywords: Rotor, functionally graded materials, finite element method.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو الدراسة العددية و الديناميكية لدار المواد التدرجية FGM ،جوف وظيفي مع حماية داخلية السيراميك . تم استخدام النموذج الرياضي للعناصر المحدود ، و هو مزيج من النسخة القياسية h ونسخة p مع هذا الدوار ،بافتراض أنا لأخير هو كعنصر شعاع. يتم إجراء دراسة ديناميكية و حركية للنموذج باستخدام معادلات LAGRANGE لتحديد المعادلات التفاضلية لحركة النظام الدوار ، و تتكون هذه المعادلات التفاضلية من عناصر في شكل مصفوفات. تم تحديد هذه العناصر الأخيرة في صيغ الفصل 2 للعناصر المحدودة MEF.

يتم تقديم النتائج التي تم الحصول عليها على شكل مخطط كامل و يتم مناقشتها و تفسيرها.

الكلمات المفتاحية : الدوار، مواد التدرج الوظيفي، طريقة العناصر المحدودة

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1 :

Figure 1.1 : image représentatif les connaissances en matière d'essai de dureté Knoop

Figure 1.2 : image représentatif le mode du fluage

Figure 1.3 : Image représentatif les différentes pièces médicales en céramique

Figure 1.4 : des images représentatifs des pièces pour le domaine aéronautique

Figure 1.5 : image représentatif un isolant électrique en céramique

Figure 1.6 : image représentatif La Protection thermique des matériaux FGM et non FGM

Figure 1.7 : matériau FGM

Figure 1.8 : Variation du module de Young sur l'épaisseur du rotor FGM

Figure 1.9 : Variation de la masse volumique sur l'épaisseur du rotor FGM

Figure 1.10 : Variation du coefficient de Poisson sur l'épaisseur du rotor FGM

Chapitre 2 :

Figure2.1 : Exemple d'un modèle éléments finis

Figure2.2 : Exemple d'élément finis

Figure 2.3 : Maillage volumique

Figure2.4:Elément poutre 3D à deux nœuds $2x/L$

Figure 2.5: Elément poutre à deux nœuds dans un plan, (déplacement nodales et interne)

Figure 2.6 : déformation de l'arbre autour de l'axe OZ

Figure 2.7 : Déformation de l'arbre autour de l'axe OX

Figure 2.8: Degrés de libertés d'un élément arbre

Figure 2.9 : Modèle d'un palier

Chapitre 3 :

Figure 3.1: model du rotor avec disque 2D

Figure 3.2: Diagramme de Campbell, Mélange graduel SUS304-Zircone avec $k=0.5$

Figure 3.3: fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction (SUS304-Zirconia)

Figure 3.4: première et deuxième fréquence naturelle en fonction de la position du disque avec vitesse de rotation nul et $k=0.5$

Figure 3.5 : première et deuxième fréquence naturelle en fonction de la position du disque avec vitesse de rotation = 5000 tr/min et $k = 0.5$.

Figure 3.6 : influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Zirconia) avec différent indice de volume fraction (vitesse de rotation=5000tr/min)

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: Modules spécifiques de différents matériaux.

Tableau 2: Différentes duretés des matériaux.

Tableau 3: Les céramiques techniques pour la mécanique et la thermomécanique.

Tableau 4 : Les composés d'oxyde d'aluminium et oxyde de beryllium.

Tableau 5 : Les composés d'oxyde de zirconium.

LISTE DES SYMBOLES

- P-FGM..... La fraction volumique des structure
- r_o Rayon de l'épaisseur externe.
- r_i Rayon de l'épaisseur interne.
- k Indice de graduation Power Law du volume fraction
- rrayon de l'arbre rotor.
- P_m propriété mécanique de la couche du métal a l'extérieur.
- P_c propriété de la couche de la céramique a l'intérieur.
- p degré du polynôme
- hnombre des éléments de taille variable
- SUS304..... métal
- MEF.....La méthode des éléments finis
- CAO.....logiciel de dessin assisté par ordinateur
- $u_0(Y)$ Déplacement transversal suivant OX .
- $v_0(Y)$ Déplacement longitudinal négligé suivant OY .
- $w_0(Y)$Déplacement transversal suivant OZ .
- $\psi(Y)$ Rotation de la section droite autour de OZ
- $\theta(Y)$Rotation de la section droite autour de OX
- $q(t)$ vecteur déplacement généralisé
- $\{B\}$le vecteur déplacement

N_v et N_w sont les fonctions de forme des poutres en flexion suivant deux directions y et z

q_v et q_w sont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions x et z.

σ :Contrainte

ε :.....Déformation

E:..... Module de Young

ρ : La masse volumique

$k=vf$ l'indice de volume fraction

VF.....fonctionne volumique

$[R_A]$ matrice de rigidification centrifuge de l'arbre

$[M_A]$:Matrice masse d'arbre.

$[C_{g_A}]$:.....Matrice gyroscopique d'arbre proportionnelle à la vitesse de rotation Ω

$[C_p]$:..... Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers.

$[K_A]$:Matrice de rigidité de l'arbre.

$[K_p]$:..... Matrice de rigidité des paliers.

$[E_{CA}]$ Matrices de l'arbre

Introduction générale

Introduction générale

La dynamique des rotors appelée aussi dynamique des machines ou l'étude et l'analyse numérique sont focalisées sur le comportement vibratoires des arbres de transmission des mouvements de rotation utilisés pour les machines industrielles et les véhicules lourds ; ces arbres peuvent porter un ou plusieurs disques, on les trouve dans les pompes multicellulaires, turbines à gaz, compresseurs et turbopropulseurs des avions légers et turboréacteurs des avions lourds. Cet axe fait partie des sujets importants dans le monde industriel conduisant à l'étude des comportements vibratoires ou à l'analyse des fréquences vibratoires d'un système tournant avec ou sans disques et travaillant dans des environnements nécessitant de déterminer toutes les fréquences vibratoires d'un rotor et de comprendre leurs modes vibratoires de fonctionnements. On peut dire que cet axe de recherche fait l'objet de plusieurs travaux antérieurs de dynamique combiné parfois à l'étude de la science des matériaux et à la mécanique des fluides pour comprendre les phénomènes interaction fluide structure pour l'aérodynamique et a d'autres discipline incluant la tribologie de contacte des pièces en mouvements sous divers phénomènes environnemental (flux de chaleurs ou de la température ou champs magnétique) nécessitant de conserver les pièces constituants le système tournant intacts pour assurer leurs bons fonctionnements et augmentée la durée de vies de ces systèmes mécaniques définies par une optimisation minutieuse du choix des matériaux et de leurs propriétés mécaniques. [7]

Les rotors sont utilisés dans plusieurs domaines, dans la majorité du temps il désigne la partie rotative d'une machine industrielle mécanique ou électrique qui sont portés par des supports appelés paliers qui sont solidaires à une partie fixée appelée le stator. [13]

La nouvelle technologie nécessite d'utiliser des matériaux innovants qui possèdent des avantages fonctionnels tels que : la résistance, la durabilité, la légèreté. Et après plusieurs études les chercheurs arrivent à comprendre la différence entre les phénomènes causés par un revêtement constituant la couche protectrice et une gradation des propriétés des matériaux sans discontinuités constituant les nouveaux matériaux innovants définissant ainsi la génération des matériaux nommé les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Materials « FGM »).

Le rotor joue un rôle très important dans l'industrie moderne surtout après l'arrivée des matériaux à gradient de propriétés qui a gagné sa place dans les matériaux avancés et qui est

Devenu la solution unique et efficace dans plusieurs domaines comme l'énergie, la mécanique, l'aéronautique, l'aérospatiale etc. [14]

Les matériaux à fonctions graduées FGM sont constitués principalement pas un mélange graduel de deux matériaux qui sont le métal (pour la dureté) et le céramique (pour la résistance aux conditions extrêmes) son intérêt est d'intégrés les avantages de plusieurs matériaux, dans une seule pièce pour résister à la fois à la température à l'usure et la fatigue et la corrosion aux produits chimiques. Il est appliqué surtout pour augmenter la résistance thermique et les chocs thermiques dans des applications ou les systèmes tournants fonctionnent dans un environnement de température variable et très élevés. Nécessitant une protection adéquate et évité les contraintes thermiques qui conduisent aux phénomènes de délamination ou à la rupture des couches des revêtements en céramique.

La céramique technique ou bien la céramique avancée c'est une nouvelle classe des matériaux avancées dédiée aux applications industrielles nécessitant une protection contre les produits corrosifs ou une protection contre l'élévation de la température appelée aussi barrière thermique , le but de cette industrie est l'innovation et l'amélioration des propriétés physiques et mécanique des pièces constituants l'arbre tournants des machines industrielles turbines à gaz, turbopropulseur ou turboréacteurs des avions ou pour les centrifugeuses nucléaires travaillant pour l'enrichissement de l'uranium . [7]

CHAPITRE 1 :

**La céramique et les matériaux à gradients
des propriétés FGM**

1 Introduction

Dans les derniers temps l'utilisation des céramiques est devenue une chose nécessaire dans le domaine de la construction parce qu'elle représente de nombreux avantages tels que : la durabilité, la résistance, légèreté et la haute rigidité.

Les matériaux céramiques ont occupé une place très importante dès l'antiquité dans notre vie quotidienne à la faveur de leur inertie chimique puisqu'elle a connu une variété d'application.

2 Définition de la céramique :

La racine grecque du mot céramique est Kéramos qui signifie argile. On trouvera dans le dictionnaire la définition du mot "céramique" : objet issu de la cuisson d'une terre argileuse qui peut être émaillée ou vitrifiée en surface pour donner de la faïence, de la porcelaine... [1]

Le mot céramique désigne essentiellement les poteries, porcelaine, brique. Il

Représente actuellement l'ensemble des matériaux inorganique non métallique [2]

3 Propriétés des céramiques :

La céramique est issue par des matériaux géologiques (les roches broyées et la terre) ou bien par les argiles appelée aussi céramique argileuse destinée pour faire les ustensiles de cuisines et la céramique technique destinée pour l'industrie mécanique aéronautique

3.1 Propriétés physiques :

La fusion de la céramique représente un avantage très intéressant pour les opérations de fonderie, leu masse volumique est de 3800 kg/ m³. Et son utilisation est nécessaire dans des différents domaines tels que : L'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, l'habitat et le design, médicale et au dernier dans le revêtement.

3.2 Propriétés thermomécaniques

La variation des propriétés mécaniques avec la température est le principal obstacle limitant l'utilisation des céramiques. Dans le cas de chocs thermiques, des contraintes sont générées au sein de la céramique. A température élevée, c'est à dire supérieure à la moitié de la température absolue de fusion, les céramiques peuvent présenter des endommagements de type viscoélastique (fluage). [4]

Les paramètres de résistance mécanique varient en fonction de la température.

Une élévation de la température diminue la rigidité des liaisons atomiques à cause de la dilatation thermique. [4]

Au-delà de 800 à 1000°C, les propriétés mécaniques sont liées à la tenue des phases

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

Intergranulaires vitreuses ou mal cristallisées dans le poly cristaux. En effet, les compositions de ces phases secondaires correspondent à des eutectiques à basse température de fusion dont le comportement élastique à température ambiante est rapidement remplacé par un comportement de type visqueux à haute température. [4]

Les céramiques présentant une phase vitreuse ségréguée aux joints des grains voient leur contrainte à la rupture et leur ténacité décroître rapidement à partir de 800°C, effet renforcé par l'augmentation de la taille des défauts et la taille des grains. [4]

Au contraire, les céramiques sans phase vitreuse voient leurs caractéristiques mécaniques se maintenir jusqu'à 1200 voire 1400°C. La chute des propriétés mécaniques est alors liée à la constitution d'une phase amorphe par oxydation des impuretés métalliques contenues dans les joints de grains. [4]

Quand la céramique est chauffée, elle est en compression, alors que quand elle est refroidie, elle est en traction. Les matériaux étant beaucoup moins résistants aux efforts de traction qu'aux efforts de compression, les ruptures ont lieu pendant le refroidissement. Les contraintes dans le matériau sont liées au coefficient de dilatation, au module d'élasticité et à la diffusivité thermique. [4]

3.3 Propriétés mécaniques

3.3.1 Module d'élasticité

Le comportement rhéologique des céramiques à température ambiante est de type linéaire élastique. Elles présentent un module d'élasticité très élevé et des déformations élastiques extrêmement restreintes. On peut supposer, avec une très bonne approximation, que leur comportement est élastique jusqu'à la rupture. Comme les masses volumiques ρ des céramiques sont faibles, leurs modules spécifiques E / E' (raideurs spécifiques) très élevés les rendent très attractives. On constate ceci dans le tableau suivant : [4]

Tableau 1 : Modules spécifiques de différents matériaux [4]

Matériaux	E / E' (en GPa)
Aluminium	23,05
Alumine	86,85
Fer	26,68
Fibre de carbone	2,42
Carbure de silicium	132,26

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

3.3.2 Dureté

Les mesures de dureté se font par lecture directe de la diagonale d'une empreinte laissée par une charge. Les céramiques sont des matériaux très durs, mais aussi très fragiles. [4]

Tableau 2 : Différentes duretés des matériaux [4]

Matériaux	Charges d'essai (en g)	Duretés Knopp
Alumine frittée	500	1530
Acier	500	180
Vitro cérames 9606	500	619
Verre	500	477

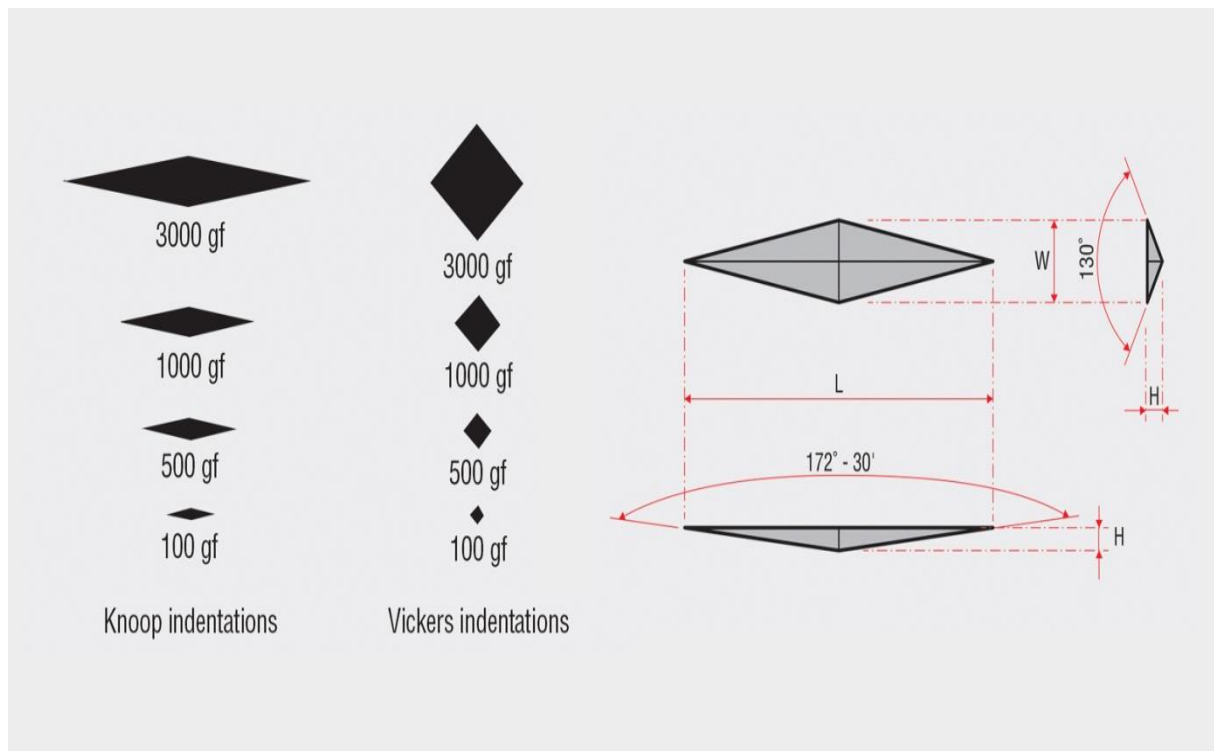


Figure 1.1 : image représentatif les connaissances en matière d'essai de dureté Knoop

3.3.3 Ténacité

La ténacité est la résistance à la propagation rapide de fissures. Pour mesurer la ténacité, il faut introduire une fissure dans une éprouvette et mesurer la résistance à sa propagation. La ténacité K_{Ic} (ou facteur d'intensité de contrainte critique) est liée à la contrainte à la rupture, par la relation : $K_{Ic} = \sigma_r Y \sqrt{a_c}$ [4]

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

Cette relation signifie que sous une contrainte σ , il y a propagation brutale et instable d'une fissure à partir d'un défaut critique de taille $2a_c$. Y est une constante de calibration fonction des dimensions de l'éprouvette. [4]

Une autre manifestation de la fragilité des céramiques est leur faible ténacité, c'est-à-dire leur extrême sensibilité à la propagation de petits défauts quand le matériau est soumis à une contrainte. [4]

La ténacité des céramiques traditionnelles n'est que d'environ $1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ alors que pour la plupart des métaux, elle est supérieure à $40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Pour certaines zircons, elle peut atteindre $10 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. [4]

Les céramiques ne sont pas ductiles, elles se cassent brutalement sans plastification. Leur comportement est donc très fragile. Pour les céramiques à grains fins, la taille des grains intervient peu sur la charge à la rupture car la rupture s'amorce plutôt sur des défauts de grande dimension par rapport aux grains. En revanche, pour les céramiques à gros grains, la rupture est souvent la conséquence d'un phénomène de coalescence de microfissures secondaires dépendant fortement de la taille des grains. [4]

Tableau 3 : Les céramiques techniques pour la mécanique et la thermomécanique. [7]

Domaine technique	Propriétés	Céramique
Mécanique	Tenue mécanique (outils de coupe, filières)	WC, Co, TiC, TiN.....
	Bon comportement à l'usure et au frottement (joint d'étanchéités, buses, paliers, roulements)	Al_2O_3 , ZrO_2 , Si_3N_4 , SiC , B_4C ,
	Tenue mécanique (abrasifs)	SiO_2 , Al_2O_3 , SiC
Thermomécanique	Résistance à la température (turbine...)	Al_2O_3 , ZrO_2 , Si_3N_4 , SiC

3.4 Propriétés chimiques :

La céramique avancée exprime un niveau très élevé de la stabilité chimique. Elle est résistante à des nombreux agents corrosifs comme : Les acides (chlorhydrique, nitrique, sulfurique), Les

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

basiques, l'hydroxyde de sodium et les salines qui incitent des réactions et amènent à la destruction du matériau.

3.4.1 Méthode de préparation :

L'intérêt porté aux propriétés des matériaux a entraîné le développement d'une grande variété de méthodes pour leur préparation. La technique choisie pour former un solide ne dépend pas seulement de la composition, mais aussi de l'état sous lequel il doit être utilisé. A l'échelle industrielle, les économies d'énergie favorisant les méthodes ne nécessitant pas de haute température [5].

4 Mécanismes de rupture des céramiques :

Les céramiques généralement sont caractérisées par deux mécanismes de rupture qui sont :

Le clivage : sa fonction est la production des fissures et leur transmission jusqu'à rupture.

Le fluage : le rôle de ce deuxième mécanisme de rupture est le prolongement irréversible, pendant le temps d'un matériau tributaire à un effort constant.

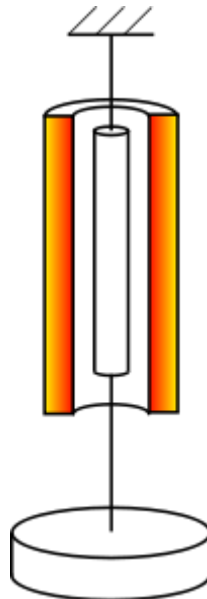


Figure 1.2 : image représentatif le mode du fluage

5 Les domaines d'utilisation des céramiques :

Il existe dans la céramique plusieurs secteurs d'activités traditionnels et modernes.

Nous citons par la suite les domaines ci-dessous :

5.1 Médical

Le domaine médical utilise souvent le terme « biocéramique » pour désigner cette famille de matériaux utilisés en chirurgie réparatrice depuis cinquante ans. [6]

La parfaite inertie chimique de la céramique en fait un matériau très utilisé dans le domaine médical, que ce soit pour l'équipement ou l'implantable. (1)

Grâce à des caractéristiques techniques hors norme en termes de performances, ce matériau permet la réalisation de produits de pointe :

- Accélérateurs de particules,
- Analyseurs de gaz ou de fluides,
- Appareils d'imagerie,
- Microscopes,
- Spectromètres. (1)

D'autres caractéristiques peuvent être également très appréciées comme sa faible dilatation thermique, ses capacités d'isolation électrique ou encore, ses capacités d'isolation thermique. (1)



Figure 1.3 : Image représentatif les différentes pièces médicales en céramique

5.2 Automobile :

La fabrication de pièces en série visant à équiper une automobile nécessite un process souvent répétitif. (1)

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

Les céramiques ayant des propriétés permettant de répondre aux problématiques d'usure prématurée de vos équipements, HARDEX étudie avec vous, les solutions pour augmenter la fiabilité et la durée de vie de vos équipements. Pour cela, nous remplaçons les pièces d'usure en acier ou autres matériaux par des céramiques. (1)

- **Guidage** : la très haute résistance à l'usure des céramiques permet de garder une géométrie précise malgré les passages répétés même face à des produits abrasifs. Nous pouvons remplacer des paliers ou des guides en acier traité par de la céramique pour améliorer et prolonger le cycle de vie de l'ensemble des produits. (1)
- **Isolation électrique** : en insérant des pièces en céramique dans certains process, ... les problèmes d'électricité statique peuvent être éliminés. (1)
- **Résistance aux températures extrêmes** : très chaud ou très froid, les céramiques ont des plages d'utilisation bien plus larges que tous les métaux avec une très faible dilatation. (1)

5.3 Aéronautique :

Résistance aux températures extrêmes avec de fortes amplitudes, isolation électrique, résistance aux vibrations, résistance à la corrosion sont les caractéristiques des céramiques les plus appréciées dans le secteur de l'aéronautique et du spatial. Les pièces en céramique vont se trouver, en particulier sur des capteurs, des connecteurs, en protection thermique ou en pièces techniques sur les parties chaudes... Les propriétés des céramiques correspondent bien à un secteur exigeant comme l'aéronautique et le spatial (1)

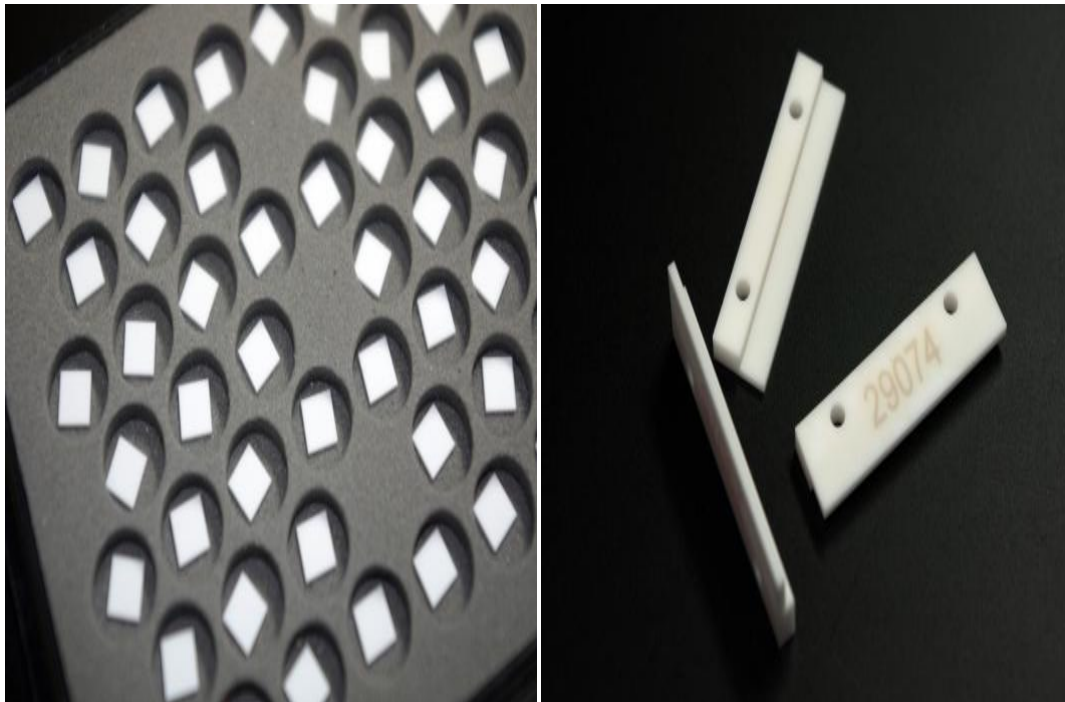


Figure 1.4 : des images représentatifs des pièces pour le domaine aéronautique

5.4 Défense :

Le domaine de la Défense exploite souvent une combinaison de propriétés des céramiques techniques qui leur permettent de répondre à des exigences très spécifiques et qui conditionnent les capacités opérationnelles des équipements :

- Résistance mécanique, grande dureté et légèreté pour les blindages, voire transparence pour les vitrages blindés,
- Isolation électrique et résistance mécanique pour les allumeurs,
- Transparence optique, infra-rouge, électromagnétique, combinées à résistance thermo mécanique et résistance à l'abrasion pour les fenêtres embarquées. (2)

5.5 Nucléaire :

Les pastilles d'oxyde d'uranium, combustibles des réacteurs nucléaires, sont en fait des céramiques. Elles fournissent ainsi un matériau résistant aux conditions extrêmes du milieu : températures (plus de 300 °C), pression (150 fois la pression atmosphérique), irradiation. Préparer la quatrième génération de réacteurs (réacteur à neutrons rapides notamment) et répondre à leurs enjeux – réutilisation d'une partie des déchets, amélioration de leur sécurité... – impose aujourd'hui de faire évoluer ces matériaux combustibles. (3)

5.6 Electrotechnique :

Les contraintes de tailles, de stabilité dans le temps, de faible dilatation lors de grandes variations de températures font des céramiques un matériau très utilisé. Les céramiques entrent également depuis très longtemps dans la composition de la plupart des composants électroniques.

Nous avons développé, pour le secteur de l'électronique, des procédés de micro-usinage qui permettent de proposer des boîtiers, des supports de composants mais aussi des pièces plus grosses et plus complexes.

Nous utilisons également des techniques de métallisation qui nous permettent d'assurer une conductibilité à des endroits bien précis tout en gardant le fort pouvoir isolant de la céramique. Pour les applications les plus complexes, nous avons la possibilité de faire des assemblages céramique-céramique et céramique-métal. (1)



Figure 1.5 : image représentatif un isolant électrique en céramique

6 Divers types de céramiques techniques

Les céramiques techniques peuvent être classées en plusieurs familles que nous présentons dans ce chapitre sous forme de tableaux. La famille des oxydes métalliques est la plus importante parmi les composés céramiques binaires. Cette première famille de céramiques est présente dans pratiquement tous les domaines. Nous avons réuni dans les tableaux ci-dessous les principaux oxydes. [7]

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

Tableau 4 : Les composés d'oxyde d'aluminium et oxyde de beryllium. [7]

Céramique	Appellation Composition	Structure cristalline Couleurs	Densités (Kg\dm ³)	Température de fusion	Utilisation
Oxyde d'aluminium	Alumine Al ₂ O ₃	Hexagonale incolore	3,965	2072	Mécanique thermique thermomécanique nucléaire militaire
Oxyde de béryllium	(Bromélie) BeO	Hexagonale blanc	3,01	2530	Mécatronique

Tableau 5 : Les composés d'oxyde de zirconium.

Céramique	Appellation Composition	Densités (Kg\dm ³)	Température de fusion	Utilisation
Oxyde de zirconium	Zircone Zr O ₂	5.6	2715	Thermomécanique thermique mécanique

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

L'utilisation de la céramique seule reste toujours limitée à cause de la fragilité de ce matériau qui présente un comportement de faiblesse en traction par exemple. Les tendances actuelles visent à utiliser un matériau composé par la combinaison de plusieurs matériaux pour accroître la durée de vie et améliorer la fiabilité. De nos jours les machines tournantes sont de plus en plus performantes en termes de sa conception par des matériaux innovants tels que les matériaux composites. Les matériaux et structures composites sont de plus en plus utilisés dans les domaines techniques avancés principalement en raison de leur rapport masse/puissance qui est particulièrement favorable. Cependant, le principal inconvénient des matériaux composites est représenté par la faiblesse des interfaces entre les couches adjacentes connues sous le nom de phénomène de délimitation pouvant conduire à une défaillance structurelle. Pour surmonter partiellement ces problèmes, une nouvelle classe de matériaux dénommés matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ou (Functionally Graded Materials) a récemment été proposée. Ces matériaux ayant des propriétés qui varient à travers l'épaisseur le long d'une direction bien définie de manière continue et donc exemptés des problèmes de faiblesse de l'interface et des phénomènes de délimitations. La graduation des propriétés de ces matériaux réduit les variations brutales des contraintes thermiques et des contraintes résiduelles qui peuvent créer des problèmes de compositions structurelles entraînant des avaries de fonctionnements du système tournant ou autres.

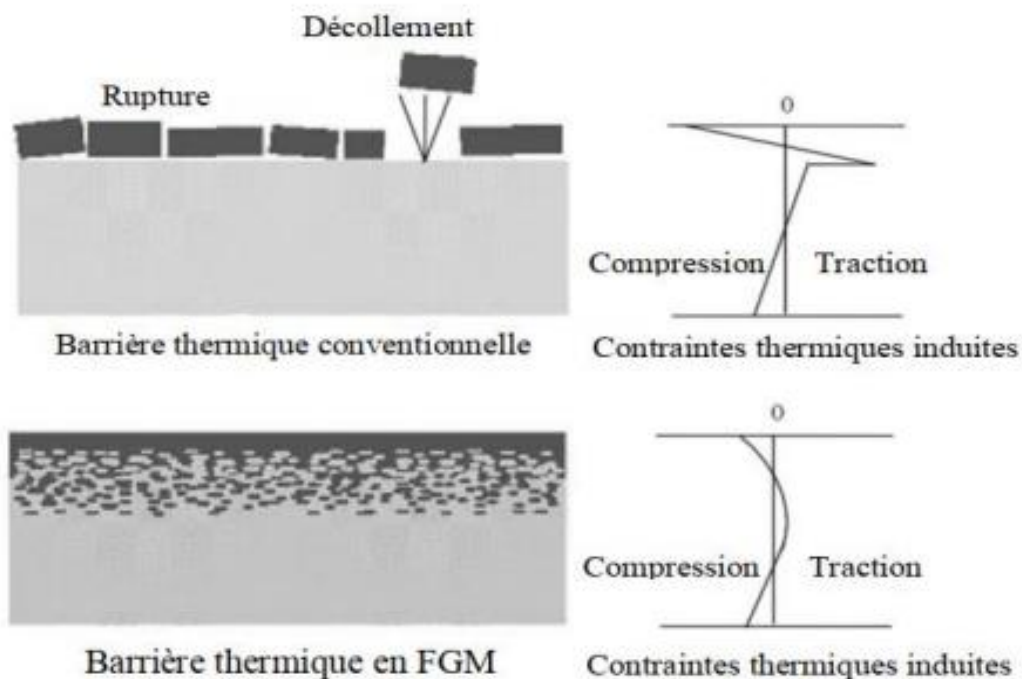


Figure 1.6 : image représentatif La Protection thermique des matériaux FGM et non FGM

7 Définition des matériaux à gradient des propriétés FGM :

Les matériaux à fonctionnel gradus (FGM) sont des matériaux constitués par un mélange graduel de deux ou plusieurs matériaux (métal et céramique...) L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la fois à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Ainsi on peut affecter à la céramique les propriétés de résistance à la température ou Barriere thermique et résistance à la corrosion. Et au métal les propriétés de la résistance à l'usure ou à la fatigue

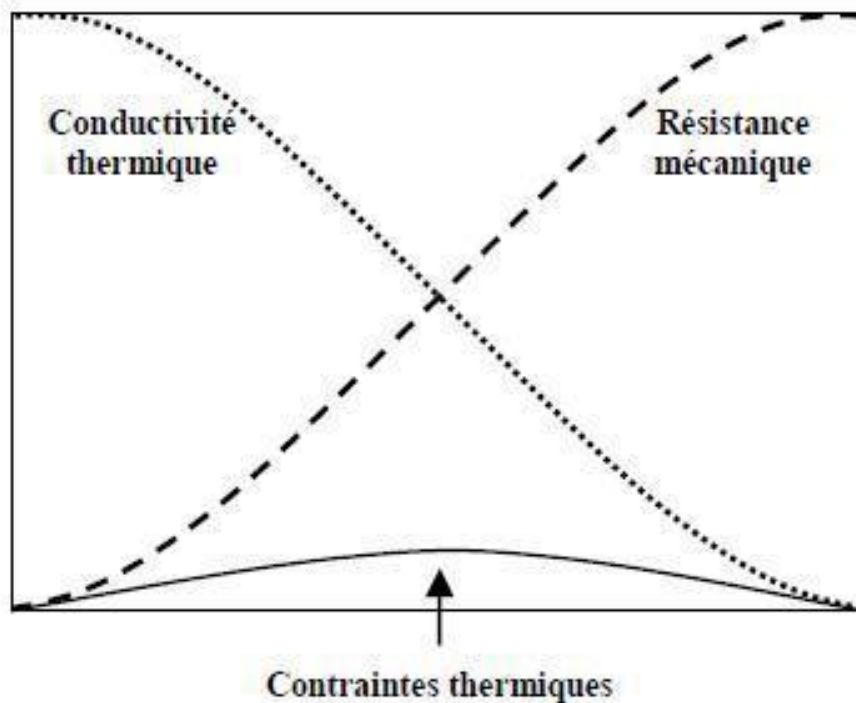
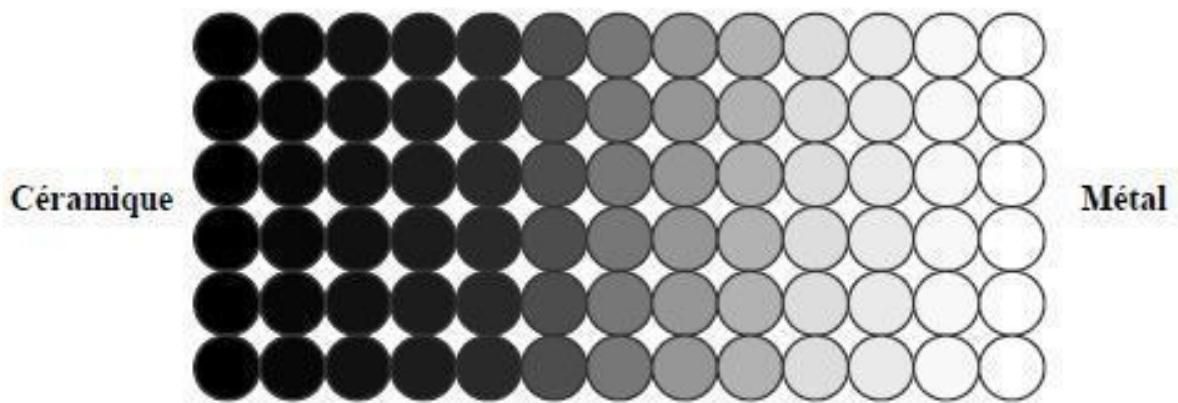


Figure 1.7 : matériau FGM

8 Application en industrie des matériaux à gradient des propriétés :

Les matériaux modernes tendent à devenir « multifonctionnels », même si leur premier objet permet en général de les classer en Matériaux de structure et en matériaux fonctionnels. Le problème du concepteur est qu'il demande non pas une propriété, mais un ensemble. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut être collée à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans des applications à haute température. Toutefois, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire et peut conduire à la déformation plastique ou de fissuration. Pour surmonter ces effets nuisibles on doit utiliser les matériaux à gradient des propriétés FGM, sont des matériaux composites avancés. Par exemple, dans un matériau FGM (métal / céramique), le côté métal est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté ; doivent être élevée. En revanche, le coté céramique avec une conductivité thermique faible peut résister aux températures les plus élevées, et par conséquent il est utilisé dans les régions fortement exposées à la température. Les matériaux à gradients des propriétés FGM permettre l'adaptation de la composition du matériel de manière à en retirer le maximum d'avantages de leur hétérogénéité. Certains des avantages des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont :

- FGM en tant que couche d'interface pour connecter deux matériaux incompatibles peut améliorer considérablement la résistance de liaison.
- Le revêtement FGM peuvent être utilisés pour réduire à l'interface la contrainte résiduelle et la contrainte thermique.
- Le FGM non seulement améliore la résistance des connexions, mais peut également réduire la force de la fissure.
- Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont la capacité de contrôler la déformation, la réponse dynamique, l'usure, la corrosion, etc.
- FGM offre également les opportunités de profiter des avantages de différents systèmes matériels, par exemple, des céramiques et des métaux. La partie céramique présente une bonne résistance thermique, une résistance à l'usure et à l'oxydation (rouille), alors que la partie métallique a une résistance à la rupture supérieure, une résistance élevée et une capacité de liaison.
- FGM a une large gamme d'application dans les prothèses dentaires et orthopédiques

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

- Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtements protecteurs sur des pales de turbine dans un moteur à turbine à gaz.[7]

En général un matériau à fonction graduée est défini par la variation graduel des propriétés du mélange de deux matériaux exemple métal-céramique ces variation sont définit par le volume fraction des deux matériaux et en dynamique des machines la pièce maitresse de cette machine est le rotor qui doit être minutieusement posé, contrôlé et protégé intérieurement ou extérieurement contre la corrosion et contre l'élévation de la température, ainsi on peut dire que ce rotor est un Rotor a protection interne en céramique ou externe en céramique.

9 Formulation des matériaux FGM

Les matériaux FGM sont modélisés pour les corps cylindriques creux selon le modèle de la structure P-FGM.

9.1 Modélisation des structures rotors P-FGM

La fraction volumique des structures P-FGM est assurée par la loi de puissance Power Law, pour cela la variation continue du volume fraction entraine des variations sur les propriétés de la composition FGM, et le volume fraction du mélange (Hui-Shen Shen 2009) [8].

Pour un cylindre creux est définit par :

$$V_f = \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^k \quad (1.1)$$

Avec : r_o Rayon de l'épaisseur externe.

r_i Rayon de l'épaisseur interne.

k Indice de graduation Power Law du volume fraction.

La somme des volumes de fractions est toujours égale à 1 pour une position radiale comprise entre les deux surfaces extrêmes avec la céramique à l'extérieur et le métal à l'intérieur

$$V_m + V_c = 1 \quad (1.2)$$

Les propriétés en fonction de l'épaisseur et de la température sont données par :

$$P(z, T) = [P_o(T) - P_i(T)] \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^k + P_i(T) \quad (1.3)$$

CHAPITRE 1 : La céramique et les matériaux à gradients des propriétés FGM

Les propriétés en fonction de l'épaisseur sont données par :

$$P(z)=[P_o - P_i] \left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k + P_i \quad (1.4)$$

-(P_o, P_i) la lettre P désigne le mot « propriété » et l'indice « O » désigne en anglais « outer » qui veut dire « extérieur » et l'indice « i » désigne en anglais « inter » qui veut dire « interne ».

Ce travail est basé sur l'étude des rotors à protection interne en céramique donc sur la formule (1,4) l'indice i sera remplacé par l'indice c de céramique.

- la lettre P qui désigne les propriétés peut être affectée par E (Module de Young), ρ (masse volumique) et ν (coefficient de poisson) ...

- les variations de ces dernières propriétés des matériaux FGM sont décrites dans les courbes suivantes.

$$P(z)=[P_m - P_c] \left(\frac{r-r_c}{r_m-r_c} \right)^k + P_c$$

r : rayon de l'arbre rotor.

P_m : propriété mécanique de la couche du métal à l'extérieur.

P_c : propriété de la couche de la céramique à l'intérieur.

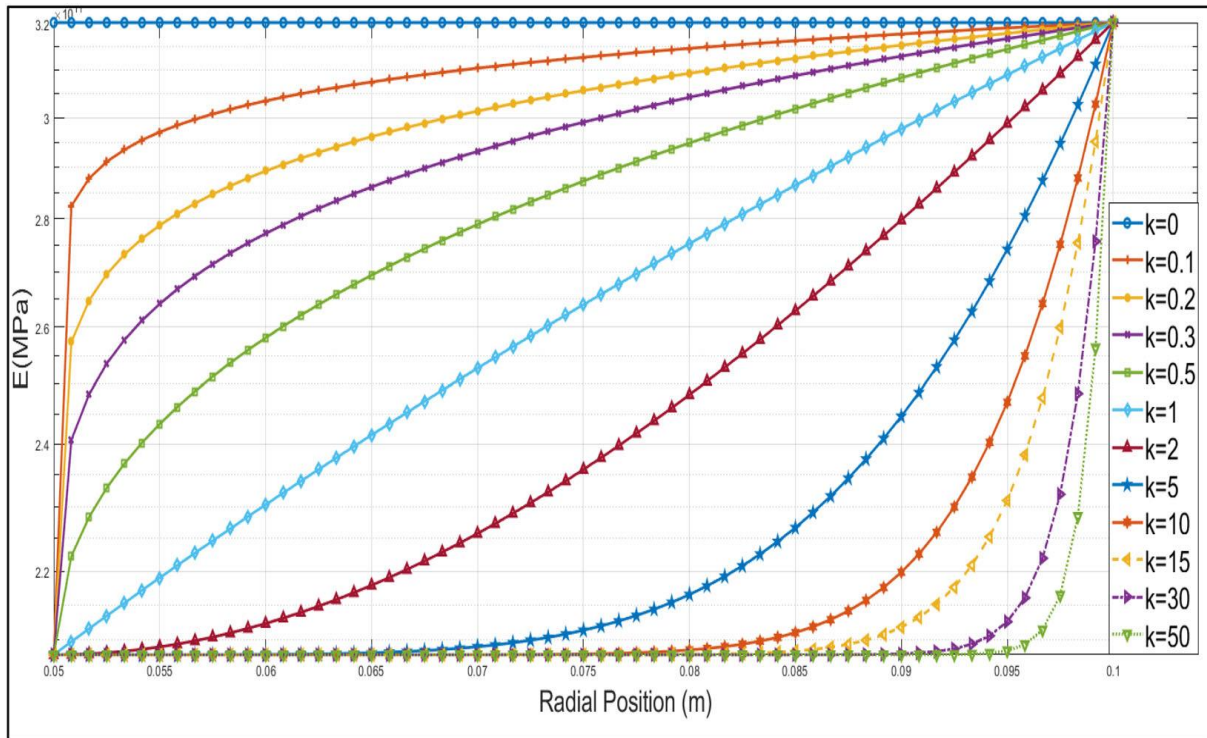


Figure 1.8 Variation du module de Young sur l'épaisseur du rotor FGM

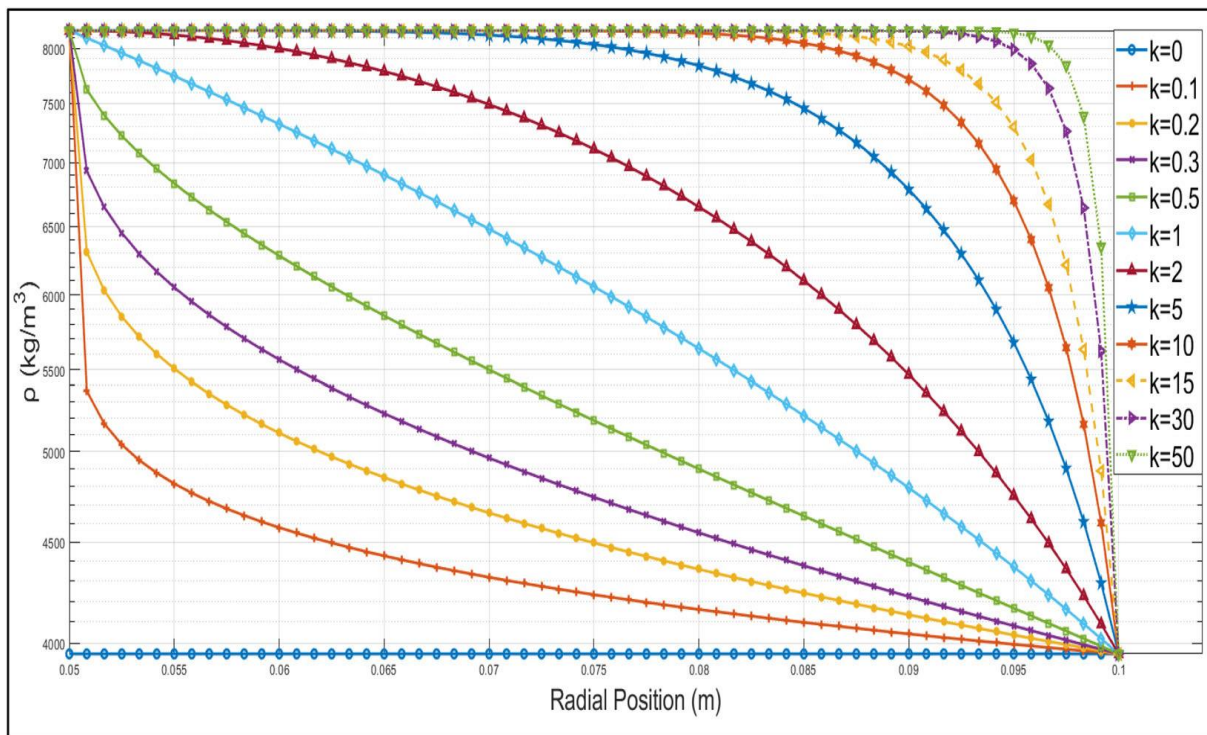


Figure 1.9 Variation de la masse volumique sur l'épaisseur du rotor FGM

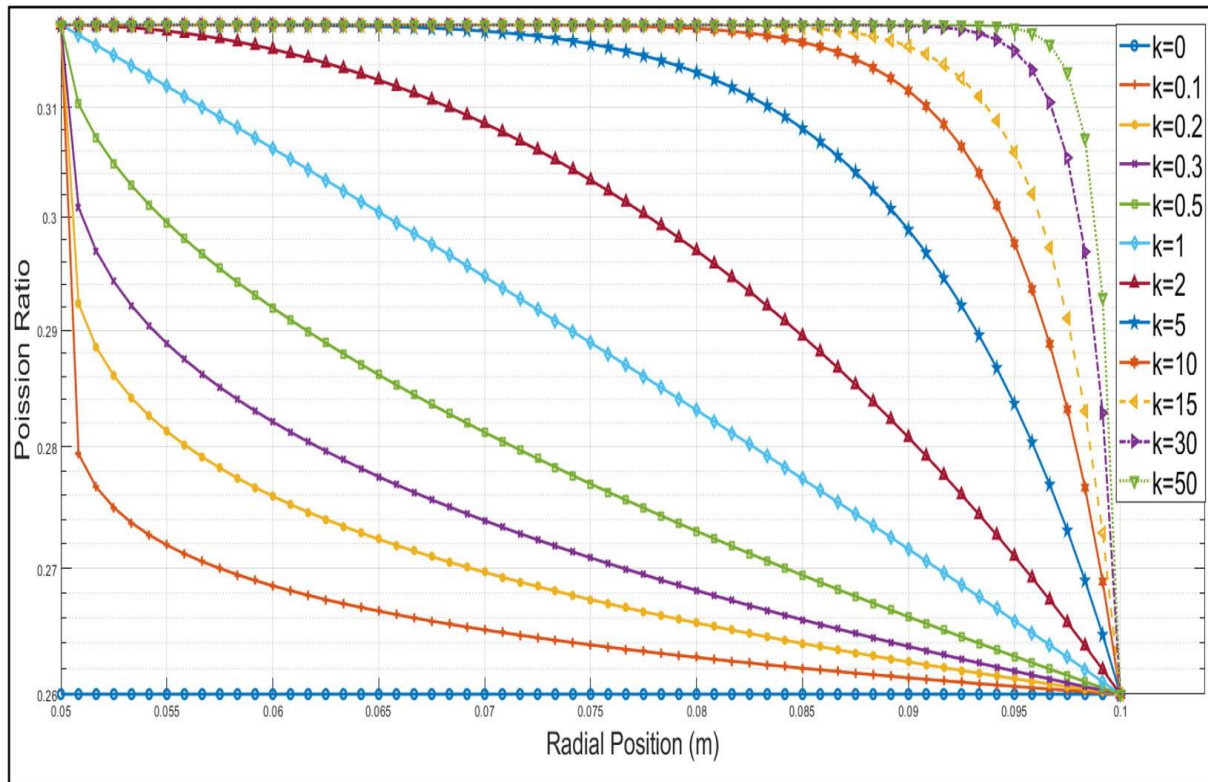


Figure 1.10 Variation du coefficient de Poisson sur l'épaisseur du rotor FGM

Les figures 1.5, Figure 1.6 et Figure 1.7 montrent respectivement les variations des propriétés du module de Young, masse volumique et coefficient de Poisson. Selon la distribution Power Law On constate que les propriétés modulent de Young, masse volumique et coefficient de Poisson varient linéairement sur l'épaisseur pour un indice de volume fraction $k=1$. Pour une graduation du mélange ayant un indice de volume fraction $k=0$ les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche externe pure en métal SUS304 acier inoxydable (stainless steel –SS-). Pour k supérieur à la valeur 1, les propriétés du rotor tend vers les propriétés de la couche internes faite majoritairement en matériaux céramique.

CHAPITRE 2 :

Formulation Par la Méthode des éléments

Finis Version Hp

1 Introduction

L'étude et l'analyse des vibrations ont une longue histoire et connaissent actuellement un regain d'intérêt dans le domaine de la conception et du dimensionnement, dans le but d'assurer un fonctionnement optimal, la sécurité et l'efficacité économique des systèmes. Pour analyser dynamiquement un rotor, il est nécessaire de développer un modèle mathématique approprié. Ce processus de développement repose sur des postulats et des hypothèses simplificatrices visant à obtenir des équations gouvernant le système, souvent sous forme d'équations différentielles, auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. Dans ce contexte, l'utilisation d'un modèle par éléments finis est considérée comme la méthode la plus fiable étant donné la complexité du problème.

Le modèle par éléments finis divise le rotor en un ensemble discret d'éléments interconnectés, permettant ainsi la résolution numérique des équations gouvernant le système et fournissant des informations détaillées sur les vibrations et le comportement dynamique du rotor. Ce type de modèle prend en compte les propriétés matérielles, géométriques et structurales du rotor, offrant ainsi des résultats plus précis et réalistes. Toutefois, il est important de souligner que la création d'un modèle par éléments finis nécessite une connaissance approfondie du système étudié, ainsi que des compétences en analyse numérique.

L'utilisation d'un modèle par éléments finis est couramment privilégiée dans l'analyse dynamique des rotors en raison de sa capacité à prendre en compte la complexité du problème et à fournir des résultats plus précis. Cependant, il est primordial de développer ce modèle avec rigueur en considérant les hypothèses simplificatrices appropriées et en définissant les conditions aux limites adéquates afin d'assurer la fiabilité des résultats obtenus.

2 Définition

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique numérique utilisée pour résoudre des problèmes mathématiques complexes, notamment des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, en les approximant par des éléments finis. Elle est largement utilisée dans les domaines de l'ingénierie et de la science pour simuler le comportement des structures, des fluides, des matériaux et d'autres phénomènes physiques.

La méthode des éléments finis repose sur le principe de diviser un domaine continu en un ensemble de sous-domaines plus petits, appelés éléments finis. Ces éléments sont définis par un ensemble de nœuds (points) et sont interconnectés pour former un maillage. À l'intérieur de chaque élément, on approxime la solution du problème par une fonction mathématique simple, telle qu'un polynôme.

La méthode des éléments finis permet de formuler le problème continu sous forme d'un système d'équations algébriques, qui peut être résolu numériquement. En utilisant des méthodes de calcul numérique, les équations sont discrétisées et transformées en un ensemble de systèmes linéaires qui peuvent être résolus pour obtenir une solution approchée du problème initial.

La méthode des éléments finis présente plusieurs avantages. Elle permet de modéliser des géométries complexes, de prendre en compte différents types de conditions aux limites, et de traiter des matériaux hétérogènes. De plus, elle offre une bonne précision de solution en utilisant des éléments suffisamment petits et peut être adaptée à divers types de problèmes physiques.

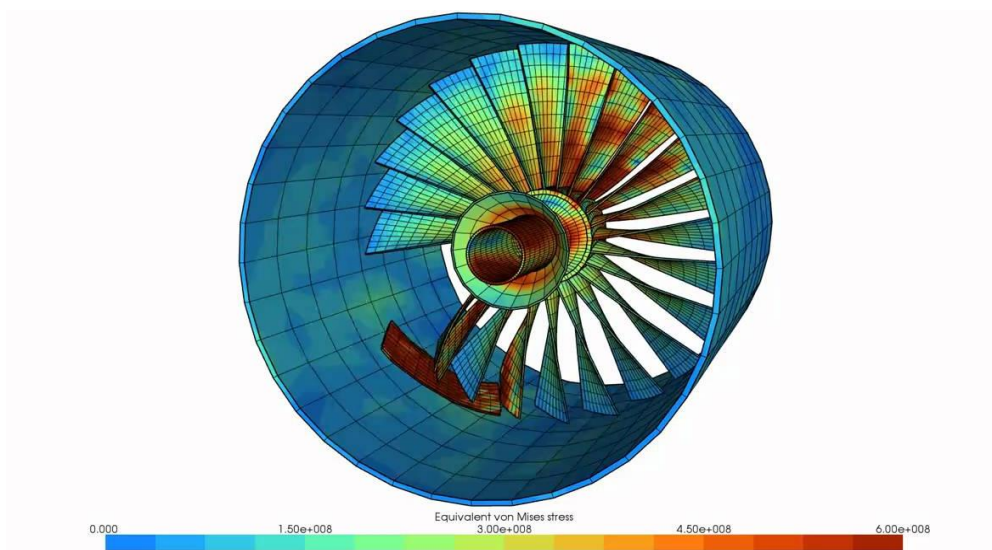


Figure2.1 Exemple d'un modèle éléments finis

3 Types de questions MEF :

La méthode des éléments finis permet de résoudre trois grandes classes de problèmes :

3.1 Problème d'équilibre statique :

Dans ce type de problème, le comportement est défini comme un système d'équations linéaires à variables nodales en termes d'état, de géométrie, de charges et de conditions aux **limites** du système. Cette catégorie comprend l'équilibre statique et l'écoulement constant, le transfert de chaleur et les régimes électromagnétiques.

3.2 Problème aux valeurs propres :

Ce sont des vibrations ou des phénomènes instables au repos. Les modes naturels de vibration, le flambement des structures ou l'instabilité de l'écoulement laminaire entrent tous dans cette catégorie.

3.3 Problèmes liés au temps :

Lorsque l'état d'un système dépend de son historique ou de paramètres de sortie, le système devient interdépendant et ne peut plus être directement résolu.

Ces cas incluent le comportement non linéaire (matériau et géométrie), la dynamique non linéaire (amortissement, rigidité, etc.), les transitoires et la fissuration des pièces.

4 Approche générale:

La méthode des éléments finis (MEF) comprend donc : Décomposer le modèle spatial en éléments finis. C'est le maillage. Créez une version simplifiée de l'EDP pour chaque élément fini. Notez que les conditions aux limites de l'élément sont inconnues, seules les conditions globales sont connues. Collectez les équations aux dérivées partielles locales pour appliquer les conditions aux limites du problème. La mise en œuvre de cette méthode comprend les étapes suivantes :

4.1 Analyse du problème:

Clarifiez l'objectif de vos calculs, trouvez les problèmes potentiels et utilisez un modèle très simpliste pour effectuer les calculs manuellement, et vous obtiendrez des résultats de plusieurs ordres de grandeur..

4.2 Définition du modèle de calcul:

La géométrie du système est dessinée à l'aide d'un logiciel de dessin assisté par ordinateur (CAO). Si un modèle numérique (= sur ordinateur) est déjà disponible (par exemple une pièce conçue par un bureau d'études), la géométrie pour le calcul doit être simplifiée. Plus rapide (modèle « léger »). Il n'y a pas de singularités. Une singularité est un point particulier auquel un algorithme de calcul fonctionne mal. À de tels points, les résultats sont souvent loin de la réalité.

4.3 Maillage :

Diviser le modèle en éléments finis. Il est recommandé de créer un maillage normal en sélectionnant des formes d'éléments correspondantes et en vérifiant la qualité du maillage. Le maillage est créé par l'ordinateur selon des paramètres définis par l'utilisateur.

5 Le calcul est effectué par ordinateur.

5.1 Affichage des résultats, vérification de la cohérence et post-traitement.

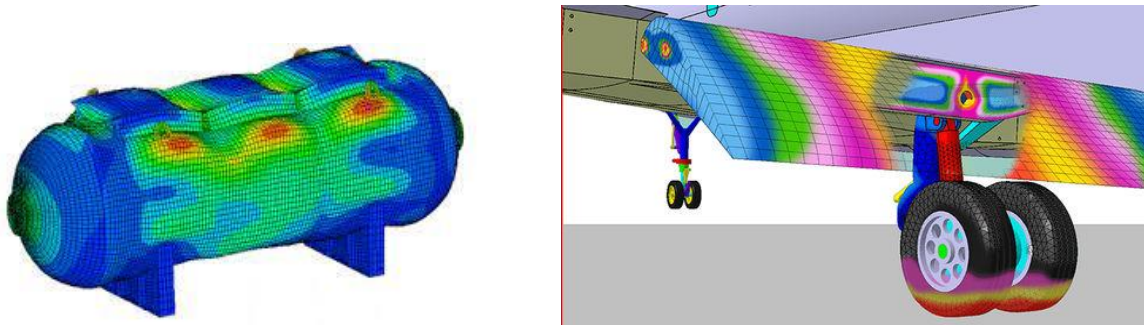


Figure2.2: Exemple d'élément finis

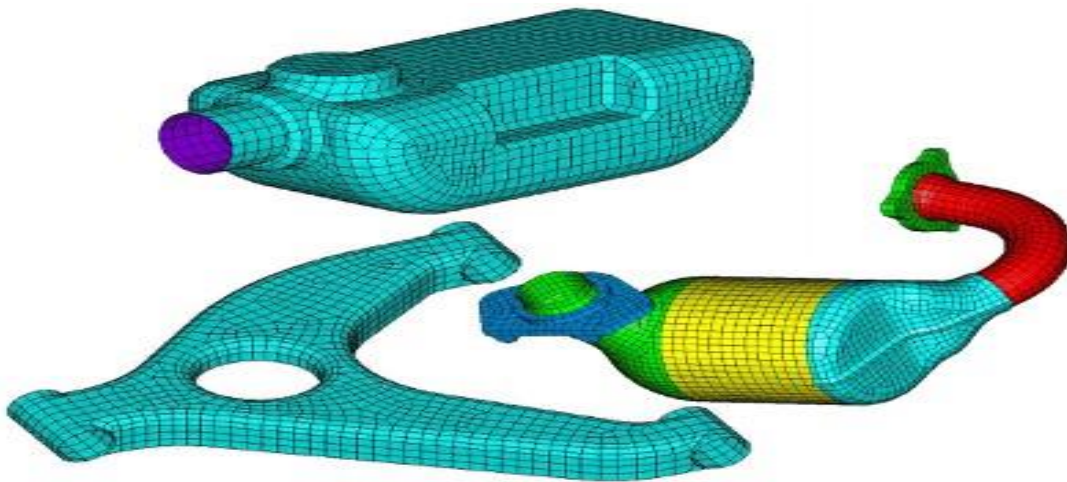


Figure 2.3 : Maillage volumique

6 Domaines d'applications de la MEF :

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique pour résoudre des problèmes mathématiques complexes qui sont souvent difficiles ou impossibles à résoudre analytiquement. Elle est utilisée dans une grande variété de domaines, notamment :

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

Ingénierie : la méthode des éléments finis est couramment utilisée dans la conception et l'analyse de structures comme les ponts, les bâtiments, les avions, les voitures et les appareils électroniques. Elle permet de simuler les comportements mécaniques de ces structures et d'optimiser leur conception pour minimiser les coûts et maximiser les performances.

Sciences de la Terre et de l'environnement : la MEF est utilisée pour modéliser les écoulements de fluides, les transferts de chaleur, les interactions entre sols et eaux souterraines, les mouvements de la croûte terrestre et les processus géologiques.

Biomécanique et médecine : la MEF est utilisée pour modéliser le comportement des tissus biologiques, des organes et des prothèses médicales. Elle est également utilisée pour simuler les impacts des traumatismes, des blessures et des maladies sur le corps humain.

Mécanique des fluides : la MEF est utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement des fluides. Elle permet de modéliser les écoulements dans les canaux, les tuyaux et les réservoirs, ainsi que dans les turbines et les ailes d'avion.

Acoustique : la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser le comportement des ondes sonores dans des environnements complexes, tels que les salles de concert, les bâtiments, les avions et les voitures.

Ces exemples ne sont pas exhaustifs et il existe de nombreuses autres applications de la MEF dans des domaines tels que l'électromagnétisme, la finance, l'analyse de risques, etc.

7 Modélisation par la méthode des éléments finis version hp.

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations. La structure est caractérisée par sa géométrie, le ou les matériaux qui la constituent, Elle est soumise à des sollicitations, des efforts, des déplacements, des flux de chaleurs et des vitesses. Pour un dimensionnement optimal de la structure il faut connaître :

- Les déplacements en tout point.
- Les déformations, les contraintes.
- Les températures.
- Les fréquences propres ...etc.....

La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel, la méthode utilisée pour cette étude est la méthode des éléments finis version hp développée par Ivo Babuška. BQ et GUO 1992[9]. La caractéristique particulière de cette méthode est que l'arbre est modélisé par un raffinement du maillage de la version h et un raffinement du maillage de la version p et que la précision du résultat est obtenue en augmentant l'ordre de raffinement des deux maillages.

8 Méthode des éléments finis version hp :

La version hp des éléments finis est une version générale de la méthode des éléments finis, c'est une méthode numérique pour résoudre des équations aux dérivées partielles en fonction des approximations basée sur un nombre des éléments de taille variable (h) et un polynôme de degré (p). Les origines de cette méthode remontent au travail de pionnier de Babuška1992[9]. Qui ont découvert que la méthode des éléments finis converge exponentiellement lorsque le

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

maillage est raffiné en utilisant une combinaison appropriée de h-raffinements. (En divisant la structure en petit éléments) et p-raffinements (en augmentant leur degré du polynôme). La convergence exponentielle rend la méthode très attractive par rapport à la plupart des autres méthodes des éléments finis qui ne convergent qu'avec un taux algébrique. La convergence exponentielle de la version hp de la méthode des éléments finis ont été non seulement prédite théoriquement mais aussi observée par de nombreux chercheurs scientifiques indépendants.

9 Fonctions de forme.

Dans la méthode des éléments finis, les fonctions de forme sont des fonctions mathématiques qui sont utilisées pour représenter la solution sur un domaine discrétisé en éléments. La version hp de la méthode des éléments finis utilisent des fonctions de forme de degré de polynôme plus élevé pour améliorer la précision de la solution. Dans votre étude, vous utilisez la méthode des éléments finis hiérarchiques, qui combine des fonctions de forme polynomiale K-orthogonales générées par l'équation différentielle de Legendre avec la méthode des éléments finis classique. Cette méthode permet de bénéficier des avantages des fonctions de forme hiérarchiques et assure la compatibilité entre les deux versions. Pour modéliser un arbre en rotation, vous utilisez des éléments poutres 3D hiérarchiques, représentés par deux nœuds, généralement notés 1 et 2, et plusieurs éléments peuvent être utilisés pour mieux capturer la géométrie et le comportement de l'arbre. Les figures 2.4 et 2.5 fournissent une illustration visuelle de ces éléments.

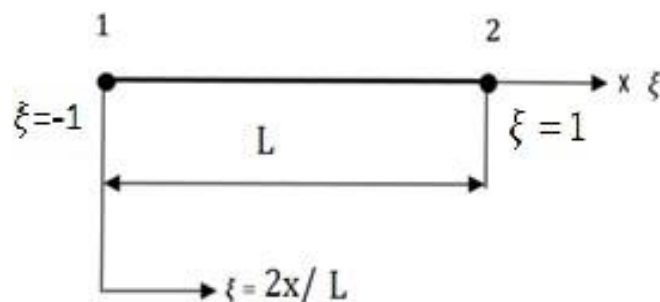


Figure 2.4 : Élément poutre 3D à deux nœuds $2x/L$

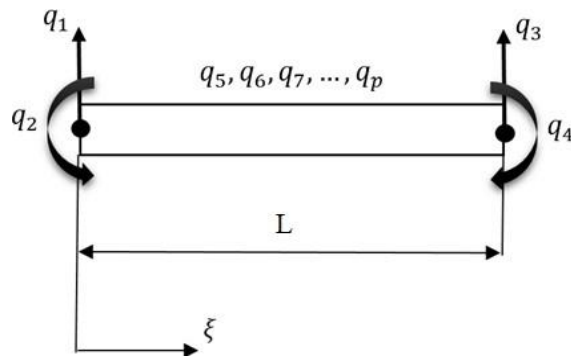


Figure 2.5: Elément poutre à deux nœuds dans un plan, (déplacement nodales et interne)

Coordonnées locales sont liées aux coordonnées a dimensionnelles par la relation :

$$\xi = (2x/L) - 1$$
$$-1 \leq \xi \leq 1$$

Dans la version hp des éléments finis le groupe des fonctions de formes est composé de deux parties,

$$[ff_1, ff_2, ff_3, ff_4, ff_p]$$

Les quatre premières fonctions sont celles de la méthode des éléments finis h nécessaires à la description des déplacements q_1 , q_3 , et les rotations q_2 , q_4 aux nœuds de l'élément, nous utilisons pour cela les fonctions de forme Hermite cubiques Bardell NS (1996) [10].

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_2(\xi) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \right) l_e \\ f_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ f_4(\xi) = \left(-\frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \right) l_e \end{array} \right.$$

Les autres fonctions de forme au nombre maximal de degré du polynôme p, sont les fonctions qui contribuent au champ de déplacement interne ($q_5, q_6, \dots \dots q_p$). Pour ce problème particulier, il y a un grand avantage dans la recherche d'un ensemble des fonctions de formes hiérarchiques qui sont les dérivées de la forme Rodrigues de polynômes spéciaux de Legendre (Peano,1976) [11],

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{\frac{(r-1)}{2}} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{(r-2n-1)}$$

Avec $r > 4$

$$r!! = r(r - 2)(r - 4) \dots (2 \text{ or } 1)$$

Le champ de déplacement d'un point de la poutre est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} V = [N_v]\{q_v\} = \sum_{m=1}^{p_v} Y_m(r) f_m(\xi) \\ W = [N_w]\{q_w\} = \sum_{m=1}^{p_w} Z_m(r) f_m(\xi) \\ \psi(x) = [N_{\psi_x}]\{q_{\psi_x}\} = \sum_{m=1}^{p_{\psi_x}} \psi_{xm}(r) f_m(\xi) \\ \theta(x) = [N_{\theta}]\{q_{\theta}\} = \sum_{m=1}^{p_{\theta}} \theta_m(r) f_m(\xi) \end{array} \right.$$

Le vecteur déplacement {B} est donné par :

$$\{B\} = [N]\{q\} = \begin{bmatrix} [N_v] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [N_w] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [N_{\psi_y}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [N_{\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_v \\ q_w \\ q_{\psi_y} \\ q_{\theta} \end{Bmatrix}$$

Où [N] est la matrice des fonctions de formes.

$$[N_{u,v,w,\psi_x,\psi_y,\theta}] = [f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{p_u,p_v,p_w,p_{\psi_x},p_{\psi_y},p_{\theta}}]$$

10 Champs des déplacements :

Le champ de déplacement d'un point M de la section droite de l'arbre du rotor est donné par la relation :

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

$$\begin{cases} v(X, Y, Z) = v_0(X) \\ u(X, Y, Z) = u_0(X) - Z \psi(X) - X \theta(X) \\ w(X, Y, Z) = w_0(X) \end{cases}$$

Avec :

$u_0(X)$: Déplacement transversal suivant OY

$v_0(X)$: Déplacement longitudinal négligé suivant OX

$w_0(X)$: Déplacement transversal suivant OZ.

$\psi(X)$: Rotation de la section droite autour de OZ

$\theta(X)$: Rotation de la section droite autour de OY

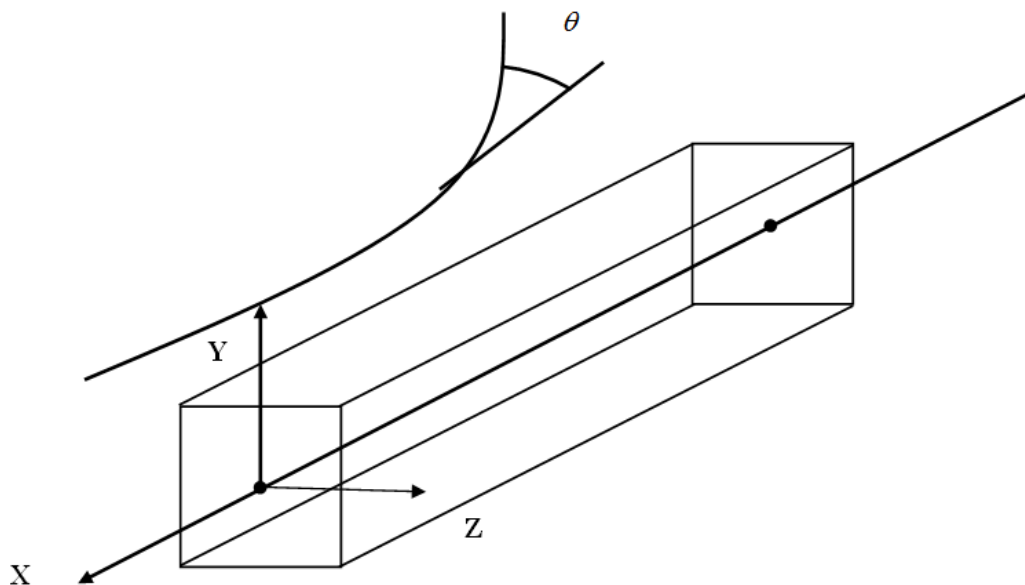


Figure 2.6 : déformation de l'arbre autour de l'axe *OZ*

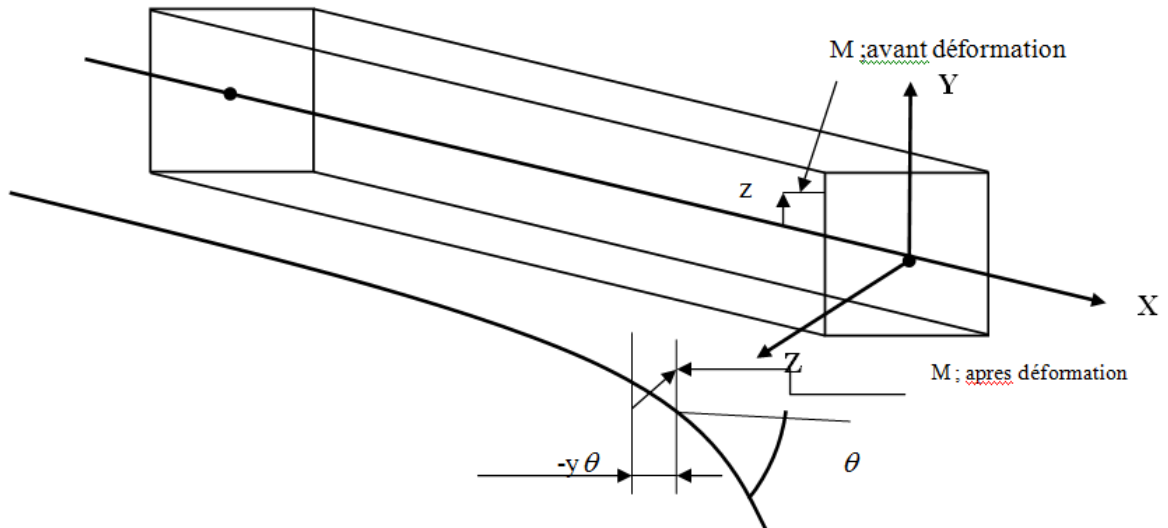


Figure 2.7 Déformation de l'arbre autour de l'axe *OX*

Dans le cas des hypothèses d'Euler Bernoulli, les rotations θ et ψ s'expriment en fonction de v_0 et w_0

$$\theta(X) = v_{0,X}$$

$$\psi(X) = w_{0,X}$$

Pour une flexion dominante ($u_0=0$), le déplacement s'exprime par :

$$u(X, Y, Z) = -Zw_{0,X} + Xv_{0,X}$$

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

Le vecteur déplacement généralisé:

$$[N_{u,v,w,\beta_x,\beta_y,\beta_z}] = [f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{p_u,p_v,p_w,p_{\beta_x},p_{\beta_y},p_{\beta_z}}]$$

11 Formulation de l'arbre par la méthode des éléments finis hiérarchiques Trigonométriques :

La modélisation par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique concerne un arbre symétrique et déformable à deux nœuds figure 2.8 et pour chaque nœud quatre degrés de liberté.

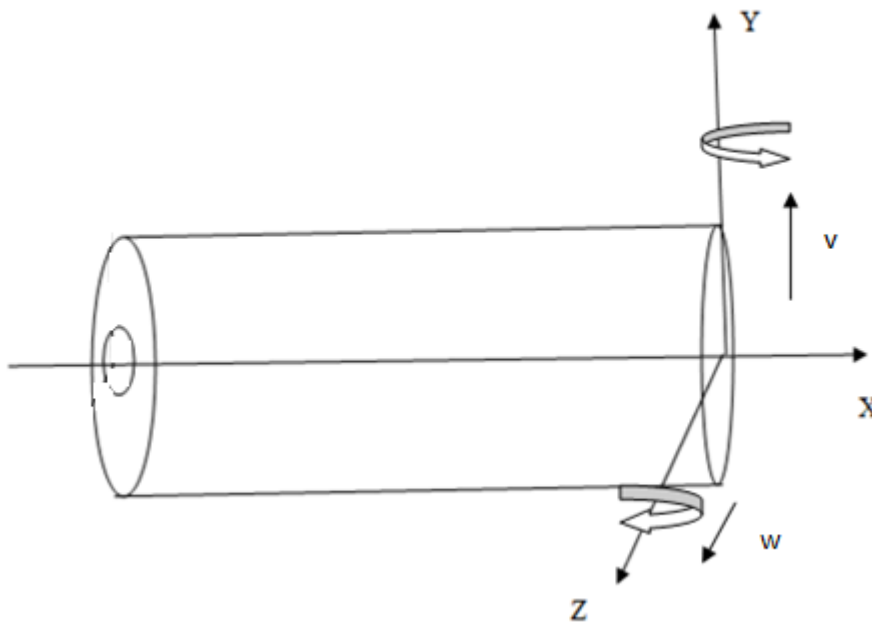


Figure 2.8: Degrés de libertés d'un élément arbre

Soit $\{B\}$ le vecteur déplacement exprimer par les fonctions de formes.

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} v_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N(\xi = -1; 1)q(t)$$

$q(t)$: Vecteur déplacement généralisé

$$\{B\} = [N]\{q\} = \begin{bmatrix} [N_v] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_v \\ q_w \end{Bmatrix}$$

$$v_0 = N_v q_v$$

$$\theta_0 = \frac{\partial N_v}{\partial y} q_v$$

$$W_0 = N_w q_w$$

$$\Psi_0 = \frac{\partial N_w}{\partial y} q_w$$

N_v et N_w sont les fonctions de forme des poutres en flexion suivant deux directions. y et z

q_v et q_w sont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions

x et z.

12 Détermination des matrices de l'arbre.

La détermination des matrices : masse, gyroscopique et rigidification centrifuge sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation (1.17) suivant :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}][\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2} \rho \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (1.17)$$

13 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre $[R_A]$:

Le premier terme de la relation (1.17) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice de rigidification centrifuge.

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho S e \left(\{B\}^T [\dot{\phi}] [\dot{\phi}] \{B\} \right) + \frac{1}{2} \rho S e \left(\{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) + \rho S e \Omega \left(\{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} \right)$$

Substituons la matrice des vitesses par sa valeur on obtient :

$$E_C(R_A) = \frac{\rho}{2} \int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \{B\} dv$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho \Omega^2}{2} \int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} dv$$

Substituons les vecteurs déplacements par les fonctions de forme.

$$E_C(R_A) = \frac{\rho \Omega^2}{2} \int_v \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} dv$$

L'énergie cinétique exprimée par la coordonnée adimensionnelle

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L \Omega^2}{2} \int_0^1 \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} d\xi$$

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

On a que deux déplacements u et w , donc la matrice de rigidification centrifuge de l'arbre exprimée par les fonctions de formes est :

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L \Omega^2}{2} \left(\int_{-1}^1 \{q_v\}^T [N_v]^T [N_v] \{q_v\} d\xi + \int_{-1}^1 \{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\} d\xi \right)$$

Les composantes de la matrice de rigidification sont :

$$[R_{Av}] = \rho S_A L \Omega^2 \int_{-1}^1 [N_v]^T [N_v] d\xi$$

$$[R_{Aw}] = \rho S_A L \Omega^2 \int_{-1}^1 [N_w]^T [N_w] d\xi$$

La matrice de rigidification centrifuge globale peut s'écrire sous forme matricielle suivante

$$[R_A] = \begin{bmatrix} [R_{Av}] & 0 \\ 0 & [R_{Aw}] \end{bmatrix}$$

14 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$.

Le deuxième terme de la relation (1.17) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse :

$$E_C(M_A) = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv. \quad (2.72)$$

En substituant le vecteur déplacement par les fonctions de forme.

$$E_C(M_A) = \frac{\rho S_A L}{2} \left(\int_{-1}^1 \{\dot{q}_v\}^T [N_v]^T [N_v] \{\dot{q}_v\} d\xi + \int_{-1}^1 \{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} d\xi \right). \quad (2.73)$$

Les composantes de la matrice de rigidification sont.

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

$$[M_{Av}] = \rho S_A L \int_{-1}^1 [N_v]^T [N_v] d\xi \quad (2.74)$$

$$[M_{Aw}] = \rho S_A L \int_{-1}^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \quad (2.75)$$

La matrice masse peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Av}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix}$$

15 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$.

Le troisième terme de la relation (1.17) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique de l'arbre.

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (2.76)$$

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (2.77)$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gD}) = \rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 \left(-[N_v] \{q_v\} [N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w] \{q_w\} [N_v]^T \{\dot{q}_v\}^T \right) d\xi \quad (2.78)$$

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour avoir une séparation des vecteurs de coordonnées généralisées dans la relation (2.78) :

1°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_v\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_v\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_v\}^T} = 2 \rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 ([N_v]^T [N_w]) \{ \dot{q}_w \} d\xi \quad (2.79)$$

$$C_{gA1} = 2 \rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 ([N_v]^T [N_w]) \{ \dot{q}_w \} d\xi \quad (2.80)$$

2°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_w\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} = -2 \rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt} (-[N_v]^T [N_w]) \{ \dot{q}_v \} \right) d\xi \quad (2.81)$$

$$C_{gA2} = -2 \rho S_A L \Omega \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt} (-[N_v]^T [N_w]) \{ \dot{q}_v \} \right) d\xi \quad (2.82)$$

On peut dire que :

$$C_{gA1} = -C_{gA2} \quad (2.83)$$

La matrice gyroscopique de l'arbre peut s'écrire sous la forme suivante.

$$[C_{gA}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{gA2}] \\ [C_{gA2}] & 0 \end{bmatrix}$$

16 Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$:

La matrice rigidité de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation. Par substitution du champ de déplacement en termes des fonctions de forme et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_{-1}^1 I_m \left(\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy. \quad (2.84)$$

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

L'énergie de déformation donnée par la coordonnée adimensionnelle

$$E_{dA} = \frac{E}{2L^3} \int_{-1}^1 I_m \left(\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 \right) d\xi. \quad (2.85)$$

$$E_{dA} = \frac{EI_m}{2L^3} \int_{-1}^1 \left(\left(\{q_v\}^T [N_v] [N_v] \{q_v\} \right) + \left(\{q_w\}^T [N_w] [N_w] \{q_w\} \right) \right) d\xi \quad (2.86)$$

Avec les dérivées seconde

$$\frac{\partial^2 N_v}{\partial \xi^2} = N_v'' \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} = N_w'' \quad (2.88)$$

Par raison de symétrie des deux plans oxy et ozy on a.

$$[K_{dA}] = \begin{bmatrix} [K_{dAv}] & 0 \\ 0 & [K_{dAw}] \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Paliers :

Tous les arbres tournants sont supportés par des paliers. Ces paliers sont des paliers hydrodynamiques de types rigides créent des forces sur l'arbre.

La modélisation des paliers est représentée sur la Figure I.9.

Ou on note :

La raideur suivant l'axe OX $K_{xx} = K_{p11}$ (2.90)

(2.91)

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

La raideur suivant l'axe OY

$$K_{yy} = K_{p22}$$

La raideur des termes croisés

$$K_{xz} = K_{zx} = K_{p21} = K_{p12} \quad (2.92)$$

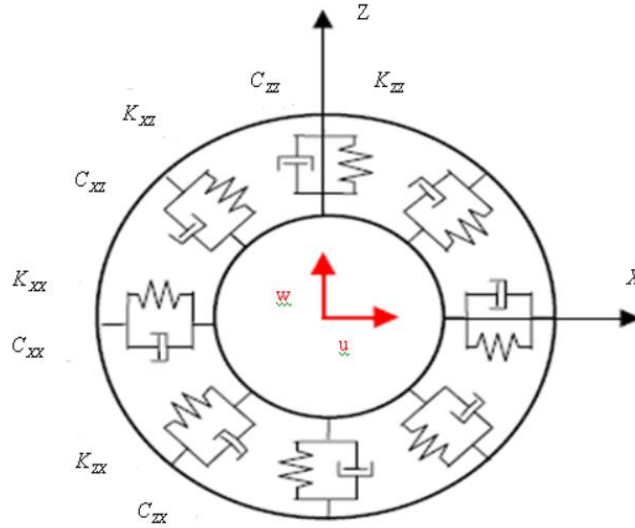


Figure 2.9. Modèle d'un palier

Le travail virtuel des forces de raideurs et d'amortissements est défini par

$$dW = -K_{P11}u\delta u - K_{P12}w\delta u - K_{P21}w\delta w - K_{P22}u\delta w - C_{P11}\dot{u}\delta u - C_{P12}\dot{w}\delta u - C_{P21}\dot{w}\delta w - C_{P22}\dot{u}\delta w \quad (2.93)$$

$$dW = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (2.94)$$

Avec : F_u et F_w sont les forces généralisées

Sous la forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{P11} & K_{P12} \\ K_{P21} & K_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{P11} & C_{P12} \\ C_{P21} & C_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

17 Description du problème aux valeurs propres :

La solution générale de l'équation :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C_g]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + i\eta[K_A]\{q\} = 0$$

CHAPITRE 2 : Formulation Par la Méthode des éléments Finis Version Hp

Représentant le mouvement vibratoire du rotor est du type exponentiel :

$$q(t) = p e^{\lambda t}$$

λ : Facteur scalaire

p : Amplitude de la grandeur complexe $q(t)$

Par substitution de la relation $q(t) = p e^{\lambda t}$ dans l'équation du mouvement on aboutit à l'équation suivante :

$$[\lambda^2 M + \lambda C + (K + i\eta K_A)]p = 0$$

CHAPITRE 3 :

Résultats et interprétations

1 Introduction

Le développement de la technologie actuelle qui mène aujourd'hui les ingénieurs à réaliser des travaux très complexés et qui coute très chères comme les programmes spatiaux et aériens.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus couramment utilisées dans ce domaine. Cela nécessite beaucoup l'utilisation des méthodes numériques assistées par ordinateur. Il s'agit d'une approche très générale, applicable à la plupart des problèmes rencontrés en pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires définis dans n'importe quel domaine géométrique à une, deux ou trois dimensions. De plus, il est bien adapté à l'environnement hétérogène que les ingénieurs rencontrent Souvent dans la pratique.[12]

Les méthodes des éléments finis consistent à transformer des équations aux dérivées partielles en équations algébriques à l'aide d'approximations simples des variables inconnues. Elle implique les trois aspects suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour la construction d'équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre des équations algébriques.
- Programmation et calculs pour effectuer efficacement des calculs sur ordinateur.[12]

2 Rotor FGM avec la version Hp-FEM avec disque a protection interne

$E=0.002$; %épaisseur du couche FGM

$R_{am}=0.0080$; %rayon de l'arbre métal

$R_{ami}=0$; %rayon intérieur de l'arbre

$R_{ac}=0.0100$; %rayon de l'arbre céramique

$\rho_c=5680$; % masse volumique du zirconia

$\rho_m=8166$; % masse volumique du SUS304

$L_a=0.4$; %Longueur de l'arbre

$k_s=0.08$;

$H_d=0.05$; %épaisseur du disque

$\rho_d=7800$;%masse volumique de disque

$R_d=0.2$; %rayon extérieur de disque

$R_{di}=0.05$; %rayon interne de disque

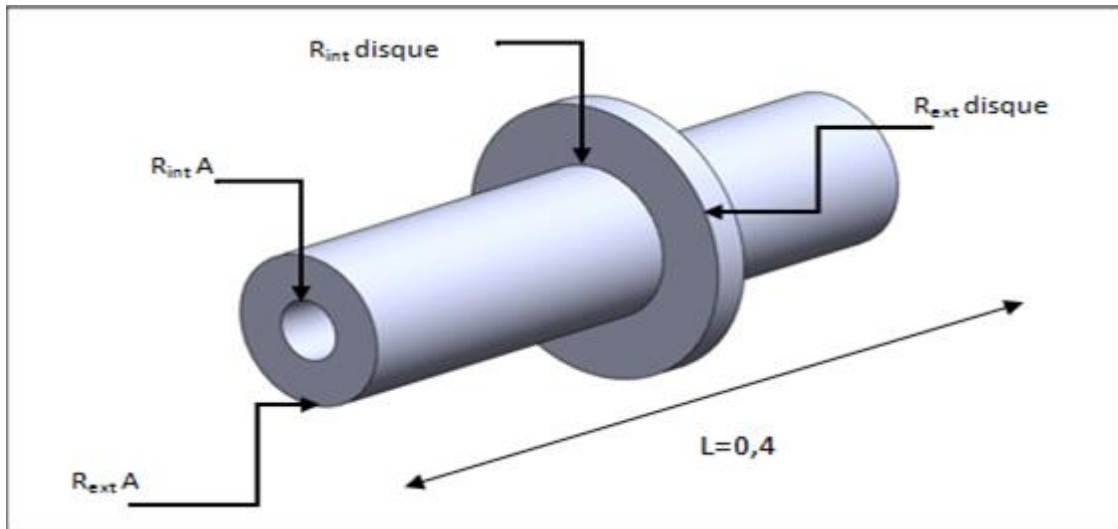


Figure3.1: model du rotor avec disque 2D

3 Mélange graduel FGM SUS304 - Zircone :

La protection en céramique est interne et les propriétés en fonction de l'épaisseur radiale du rotor creux sont définies par la loi de puissance :

L'indice de volume fraction $k = vf$ sur les graphes.

$$P(z) = [P_{ex} - P_i] \left(\frac{r - r_i}{r_{ex} - r_i} \right)^k + P_i \quad (1.6)$$

$$\rho(z) = [\rho_{ex} - \rho_m] \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^k + \rho_m \quad (1.7)$$

$$E(z, T) = [E_c(T) - E_m(T)] \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^k + E_m(T) \quad (1.8)$$

1)- Si $k=0$ cela veut dire de la formule définissant la loi de puissance reste ($P_{ex} = P_m$) c'est-à-dire propriétés externe = propriétés métal. On peut dire que si $k=0$ on est sur la couche externe en métal pur (100% métal).

2)- Si $k \gg 20$ les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche interne majoritairement constituée de céramique.

3)- Si $0 < k < 20$ alors les propriétés du rotor sont les propriétés à graduation métal-céramique des couches FGM se trouvant entre la couche externe 100% métal et la couche interne 100% en céramique car c'est une protection interne en céramique.

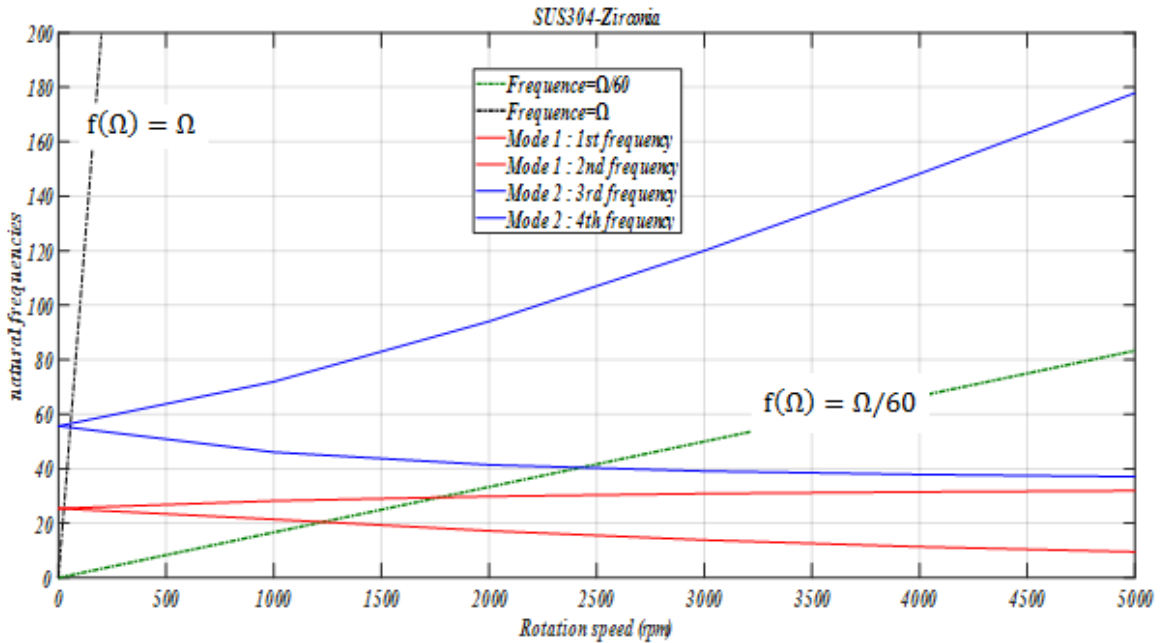


Figure 3.2: Diagramme de Campbell, Mélange graduel SUS304-Zircone avec $k=0.5$

4 Interprétation :

On constate sur le graphe n°2 l'évolution du comportement vibratoire du system tournant représenté par le diagramme de Campbell. Ce diagramme est obtenu pour un maillage raffiné suivant :

Le Maillage est $H=4$ et $P=10$

5 Le mélange graduel SUS304-Zircone a un indice de volume fraction égale à 0.5

Sur le graphe figure 3.2 on constate le diagramme de Campbell représenté par les fréquences vibratoires de 2 modes de vibrations d'un rotor FGM a protection interne en céramique mélange étudié SUS304-Zircone et Zircone est placé sur la couche interne du rotor creux.

Ces 2 mode de vibrations possèdent chacune deux fréquences vibratoires qui sont la précession directe et la précession indirecte ou rétrogradée.

Ce graphe indique que le rotor tourne avec une complète symétrie des paliers.

6 Mode n1 de vibration du rotor FGM :

Pour ce mode de vibration quand la vitesse de rotation est nulle les fréquences sont approximativement égales a 22Hz et quand la vitesse de rotation atteint 5000RPM les fréquences sont pour la précession directe égales a 39 HZ et pour la précession indirecte égales a 15 Hz.

CHAPITRE 3 : Résultats et interprétations

Pour la branche directe on constate que les fréquences augmentent doucement et linéairement suivant une ligne droite de 22Hz à 39 Hz une augmentation de 17 Hz cela est due à la rigidification centrifuge qui est très faible par rapport aux modes vibratoires élevés.

7 Pour la branche indirecte

Pour une vitesse nulle les fréquences sont de l'ordre de 22 Hz et la vitesse atteinte 5000 RPM les fréquences sont de 15 Hz c'est la précession rétrogradée

Les 2 branches directe et indirecte divergent doucement pour une vitesse de 5000 RPM cela est due à l'effet gyroscopique qui est très faible pour ce mode de vibration et il a une différence de fréquences de $39 \text{ Hz} - 15 \text{ Hz} = 24 \text{ Hz}$

8 Mode n2 de vibration du rotor FGM :

Pour ce mode de vibration quand la vitesse de rotation est nulle les fréquences sont approximativement égales à 49 Hz et quand la vitesse de rotation atteint 5000 RPM les fréquences sont pour la précession directe égales à 180 Hz et pour la précession indirecte égales à 40 Hz.

Pour la branche directe on constate que les fréquences augmentent rapidement et non linéairement pour atteindre la fréquence de 180 Hz

Avec $180 \text{ Hz} - 49 \text{ Hz} = 131 \text{ Hz}$ une différence de 131 Hz cela est due à l'effet de la rigidification centrifuge qui est très grande, on dit que le rotor sous l'influence de ce phénomène il se rigidifie encore plus

9 Les vitesses critiques

9.1 Vitesse critique propre du système tournant

La détermination des vitesses critiques sont obtenus en traçant la droite $f(\Omega) = \Omega$

Et l'intersection avec la branche directe projetée sur l'axe des vitesses donne la vitesses critiques propre du système tournant

9.2 Vitesse critique due aux balourds du système tournant

La détermination des vitesses critiques dues au balourd est obtenue en traçant la droite $f(\Omega) = \frac{\Omega}{60}$ et l'intersection avec la branche directe et indirecte donne les vitesses critiques

Sur ce graphe on constate que les vitesses critiques propres du système tournant sont très faibles aucun danger pour le rotor,

Mais la vitesse critique due au balourd existe et sont dangereuses pour le rotor

Elles de l'ordre de 1250 RPM (précession rétrogradée) et de 1750 RPM (précession directe) donc il faut éviter ces deux vitesses de résonances et dangereuses.

CHAPITRE 3 : Résultats et interprétations

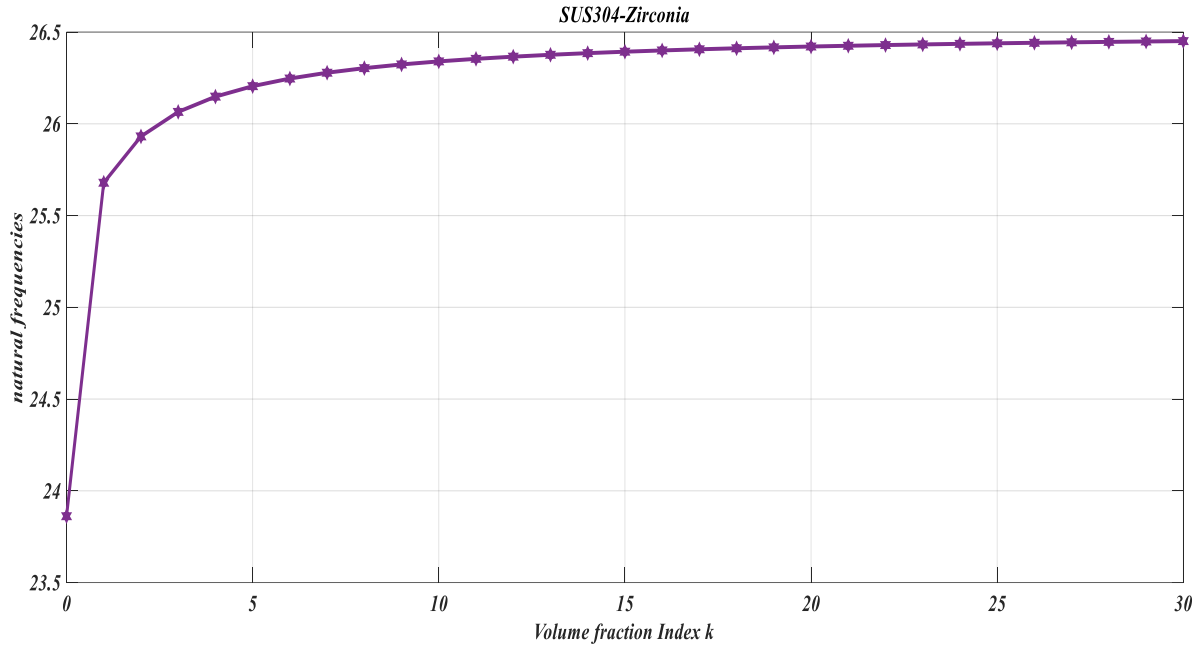


Figure 3.3: fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction (SUS304-Zirconia)

Sur ce diagramme est représenté l'évolution des fréquences vibratoires en fonction de l'indice de volume fraction $k=vf$

De la loi de puissance, $s k=\rightarrow$ on est sur la couche externe du rotor qui est faite 100% en métal SUS304 et les fréquences sont très faible

Si $k=vf$ est très grand on se trouve sur la couche interne du rotor qui est fait 100% en céramique parce que on a une protection interne en céramique ZIRCONE

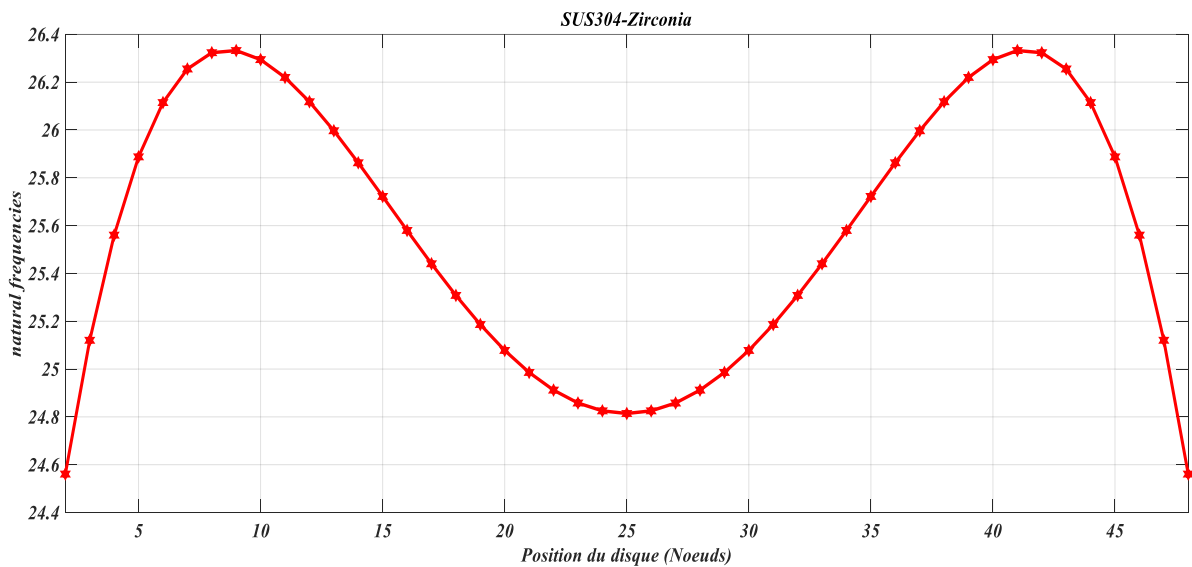


Figure 3.4: première et deuxième fréquence naturelle en fonction de la position du disque avec vitesse de rotation nul et $k=0.5$

CHAPITRE 3 : Résultats et interprétations

Sur ce graphe on a représenté l'évolution des fréquences vibratoires du rotor constitué par un mélange graduel Zircone –SUS304 (céramique et métal) en fonction de la position du disque. Rotation Nulle c'est-à-dire Rotor au Repos

On constate clairement que si le disque est au Nœud 5 les fréquences sont de l'ordre de 25 Hz et quand il est au Nœud 10 les fréquences sont égales à 26.2 Hz

Si le disque est Nœud 25 les fréquences sont égales à 25 Hz et s'il est au Nœud 40 les fréquences sont égales à 26.4 Hz et au-delà de cette position les fréquences diminuent.

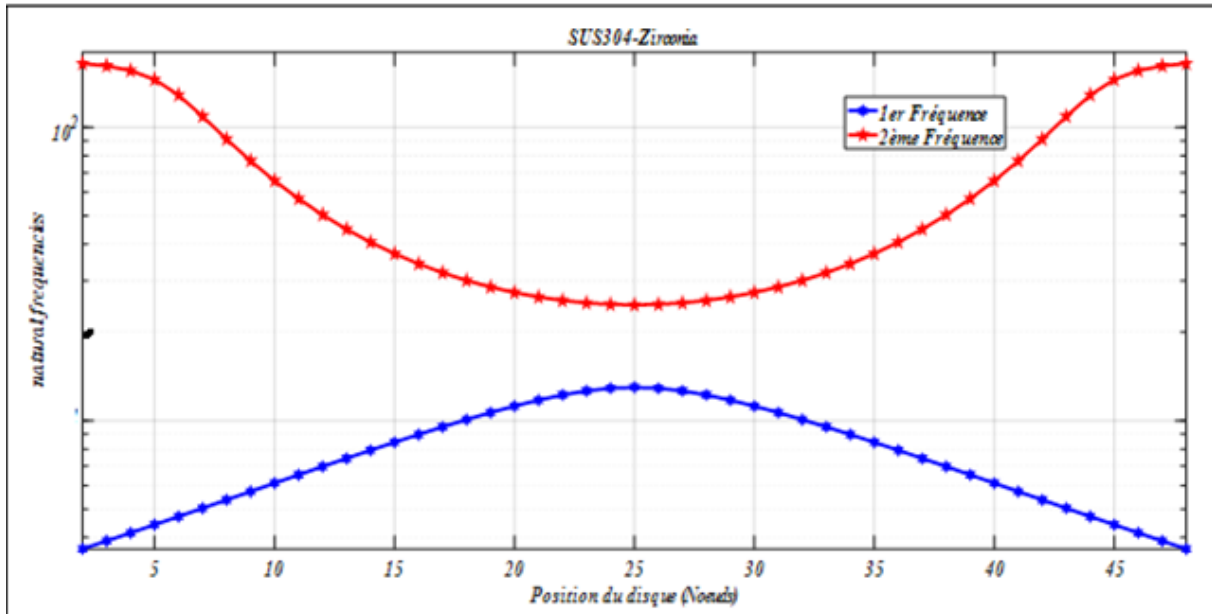


Figure 3.5 : première et deuxième fréquence naturelle en fonction de la position du disque avec vitesse de rotation = 5000 tr/min et $k = 0.5$.

10 Rotor a une vitesse de rotation

Sur ce graphe on a représenté l'évolution des fréquences de vibration du rotor (en plein régime de fonctionnement) en fonction de la position du disque.

Les deux fréquences représentées sont directes et rétrogradées indirecte.

11 Variation de la précession directe :

Si le disque est au Nœud 5, les fréquences vibratoires du rotor sont de l'ordre de 108 Hz et si le disque est au Nœud 20, les fréquences vibratoires sont approximativement égales à 50 Hz.

Et si le disque est placé au Nœud 45 alors les fréquences vibratoires augmentent à nouveau pour arriver à 108 Hz.

Ces données de fréquences sont propres à chaque système tournant et dépendent des caractéristiques géométriques et structurales. Elles ont pour rôle de prévenir l'état de rigidité de la structure tournante pour chaque position du disque (chaque fréquence)

CHAPITRE 3 : Résultats et interprétations

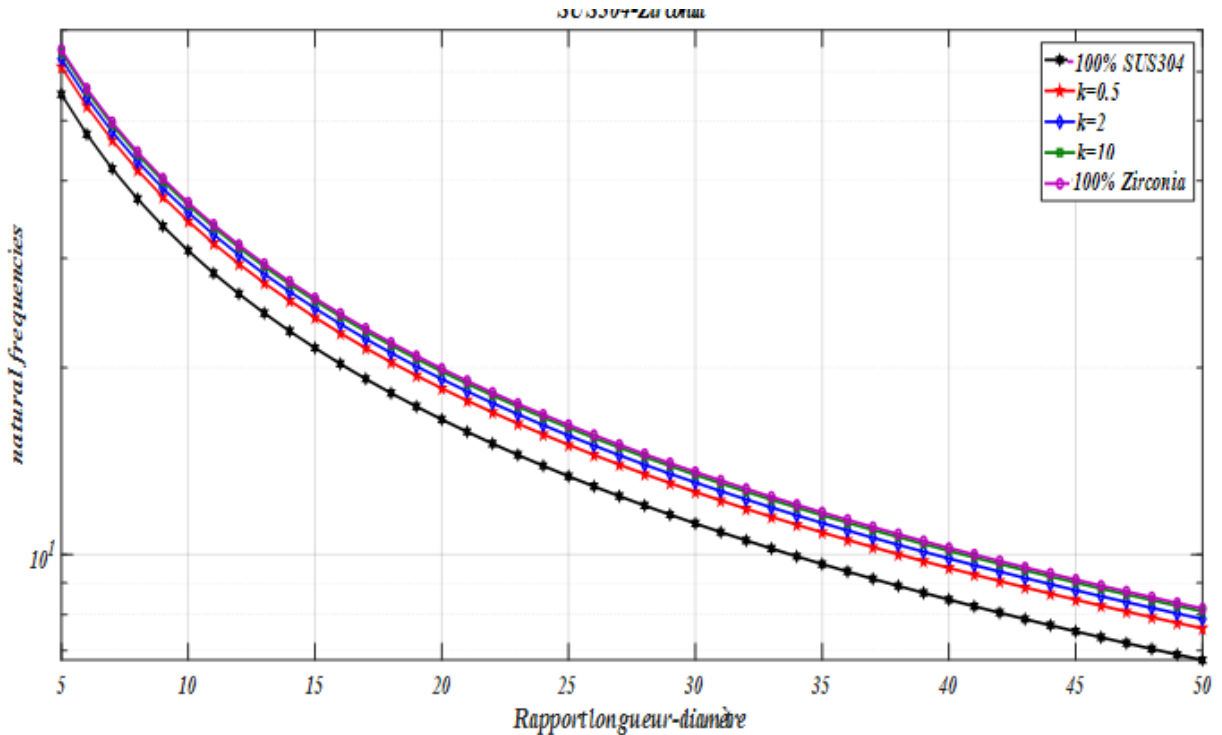


Figure 3.6 : influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Zirconia) avec différent indice de volume fraction (vitesse de rotation=5000tr/min)

Sur ce graphe de la figure 3.6 on a représenté les variations des fréquences vibratoires pour divers types d'indices de volume fraction en fonction du rapport longueur diamètre.

On constate que la couche constituée 100% en métal SUS304 est pour un indice de volume fraction $k=0$ c'est la couche externe du rotor creux.

Si k est très grand c'est la couche interne du rotor (protection interne en céramique ZIRCONIE)

Si $k=0$ est comprise entre $k=0$ et k très grand ce sont les couches FGM

Pour ce graphe on constate que si $k=0$ c'est la couche externe en métal SUS304 dont les fréquences sont faibles et quand la longueur de l'arbre augmente les fréquences diminuent.

Si k est très grand c'est la couche interne du rotor constituée en céramique et dont les fréquences sont plus grandes et le rotor pour cette fréquence est plus rigide.

Si k est proche de 0 les fréquences sont celles de la couche externe constituée majoritairement en métal SUS B304 par suite les fréquences sont faibles et le rotor moins rigide.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de cette recherche est d'étudier le comportement vibratoire des systèmes tournants composés d'un arbre creux en matériaux FGM constitué avec des mélanges graduels de métaux et de céramiques tels que SUS304 et Zircon, la céramique est utilisée comme barrière thermique sur la couche intérieure radiale du rotor, qui opère dans un environnement de températures variables. L'arbre de ce système tournant est modélisé selon le modèle d'Euler-Bernoulli. Une étude théorique et cinématique du modèle est réalisée pour établir les énergies cinétiques et de déformation du système tournant. Pour la modélisation mathématique de cette structure, une analyse numérique basée sur la méthode des éléments finis en version hp est appliquée, en prenant en compte les différentes énergies du rotor nécessaires pour déterminer l'équation différentielle décrivant son mouvement, à travers les équations de Lagrange. Les résultats obtenus dans cette étude mettent en évidence les variations des fréquences vibratoires, notamment dans l'étude du mélange graduel Zircon-SUS304 et son comportement face aux fortes variations de température, qui se manifestent à travers deux modes de vibrations. Une deuxième étude portant sur le comportement dynamique du rotor est réalisée à l'aide de différents types de diagrammes de Campbell, permettant de définir son comportement vibratoire pour divers indices de volumes fraction ou différents types de mélanges graduels métal-céramique. Les fréquences vibratoires obtenues dans ces deux études sont discutées et interprétées, et elles fournissent des informations sur l'état de l'arbre tournant, les vitesses critiques et l'influence du phénomène de rigidification centrifuge, qui joue un rôle primordial dans la rigidification de l'arbre du rotor. Les résultats de cette étude ouvrent des perspectives complémentaires pour l'étude de rotors constitués d'autres mélanges graduels métal-céramique.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] **Christian Janot, Bernard Ilschner**, « Traité des matériaux N°19 Matériaux émergents, Edition presse polytechniques et universitaires Romandes, 2001.
- [2] **J. Pierre et R. Pierre**, Chimie Industrielle, (1998).
- [3] **V.M. Ferreira, F. Azough, R. Freer, J.L. Baptista**, « The effect of Cr and La on MgTiO₃ and MgTiO₃–CaTiO₃ microwave dielectric ceramics », J. Mater Res 12 (1997) 3293- 3299.
- [4] Dr **Rassim YOUNES**, Polycopié à caractère pédagogique " Destiné aux étudiants Du cycle Master en génie mécanique", intitulé : Propriétés Physiques et Mécaniques des Céramiques et leur comportement Tribologique, Département Génie mécanique Faculté de Technologie, Université Abderrahmane Mira, Bejaia, ALGERIE
- [5] **E. Moor**, Les Leysmart, Introduction de la Chimie du Solide, (1997).
- [6] Columbia Accident Investigation Board (2003), Report Volume 1, National Aeronautics and Space Administration and the Government Printing Office, Washington D.C
- [7] **ASSEUM Hassan**, thèse de DOCTORAT Classique, intitulé Analyse Dynamique des Rotors en Matériaux FGM, Université Abou bekr Belkaïd – TLEMCEM – Faculté de Technologie, (2022)
- [8] Hui-Shen Shen – 2009: Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells. Edition 2009 par Taylor & Francis Group, LLC 624.1'776--dc22
- [9] **Babuška. BQ et GUO 1992**: The h-p version of the finite element method: basis theory and applications, Advances in Engineering Software, Volume 15, Issue 3-4, 1992.
- [10] **Bardell, N. S. 1996**. An engineering application of the h-p version of the finite element Method to the static analysis of a Euler-Bernoulli beam. Computers & Structures 59 (2):195–211. 1996.

[11] **Peano 1976**, Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plane bending. Comput. Math. Applic. 2, 211-224 (1976).

[12] **GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT**. UNE PRÉSENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS. Maloine. S.A. Editeur Paris et les presses de l'université Laval Québec. France (1981).

[13] **Hadj said**., Analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor. (2020)

[14] **Melle. BOUABANE Ahlem , Mr. CHAREUF Afroul Mostafa** , Analyse numérique de la dynamique des rotors FGM (2022)

Site internet

(1) <https://www.hardex.fr>

(2) <https://ceramique-technique.com/secteurs/defense>

(3) <https://lejournel.cnrs.fr>