
République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AIN-TÉMOUCHENT



Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et modélisation

Présenté par :

M^r Djamel MOUSSA

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

Encadreur : Dr. MAMI TAWFIQ FAWZI

Maitre de Conférence "A" au C.U.B.B.A.T. Soutenu en Octobre 2020

Devant le jury composé de :

Président :	DR. MEKHALFI KHEIRA (MCA)	C.U.B.B.A.T.
Examineur :	DR. BENANI ABDERRAHMANE (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadreur :	DR. MAMI TAWFIQ FAWZI (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.

Dédicaces

Je dédie mon travail

A mes très chers et respectueux parents,

A ma famille, à mes deux filles,

qui m'ont soutenu par leur amour et leur encouragement,

A mon encadreur Dr Mami Tawfiq Fawzi

A mes étudiants,

A tous mes amis,

A tous mes enseignants de mathématiques,

à tous les étudiants de 2^e année Master Math 2019/2020.

Bref, à tous les matheux.

Remerciements

Je remercie avant tout Allah de m'avoir donné la force et la volonté nécessaire pour finir mon travail.

Je remercie Dr. Mami pour son aide, son soutien et ses conseils, en saluant en lui son savoir faire, sa compétence et ses connaissances dont il m'a fait passer.

Je remercie aussi les membres du jury Mme. Bendimered et Mme Tchouar de m'avoir fait honneur d'en faire partie et de m'avoir donnée une chance d'accepter d'évaluer ce travail.

Je remercie encore une fois mes Chers parents et ma Grand-mère pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien moral, qui m'ont permis de réaliser le parcours de mes études que je voulais et par conséquent cet aboutissement.

Je remercie mes collègues professeurs d'enseignement moyen pour leur encouragement.

Enfin, je remercie toutes les personnes de près ou de loin qui m'ont aidé à réaliser ce travail d'initiation à la recherche.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est la recherche de résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville ou de type Caputo. Plusieurs méthodes ont été étudiées dans le but d'avoir de bonnes approximations de la solution cherchée. La transformée de Laplace permet d'explicitier la solution analytique lorsqu'elle est simple à formuler. Lorsque la solution implicite est difficile à exprimer, les méthodes numériques interviennent de manière inéluctable pour s'affranchir de ce problème. L'implémentation de ces méthodes dans certains logiciels informatiques permettent d'y recourir en vue de restreindre le temps calcul lors de leur mise en oeuvre et d'avoir des représentations graphiques explicatives.

Abstract

The main objective of this work is the search for a numerical resolution of a differential equation of fractional order for Riemann-Liouville type or for Caputo type. Several methods have been studied in order to have good approximations of the solution sought. The Laplace transform makes it possible to clarify the analytical solution when it is simple to formulate. When the implicit solution is difficult to express, the numerical methods inevitably intervene to overcome this problem. The implementation of these methods in some computer software allows to resort to them in order to limit the calculation time during their implementation artwork and have explanatory graphic representations.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو الحل العددي للمعادلة التفاضلية برتبة كسرية لنوع ريمان لوفيل ونوع كابوتو بعدة طرق و تقارب الحل العددي للحل الضمني. ركزنا أيضا على الحل الضمني للمعادلة التفاضلية برتبة كسرية بمختلف الطرق على رأسها الحل بمحوّلة لبلاس كوسيلة بسيطة لهذا الهدف.

Table des matières

Introduction générale	6
1 Éléments de calcul fractionnaire	10
1.1 Fonctions Spéciales	10
1.1.1 Fonction Gamma	10
1.1.2 Fonction Beta	12
1.1.3 Fonction de Mittag-leffler	14
1.2 Calcul fractionnaire	14
1.2.1 Intégrale fractionnaire :	14
1.2.2 Dérivée au sens de Rieman-Liouville :	17
1.2.3 Dérivée au sens de Caputo	20
1.2.4 Propriétés de la dérivée de Caputo	22
1.2.5 Relation entre la Dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville	23
1.3 Introduction :	24
1.4 Théorèmes du point fixe	25
1.5 Equations différentielles fractionnaires	26
1.5.1 Exemple de problème fractionnaire	28
1.6 Transformée de Lapalce des opérateurs et son inverse :	30
1.7 Exemples de résolution d'une EDF par la transformée de Laplace :	33
2 Méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles	37
2.1 Principe de base des méthodes numériques :	37
2.2 Méthodes d'Euler :	38
2.2.1 Méthode d'Euler explicite :	38
2.2.2 Méthode d'Euler implicite :	39
2.2.3 Exemples sur Méthode d'Euler :	39
2.2.4 Méthode d'Euler pour les EDF :	40

2.2.5	Erreur de la méthode d'Euler	41
2.3	Méthodes de Runge-Kutta :	41
2.3.1	Méthode R-K d'ordre 1 :	42
2.3.2	Méthode R-K d'ordre 2 :	43
2.3.3	Méthode R-K d'ordre 4 :	43
2.3.4	Méthode R-K d'ordre 4 avec dérivée seconde :	43
2.3.5	Méthode R-K d'ordre 2 pour une EDF :	44
2.3.6	Méthode R-K d'ordre 4 pour une EDF :	44
2.3.7	Exemple sur méthode de Rung-Kutta 4	45
2.4	Méthodes d'Adams :	45
2.4.1	Adams-Bashfourth	45
2.4.2	Adams-Moulton	47
2.5	La méthode d'Adomian (ADM)	48
2.5.1	Description de la méthode pour une EDF :	48
2.5.2	Exemples de résolution d'une équation différentielle par la méthode ADM :	50
2.6	La méthode de perturbation d'homotopie (HPM)	52
2.6.1	Description de la méthode :	53
2.6.2	Exemple de résolution d'une équation différentielle par la méthode HPM :	54
2.7	Application sur MATLAB :	54
2.7.1	Solution analytique	54
2.7.2	Solution numérique	55
	Bibliographie	58

Notations et Symboles

Ensembles

- \mathbb{R} Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^+ Ensemble des nombres réels positifs.
- \mathbb{R}^{+*} Ensemble des nombres réels strictement positifs.
- \mathbb{N} Ensemble des entiers naturels.
- \mathbb{N}^* Ensemble des entiers naturels non nuls.
- \mathbb{C} Ensemble des nombres complexes.
- $C([a, b])$ Ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
- $C(\Omega, \mathbb{R})$ Ensemble des fonctions réelles continues sur un ouvert Ω de \mathbb{R} .

Fonctions

- $\Gamma(z)$ Fonction Gamma.
- $B(z, z')$ Fonction Beta.
- $E_{\alpha, \beta}(z)$ Fonction de Mittag-Leffler.
- $I_a^\alpha f$ Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f .
- $D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f .
- ${}^c D_a^\alpha f$ Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f .
- $D^n f = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ Dérivée ordinaire d'ordre n par rapport à t de la fonction f .
- $L(f(t))$ Transformée de Laplace de la fonction f .
- $L(I^\alpha(f(t)))$ Transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration fractionnaire.
- $L(D_a^\alpha f(t))$ Transformée de Laplace de l'opérateur de dérivation R-L fractionnaire.

Abréviations et symboles

- EDO Equations différentielles ordinaires.
- EDF Equations différentielles fractionnaires.
- RAD Approche par des rectangles à droite.
- RAG Approche par des rectangles à gauche.
- ADM Méthode d'Adomian.
- HPM Méthode de perturbation d'homotopie.
- R-L Riemann-Liouville.
- M-L Mittag-Leffler.
- R-K Runge-Kutta

Introduction générale

Les équations différentielles résolubles analytiquement font l'exception plutôt que la règle. En effet, Il est rare d'obtenir des formules simples donnant leurs solutions et la seule façon d'obtenir des informations quantitatives sur ces solutions en l'absence de formules explicites est donc de les approcher numériquement.

Il est question justement dans ce mémoire de présenter quelques approches numériques permettant d'approximer au maximum la solution d'une équation différentielle fractionnaire quand on s'aperçoit qu'elle existe.

Ces dernières années, des équations différentielles fractionnaires sont apparues naturellement dans divers domaines tels que la dynamique chaotique, la modélisation, la théorie du contrôle, le traitement du signal et les applications biomédicales, etc.

Nous nous intéressons donc, à la résolution implicite et numériques des équations différentielles fractionnaires par plusieurs méthodes.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Sachant que le calcul fractionnaire est une généralisation de la différenciation ordinaire et de l'intégration à des ordres arbitraires (non entiers), le premier chapitre est précisément consacré à quelques éléments du calcul fractionnaire tout en rappelant les fonctions spéciales mises en jeu, à savoir la fonction Gamma d'Euler, la fonction Beta de Bessel et la fonction de Mittag-Leffler. Puis, on présentera les opérateurs de base du calcul fractionnaire ainsi que leurs propriétés et qui sont en l'occurrence : l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville ensuite au sens de Caputo.

Dans le deuxième chapitre et après avoir rappelé l'essentiel des résultats relatifs à l'existence de solutions via les différents théorèmes du (des) point(s) fixe(s), on s'intéressera à la résolution analytique de quelques équations différentielles fractionnaires en utilisant la transformée de Laplace.

Le troisième chapitre évoque les quelques différentes méthodes numériques utilisées pour trouver la solution approximative d'une équation différentielle à savoir les méthodes : d'Euler, de Rung-Kutta avec différents ordres, d'Adams, d'Adams-Moulton, d'Adomian

(ADM) et de Ji-Haun-He (HPM) .

Vers la fin et à titre illustratif, on donne un exemple simple de résolution explicite et sa version numérique d'une équation différentielle fractionnaire où, on a montré via des graphiques obtenus à l'aide du logiciel MATLAB, les différents résultats auxquels on est arrivé en utilisant la méthode d'Euler puis celle de Runge et Kutta.

Chapitre 1

Eléments de calcul fractionnaire

Ce chapitre porte sur les rudiments du calcul fractionnaire avec l'introduction de la fonction d'Euler ou "Fonction Gamma" qui est le concept de base dans la définition de certaines notions relatives à ce calcul. A partir de la définition de l'intégrale fractionnaire sur un intervalle borné, on dégagera celle de l'opérateur de dérivation fractionnaire selon deux approches bien connues qu'on évoquera par la suite et de leurs propriétés qui en découlent.

1.1 Fonctions Spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

C'est la fonction qui joue le rôle capital dans la théorie du calcul fractionnaire. On l'appelle aussi fonction d'Euler notée $\Gamma(z)$. Elle permet la généralisation de la notion de factorielle $n!$ à des valeurs non entières pour n et pouvant même prendre des valeurs complexes. Nous rappellerons dans cette section quelques résultats relatifs à cette fonction.

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma est une fonction complexe à variable complexe définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

- Sur l'axe réel on a : $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0_+) = +\infty$. En plus, elle est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, \infty[$.

- Elle admet un prolongement analytique en une fonction méromorphe (i.e. holomorphe sur tout le plan complexe sauf aux points isolés $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ qui représentent des "pôles").
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > 0$, elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{1.1}$$

C'est l'une de ses propriétés de base qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

La fonction Gamma généralise la notion de "factorielle". En effet, d'après (1.1) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

⋮

ainsi, $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n - 1) = n!$

Exemple 1.1.1. Pour les rationnels positifs, prenons l'exemple de $z = 1/2$ et montrons que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

D'après la définition (1.1.1) , nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

si on pose $t = x^2$ alors, $dt = 2xdx$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

sachant que : $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Intégrale de Gauss).

1.1.2 Fonction Beta

Dans de nombreux cas, on préconise d'utiliser la fonction Beta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma dont voici la définition :

Définition 1.1.2. La fonction Beta ou " fonction de Bessel " est définie par l'intégrale :

$$B(z, z') = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z'-1} dt$$

pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tel que : $Re(z) > 0$ et $Re(z') > 0$.

Proposition 1.1.1. La fonction Gamma est liée à la fonction Beta par la relation suivante :

$$B(z, z') = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z')}{\Gamma(z+z')}$$

Démonstration. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tel que : $Re(z) > 0$ et $Re(z') > 0$, on a :

$$\Gamma(z+z') = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{z-1} x^{z'-1} e^{-(t+x)} dt dx$$

on effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = r - t \\ t = rs \end{cases}$$

alors,

$$r \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Ainsi : $dt = rds + sdr$, $dx = (1-s)dr - rds$

et le jacobien de cette transformation sera donc :

$$\frac{d(t, x)}{d(r, s)} = \begin{vmatrix} s & r \\ 1-s & -r \end{vmatrix} = -r$$

d'où, $dt dx = -r dr ds$.

En substituant dans notre intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+z') &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-r} e^{z-1} s^{z-1} r^{z'-1} (1-s)^{z'-1} | -r | dr ds \\
&= \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{z'-1} ds \int_0^\infty e^{-r} r^{z+z'-1} dr \\
&= B(z, z') \Gamma(z+z').
\end{aligned}
\tag*{\square}$$

Proposition 1.1.2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{1.2}$$

Démonstration.

A partir de la relation :

$$B(z, z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt, \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 0$$

et en remarquant que $y(t) = t(1-t)$ est une fonction symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, On pose $s = 4t(1-t)$ et nous aurons :

$$\begin{aligned}
B(z, z) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{z-1} dt \\
&= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= 2^{1-2z} B\left(z, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$B\left(z, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1-2z}} B(z, z).$$

Ainsi, d'après la proposition (1.1.2) on a :

$$\frac{\Gamma(z) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} = 2^{2z-1} \frac{\Gamma(z) \Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

c'est à dire :

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

C.Q.F.D.

\square

A présent, si on prend $z = n + 1$ alors :

$$\Gamma(2n+1) = \frac{2^{-2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)$$

ce qui implique encore la relation :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n + 1)}{2^{-2n}\Gamma(n + 1)} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$$

1.1.3 Fonction de Mittag-leffler

La fonction spéciale suivante dépendant de deux paramètres a été introduite par Mittag-Leffler. Elle s'exprime à l'aide de la fonction Gamma comme suit :

Définition 1.1.3. (*Fonction de Mittag-leffler*)

La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série entière :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \alpha > 0, \beta > 0$$

N.B. : C'est une série convergente pour toute valeur z du plan complexe, ce qui fait d'elle une fonction entière.

Remarque 1.1.1.

- Pour $\beta = 1$, on a :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \alpha > 0$$

- On note : $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ La fonction de Mittag-Leffler dépendant d'un seul paramètre.

- Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, on a :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

1.2 Calcul fractionnaire

1.2.1 Intégrale fractionnaire :

Dans ce qui suit, on se restreindra à des valeurs réelles strictement positives pour l'argument z de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ pour lesquelles, on introduira la notion d'intégrale fractionnaire d'un ordre réel positif non nul d'une fonction réelle continue sur un intervalle bornée.

Définition 1.2.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle intégrale d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ de f , l'intégrale définie par la formule suivante :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a$$

Remarque 1.2.1. Le terme "fractionnaire" est utilisé de façon impropre : α n'est pas nécessairement un nombre rationnel, et l'on devrait donc plutôt parler de dérivation non entière. Cependant, le terme "Calcul fractionnaire" est devenu traditionnel.

Remarque 1.2.2. On peut définir l'intégrale fractionnaire sur un intervalle non borné de la forme $[a, \infty[$, tout en gardant les mêmes propriétés que dans le cas borné.

Remarque 1.2.3. On peut aussi définir l'intégrale fractionnaire pour des valeurs complexes de l'ordre de dérivation α .

Exemple 1.2.1. Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\theta$, $\forall t \in [a, b]$ où $\theta > -1$.

Par définition on a :

$$I_a^\alpha (t-a)^\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\theta ds$$

effectuons le changement de variable :

$$s = t - \tau(t-a) \Rightarrow ds = -(t-a)d\tau$$

ainsi,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\theta &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 [\tau(t-a)]^{\alpha-1} [t - \tau(t-a) - a]^\theta d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha+\theta} \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^\theta d\tau \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\theta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^\theta d\tau \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\theta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \theta+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\theta}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\alpha+\theta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\alpha+\theta+1)} (t-a)^{\alpha+\theta} \end{aligned}$$

Si $\theta = 0$, on a :

$$I_a^\alpha 1 = I_a^\alpha (t-a)^0 = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

d'où pour une constante A , on aura :

$$I_a^\alpha A = A \cdot \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\begin{aligned} I_a^1 (t-a)^\theta &= \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta+2)} (t-a)^{\theta+1} \\ &= \frac{\Gamma(\theta+1)}{(\theta+1)\Gamma(\theta+1)} (t-a)^{\theta+1} \\ &= \frac{(t-a)^{\theta+1}}{\theta+1} \end{aligned}$$

On retrouve donc l'intégrale usuelle : $\int_a^t (x-a)^\theta dx$

Proposition 1.2.1. Soient α et β deux réels positifs non nuls et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- i) $I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
- ii) $\frac{d}{dt} (I_a^\alpha f) = I_a^{\alpha-1} f$, où $\alpha > 1$.

Preuve

i) En effet :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} I_a^\beta f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-r)^{\beta-1} f(r) dr \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-r)^{\beta-1} f(r) dr ds \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable :

$$t = r + \tau(t-r) \Rightarrow dt = (t-r)d\tau$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) \left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \right) dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) \beta(\alpha, \beta) dr \\
&= \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^s (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r) dr \\
&= I_a^{\alpha+\beta} f(t)
\end{aligned}$$

ii) En utilisant les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre ainsi que la relation $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, on constatera que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{d}{dt} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} f(s) ds \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s) ds \\
&= I_a^{\alpha-1} f(t)
\end{aligned}$$

1.2.2 Dérivée au sens de Rieman-Liouville :

Définition 1.2.2. On appelle "dérivée au sens de Rieman-Liouville" d'ordre α d'une fonction $f \in C^m[a, b]$, la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \circ (I_a^{n-\alpha} f)(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds
\end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ avec $t > a$.

Notation 1.2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, le symbole D_a^n désignera l'opérateur de différentiation d'ordre entier n , c'est à dire :

$$D_a^n = \left(\frac{d}{dt} \right)^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

avec la convention :

$$D_a^0 f(t) = f(t)$$

Exemple 1.2.2. Soit la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$, $\forall t \in [a, b]$ où $\beta > -1$, nous avons :

$$D_a^n (t - a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} I_a^{n-1} (t - a)^\beta$$

d'après l'exemple (1.2.1)

$$\begin{aligned} D_a^n f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha + n)} (t - a)^{n + \beta - \alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha + n)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) (t - a)^{n + \beta - \alpha} \end{aligned}$$

mais ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) (t - a)^m &= m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1) (t - a)^{m - n} \\ &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m + 1 - \alpha - n)} (t - a)^{m - n} \end{aligned}$$

et par suite ,

$$D_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha}$$

Remarque 1.2.4. Si on prend $\alpha = 1$, on aura :

$$\begin{aligned} D_a^1 (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (t - a)^{\beta - 1} \\ &= \beta (t - a)^{\beta - 1} \\ &= \frac{d}{dt} (t - a)^\beta \end{aligned}$$

Remarque 1.2.5. Si on prend $\beta = 0$, on aura :

$$D_a^\alpha (1) = \frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

Ainsi, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante A n'est pas nulle, mais :

$$D_a^1 (A) = \frac{A}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}$$

Proposition 1.2.2. Pour un $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ et une fonction donnée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si :

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0$$

alors,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n}$$

Où les $A_j, j = 0, 1, \dots, n-1$, sont des constantes réelles.

Démonstration.

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha f)(t) = 0 &\implies \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f(t)) = 0 \\ &\implies I_a^{n-\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j (t-a)^j \end{aligned}$$

par composition avec l'opérateur I_a^n on obtient :

$$I_a^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (t-a)^{j+\alpha}$$

par composition avec D_a^n , on obtient :

$$f(t) = D_a^n I_a^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{j+\alpha}$$

or,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{j+\alpha} = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n}$$

donc,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n}$$

C.Q.F.D.

□

Théorème 1.2.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent avec $n-1 < \alpha < n$. Alors, pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, si $D_a^\alpha(\lambda f + \lambda' g)(t)$ existe, on a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \lambda' g)(t) = \lambda D_a^\alpha f(t) + \lambda' D_a^\alpha g(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Démonstration. :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha(\lambda f + \lambda' g)(t) &= D^n(I_a^{n-\alpha}(\lambda f + \lambda' g)(t)) \\
&= D^n(\lambda)(I_a^{n-\alpha} f(t) + \lambda' I_a^{n-\alpha} g(t)) \\
&= \lambda D^n(I_a^{n-\alpha} f(t)) + \lambda' D^n(I_a^{n-\alpha} g(t)) \\
&= \lambda D_a^\alpha f(t) + \lambda' D_a^\alpha g(t)
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

□

Proposition 1.2.3. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une intégrale fractionnaire d'ordre α . Alors :*

$$(D_a^\alpha \circ I_a^\alpha) f(t) = f(t)$$

Cependant, on remarque que ces opérateurs ne commutent pas entre eux :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(t) \neq D_a^\alpha I_a^\alpha f(t)$$

En effet,

$$(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha) f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{(I_a^{n-\alpha} f)(a)(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad \forall t \in [a, b]$$

avec $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$.

1.2.3 Dérivée au sens de Caputo

Définition 1.2.3.

Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$ et soit $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$.

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}
({}^c D_a^\alpha f)(t) &= (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(s) ds
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.6. *L'avantage principal de cette approche est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

Exemple 1.2.3. $f(t) = (t - a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$ avec $\beta > n - 1$ on a :

$${}^c D_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha}$$

En effet, nous avons :

$${}^c D_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{(n - \alpha - 1)} \frac{d^n}{d\tau^n} (\tau - a)^\beta d\tau$$

on a :

$$\frac{d^n}{d\tau^n} (\tau - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (\tau - a)^{\beta - n}$$

alors,

$${}^c D_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (\tau - a)^{\beta - n} (t - \tau)^{(n - \alpha - 1)} d\tau$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\tau = t - s(t - a) \text{ avec } d\tau = -(t - a)ds \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 s^{n - \alpha - 1} (1 - s)^{\beta - s} (t - a)^{\beta - \alpha} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} B(n - \alpha, \beta - n + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.7. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle. Autrement dit : ${}^c D_a^\alpha A = 0$, $A \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.4. Pour $\alpha > 0$, l'équation différentielle :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = 0, \quad t \in [a, b]$$

admet la solution générale :

$$f(t) = A_0 + A_1(t - a) + A_2(t - a)^2 + \dots + A_{n-1}(t - a)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j (t - a)^j$$

avec $A_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n - 1$ des constantes réelles.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
{}^c D_a^\alpha f(t) = 0 &\implies I_a^{n-\alpha}[f^n(t)] = 0 \\
&\implies f^n(t) = 0 \\
&\implies f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t-a)^j
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

□

Proposition 1.2.5. *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ on a :*

$$({}^c D_a^\alpha \circ I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad \text{où } \alpha > 0$$

En plus, si elle est n fois continûment différentiable sur $[a, b]$ où $n = [\alpha] + 1$ pour un $\alpha > 0$, alors :

$$(I_a^\alpha \circ {}^c D_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{j!}$$

Remarque 1.2.8. *Indiquons les deux cas particuliers suivants :*

- Si $\alpha \in]0, 1]$ on a : $(I_a^\alpha \circ {}^c D_a^\alpha f)(t) = f(t) - f(a)$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a : ${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$.

1.2.4 Propriétés de la dérivée de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction f jouisse de propriétés similaires à celles de Riemann-Liouville. En effet, nous avons les résultats admis suivants :

- Pour toutes deux fonctions f et g définies sur $[a, b]$ dont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α existent et pour tous deux scalaires $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$:

$${}^c D_a^\alpha(\lambda f + \lambda' g)(t) = \lambda {}^c D_a^\alpha f(t) + \lambda' {}^c D_a^\alpha g(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

- Pour $m \in \mathbb{N}$ et si : $n - 1 < \alpha < n$ alors :

$${}^c D_a^m({}^c D_a^\alpha f(t)) = {}^c D_a^\alpha({}^c D_a^m f(t)) = {}^c D_a^{\alpha+m} f(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

si $f^{(j)}(0) = 0, j \in \{n, n+1, \dots, m\}$

1.2.5 Relation entre la Dérivée de Caputo et la dérivée de Riemann-Liouville

Considérons une fonction f admettant des dérivées fractionnaires d'ordre α au sens de Riemann-Liouville $D_a^\alpha f(t)$ et au sens de Caputo ${}^c D_a^\alpha f(t)$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ tel que $n = [\alpha] + 1$, nous avons :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}$$

D'autre part, si $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on aura :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$$

Ici aussi, on signale le cas particulier lorsque $\alpha \in]0, 1[$ où :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 1$ on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds \right] \\ &= \frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds \\ &= \frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} + {}^c D_a^\alpha \end{aligned}$$

Pour $\alpha > 1$ et d'après la définition dérivée de Riemann-Liouville on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] &= D_a^\alpha I_a^{n-\alpha} [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k] dt \end{aligned}$$

En intégrant par partie on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha} [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k] &= \int_a^x \left(\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (t-a)^k] \right) dt \\ &= I_a^{n-\alpha+1} D [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] \end{aligned}$$

De même façon pour $n-1$ fois on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha} [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] &= I_a^{n-\alpha+n} D^n [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha+1} D^n [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] \end{aligned}$$

Et comme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k$

est un polynome de degré $n-1$ alors :

$$D^n [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] = 0$$

d'où :

$$I_a^{n-\alpha} [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] = I_a^n I_a^{n-\alpha+1} D^n f(x)$$

On appliquant D^n :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k] &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha+1} D^n f(x) \\ &= I_a^{n-\alpha+1} D^n f(x) = ({}^c D_a^\alpha f)(x) \end{aligned}$$

□

1.3 Introduction :

Avant d'entamer l'aspect numérique sur les résolutions de problèmes d'équations différentielles, nous allons juste rappeler, dans un premier temps, quelques résultats relatifs aux théorèmes d'existence et éventuellement d'unicité des solutions puis, dans un deuxième temps, rappeler l'importance de la transformée de Laplace comme outil permettant de trouver de manière assez simple des solutions explicites de certaines équations différentielles fractionnaires et ceci à titre illustratif.

1.4 Théorèmes du point fixe

Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe. Très différent, le théorème du point fixe de Brouwer n'est pas constructif : il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle-même. Celui de Schauder généralise les deux théorèmes précédents à des domaines assez généraux.

Théorème 1.4.1. (*Contractante de Banach*)

Soit E un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ une application contractante c'est à dire $\exists 0 < k < 1$ tel que $\forall x, y \in E :$

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq k \|x - y\|_E$$

Alors f admet un unique point fixe.

Théorème 1.4.2. (*Théorème de Brouwer*)

Soit B_n la boule unité fermé de \mathbb{R}^n . Alors, toute application continue T de $B_n \rightarrow B_n$ admet un point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème suivant prolonge le résultat du théorème de Brouwer tout en affirmant l'existence d'au moins un point fixe pour une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. C'est le théorème de Schauder :

Théorème 1.4.3. (*Théorème de Schauder*)

Soit U un ensemble non vide compact et convexe dans un espace de Banach E et soit $f : U \rightarrow U$ une application continue. Alors f admet un point fixe.

Pour les applications, la généralisation suivante est importante.

Théorème 1.4.4. Soit U un ensemble non vide fermé et convexe dans un espace de Banach E et soit $f : U \rightarrow U$ une application continue telle que $f(U)$ soit une partie relativement compacte de E . Alors f admet au moins un point fixe.

1.5 Equations différentielles fractionnaires

Définition 1.5.1. $\forall \alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors,

$$D^\alpha y(u) = f(u, y(u))$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Louiville avec conditions initiales exprimées par le système :

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

De même :

$${}^c D^\alpha y(u) = f(u, y(u))$$

est une équation différentielle fractionnaire de type Caputo avec conditions initiales exprimées par le système :

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

En utilisant les théorèmes de la section précédente et en définissant les bons opérateurs sur les espaces fonctionnels correspondants qui vérifient les bonnes conditions d'existence de points fixes comme pour le théorème de Brouwer ou pour le théorème de Schauder ou celui de Schauder généralisé, on arrive à montrer les deux résultats suivants (voir [12], [20], ([24]) :

Théorème 1.5.1. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : G = [0, c] \times [b_0 - k, b_0 + k] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $c > 0$. Alors, il existe un réel $h > 0$ et une fonction $y \in C[0, h]$ solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Louiville :*

$$D^\alpha y(u) = f(u, y(u))$$

avec conditions initiales :

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

tels que :

$$h = \min_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{k \Gamma(\alpha + 1)}{M} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{et} \quad M = \sup_{(u,v) \in G} |f(u, v)|$$

Si de plus f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire :

$\exists L > 0$ tel que : $|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leq L|v_1 - v_2|, \forall v_1, v_2 \in C[0, h]$. Alors, la solution est unique.

Théorème 1.5.2. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : G = [0, c] \times [b_0 - k, b_0 + k] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $c > 0$. Alors, $y \in C[0, h]$ est une solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$${}^c D^\alpha y(u) = f(u, y(u))$$

avec les conditions initiales

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale de Voltérra du seconde type.

C'est à dire :

$$y(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} u^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u (u-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 1$, $n = [\alpha] + 1$, $f \in C^n[a, b]$ on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds \right] \\ &= \frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds \\ &= \frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} + {}^c D_a^\alpha u(t) \end{aligned}$$

□

1.5.1 Exemple de problème fractionnaire

Exemple 1.5.1. *Considérons le problème fractionnaire de type Caputo suivant :*

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \quad \forall t \in [0, 1] \text{ avec } 1 < \alpha < 2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour montrer que cette équation admet une unique solution, il suffit de montrer que l'opérateur

$$A : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

défini par :

$$Ay = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

est contractant avec :

$$f(t, y(t)) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}$$

et

$$y_0 = \sum_{k=0}^1 \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = y(0) + y'(0)x = 0$$

En effet, $\forall y_1, y_2 \in C([0, 1])$ on a :

$$\begin{aligned}
\|Ay_1 - Ay_2\| &= \left\| \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right\| \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x \left\| (x-t)^{\alpha-1} \cdot [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] \right\| dt \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \cdot 2^{\alpha-1} \int_0^x \| [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] \| dt \\
&\quad (\text{car : } |x-t| \leq |x| - |t| \leq |x| + |t| \leq 2)
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| &= \left\| \frac{e^{-t}|y_1(t)|}{(9+e^t)(1+|y_1(t)|)} - \frac{e^{-t}|y_2(t)|}{(9+e^t)(1+|y_2(t)|)} \right\| \\
&\leq \frac{1}{9} \left\| \frac{|y_1(t)|}{(1+|y_1(t)|)} - \frac{|y_2(t)|}{(1+|y_2(t)|)} \right\| \\
&\quad (\text{car : } e^{-t} < 1, \quad 9+e^t > 9) \\
&\leq \frac{1}{9} \|y_1(t) - y_2(t)\| \\
&\leq \frac{2}{9\gamma(\alpha)} \|y_1(t) - y_2(t)\| \\
&\leq \frac{2}{9} \|y_1(t) - y_2(t)\|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|Ay_1 - Ay_2\| \leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} \cdot (2^{\alpha-1}) \frac{1}{9} \|y_1(t) - y_2(t)\|$$

(car : $1 < \alpha < 2 \implies 0 < \alpha - 1 < 1$)

et comme : $\frac{2}{9} < 1$, alors l'opérateur A est contractant d'où le système précédent a une unique solution.

Remarque 1.5.1.

Pour $\alpha, c > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : G = [0, c] \times [b_0 - k, b_0 + k] \rightarrow \mathbb{R}$, l'équation différentielle fractionnaire :

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x))$$

admet une solution unique si l'équation intégrale de Volterra :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} x^k + \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

en possède une.

Ce qui revient à dire que l'opérateur $A : C([0, c]) \rightarrow C([0, c])$ défini par :

$$A(y) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

doit être contractant.

Démonstration :

1.6 Transformée de Lapalce des opérateurs et son inverse :

Définition 1.6.1. La transformée de Laplace d'une fonction réelle f localement intégrable sur $[0, \infty[$ est la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Propriétés de la transformée de Laplace :

1. $L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)]$ avec a, b réels (linéarité)
2. $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.
3. $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$.
4. $L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$.
5. $L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F_1(s) F_2(s)$.

Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles :

$$- L[t^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}}, \quad \beta > -1.$$

$$- L[e^{at}] = \frac{1}{s - a}, \quad s > a.$$

$$- L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{et} \quad L[\cos(ax)] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Dans le calcul opérationnel, la transformée de Laplace joue encore un rôle essentiel en permettant " l'algébrisation " des symboles de dérivation et d'intégration des expressions mathématiques décrivant des phénomènes linéaires (voir [19]).

La proposition suivante donne la transformée de Laplace pour l'opérateur intégral fractionnaire défini au premier chapitre.

Proposition 1.6.1. *La transformée de Laplace de l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α est donnée par la relation :*

$$L[I^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} L[I^\alpha f(t)](s) &= L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right](s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\left[\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right](s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} F(s) \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \\ \text{car : } L[x^{\alpha-1}] &= \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \\ D'où' : L[I^\alpha f(t)] &= \frac{F(s)}{s^\alpha} \end{aligned}$$

□

De même l'opérateur de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville peut avoir sa transformée de Laplace comme suit :

Proposition 1.6.2. *Soit $\alpha > 0$, $m = [\alpha] + 1$ et $f \in C^m[a, b]$. Alors :*

$$L[D^\alpha y(t)] = \frac{s^m F(s) - s^{m-1}y(0) - s^{m-2}y'(0) - \dots - y^{(m)}(0)}{s^{m-\alpha}}$$

Preuve :

$$L[D^\alpha y(t)] = L[I^{m-\alpha} y^{(m)}(t)] = \frac{L[y^{(m)}(t)]}{s^{m-\alpha}} = \frac{s^m F(s) - S^{m-1}y(0) - s^{m-2}y'(0) - \dots - y^{(m)}(0)}{s^{m-\alpha}}$$

De même l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo peut avoir sa transformée de Laplace comme suit :

Proposition 1.6.3. *soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in C^n[a, b]$ on a :*

$$L[{}^c D_a^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a)$$

Démonstration. D'après la définition du dérivée fractionnaire du Caputo on peut écrire :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D^{-(n-\alpha)} f^{(n)}(t) L[{}^c D_a^\alpha f(t)](s) = L[D^{-(n-\alpha)} f^{(n)}(t)](s) = s^{-(n-\alpha)} G(s) \text{ avec : } G(s) = L[D^{-(n-\alpha)} f^{(n)}(t)](s)$$

(par le changement d'indice : $K = n - k - 1 \iff k = n - K - 1$) D'où :

$$L[{}^c D_a^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a)$$

□

La transformée inverse de la transformation de Laplace qui se fait au moyen d'une intégrale dans le plan complexe permet de revenir sur l'espace de départ.

Définition 1.6.2. *La transformée de Laplace inverse est donnée par la relation :*

$$L^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

Remarque 1.6.1. *A partir du résultat :*

$$L[t^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}},$$

on obtient les deux relations suivantes :

$$- L^{-1} \left[\frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}} \right] = t^\beta$$

$$- L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\beta+1}} \right] = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

Proposition 1.6.4. $\forall \alpha, \beta > 0$ et $\forall a \in \mathbb{R}$ tels que $s^\alpha > |a|$ on a :

$$L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)$$

N.B. : $E_{\alpha,\beta}$ étant la fonction de Mittag-Leffler.

Preuve :

$$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} = \frac{1}{s^\beta} \frac{1}{1 + \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-a}{s^\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-a)^n}{s^{n\alpha+\beta}} \quad (\text{série géométrique})$$

d'où :

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} \right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} L^{-1} \left[\frac{(-a)^n}{s^{n\alpha+\beta}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-a)^n t^{n\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \\ &= t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-at^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \\ &= t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha) \end{aligned}$$

Proposition 1.6.5. $\forall \alpha, \beta : 0 < \alpha \leq \beta$ et $\forall a \in \mathbb{R}$ et $s^{\alpha-\beta} > |a|$, on a la décomposition en série :

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}} \right] = t^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^k C_k^{n+k}}{\Gamma[k(\alpha - \beta) + (n+1)\alpha]} t^{k(\alpha-\beta)}$$

Exemples particuliers :

– Pour $\alpha = 1, a = 0, n = 0$ on a : $L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = t^0 = 1.$

– Pour $\alpha = 2, a = 0, n = 0$ on a : $L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = t.$

1.7 Exemples de résolution d'une EDF par la transformée de Laplace :

Exemple 1.7.1. *Considérons le problème de Riemann-Liouville suivant :*

$$\begin{cases} D^2 y(t) + D^{\frac{3}{2}} y(t) = 1 + t, \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace on obtient :

$$s^2 F(s) - s.y(0) - y'(0) + \frac{s^2 F(s) - s.y(0) - y'(0)}{s^{\frac{1}{2}}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 F(s) - s - 1 + \frac{s^2 F(s) - s - 1}{s^{\frac{1}{2}}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$F(s) \cdot (s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \cdot (s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2},$$

d'où la solution :

$$y(t) = L^{-1}(F(s))(t) = 1 + t$$

Exemple 1.7.2. Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D_0^{\frac{4}{3}} y(t) = 0$$

et appliquons lui la transformée de Laplace :

$$L[D_0^{\frac{4}{3}} y(t)] = 0$$

$$s^{\frac{4}{3}} F(s) - s.D_0^{-(2-\frac{4}{3})} y(0) - D_0^{-(1-\frac{4}{3})} y(0) = 0$$

$$s^{\frac{4}{3}} F(s) - c_1 \cdot s - c_2 = 0$$

avec : $c_1 = D_0^{-(2-\frac{4}{3})} y(0)$ et $c_2 = D_0^{-(1-\frac{4}{3})} y(0)$

on a donc :

$$F(s) = \frac{c_1 \cdot s + c_2}{s^{\frac{4}{3}}} = \frac{C_1}{s^{\frac{1}{3}}} + \frac{C_2}{s^{\frac{4}{3}}}$$

d'où la solution :

$$y(t) = L^{-1}(F(s))(t) = \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})}t^{\frac{1}{3}}$$

Exemple 1.7.3. Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^c D_0^{\frac{2}{3}} y(t) = cy(t), \quad c \text{ étant une constante réelle, } f(0) \neq 0$$

En appliquant Laplace, on aura :

$$L[D_0^{\frac{2}{3}} y(t)] = L[cy(t)]$$

$$s^{\frac{2}{3}} F(s) - s^{\frac{2}{3}-0-1} f(0) = cF(s)$$

$$s^{\frac{2}{3}} F(s) - s^{-\frac{1}{3}} \cdot f(0) = cF(s)$$

$$F(s)(s^{\frac{2}{3}} - c) = s^{-\frac{1}{3}} \cdot f(0)$$

$$F(s) = f(0) \frac{s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - c}$$

$$y(t) = L^{-1} f(0) \frac{s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - c}$$

$$y(t) = f(0) L^{-1} \frac{s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - c}$$

D'après la proposition 1.6.4 (avec : $\alpha = \frac{2}{3}, \alpha - \beta = -\frac{1}{3} \iff \beta = 1$)

$$y(t) = E_{\frac{2}{3},1}(ct^{\frac{2}{3}})$$

Chapitre 2

Méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles

Généralement, une équation différentielle ou un problème aux limites admet rarement des solutions explicites exprimées à l'aide de fonctions usuellement utilisées en analyse. Cependant, on peut toujours trouver des solutions approchées, une fois rassuré de leur existence, par des approches numériques dont le principe est expliqué par un problème de Cauchy classique à titre illustratif.

2.1 Principe de base des méthodes numériques :

Considérons un problème classique de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admettant une seule solution y définie sur l'intervalle $I = [a, b]$ (i.e. F vérifie la condition de Cauchy-Lipschitz).

On subdivise l'intervalle I en N intervalles $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ de longueurs :

$$t_{n+1} - t_n = h_n, \quad 0 \leq n \leq N$$

représentant les pas successifs de la subdivision. L'objectif de la résolution numérique de ce problème est de calculer des valeurs $(Y_n)_n$ qui soient de bonnes approximations de $(y(t_n))_n$ avec $0 < n < N$ en exploitant la relation :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t))dt$$

En utilisant l'approximation :

$$Y_{n+1} - Y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t))dt$$

où l'intégrale : $\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t))dt$ est calculée par l'une des approches d'intégration numérique :

- L'approche des RAG (réctangles à gauche) : $h_n \times F(t_n, y(t_n))$,
- ou l'approche des RAD (réctangles à droite) : $h_n \times F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$,
- ou l'approche des trapèzes : $h_n \times \frac{[F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]}{2}$.

2.2 Méthodes d'Euler :

La méthode d'Euler est la méthode numérique la plus simple pour résoudre une équation différentielle , elle est basée sur le développement limité de Taylor :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h_n) \simeq y(t_n) + h_n y'(t_n) = y(t_n) + h_n F(t_n, y(t_n))$$

2.2.1 Méthode d'Euler explicite :

En utilisant l'approche RAG, on obtient la récurrence suivante :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h_n F(t_n, Y_n) \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

2.2.2 Méthode d'Euler implicite :

De même, avec l'approche RAD, on obtient la récurrence :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h_n F(t_{n+1}, Y_{n+1}) \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

où : $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ avec $n = 0, \dots, N-1$ est une subdivision du domaine de définition $[a, b] = [t_0, t_N]$ en N intervalles de même longueur : $h = \frac{b-a}{N}$.

N.B. On peut prendre le $\max(h_n)$ au lieu de h lorsque la subdivision n'est pas prise uniforme.

2.2.3 Exemples sur Méthode d'Euler :

Exemple 2.2.1. Soit l'équation linéaire : $u' = cu$

Euler explicite :

$$u_{n+1} = u_n + hc u_n \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$u_n = (1 + ch)^n$$

$$u_n = \left(1 + c \frac{b-a}{N}\right)^n$$

Pour N assez grand :

$$u_N = \left(1 + c \frac{b-a}{N}\right)^N \approx e^{c(b-a)}$$

Euler implicite :

$$u_{n+1} = u_n + hc u_{n+1} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Exemple 2.2.2.
$$\begin{cases} y'(t) = t \sin[y(t)] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

on prend : $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $f(t_n, y_n) = t_n \sin(y_n)$

Par Euler explicite :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$y_0 = 2$$

$$y_1 = 2 + 0.1 \times 0 \times \sin(2) = 2$$

$$y_2 = 2 + 0.1 \times 0.1 \times \sin(2) = 2.0090929$$

$$y_3 = 2.0090929 + 0.1 \times 0.2 \times \sin(2.0090929) = 2.02720249$$

2.2.4 Méthode d'Euler pour les EDF :

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D_a^\alpha y = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$D_a^\alpha y$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de y d'ordre α où :
 $0 < \alpha \leq 1$.

Nous avons :

$$D_a^{1-\alpha}(D_a^\alpha)y(t) = D_a^{1-\alpha}F(t, y)$$

D'où :

$$y' = D_a^{1-\alpha}F(t, y)$$

On pose alors :

$$F'(t, y) = D_a^{1-\alpha}F(t, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} \cdot F'(u, y(u)) du$$

On obtient alors l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} Y_0 = y(0) = y_0 \\ Y_{n+1} = Y_n + h F(t_n, Y_n) + \frac{h^2}{2} \frac{dF}{dt}(t_n, Y_n) + \frac{dF}{dy}(t_n, Y_n)F(t_n, Y_n). \end{cases}$$

2.2.5 Erreur de la méthode d'Euler

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= u(t_{n+1}) - u_{n+1} \\ &= u(t_{n+1}) - hf(t_n, u(t_n)) \\ &= u(t_{n+1}) - u(t_n) - hu'(t_n) \\ &= \frac{1}{2}h^2u''(t_n) + o(h^2)\end{aligned}$$

2.3 Méthodes de Runge-Kutta :

Les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision que les méthodes d'Euler (dans le sens où elles donnent en général des solutions numériques plus proches des solutions analytiques que les méthodes d'Euler). Cette précision est obtenue par l'utilisation d'un nombre de " pas " de calcul intermédiaire.

Le principe de cette méthode est d'utiliser des points intermédiaires : $(t_{n_i}, y_{n_i})_{1 \leq i \leq q}$ afin de calculer par récurrence les valeurs : (t_n, y_n) avec $t_{n_i} = t_n + c_i h_n$ où $h_n = t_{n+1} - t_n$ est le " pas " et $c_i \in [0, 1]$ pour que t_{n_i} soit entre t_n et t_{n+1} .

Les deux méthodes les plus employées sont l'algorithme " R-K 2 " à deux pas de calcul et celui de quatre pas de calcul " R-K 4 ".

On considère donc, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

A chacun des points (t_{n_i}, y_{n_i}) , on associe la pente correspondante : $p_{n_i} = F(t_{n_i}, y_{n_i})$

Si y est la solution exacte de l'équation : $y'(t) = F(t, y(t))$ on a :

$$y(t_{n_i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n_i}} F(t, y(t)) dt, \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

ou bien :

$$y(t_{n_i}) = y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} F(t_n + uh_n, y(t_n + uh_n)) du, \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

par le changement de variable : $t = t_n + uh_n$.

de même, on a :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

ou bien :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 F(t_n + uh_n, y(t_n + uh_n)) du$$

En calculant l'intégrale :

$$\int_0^1 F(t_n + uh_n, y(t_n + uh_n)) du$$

par une des méthodes de quadrature, on obtient :

$$y(t_{n_i}) \simeq y(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} F(t_{n_j}, y(t_{n_i})) , \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

et

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h_n \sum_{i=1}^q b_i F(t_{n_i}, y(t_{n_i})) , \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{n_i} = t_n + c_i h_n \\ Y_{n_i} = Y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} p_{n_j} , \quad \text{pour } i = 1, \dots, q \\ p_{n_j} = F(t_{n_j}, Y_{n_i}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ Y_{n+1} = Y_n + h_n \sum_{j=1}^q b_j p_{n_j} , \quad \text{pour } i = 1, \dots, q \end{array} \right.$$

N.B. Les constantes a_{ij} et b_j sont déterminées par la quadrature utilisée.

2.3.1 Méthode R-K d'ordre 1 :

On part de la valeur : $y(t_0) = y_0 = Y_0$, puis on réitère avec :

$$Y_{n+1} = Y_n + h_n F(t_n, Y_n), \quad 0 \leq n \leq N$$

où : $[t_n, t_{n+1}]_{0 \leq n \leq N}$ est une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_N]$.

2.3.2 Méthode R-K d'ordre 2 :

Dans ce cas, on utilise la récurrence :

$$Y_{n+1} = Y_n + h_n F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{h_n}{2} F(t_n, Y_n)\right).$$

2.3.3 Méthode R-K d'ordre 4 :

La formule de récurrence est donnée par :

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h_n}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

où les constantes sont calculées selon l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$ (elles dépendent de n) :

- $K_1 = F(t_n, Y_n),$
- $K_2 = F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{h_n}{2} K_1\right),$
- $K_3 = F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{h_n}{2} K_2\right),$
- $K_4 = F(t_n + h_n, Y_n + h_n K_3).$

2.3.4 Méthode R-K d'ordre 4 avec dérivée seconde :

$$\text{Soit le problème : } \begin{cases} y''(t) = F(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

On commence par les valeurs : $Y_0 = y(t_0) = y_0$, $Y'_0 = y'(t_0) = y'_0$

puis, on réitère avec les deux relations :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h Y'_n \frac{h^2}{6}(K_1 + K_2 + K_3) \\ Y'_{n+1} = Y'_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

où les constantes sont calculées selon l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$:

- $K_1 = F(t_n, Y_n, Y'_n),$
- $K_2 = F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2} Y'_n, Y'_n + \frac{h}{2} K_1\right),$
- $K_3 = F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2} Y'_n + \frac{h^2}{4} K_1, Y'_n + \frac{h}{2} K_2\right),$

$$- K_4 = F \left(t_n + h, Y_n + hY'_n + \frac{h^2}{2}K_2, Y'_n + hK_3 \right).$$

2.3.5 Méthode R-K d'ordre 2 pour une EDF :

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} D_a^\alpha y = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$I = [a, b]$ étant l'intervalle d'intégration.

on pose :

$$t_{n+1} = a + nh \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{N} \quad \text{avec} \quad n = 0, \dots, N-1$$

On calculera les constantes :

$$K_1 = h D_a^{1-\alpha} F(t, Y_n), \quad K_2 = h D_a^{1-\alpha} F \left(t + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{K_1}{2} \right)$$

et nous appliquons :

$$Y_{n+1} = Y_n + h D_a^{1-\alpha} F \left(t + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{K_1}{2} \right)$$

2.3.6 Méthode R-K d'ordre 4 pour une EDF :

On calcule d'abord les constantes :

$$- K_1 = h D_a^{1-\alpha} F(t, Y_n)$$

$$- K_2 = h D_a^{1-\alpha} F \left(t + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{K_1}{2} \right)$$

$$- K_3 = h D_a^{1-\alpha} F \left(t + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{K_2}{2} \right)$$

$$- K_4 = h D_a^{1-\alpha} F(t+h, Y_n + K_3)$$

Et nous avons la relation récurrente :

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

2.3.7 Exemple sur méthode de Rung-Kutta 4

$$\text{Exemple 2.3.1. } \begin{cases} y'(t) = t \sin[y(t)] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

on prend $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $f(t_n, y_n) = t_n \sin(y_n)$

$$k_1 = hf(t_0, y_0) = 0.1 \times 0 \times \sin 2 = 0$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = 0.1 \times f(0.05, 2) = 0.004546487$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = 0.1f(0.05, 2 + 0.05 \times 0.004546487) \\ &= 0.1 \times 0.05 \times \sin(2.002273244) = 0.004541745 \end{aligned}$$

$$k_4 = 0.1f(0.1, 2.004541745) = 0.0090739$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 2 + \frac{0.1}{6}(0 + 2 \times 0.004546487 + 2 \times 0.004541745 + 0.0090739) \\ &= 2,0004541727333 \end{aligned}$$

Sont les calculs pour la 1^{ère} itération.

2.4 Méthodes d'Adams :

Ce sont des méthodes multi-pas. Elles sont basées sur une approximation de intégrale :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

par des formules de quadrature. On distingue deux méthodes principales :

2.4.1 Adams-Bashfourth

Ici on approche cette intégrale par la quantité :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_q(t) dt$$

où : $P_q(t)$ est l'unique polynôme de degré q vérifiant :

$$P_q(t_i) = F(t_i, y(t_i)), \quad i = n, n-1, \dots, n-q$$

Ce polynôme remplacera la fonction F dans les calculs.

En choisissant le polynôme d'interpolation de Lagrange des valeurs de f_{n-i} sur les valeurs t_{n-i} on aura l'écriture :

$$P_q(t) = \sum_{i=0}^q f_{n-i} \prod_{k \neq i} \frac{(t - t_{n-k})}{(t_i - t_{n-k})}$$

où : $f_{n-i} = F(t_{n-i}, Y_{n-i})$

On note :

$P_0(t) = f_n = F(t_n, Y_n)$ le polynôme de degré zéro interpolant le point (t_n, f_n) .

$P_1(t) = f_n + (f_n - f_{n-1}) \frac{(t - t_n)}{h}$ le polynôme de degré 1 interpolant les points (t_{n-1}, f_{n-1}) et (t_n, f_n) .

Calculons l'approximation :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_1(t) dt$$

en utilisant le changement de variable : $s = \frac{t - t_n}{h}$ on a :

$$ds = \frac{1}{h} dt \iff dt = h ds$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_1(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[f_n + (f_n - f_{n-1}) \frac{(t - t_n)}{h} \right] dt$$

$$= h \int_0^1 [f_n + (f_n - f_{n-1}) \cdot s] ds$$

Soit :

$$= h \left(f_n \left[1 + \frac{s^2}{2} \right]_0^1 - f_{n-1} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^1 \right)$$

$$= h \left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right)$$

D'où :

$$Y_{n+1} = Y_n + h \left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right)$$

$$= Y_n + h \left[\frac{3}{2} F(t_n, Y_n) - \frac{1}{2} F(t_{n-1}, Y_{n-1}) \right]$$

qui est le schéma d'Adams-Bashfourth d'ordre 1 (à 2 pas).

De même nous pouvons aller à l'ordre 2 (à 3 pas) avec un polynôme $P_2(t)$ de degré 2 interpolant les points : (t_{n-2}, f_{n-2}) , (t_{n-1}, f_{n-1}) et (t_n, f_n) .

Après calcul, on trouvera :

$$Y_{n+1} = Y_n + h \left[\frac{23}{12} F(t_n, Y_n) - \frac{4}{3} F(t_{n-1}, Y_{n-1}) + \frac{5}{12} F(t_{n-2}, Y_{n-2}) \right]$$

ou bien :

$$Y_{n+1} = Y_n + h \left[\frac{23}{12} f_n - \frac{4}{3} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} \right]$$

C'est est le schéma d'Adams-Bashfourth d'ordre 2.

2.4.2 Adams-Moulton

De la même manière, on approche l'intégrale :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

par la quantité :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_q(t) dt$$

où : $P_q(t)$ est l'unique polynôme de degré $q + 1$ vérifiant :

$$P_q(t_i) = F(t_i, y(t_i)), \quad i = n + 1, n, n - 1, \dots, n - q$$

C'est à dire que l'on inclut la valeur $y(t_{n+1})$ dans les valeurs "connues". C'est un schéma multi-pas implicite à $q + 1$ pas.

Par exemple, pour un schéma utilisant les points :

$$(t_{n-4}, f_{n-4}), (t_{n-3}, f_{n-3}), (t_{n-2}, f_{n-2}), (t_{n-1}, f_{n-1}) \text{ et } (t_n, f_n)$$

Le polynôme d'interpolation sera d'ordre 5 (à 4 pas) est donnera pour approximation de l'intégrale en question, la valeur exprimée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + \frac{h}{720} [251F(t_{n+1}, Y_{n+1}) + 646F(t_n, Y_n) - 264F(t_{n-1}, Y_{n-1}) \\ &\quad + 106F(t_{n-2}, Y_{n-2}) - 19F(t_{n-3}, Y_{n-3})] \\ &= Y_n + \frac{h}{720} [251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}] \end{aligned}$$

avec : $h = \frac{b-a}{N}$.

2.5 La méthode d'Adomian (ADM)

La décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique développée par le mathématicien américain George Adomian [Adomian, 1988]. Elle est utilisée pour la résolution de problèmes algébriques, différentiels, intégrales, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et les équations aux dérivées partielles ([9], [11]). L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré et donne la solution sous forme d'une série infinie, qui converge rapidement vers la solution exacte quand elle existe.

2.5.1 Description de la méthode pour une EDF :

Il suffit d'écrire l'équation différentielle fractionnaire sous la forme :

$$Ay = f$$

qui est appelé " forme canonique d'Adomian " avec :

$$A = L + R + N$$

où : $L + R$ est le terme linéaire de A (L inversible, R le reste) et N le terme non linéaire. L'équation devient :

$$Ly + Ry + Ny = f,$$

soit L^{-1} l'inverse de L . Alors :

$$y = L^{-1}(f) - L^{-1}(Ry) - L^{-1}(Ny) + c_0$$

avec c_0 est la constante d'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

avec :

$$y_0 = c_0 + L^{-1}(f) \quad \text{et} \quad y_1 = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0).$$

De la même manière :

$$y_n = -L^{-1}(Ru_n) - L^{-1}(A_n)$$

Les polynômes d'Adomian A_n sont définis par :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= N'(u_0)u_1 \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= N'(u_0)u_2 + \frac{1}{2!}N''(u_0)u_1^2 \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= N'(u_0)u_3 + N''(u_0)u_1u_2 + \frac{1}{3!}N'''(u_0)u_1^3 \\ &\vdots \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n t^i u_i \right) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

Remarque 2.5.1. Ces polynômes s'écrivent sous la forme :

$$A_n = \sum_{r=0}^n C(r, n) N^{(r)}(u_0)$$

où : $C(r, n)$ représente la somme de tous les produits (divisés par $m!$) des r termes u_i dont la somme des indices i est égale à n ; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit. Cette relation permet de trouver les polynômes A_n , mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand ($n > 5$).

N.B. : La constante d'intégration dépend de l'opérateur dérivateur L :

$$c_0 = \begin{cases} y(0) & \text{si } L = \frac{d}{dt} \\ y(0) + ty'(0) & \text{si } L = \frac{d^2}{dt^2} \\ y(0) + ty'(0) + \frac{t^2}{2!}y''(0) & \text{si } L = \frac{d^3}{dt^3} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ y(0) + ty'(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}y^{(n)}(0) & \text{si } L = \frac{d^n}{dt^n} \end{cases}$$

où :

$y(0), y'(0), \dots, y^{(n)}(0)$ sont des valeurs données (conditions initiales).

2.5.2 Exemples de résolution d'une équation différentielle par la méthode ADM :

Exemple 2.5.1. *Considérons le problème :*
$$\begin{cases} y' - y^2 = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ici, $Ly(t) = y'(t)$, $Ry(t) = 0$, $Ny(t) = -y^2$, et $f(t) = 1$.

avec : $y = y(0) + L^{-1}(1) - L^{-1}(y^2)$

$$y = -L^{-1}(y^2) - t$$

$$y_0 = t$$

$$y_n = -L^{-1}(A_n), n \geq 1$$

$$y_1 = -L^{-1}(A_0) = -L^{-1}(y_0^2) = -\frac{t^3}{3}$$

$$y_2 = -L^{-1}(A_1) = -L^{-1}(2y_0y_1) = \frac{2t^5}{15}$$

$$y_3 = -L^{-1}(A_3) = -L^{-1}(2y_0y_1 + y_1^2) = -\frac{17t^7}{315}$$

d'où :

$$y(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} - \frac{17t^7}{315} + \dots$$

qui est très proche de $y(t) = \tan(t)$ qui est justement la solution du système.

Exemple 2.5.2. *Soit le problème :*
$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = t^2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Posons : $A = L + R + N$ avec : $Ly = y'(t)$ partie linéaire inversible, $Ry = -y(t)$ partie linéaire non inversible, $Ny = 0$ (il n'y a pas de partie non linéaire non nul), $f(t) = t^2$.

$$y_0 = y(0) + L^{-1}[t^2] = -2 + \frac{2t^3}{3!}$$

$$y_1 = L^{-1}[y_0] = -2t + \frac{t^4}{3 \times 4} = -2t + 2 \frac{t^4}{2 \times 3 \times 4} = -2t + \frac{2t^4}{4!}$$

$$y_2 = L^{-1}[y_1] = -t^2 + \frac{t^5}{3 \times 4 \times 5} = -t^2 + \frac{2t^5}{5!}$$

$$y_3 = L^{-1}[y_2] = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6} = -\frac{t^3}{3} + \frac{2t^6}{6!}$$

Jusqu'au rang n on obtient :

$$y_n = -2\frac{t^n}{n!} + 2\frac{t^{n+3}}{(n+3)!}$$

D'où :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$y = 2 \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{t^m}{m!} \right]$$

$$y = 2 \left[-1 - t - \frac{t^2}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{t^m}{m!} \right]$$

Notons que : $y = -2 - 2t - t^2$, est la solution exacte de l'équation différentielle précédente.

Exemple 2.5.3. Soit le problème :
$$\begin{cases} y'(t) - e^{y(t)} = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$A = L + R + N$ avec : $Ly = y'(t)$ la partie linéaire inversible , $Ry = 0$ le reste de la partie linéaire , $Ny = -e^{y(t)}$ la partie non linéaire , $f(t) = 0$.

$$y_0 = y(0) = 0$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$A_0(y_0) = e^{y_0} = e^0 = 1$$

$$A_1(y_0, y_1) = y_1$$

$$A_2(y_0, y_1, y_2) = y_2 + \frac{1}{2!}y_1^2$$

$$A_3(y_0, y_1, y_2, y_3) = y_3 + y_1y_2 + \frac{1}{3!}y_1^3$$

D'où :

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = L^{-1}(A_0) = L^{-1}(1) = t$$

$$y_2 = L^{-1}(A_1) = L^{-1}(y_1) = L^{-1}(t) = \frac{1}{2}t^2$$

$$y_3 = L^{-1}(A_2) = L^{-1}(y_2 + \frac{1}{2!}y_1^2) = \frac{1}{3}t^3$$

$$y_4 = L^{-1}(A_3) = \frac{1}{4}t^4$$

$$y(t) = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4$$

Exemple 2.5.4. Soit le problème de Cauchy fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^c D^{\frac{1}{4}} y + ty^2 = \frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Après avoir trouvé les polynômes d'Adomian A_n , on utilisera la récursion grâce aux deux relations :

$$\begin{cases} y_0(t) = y(0) + I_0^{\frac{1}{4}} \left[\frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \right] \\ y_{n+1}(t) = -I_0^{\frac{1}{4}} [A_n](t), n \geq 0 \end{cases}$$

Nous obtenons alors, les cinq premiers termes de l'approximation :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -I_0^{\frac{1}{4}} [t(y_0(t))^2] \\ y_2(t) &= -I_0^{\frac{1}{4}} [2ty_0(t)y_1(t)] \\ y_3(t) &= -I_0^{\frac{1}{4}} [2ty_0(t)y_2(t) + t(y_1(t))^2] \\ y_4(t) &= -I_0^{\frac{1}{4}} [2ty_1(t)y_2(t) + 2ty_0(t)y_3(t)] \\ y_5(t) &= -I_0^{\frac{1}{4}} [2ty_0(t)y_4(t) + 2ty_1(t)y_3(t) + t(y_2(t))^2] \end{aligned}$$

D'où la solution approximative :

$$\begin{aligned} y(t) = \sum_{n=0}^5 y_n(t) = & t^2 - 0,223473t^{\frac{21}{4}} + 0,412130385t^{\frac{17}{2}} - 0,755616844t^{\frac{47}{4}} + 1,538979902t^{15} - \\ & 3,18619934t^{\frac{73}{4}} - 55,57748572t^{\frac{47}{4}} - 119,5579407t^{\frac{99}{4}} - 115,5219367t^2 - 58,93506052t^{\frac{125}{4}} - \\ & 15,55703363t^{\frac{69}{2}} - 1,68310769t^{\frac{151}{4}} \end{aligned}$$

2.6 La méthode de perturbation d'homotopie (HPM)

La méthode de perturbation d'homotopie, a été proposée et développée par le mathématicien chinois Ji-Haun-He en 1999 ([17], [16], [18]). La méthode de perturbation d'homotopie est un outil mathématique puissant pour étudier une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. Elle est obtenue avec succès par combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation. La carac-

téristique importante de la méthode de perturbation d'homotopie est qu'elle fournit une solution presque exacte à beaucoup de problèmes linéaires et non-linéaires sans la nécessité du calcul des polynômes Adomian.

2.6.1 Description de la méthode :

Soit l'équation différentielle :

$$Au(t) - f(t) = 0, \quad t \in \Omega \text{ un ouvert de } \mathbb{R} \quad (2.1)$$

avec la condition initiale $u(0) = u_0$.

Supposons : $A = L + N$ où L est la partie linéaire et N est la partie non linéaire.

L'équation différentielle s'écrira alors :

$$Lu(t) + Nu(t) - f(t) = 0, \quad t \in \Omega$$

on construit une homotopie

$$v(t, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

de sorte que :

$$H(v, p) = (1 - p)[Lv(t) - Lu_0] + p[Av(t) - f(t)] = 0$$

où : u_0 est la valeur initiale (approximation de départ). Mais, cela implique aussi :

$$H(v, p) = Lv(t) - Lu_0 + pLu_0 + p[Nv(t) - f(t)] = 0$$

Nous avons alors :

$$H(v, 0) = Lv(t) - Lu_0 = 0 \quad \text{et} \quad H(v, 1) = Av(t) - f(t) = 0$$

Supposons que la solution v se présente sous la forme d'une série : $v = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i$. Alors, pour $p = 1$, la solution approximative de l'équation différentielle (2.1) sera donc :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i$$

2.6.2 Exemple de résolution d'une équation différentielle par la méthode HPM :

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, t \geq 0, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

considérons l'homotopie : $H(v, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f] = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega, \quad \text{avec : } u_0 = u(0) = 1$$

En écrivant : $v = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots$, nous aurons :

$$v'_0 = u'_0$$

$$v_1 = -u'_0 - v_0^2, \quad v_1(0) = 0$$

$$v'_2 = -2u_0 v_1, \quad v_2(0) = 0$$

Les premiers termes de la solution seront donnés par :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = -t, \quad v_2 = t^2$$

Donc : $u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$

ainsi : $y = 1 - t + t^2 + \dots$ qui est très proche de la solution exacte : $y_E(t) = \frac{1}{1+t}$.

2.7 Application sur MATLAB :

Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D_0^{\frac{1}{2}} y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{avec la condition initiale : } y(0) = 0$$

2.7.1 Solution analytique

Trouvons la solution analytique de cette équation en utilisant la transformée de Laplace :

$$L[D_0^{\frac{1}{2}} y(t)] = L[t^2]$$

$$\frac{sF(s) - y(0)}{s^{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2+1)}{t^{2+1}}$$

$$\frac{sF(s)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{s^3}$$

$$F(s) = \frac{s^{\frac{1}{2}} \times 2}{s \cdot s^3}$$

$$F(s) = \frac{2}{S^{\frac{7}{2}}} = 2 \cdot \frac{1}{s^{\frac{5}{2}+1}}$$

D'où :

$$y(t) = 2 \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{16}{15\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{5}{2}} = \frac{32}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}}$$

2.7.2 Solution numérique

Avec le logiciel MATLAB, on a représenté dans un même graphique les deux solutions : numérique et analytique et avec les deux approches : d'Euler et celle de Runge-Kutta d'ordre 2 puis, d'ordre 4 pour cette équation fractionnaire illustrant ainsi le degré de rapprochement entre leurs tracés :

Par la méthode d'Euler pour $n = 20$, on a le résultat suivant :

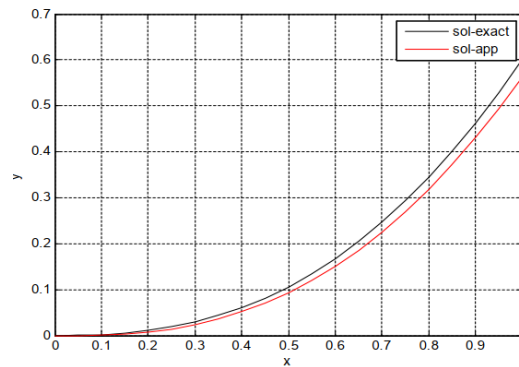


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative par Euler.

Par la méthode de Rung-Kutta d'ordre 2 pour $n = 20$, on a le résultat suivant :

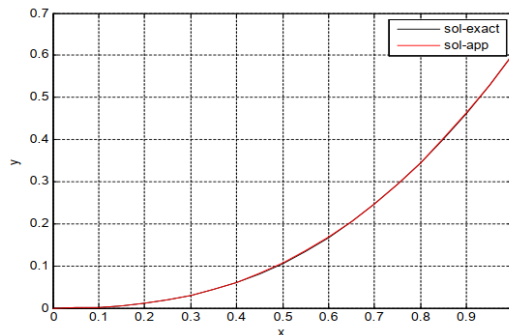


FIGURE 2.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative par R-K 2.

Par la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4 pour $n = 20$, on a le résultat suivant :

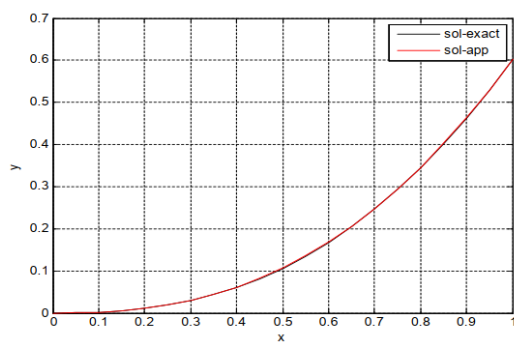


FIGURE 2.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative par R-K 4.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire quelques unes des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Nous avons cité précisément les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta, d'Adams, d'Adams-Moulton, d'Adomian(ADM) et de HPM. Nous avons pris des exemples d'équations différentielles ordinaires ainsi que des équations différentielles fractionnaires.

Quelques une de ces méthodes sont basées sur la décomposition de l'opérateur A de l'équation différentielle fractionnaire $Ay = f$ en une partie linéaire et une partie non linéaire ($A = L + N$ ou $A = L + R + N$) et les conditions suffisantes sont appliquées à la partie non linéaire.

Généralement la solution approximative est très proche de la solution exacte.

Le travail est achevé par des résultats numériques qui assurent l'efficacité de ces méthodes.

Bibliographie

- [1] L. Adjmi , Traitement numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université Mohamed Boudiaf de M'sila.
- [2] Ali Assi, Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Differential Equations in Matlab, Engineering Education and Research using MATLAB, 2011.
- [3] K. Belakroum, Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Bordj Mokhtar ANNABA, 2013.
- [4] M. Benchohra and F. Ouhaar, Existence Results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Bullten Of Mathematical analysis and Applications, Vol. 2 issue4, pp. 7-15, (2010).
- [5] F. Chita, Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université d'Oran Es-Senia, faculté des Sciences, 2011.
- [6] J-P. Demailly Analyse numérique et équations différentielles; collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996).
- [7] Desai, V.H. Pradhan, Solution by Homotopy Perturbation Method of linear and non linear diffusion equation, International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, 2013.
- [8] Z. Fatiha, La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université Djilali BOUNAAMA, Khemis Miliana, 2015.
- [9] B.Gbadamosi, O.Adebimpe, E.I.Akinola, I.A.Olopade, Solving Riccati equation using Adomian Decomposition Method, Departement of pure Mathematics, university of Technology PMB 4000, Ogbomose, NIGERIA, 2012.
- [10] M. Godefroy, La fonction Gamma ; Théorie, Histoire, Bibliographie, Gauthier-Villars, Paris, (1901).
- [11] Ghorbani, A. Beyond Adomian's Polynomials. Chaos Solutons Fract., 39(3), (2009), 1486- 1492.

- [12] S.B. Hadid, Local and global existence theorems on differential equations of non-integer order. *J. Fractional Calculus*, Vol. 7, pp. 101-105, May (1995).
- [13] M. Hamdi Cherif, Comparaison des méthodes numériques de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université d'Oran Senia, faculté des Sciences, 2012.
- [14] T. HOUMOR, Analyse du chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires, université Constantine 1, faculté des sciences exactes, 2014.
- [15] H.Jafari, H.Tajadodi, He.s Variational Iteration Method for solving Fractional Riccati Differential Equation, Departement of Mathematics and Computer science, University of Mazandaran, Babolsar, IRAN, 2010.
- [16] He, J.H. A Coupling Method of Homotopy Technique and Perturbation Technique for Non-linear Problems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 35, (2000), 37-43.
- [17] He, J.H. Homotopy Perturbation Technique, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 178 (3), (1999), 257-262.
- [18] He, J.H. Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear equations. *Int. J. Modern Phys. B*, 20(10), (2006), 1141-1199.
- [19] G. Jumarie, Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), 1659-1664.
- [20] I. Podlubny, Fractional differential equations. *Mathematics in science and engineering*, vol.198. New York/London : Springer ;1999.
- [21] S. Momani, Zaid Odibat, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order *Physics Letters A, ELSEVIER* 365 (2007) 345-350.
- [22] B. Stout, Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, Université de Provence Institut Fresnel, Case 161 Faculté de St Jérôme Marseille, France, 2007.
- [23] N.H. Sweilam, M. M. Khader, A. M. Mahdy, Numerical Studies For Solving Fractional Differential Equation, Departement of Mathematics, Cairo University, Benha University, Zagazig University, Egypt, 2012.
- [24] M. Salhi, Application de Quelques Théorème de Point Fixe pour la Résolution des équations Différentielles Fractionnaire/Université de Kasdi Merbah, Ouargla 2016.
- [25] D. Ziane, Etude de l'existence et de la stabilité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, université d'Oran Es-Senia, Faculté des Sciences, 2012.