

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département Mathématiques et Informatique



## MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques  
Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Spécialité : Equations différentielles et modélisation

**Etude Mathématique d'un modèle SIR avec un retard distribué dépendant d'une fonction non linéaire**

**Présenté Par :**

1) Melle Belkallouche Nour El Houda

**Devant le jury composé de :**

Dr BELLATAR ZOKHA	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr MAMMAR IMANE	MCB	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr BENTOUT SOUFIANE	MCA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

*Année Universitaire 2020/2021*

---

# Remerciement

*Je remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr BENTOUT Soufiane**, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.*

*Mes respectueux remerciements s'adressent aux membres du jury, **M<sup>me</sup> BELLATAR Zokha** d'avoir accepté de présider le jury et **M<sup>me</sup> MAMMAR Imane** pour avoir accepté d'examiner mon travail et contribuer aux discussions lors de la soutenance.*

*Mes remerciements s'adressent également à tout mes professeurs pour leur générosité et la grande patience dont ils ont fait preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles .*

---

---

---

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*À mes parents Salah et Rachida qui m'ont soutenue et encouragée durant ces années d'étude.*

*A mon frère Mohamed Abdelbasset, mes sœurs Halima et Chaima., mon neveu Iyad .*

*À tous les membres de ma famille ( oncles, tantes et leurs enfants ), qui étaient toujours à mes côtés.*

*À ma copine Hadjira qui m'as aidée, et qui était toujours à mes côtés.*

*Je dédie à tout ceux qui ont participé à ma réussite.*

# Sommaire

<b>Remerciement</b>	<b>1</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>7</b>
I.1 Théorème du point fixe Banach . . . . .	7
I.2 Le taux de reproduction de base . . . . .	8
I.3 Stabilité des équilibres . . . . .	10
I.3.1 Stabilité d'un système non linéaire . . . . .	10
I.4 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	13
I.5 Principe d'invariance de LaSalle . . . . .	13
I.6 Persistance uniforme . . . . .	14
I.7 Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes à retard . . . . .	15
<b>II Modèle SIR classique et modèle SIR avec retard</b>	<b>17</b>
II.1 Modèle mathématique <i>SIR</i> . . . . .	17
II.1.1 Interprétation du modèle . . . . .	17
II.1.2 Le taux de reproduction de base . . . . .	19
II.1.3 Calcul des points d'équilibre . . . . .	20
II.2 Étude de stabilité de l'équilibre endémique . . . . .	22
II.2.1 Stabilité locale de l'équilibre endémique . . . . .	22
II.2.2 Attractivité d'équilibre endémique . . . . .	23
II.3 Modèle SIR avec retard . . . . .	24
II.3.1 Le taux de reproduction de base . . . . .	25
II.3.2 Les points d'équilibre . . . . .	26
II.4 Stabilité globale pour $\mathcal{R}_0 > 1$ . . . . .	28
<b>III Modèle épidémiologie <i>SIR</i> avec retard distribuée d'incidence d'une fonction non linéaire</b>	<b>32</b>

---

III.1 Introduction : . . . . .	32
III.2 Modèle mathématique . . . . .	32
III.3 L'équilibre et le taux de reproduction de base . . . . .	34
III.4 Stabilité locale des points d'équilibre . . . . .	35
III.5 Stabilité asymptotiquement globale pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$ . . . . .	38
III.6 Stabilité asymptotiquement globale pour $\mathcal{R}_0 > 1$ . . . . .	40
<b>Conclusion Générale</b>	<b>46</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

---

# Introduction Générale

L'épidémiologie est une science qui traite l'évolution des maladies dans une population saine, leur survenance, leur fréquence en fonction du temps et les causes qui influent sur la santé de la population.

L'étude de la répartition et des déterminants des événements de santé sert de fondement à la logique des interventions faites dans l'intérêt de la santé publique et de la médecine préventive. L'épidémiologie est reconnue comme champ d'étude à partir du milieu du 18<sup>ème</sup> siècle puisque la première étude significative remonte à 1854 mais elle est l'un des piliers de la santé publique et de la médecine à travers l'histoire.

En 1927, les chercheurs *W.O. Kermack* et *A.G. McKendrick* [2] ont étudié la dynamique de la transmission des maladies infectieuses humaines.

Les modèles mathématiques des maladies infectieuses mis en pratique depuis plus d'un siècle est demeure notre problème aujourd'hui qui est un modèle *SIR* comportant deux type : le classique et le retard qui apparait dans le terme d'incidence qui est typiquement la seule non linéarité la vitesse de contamination d'une épidémie dans une population dépend de plusieurs paramètres entre autres : stades cliniques possibles, déplacement des individus, souches de la maladie. Les modèles mathématiques se sont progressivement affirmé comme outils d'aide à la décision.

Pour la politique de la santé publiques, les modèles nous renseignent sur les conséquences pour la population d'actions aussi variées que la vaccination, la mise en quarantaine ou la distribution de tests de dépistage et le nombre de cas d'infection, le nombre de personnes qui auront besoin d'être hospitalisées, le taux de mortalité, la rapidité de la propagation, le pic de l'infection, le moment où la maladie s'éteindra, le pourcentage de la population devant être vacciné. Une étude fondatrice dans les années 1920 prit en compte des modèles compartimentaux, qui divisent la population en plusieurs classes épidémiologiques tels que les individus susceptibles d'être infectés, ceux qui sont infectieux, et ceux qui ont acquis une immunité suite à la guérison. Depuis, cette étude qui fut utilisée pour modéliser de très nombreuses maladies, et continue d'être un thème de recherche actif en prenant en compte de nouveaux éléments tels que les découvertes de la science des réseaux.

*Daniel Bernoulli* avait utilisé une application des mathématiques pour étudier des méthodes mathématiques et statistiques visant l'impact potentiel du vaccin contre la variole en 1760.

Un peu plus tard, les mathématiques ont permis d'établir des politiques de santé publique efficaces contre la propagation de maladies émergentes, être-émergentes qui représentent un danger important pour la santé publique.

Le modèle *SIR* comporte trois types susceptibles, infectieux et rétablis dont l'individu commence susceptible puis devient infecté et à la fin se remet de sa maladie avec une immunisation. Notre travail contient une étude mathématique d'un modèle épidémiologique *SIR*, il se compose de trois chapitres.

**le premier chapitre** se base sur les résultats préliminaires, des définitions et des théorèmes très importants utilisés dans le mémoire ainsi que des outils mathématiques dont nous aurons besoin.

**Dans le deuxième chapitre**, on fait l'étude du modèle épidémiologique *SIR* classique et avec retard qui permet de calculer le taux de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  et étudier la stabilité locale et globale du point d'équilibre endémique.

**Le troisième chapitre**, il consiste à l'étude d'un modèle épidémiologique *SIR* avec retard et incidence générale non linéaire, et calculer le nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  et l'équilibre sans maladie est localement et globalement asymptotiquement stable si  $\mathcal{R}_0$  est inférieur à 1, de plus l'équilibre endémique est localement et globalement asymptotiquement stable quand  $\mathcal{R}_0$  supérieur à 1.

Finalement, on fini par une conclusion.

# Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle les définitions et les théorèmes qui seront utilisés dans ce mémoire.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)), & \text{avec } t \in (0, b) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où  $f : R^n \rightarrow R^n$  est une fonction donnée,  $\Omega$  est un ouvert de  $R^n$ ,  $x_0 \in \Omega$  et  $b \in R_+^*$ .

**Définition I.0.1** ([1]).

La fonction  $x \in C^1(\Omega)$  est dite solution de (I.1) si  $x$  vérifie les équations de (I.1).

**Théorème I.0.1** ( Cauchy-Lipschitz [8] ).

Si  $f$  est de  $C^1$  de  $\Omega$  et s'il existe une constante  $T > 0$  telle que

$$\| f(x_1(t)) - f(x_2(t)) \|_{R^n} \leq T \| x_1 - x_2 \|_{\infty}, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega, t > 0,$$

alors le problème (I.1) admet une solution unique et globale.

## I.1 Théorème du point fixe Banach

**Définition I.1.1** ([6]).

soit  $E$  un espace de Banach et  $A : E \rightarrow E$ , un opérateur. On dit que  $A$  est une contraction, s'il existe une constante  $0 < k < 1$  telle que :

$$\| Ax - Ay \|_E \leq k \| x - y \|_E, \text{ pour tout } x, y \in E.$$



**Théorème I.1.1 (Contraction de Banach [10][33]).**

Soit  $X$  un espace de Banach et  $f : X \rightarrow X$  une contraction. Alors,  $f$  admet un unique point fixe.

**I.2 Le taux de reproduction de base****La méthode de Van Den Driessche et Watmough [31]**

Nous aurons souvent à faire avec l'indice  $\mathcal{R}_0$  qui mesure le nombre de cas secondaire produits par un individu infectieux moyen au cours de sa période d'infectiosité, dans une population entièrement susceptibles. Il existe dans la littérature plusieurs techniques pour calculer  $\mathcal{R}_0$ , nous en présentons une ici :

État de la population :  $(x_i), i = 1, \dots, n$ , soit le système différentielle suivant

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x} = \mathcal{F}_i(x) + \mathcal{V}_i^+(x) - \mathcal{V}_i^-(x), \quad (\text{I.2})$$

avec

$\mathcal{F}_i(x)$  : vitesse d'apparition des infectieux dans le compartiment  $i$ .

$\mathcal{V}_i^+(x)$  : la vitesse de transfert des individus dans le compartiment  $i$  par tout autre moyen (guérison, etc . . .).

$\mathcal{V}_i^-(x)$  : la vitesse de transfert hors du compartiment  $i$  (mortalité, infection, etc . . .).

- On ordonne les variables d'état afin que les  $m(\leq n)$  premières correspondent à des états infectés.
- États sans maladies :  $X_s = \{x | x_1 = \dots = x_m = 0\}$ .
- Équilibre sans maladie  $DFE$   $x^* \in X_s$ . Pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :
  1. Si  $x \geq 0$ , alors  $\mathcal{F}_i \geq 0, \mathcal{V}_i^- \geq 0, \mathcal{V}_i^+ \geq 0$ .
  2. Si  $x_i = 0$ , alors  $\mathcal{V}_i^- = 0$  (pas de sortie d'un compartiment vide).
  3. pour  $i > m$  alors,  $\mathcal{F}_i = 0$  (pas d'incidence pour états non infectés).
  4. si  $x \in X_s$ , alors  $\mathcal{F}_i(x) = 0$  et pour  $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$  (pas d'infection spontanée).
  5. si  $\mathcal{F} = 0$  le système est  $LAS$  en  $\dot{x}$ , i.e.  $D(\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-)(x^*)$  a des valeurs propres à parties réelles négatives.

La jacobienne s'écrit

$$J(x^*) = D\mathcal{F}(x^*) + D(\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-)(x^*).$$

**Lemme I.2.1.** [14] si  $x^*$  est un DFE de (I.2), alors les matrices

$$D\mathcal{F}(x^*) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D\mathcal{V}(x^*) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix},$$

où  $F$  et  $V$  sont les matrices  $m \times m$  définies par :

$$F = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x^*) \right] \text{ et } V = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x^*) \right], \text{ avec } 1 \leq i, j \leq m,$$

De plus,  $F \geq 0$  et  $V$  est une matrice de Metzler (terme extra-diagonaux  $\geq 0$ ) stable.

**Définition I.2.1** ([14]).

Le nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  est le rayon spectral de la matrice de seconde génération (en anglais : Next Generation Matrix) :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-\tilde{F}(\tilde{V}^{-1})).$$

**Définition I.2.2.**

Soit  $A$  une matrice carrée, on dit le spectre de  $A$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$  c'est à dire :

$$\text{Sp}(A) = \{ \lambda \}, \lambda \text{ est valeur propre de } A.$$

**Définition I.2.3** ([27]).

Le rayon spectrale de  $A$ , est donnée

$$\rho(A) = \max\{ |\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A) \}.$$

## I.3 Stabilité des équilibres

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (\text{I.3})$$

où  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $\mathbb{C}^1$ .

**Définition I.3.1** ([5]).

L'équilibre  $x^*$  de (I.3) est dit stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (I.3)  $\forall t \geq 0$ , on a :

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon.$$

**Définition I.3.2** ([5]).

L'équilibre  $x^*$  de (I.3) est dit instable, s'il existe  $\epsilon > 0$ , pour tout  $\eta > 0$ , tel qu'il existe une solution  $x(t)$  de (I.3)  $\forall t \geq 0$ , vérifiant :

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon.$$

**Définition I.3.3** ([5]).

Le point d'équilibre  $x^*$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe  $e > 0$  tel que : pour toute solution  $x(t)$  de (I.3) on a :

$$\|x(0) - x^*\| < e \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

**Définition I.3.4.**

L'équilibre  $x^*$  est dit globalement attractif

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

### I.3.1 Stabilité d'un système non linéaire

Soit le système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y). \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Où  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de classe  $\mathbb{C}^1$ ,  $(x^*, y^*)$  c'est un point d'équilibre de système (I.4). Pour étudier la nature des points d'équilibre, on utilise la méthode de linéarisation du système non linéaire,

**Définition I.3.5 (La méthode de linéarisation [28]).**

La matrice Jacobienne  $J_{(x,y)}$  est définie par :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

**Théorème I.3.1 ([29]).** On analyse la stabilité des points d'équilibres de la matrice jacobienne qui donne le déterminant et la trace tel que :

$$\det(J(x^*, y^*)) = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(J(x^*, y^*)) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de l'équation

$$\lambda^2 - \text{tr}(J(x^*, y^*))\lambda + \det(J(x^*, y^*)) = 0,$$

avec :

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr} + \sqrt{\text{tr}^2 - 4\det}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr} - \sqrt{\text{tr}^2 - 4\det}}{2}.$$

La nature des points d'équilibre peut être déduite du signe de  $\Delta$  donné par :

$$\Delta = \text{tr}(J(x^*, y^*))^2 - 4\det(J(x^*, y^*)),$$

donc il existe trois cas :

- 1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$ 
  - Si  $\det(J_{(x^*, y^*)}) < 0$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé, alors le point d'équilibre est un point selle (col).
  - Si  $\det(J_{(x^*, y^*)}) > 0$  et  $\text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  sont de signe positif, alors le point d'équilibre est un nœud instable.
  - Si  $\det(J_{(x^*, y^*)}) > 0$  et  $\text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) < 0$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  sont de signe négatif, alors le point d'équilibre est un nœud stable.
- 2<sup>eme</sup> cas :  $\Delta < 0$ 

on trouve deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

Donc

$$\det(J_{(x^*,y^*)}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(J_{(x^*,y^*)}) = 2\alpha.$$

- Si  $\text{tr}(J_{(x^*,y^*)}) = 0$ , alors le point d'équilibre est un centre.
- Si  $\text{tr}(J_{(x^*,y^*)}) > 0$  c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est positive, alors le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si  $\text{tr}(J_{(x^*,y^*)}) < 0$  c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est négative, alors le point d'équilibre est un foyer stable.
- 3<sup>eme</sup> cas :  $\Delta = 0$

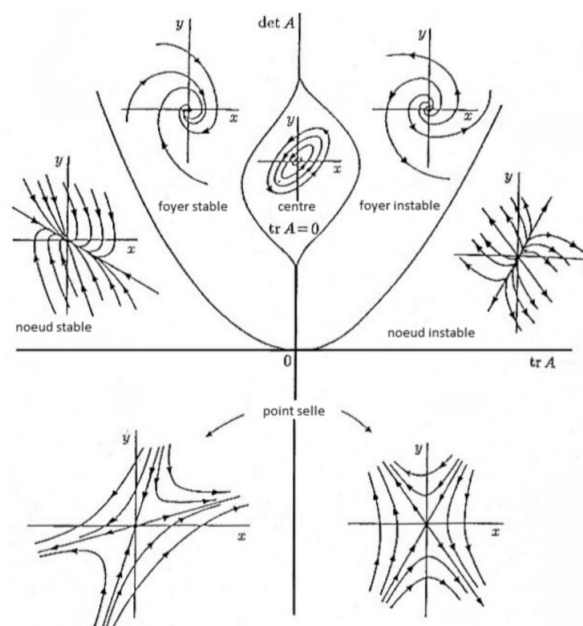
On trouve  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  alors

$$\det(J_{(x^*,y^*)}) = \lambda^2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(J_{(x^*,y^*)}) = 2\lambda.$$

Donc

- Si  $\text{tr} > 0$  c'est à dire  $\lambda > 0$ , alors on a un nœud dégénéré instable.
- Si  $\text{tr} < 0$  c'est à dire  $\lambda < 0$ , alors on a un nœud dégénéré stable.

On résumer l'équilibres d'une fonction de la trace et le déterminant de la matrice  $J(x^*, y^*)$  comme portrait de phase.



## I.4 Stabilité au sens de Lyapunov

**Définition I.4.1** ([22]).

Soit  $V : Z \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$

1.  $V$  est dite définie positive si :
  - i)  $V(0) = 0$ .
  - ii)  $V(x) > 0$  pour  $x \in Z \setminus \{0\}$
2.  $V$  est dite définie négative, si  $-V$  est définie positive.
3.  $V$  est dite semi définie positive si :
  - i)  $V(0) = 0$ .
  - ii)  $V(x) \geq 0$  pour  $x \in Z \setminus \{0\}$ .
4.  $V$  est dite semi définie négative si  $-V$  est définie positive.

**Définition I.4.2 (Fonction de Lyapunov[3]).**

Une fonction  $V : Z \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite fonction de Lyapunov pour (I.1) si :

- (i)  $V$  est définie positive,
- (ii)  $V'(x) < 0, \forall x \in Z \setminus \{0\}$ .

**Théorème I.4.1 (Stabilité de Lyapunov[26]).** Soit  $x^*$  un point d'équilibre de (I.1) et  $V$  de classe  $C^1$  défini positive d'un voisinage de  $x^*$

- Si  $V'(x) \leq 0, \forall x \in Z \setminus \{0\}$ , alors  $x^* = 0$  est stable.
- Si  $V'(x) < 0, \forall x \in Z \setminus \{0\}$ , alors  $x^* = 0$  est asymptotiquement stable.

## I.5 Principe d'invariance de LaSalle

**Théorème I.5.1** ([20] [21]). Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , supposons que  $\Omega$  est un ouvert positivement invariant pour le système (II.1) en  $x^*$ . Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  pour le système (II.1) telle que :

1.  $V' \leq 0$  sur  $\Omega$ .
2. Soient  $E = \{x \in \Omega | V'(x) = 0\}$  et  $L$  est le plus grand ensemble invariant par  $X$  et contenu dans  $E$ .

Alors, toute solution bornée commençant dans  $\Omega$  tend vers l'ensemble  $L$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Corollaire I.5.1** ([20][21]).

Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble  $L$  est réduit au point  $x^* \in \Omega$ , alors  $x^*$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (II.1) défini dans  $\Omega$ .

## I.6 Persistance uniforme

Soit  $F$  le flot associé au système (II.1) et soit  $d$  une métrique. On note par  $\partial\mathcal{F}$  la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\partial E$  où  $\partial E$  n'est pas nécessairement positivement invariant et soit  $N$  l'ensemble invariant maximal de  $\partial\mathcal{F}$  dans  $\partial E$ , de plus  $N$  est fermé et il existe un recouvrement  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $N$  où  $A$  est un ensemble d'index non vide et  $N_\alpha \subset \partial E$ ,  $N \subset \cup_{\alpha \in A} N_\alpha$  et  $N_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) sont des ensembles invariants fermés disjoints deux à deux. Nous proposons les hypothèses suivantes :

- i) Tous les  $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$  sont des ensembles invariants isolés du flot  $\mathcal{F}$ .
- ii) tout sous ensemble compact de  $E$  contient de nombreux recouvrements  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

### Définition I.6.1.

Soit  $d$  une distance métrique et  $\pi$  l'application semi flot. Le semi flot  $F$  associé au système (??) est dit :

- (i) faiblement persistant si pour tout  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0.$$

- (ii) persistant si pour tout  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0.$$

- (iii) faiblement uniformément persistant s'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \varepsilon_0.$$

- (iv) uniformément persistant s'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \varepsilon_0.$$

### Théorème I.6.1.

Soit  $E \subset X$  ensemble fermé positivement invariant, et soit  $\mathcal{F}$  le flot défini sur  $E$ . Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\mathcal{F}$  est un point dissipatif dans  $\mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \overset{\circ}{E}$ . Alors, le flot  $\mathcal{F}$  est **uniformément persistant** si et seulement si :

$$W^+(N_\alpha) \cap \mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \mathring{E} = \emptyset.$$

pour tout  $\alpha \in A$ , où  $W^+(N_\alpha) = \{y \in X, \Lambda^+(y) \subset N_\alpha\}$ .

### Définition I.6.2 (Point dissipatif).

Soit  $\Phi : J \times X \rightarrow X$  un semi-flot continu et  $\forall x \in X$ , est appelé un point **dissipatif** s'il existe un sous ensemble  $B$  de  $X$  qui attire tout les points dans  $X$ .

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) \subset B.$$

### Définition I.6.3 (Attracteur).

Soit  $(X, N, f)$  un système dynamique. Une partie  $A$  de  $X$  est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

- i)  $A$  est fermée.
- ii)  $A$  est positivement invariante.
- iii)  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que  $U$  est positivement invariant et :

$$\forall u \in U, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

## I.7 Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes à retard

Soit le système retard suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in c \end{cases}$$

Où  $x$  est une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction continue ou de  $g \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne l'ensemble des fonctions continues  $[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $c_b$  l'ensemble des fonction de  $c$ , tel que pour tout  $\varphi \in c_b$ ,  $\|\varphi\|_c \leq b$ . ou  $b$  est un réel positif.

### Définition I.7.1 ([11]).

L'origine de système (I.1) est dite :

- Stable : si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\gamma(t_0, \epsilon) > 0$  tel que :

$$\|\varphi_0\| < \gamma \Rightarrow \|x(t; t_0; \varphi_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{I.5})$$



- uniformément stable : si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\gamma(\epsilon) > 0$ , indépendant de  $t_0$ , tel que la condition (I.5) soit satisfaite.

**Définition I.7.2** ([11]).

L'origine de système (I.1) est dite :

- asymptotiquement stable : si elle est stable et s'il existe  $b_0 > 0$  tel que :

$$\|\varphi_0\|_c < b_0 \Rightarrow_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0; \varphi_0) = 0.$$

- uniformément asymptotiquement stable : si elle est uniformément stable et s'il existe  $b_0 > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe un  $T(\eta)$  de telle sorte que :

$$\|\varphi_0\|_c < b_0 \Rightarrow \|x(t; t_0; \varphi_0)\| < \eta, \quad \forall t \geq T(\eta).$$

- globalement uniformément asymptotiquement stable :

si la condition précédente est vraie quelle que soit  $\varphi_0 \in c$ .

# Modèle SIR classique et modèle SIR avec retard

Le *SIR* est un modèle épidémiologique mathématique simple proposé par les chercheurs *Kermack* et *Mc Kendrick* en 1927, ces chercheurs l'ont adopté pour démontrer l'existence des limites d'une pandémie (une maladie infectieuse) dans une population quelconque. Chaque population comporte trois types d'individus qui sont les susceptibles, infectieuses et rétablis.

## II.1 Modèle mathématique *SIR*

Le modèle *SIR* est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec les paramètres  $\mu$ ,  $\beta$  et  $\alpha$  sont des constantes positives.

### II.1.1 Interprétation du modèle

Dans ce modèle, la population est divisée en trois compartiments : la densité des susceptibles, la densité des infectés et la densité des réfractaires, on interprète les paramètres du modèle comme suit :

- $S$  : représente le nombre d'individus susceptibles .
- $I$  : représente le nombre d'individus infectés .
- $R$  : représente le nombre d'individus rétablis ou retirés de la liste des malades.
- $\mu_S$  : le taux de mortalité de la population susceptible .
- $\mu_I$  : le taux de mortalité de la population infectée.
- $\mu_R$  : le taux de mortalité de la population rétablie.

On suppose que la taille de la population  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ , on constate que la natalité est égale la mortalité  $b = \mu N$ , avec les paramètres on suppose  $-\mu_S, -\mu_I, -\mu_R$ , sont des morts respectivement de chaque type *SIR*,  $b = \mu N$  avec les paramètres  $\alpha$  le taux de guérison et  $\beta$  le taux de transmission de la maladie.

Nous avons l'équation suivante :

$$b = \mu N. \quad (\text{II.2})$$

On remplace l'équation (II.2) dans le système (II.1) :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R. \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où la taille de population s'écrit sous la forme suivante

$$N = S + I + R. \quad (\text{II.4})$$

On remarque que la première et la deuxième équation du système (II.3) sont distinctes de la troisième équation du système (II.3), on obtient alors le système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \alpha)I. \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Le domaine de ce système est donné par :

$$\Omega = \{(S, I), S \geq 0, I \geq 0; I + S \leq N\}.$$

## II.1.2 Le taux de reproduction de base

Calcul de  $\mathcal{R}_0$  :

On utilise la méthode de *Van Den Driessche* et *Watmough* [31] qui est défini par :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}).$$

Où

$F$  : le taux d'apparition des nouvelles maladies dans chaque type.

$V$  : le taux de transfère des individus qui entrent et qui sortent dans chaque type  
les nouvelles infectés apparaissent dans le compartiment  $I$ .

$$F = \beta SI \quad \text{et} \quad -V = (\mu + \alpha)I.$$

$\tilde{F}$  et  $\tilde{V}$  les dérivés de  $F$  et  $V$  respectivement par rapport a  $I$ ,

$$\tilde{F}(I) = \beta S \quad , \quad -\tilde{V}(I) = \mu + \alpha \quad \text{et} \quad (-\tilde{V})^{-1} = \frac{1}{\mu + \alpha}.$$

On obtient

$$(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}) = \frac{\beta S}{\mu + \alpha}.$$

D'ou

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta S}{\mu + \alpha}.$$

On remplaçant le point  $E_1 = (\frac{b}{\mu}, 0)$  dans  $\mathcal{R}_0$ , on trouve

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \frac{b}{\mu}}{\mu + \alpha}.$$

Pour  $b = \mu N$ , et  $N = \frac{b}{\mu}$ ,  
par conséquent

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\mu + \alpha}.$$

### II.1.3 Calcul des points d'équilibre

On cherche les points d'équilibre du système (II.5)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0, \\ \frac{dI}{dt} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu N - \mu S - \beta SI = 0, \\ \beta SI - (\mu + \alpha)I = 0. \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

D'après la deuxième équation du système II.6 on a :

$$\beta SI - (\mu + \alpha)I = 0 \quad \text{alors} \quad I(\beta S - (\mu + \alpha)) = 0.$$

Pour  $I = 0$  on a  $\beta S = \mu + \alpha$  donc  $S = \frac{\mu + \alpha}{\beta}$ .

– Première cas

pour  $I = 0$  donc la population sans maladie, on remplace  $I = 0$  dans la première équation du système II.6 on trouve  $S = N$  et  $N = \frac{b}{\mu}$  donc  $S = \frac{b}{\mu}$ , l'équilibre sans maladie est

$$E_1 = \left(\frac{b}{\mu}, 0\right).$$

– Deuxième cas

Si  $I \neq 0$ ,  $(\beta S - (\alpha + \mu)) = 0$  alors il existe des infinis, alors on a  $S = \frac{\alpha + \mu}{\beta}$ , en remplaçant  $S$  dans la première équation du système II.6, on obtient

$$\mu N - \mu\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}\right) - \beta I\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}\right) = 0,$$

$$\mu N - \mu\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}\right) = I(\alpha + \mu).$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mu N - \mu\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}\right)}{(\alpha + \mu)}, \\ &= \frac{\mu N}{\alpha + \mu} - \frac{\mu}{\beta}. \end{aligned}$$

Avec  $\mu N = b$  et  $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\mu + \alpha}$ .

Donc

$$E^* = (S^*, I^*) = \left( \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \right).$$

$E_1$  est toujours existe, et le point endémique  $E^*$  existe si  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

Si nous désignons l'état de l'équilibre endémique par  $(S^*, I^*)$  nous avons le résultat suivant :

$$\frac{S^*}{N} = \frac{N}{\mathcal{R}_0} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

Avec

$$\begin{aligned} \frac{I^*}{N} &= \frac{\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1)}{N}, \\ &= \frac{\mu}{N\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), \\ &= \frac{\mu}{N\beta} \left( \frac{\beta N}{\mu + \alpha} - 1 \right), \\ &= \frac{\mu}{\mu + \alpha} \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right). \end{aligned}$$

Nous avons

$$E^* = (S^*, I^*) = \left( \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu}{\mu + \alpha} \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right) > 0.$$

Alors

$$1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{\mu + \alpha}{\beta N} > 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\mu + \alpha}{\beta N} < 1 &\Rightarrow \frac{1}{\mathcal{R}_0} < 1, \\ &\Rightarrow \mathcal{R}_0 > 1. \end{aligned}$$

Alors le point  $E^*$  existe si  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

## II.2 Étude de stabilité de l'équilibre endémique

### II.2.1 Stabilité locale de l'équilibre endémique

**Théorème II.2.1.** Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors l'équilibre endémique  $E^*$  est *localement asymptotiquement stable*.

*Preuve.* La matrice jacobienne est donné par :

$$\begin{aligned}
 J(S, I) &= \begin{pmatrix} -\mu - \beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \mu - \alpha \end{pmatrix}. \\
 J(S^*, I^*) &= \begin{pmatrix} -\mu - \beta I^* & -\beta S^* \\ \beta I^* & \beta S^* - \mu - \alpha \end{pmatrix}. \\
 &= \begin{pmatrix} -\mu - \beta \left(\frac{\mu}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1)\right) & -\beta \frac{N}{\mathcal{R}_0} \\ \beta \left(\frac{\mu}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1)\right) & \beta \left(\frac{N}{\mathcal{R}_0}\right) - \mu - \alpha \end{pmatrix}. \\
 &= \begin{pmatrix} -\mu - \mu (\mathcal{R}_0 - 1) & -(\mu + \alpha) \\ \mu (\mathcal{R}_0 - 1) & 0 \end{pmatrix}. \\
 &= \begin{pmatrix} -\mu \mathcal{R}_0 & -(\mu + \alpha) \\ \mu (\mathcal{R}_0 - 1) & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\det(S^*, I^*) = \mu (\mathcal{R}_0 - 1) (\mu + \alpha).$$

$$\bullet \text{ Si } \mathcal{R}_0 > 1 \Rightarrow \begin{cases} \det(S^*, I^*) > 0, \\ \text{tr}(S^*, I^*) = -\mu \mathcal{R}_0 < 0. \end{cases}$$

Le point  $E^*$  est stable.

□

## II.2.2 Attractivité d'équilibre endémique

**Théorème II.2.2.** Si  $\mathcal{R}_0 < 1$  le point d'équilibre endémique  $E^*$  est *globalement asymptotiquement stable*.

*Preuve.* Pour démontrer la stabilité globale d'équilibre endémique on utilise la fonction Lyapunov suivante :

$$V(S, I) = S^* \left[ \frac{S}{S^*} - 1 - \log \frac{S}{S^*} \right] + I^* \left[ \frac{I}{I^*} - 1 - \log \frac{I}{I^*} \right],$$

avec

$$S^* = \frac{\mu + \alpha}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}; \quad I^* = \frac{\mu}{\mu + \alpha} \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right).$$

et

$$I^* \geq 0; \quad S^* \geq 0.$$

Donc

$$V(S, I) = (S - S^*) - \log\left(\frac{S}{S^*}\right)S^* + (I - I^*) - \log\left(\frac{I}{I^*}\right)I^*.$$

Par conséquent

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I} \frac{dI}{dt}.$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S} = 1 - S^* \left( \frac{1}{S} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial I} = 1 - I^* \left( \frac{1}{I} \right). \end{cases}$$



On remplace  $\frac{\partial V}{\partial S}$  et  $\frac{\partial V}{\partial I}$  dans l'équation  $\frac{dV}{dt}$  on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \left(1 - S^*\left(\frac{1}{S}\right)\right) (\mu - \mu S - \beta SI) + \left(1 - I^*\left(\frac{1}{I}\right)\right) (\beta SI - (\mu + \alpha)I), \\
&= \mu - \mu S - \beta SI - \mu \frac{S^*}{S} + \mu S^* + S^* \beta I + \beta SI - \beta SI^* - (\mu + \alpha)I + (\mu + \alpha)I^*. \\
&= \mu - \mu S - \frac{\mu}{S\mathcal{R}_0} + \frac{\mu}{\mathcal{R}_0} + \beta I \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}\right) - \beta S \left(\frac{\mu}{\mu + \alpha} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)\right) - I(\mu + \alpha) \\
&\quad + (\mu + \alpha) \left(\frac{\mu}{\mu + \alpha} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)\right). \\
&= \mu - \mu S - \frac{\mu}{S\mathcal{R}_0} + \frac{\mu}{\mathcal{R}_0} - \frac{\beta S \mu}{\mu + \alpha} + \frac{\beta S \mu}{\mathcal{R}_0(\mu + \alpha)} + \mu - \frac{\mu}{\mathcal{R}_0}. \\
&= \mu - \mu S - \frac{\mu}{S\mathcal{R}_0} - \frac{\beta S \mu}{\mu + \alpha} + S\mu + \mu. \\
&= 2\mu - \frac{\mu}{S\mathcal{R}_0} - \frac{\beta S \mu}{\mu + \alpha}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-\mu\mathcal{R}_0}{S} (S - S^*)^2 < 0.$$

Donc l'équilibre est globalement asymptotiquement stable.  $\square$

## II.3 Modèle SIR avec retard

La population est divisée en trois classes susceptibles, infectés et rétablis avec des densités  $S$ ,  $I$ ,  $R$  respectivement.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = B - \mu_1 S - \frac{\beta SI_\tau}{1 + \alpha I_\tau}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI_\tau}{1 + \alpha I_\tau} - (\mu_2 + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

avec les conditions :

$$S(0) \in \mathbb{R} \geq 0, \quad I(\theta) = \phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0].$$

Où l'espace de la fonction continue  $[-\tau, 0]$  de  $\mathbb{R} \geq 0$  et les paramètres  $B, \beta, \alpha, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  sont positives et interprètes comme suivant :  $B$  le recrutement de nouveaux individus se fait de la classe susceptible, à un taux constant et  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  sont des taux de mortalité des trois classes susceptibles, infectieuses et rétablis respectivement,  $\tau$  le temps où l'infecté devient contagieux,  $\beta$  le taux de transmission de la maladie,  $\alpha$  détermine le niveau auquel la force de l'infection sature,  $\gamma$  le taux de guérison.

$$S = S(t), I = I(t), I_\tau = I(t - \tau).$$

### II.3.1 Le taux de reproduction de base

Pour calculer  $\mathcal{R}_0$  en utilise la méthode de *Van Den Driessche* et *Watmough* [31] qui est définit par :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}).$$

on a

$$\mathcal{R}_0 = \rho(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}).$$

$$F = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} \quad \text{et} \quad -V = (\mu_2 + \gamma)I.$$

$\tilde{F}$  et  $\tilde{V}$  les dérivés de  $F$  et  $V$  respectivement par rapport a  $I$ ,

$$\tilde{F}(I) = \frac{\beta S(1 + \alpha I) - \alpha(\beta SI)}{1 + \alpha I} = \frac{\beta S}{1 + \alpha I}.$$

En remplaçant le point  $E_1 = (\frac{B}{\mu_1}, 0)$  dans  $\tilde{F}(I)$  on trouve  $\frac{\beta \frac{B}{\mu_1}}{1} = \frac{B\beta}{\mu_1}$ .

Alors on a

$$\tilde{F}(I) = \frac{B\beta}{\mu_1}, \quad -\tilde{V}(I) = \mu_2 + \gamma \quad \text{et} \quad -\tilde{V}(I)^{-1} = \frac{1}{\mu_2 + \gamma}.$$

On obtient

$$(\tilde{F}(-\tilde{V})^{-1}) = \beta \frac{B}{\mu_1} \cdot \left( \frac{1}{\mu_2 + \gamma} \right).$$

D'ou

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta B}{\mu_1(\mu_2 + \gamma)}.$$

### II.3.2 Les points d'équilibre

Pour  $I_\tau = I$  on a le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = B - \mu_1 S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu_2 + \gamma)I. \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0, \\ \frac{dI}{dt} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - \mu_1 S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} = 0, \\ \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu_2 + \gamma)I = 0. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

D'après la première équation du système [II.9](#) on a

$$B = \mu_1 S + \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} = S \left( \mu_1 + \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right).$$

Par suite

$$S = \frac{B(1 + \alpha)}{\mu_1(1 + \alpha I) + \beta I}.$$

On remplace  $S$  dans l'équation  $\frac{dI}{dt}$  on a trouvé

$$\frac{\beta I \left( \frac{B(1 + \alpha)}{\mu_1(1 + \alpha I) + \beta I} \right)}{1 + \alpha I} - (\mu_2 + \gamma)I = 0.$$

$$\frac{\beta I(B(1 + \alpha))}{(\mu_1(1 + \alpha I) + \beta I)(1 + \alpha I)} - (\mu_2 + \gamma)I = 0.$$

Par suite

$$\frac{\beta IB}{(\mu_1(1 + \alpha I) + \beta I)} = (\mu_2 + \gamma)I \Rightarrow \beta IB = (\mu_1(1 + \alpha I) + \beta I)(\mu_2 + \gamma)I,$$

$$\Rightarrow \mu_1\mu_2 I + \mu_1\gamma I + \alpha I^2\mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1\gamma I^2 + \beta\mu_2 I^2 + \beta\gamma I^2 - \beta I B = 0,$$

$$\Rightarrow I(\mu_1\mu_2 + \mu_1\gamma + \alpha I\mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1\gamma I + \beta\mu_2 I + \beta\gamma I - \beta B) = 0.$$

On a

$$I = 0 \quad \text{ou} \quad I^* = \frac{\beta B - \mu_1\mu_2 - \mu_1\gamma}{\alpha\mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1\gamma + \beta\mu_2 + \beta\gamma}.$$

- Pour  $I = 0$  on a  $S = \frac{B}{\mu_1}$  alors

$$E_1 = \left(\frac{B}{\mu_1}, 0\right).$$

- Pour  $I^*$  on a  $S^* = \frac{B\alpha + \mu_2 + \gamma}{\beta + \alpha\mu_1}$  alors

$$E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{B\alpha + \mu_2 + \gamma}{\beta + \alpha\mu_1}, \frac{B\beta - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{(\mu_2 + \gamma)(\beta + \alpha\mu_1)}\right).$$

- Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  alors  $E_1$  est le seul équilibre.
- Si  $\mathcal{R}_0 > 1$  alors aussi il y a un équilibre endémique unique.

La théorie standard [11] peut être utilisée pour montrer que les solutions (II.7) existent et sont dérivables pour tout  $t > 0$ .

**Théorème II.3.1** ([24]). chaque solution  $(S(t), I(t))$  du système (II.7) satisfait

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) + I(t) \leq \frac{B}{\mu_1}.$$

**Preuve.**  $\frac{d}{dt}(S + I) = B - \mu_1 S - (\mu_2 + \gamma)I \leq B - \mu_1(S + I)$  avec condition :  $\mu_2 + \gamma \geq \mu_1$   
alors on a :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S(t) + I(t)) \leq \frac{B}{\mu_1}.$$

□

**Théorème II.3.2** ([24]). si  $\mathcal{R}_0 < 1$  alors  $E_1$  est *globalement asymptotiquement stable*, quelle que soit la valeur de  $\mathcal{R}_0$ , toutes solutions avec une conditions initiale vérifiant  $I(t) = 0$  pour tout  $t \in [-\tau, 0]$  donne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t)) = E_1.$$

**Théorème II.3.3** ([24]). Supposons  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors  $E_1$  est instable et  $E^*$  est localement asymptotiquement stable. De plus le système est uniformément persistant, c'est à dire qu'il existe  $v > 0$  telle que  $\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq v$  et  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq v$ . pour les conditions initiales suivantes  $I(t) > 0$  pour un condition  $t \in [-\tau, 0]$ .

## II.4 Stabilité globale pour $\mathcal{R}_0 > 1$

**Théorème II.4.1.** Si  $\mathcal{R}_0 > 1$  le point d'équilibre endémique  $E^*$  est *globalement asymptotiquement stable*.

*Preuve.* Commençons par définir la fonction

$$f(x) = \frac{x}{1 + \alpha x}.$$

Afin de simplifier de nombreuses expressions qui suivent, on calcule les deux cotés de (II.7) en  $E^*$ , qui donne

$$B = \mu_1 S^* + \beta S^* f(I^*), \quad (\text{II.10})$$

et

$$(\mu_2 + \gamma)I^* = \beta S^* f(I^*). \quad (\text{II.11})$$

Qui serviront de substitutions dans les calculs ci dessus, soit

$$g(x) = x - 1 - \ln x.$$

et

$$V_S(t) = g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right), \quad V_I(t) = g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right), \quad V_+(t) = \int_0^\tau g\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) ds. \quad (\text{II.12})$$

On étudie le comportement de la fonctionnelle de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{\beta f(I^*)} V_S + \frac{I^*}{\beta S^* f(I^*)} V_I + V_+. \quad (\text{II.13})$$

On note que  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  a le strict minimum global  $g(1) = 0$  ainsi  $V(t) \geq 0$  avec égalité si et seulement si

$$\frac{S(t)}{S^*} = \frac{I(t)}{I^*} = 1.$$

et

$$\frac{I(t - S)}{I^*} = 1.$$

Pour tout  $S \in [0, \tau]$ .

Par théorème (II.3.1) et théorème (II.3.3), les solutions sont majorées au dessus et éloignées de zéro pendant un temps important on peut supposer que la solution satisfait ses bornes pour tout  $t \geq 0$  ainsi  $V(t)$  définit pour tout  $t \geq 0$  les dérivées de  $V_S, V_I$  et  $V_+$  seront calculés pour obtenir  $\frac{dV}{dt}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dV_S}{dt} &= \frac{1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \frac{dS}{dt}, \\ &= \frac{1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (B - \mu_1 S - \beta S f(I_\tau)). \end{aligned}$$

On utilise (II.10) pour remplacer  $B$  et donner

$$\begin{aligned} \frac{dV_S}{dt} &= \frac{1}{S^*} \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (\mu_1(S^* - S) + \beta(S^* f(I^*) - S f(I_\tau))), \\ &= -\mu_1 \left(\frac{(S - S^*)^2}{SS^*}\right) + \beta f(I^*) \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(1 - \frac{S f(I_\tau)}{S^* f(I^*)}\right). \end{aligned}$$

On a,

$$X = \frac{S}{S^*}, \quad Y = \frac{I}{I^*} \quad \text{et} \quad Z = \frac{I_\tau}{I^*},$$

en plus,

$$F(Z) = \frac{f(I^* Z)}{f(I^*)} = \frac{f(I_\tau)}{f(I^*)}.$$

Alors on peut écrire

$$\frac{dV_S}{dt} = -\mu_1 \frac{(S - S^*)^2}{SS^*} + \beta f(I^*) \left(1 - \frac{1}{X} - XF(Z) + F(Z)\right). \quad (\text{II.14})$$

En suite en calculant  $\frac{dV_I}{dt}$  :

$$\begin{aligned}\frac{dV_I}{dt} &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \frac{dI}{dt}, \\ &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (\beta S f(I_\tau) - (\mu_2 + \gamma)I), \\ &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\beta S^* f(I^*) \frac{S}{S^*} \frac{f(I_\tau)}{f(I^*)} - (\mu_2 + \gamma)I^* \frac{I}{I^*}\right).\end{aligned}$$

On utilise (II.11) pour remplacer  $(\mu_2 + \gamma)I^*$  qui donner :

$$\begin{aligned}\frac{dV_I}{dt} &= \frac{1}{I^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \beta S^* f(I^*) \left(\frac{S f(I_\tau)}{S^* f(I^*)} - \frac{I}{I^*}\right), \\ &= \frac{1}{I^*} \beta S^* f(I^*) \left(XF(Z) - Y - \frac{XF(Z)}{Y} + 1\right).\end{aligned}\tag{II.15}$$

Maintenant calculons la dériver de  $V_+(t)$  :

$$\begin{aligned}\frac{dV_+}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^\tau g\left(\frac{I(t-S)}{I^*}\right) ds, \\ &= \int_0^\tau \frac{d}{dt} g\left(\frac{I(t-S)}{I^*}\right) ds, \\ &= \int_0^\tau -\frac{d}{ds} g\left(\frac{I(t-S)}{I^*}\right) ds, \\ &= g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) - g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right), \\ &= g(Y) - g(Z), \\ &= Y - Z + \ln(Z) - \ln(Y).\end{aligned}\tag{II.16}$$

En combinant les équations (II.14) et (II.16) en multipliant par les coefficients déterminés par (II.13), nous obtenons :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-\mu_1}{\beta f(I^*)} \frac{(S - S^*)^2}{SS^*} + 2 - \frac{1}{X} + F(Z) - \frac{XF(Z)}{Y} - Z + \ln(Z) - \ln(Y).$$

En ajoutant et en soustrayant la quantité  $\ln(XF(Z))$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{-\mu_1}{\beta f(I^*)} \frac{(S - S^*)^2}{SS^*} + \left(1 - \frac{1}{X} - \ln X\right) + \left(1 - \frac{XF(Z)}{Y} + \ln\left(\frac{XF(Z)}{Y}\right)\right) + F(Z) - Z + \ln Z - \ln F(Z) \\ &= \frac{-\mu_1}{\beta f(I^*)} \frac{(S - S^*)^2}{SS^*} - g\left(\frac{1}{X}\right) - g\left(\frac{XF(Z)}{Y}\right) + F(Z) - Z + \ln Z - \ln F(Z) \leq 0. \end{aligned}$$

□

D'après le [11], les solutions limitent à  $M$ , le plus grande sous-ensemble invariant, de  $\frac{dV}{dt} = 0$  on note que  $\frac{dV}{dt}$  n'est nul que si  $X = Y = Z = 1$ , on particulier cela exige que pour toute solution dans  $M$  nous ayons  $S(t) = S^*$  et  $I(t) = I^*$  pour tout  $t$ , donc  $M$  est constituée du seul point  $E^*$ .

Toutes les solutions se convergent à l'équilibre endémique, d'après la théorème (II.3.3)  $E^*$  est localement asymptotiquement stable ce que nous permet de conclure que  $E^*$  est globalement asymptotiquement stable.



# Modèle épidémiologie $SIR$ avec retard distribuée d'incidence d'une fonction non linéaire

## III.1 Introduction :

La prévalence de la maladie dans une population est souvent décrite par un modèle  $SIR$  ou la population est subdivisé en trois classe susceptibles infectées et guéris, les formes les plus simples de ces modelés sont équation différentielles ordinaire (*edo*) [13] [14], dans [4] un modèle à retard discret est pour tenir compte de la transmission est utilisé d'une période de latence dans le vecteur et autoriser latence des vecteurs période à varier selon une certaine distribution donnant un modèle avec une distribution retard [30], le retard apparaît dans le terme d'incidence qui est typiquement la seule non-linéarité, le but de cet chapitre est de présenter une analyse similaire pour les équations avec un nombre borné, ce retard distribué est une fonction d'incidence générale non linéaire.

## III.2 Modèle mathématique

On considère le modèle  $SIR$  avec retard d'incidence non linéaire d'une population divisée en trois classe susceptible, infectieuse et rétablis.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu_S S - \beta \int_0^h k(\tau) f(S, I_\tau) d\tau, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \int_0^h k(\tau) f(S, I_\tau) d\tau - (\mu_I + \gamma) I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_R R. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec les conditions initiales :

$$S(0) \in \mathbb{R} \geq 0 \text{ et } I(\theta) = \phi(\theta) \text{ si } \theta \in [-h, 0] \text{ avec } \phi \in \mathbb{C} = \mathbb{C}([-h, 0], \mathbb{R} \geq 0)$$

avec les paramètres  $\Lambda, \beta, \gamma, \tau, k$  qui interprètent comme suite :

$\Lambda$  le recrutement de nouveaux individus se fait de la classe susceptible, à un taux constant,  $\mu_S$   $\mu_I$   $\mu_R$  sont des mortalités des classes respectivement,  $\tau$  le temps ou l'infectée devient contagieux,  $k$  relativité des vecteurs de l'infectiosité différentes d'âge,  $\beta$  taux de transmission de la maladie,  $\gamma$  taux de guérison.

$$S = S(t), I = I(t), I_\tau = I(t - \tau), \mu_I + \gamma \geq \mu_S.$$

L'espace des fonctions continue de  $[-h, 0]$  a  $\mathbb{R} \geq 0$  muni de la norme

$$\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \phi(\theta).$$

Avec

$$\int_0^h k(\tau) d\tau = 1,$$

La théorie standard des équations fonctionnelles différentielles [11] peut être utilisé pour montrer que les solutions de ((III.1)) existent et sont différentiables pour tout  $t > 0$ .

On a : pour  $\mathbb{R} \geq 0 \times C$  est positivement invariant

$$\frac{d}{dt}(I + S) = \Lambda - \mu_S S - (\mu_I + \gamma)I \leq \Lambda - \mu_S(S + I)$$

et ainsi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S + I) \leq \frac{\Lambda}{\mu_S}.$$

( $H_1$ )  $f$  est une fonction différentiable non négative sur le quadrant non négatif. De plus  $f$  est positif si et seulement si les deux arguments sont positifs.

Les dérivés partielles de  $f$  sont notées

$$f_1 = \frac{\partial f(S, I)}{\partial S} \text{ et } f_2 = \frac{\partial f(S, I)}{\partial I}.$$

### III.3 L'équilibre et le taux de reproduction de base

Pour toutes les valeurs des paramètres, l'équilibre sans maladie est donné par :

$$E_0 = (S_0, 0) \text{ ou } S_0 = \frac{\Lambda}{\mu_S}.$$

et le taux de reproduction de base [7] de ce modèle est donné par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu_I + \gamma} f_2(E_0). \quad (\text{III.2})$$

La présence et le nombre d'équilibre endémique dépendant de la forme de non-linéarité  $f$ , ainsi que des valeurs des paramètres en cherchant des équilibres, nous notons que les équilibres de l'équation (III.1) sont les mêmes que les équilibres de système équation différentielle ordinaire correspondant les conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre endémique sont donné dans [9] [17] [18] ici nous donnons le résultat suivant :

**Théorème III.3.1.** Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors il existe un équilibre endémique.

*Preuve.* On cherche les solutions  $(S^*, I^*)$  des équations

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0, \\ \frac{dI}{dt} = 0. \end{cases}$$

□

On remarque d'abord que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \Lambda - \mu_S S^* + (\mu_I + \gamma) I^* = 0.$$

Donc

$$S^* = \frac{\Lambda - (\mu_I + \gamma) I^*}{\mu_S}.$$

Soit

$$H(I^*) = \beta f\left(\frac{\Lambda - (\mu_I + \gamma) I^*}{\mu_S}, I^*\right) - (\mu_I + \gamma) I^*.$$

Alors  $\frac{dI}{dt} = 0$  chaque fois que  $H(I^*) = 0$ , ainsi tout zéro de  $H$  dans l'intervalle  $(0, \frac{\Lambda}{\mu_I + \gamma})$  correspond a un équilibre avec  $S^*, I^* > 0$  c'est à dire un équilibre endémique, puisque  $f(0, I) = f(S, 0) = 0$  ensuit que  $H(0) = 0$  et  $H(\frac{\Lambda}{\mu_I + \gamma}) < 0$ , la fonction  $H$  est continue et donc une

condition suffisantes pour que  $H$  ait un zéro en  $(0, \frac{\Lambda}{\mu_I + \gamma})$  c'est que  $H$  augmente en 0, ainsi il y a un équilibre endémique si :

$$0 < \frac{dH}{dI}(\theta) = -\frac{\mu_I + \gamma}{\mu_s} \beta f_1(E_0) + \beta f_2(E_0) - (\mu_I + \gamma). \quad (\text{III.3})$$

Puisque  $f(S, 0) = 0$  pour tout  $S$ , il s'ensuit que  $f_1(E_0) = 0$  et donc (III.3) équivalent à  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

### III.4 Stabilité locale des points d'équilibre

**Théorème III.4.1.** Si  $\mathcal{R}_0 < 1$  alors  $E_0$  est localement asymptotiquement stable.

*Preuve.* Nous commençons par linéariser l'équation (III.1) en  $E_0$

On note que  $f(S, 0) = 0$  pour tout  $S$  et donc  $f_1(E_0) = 0$ , la linéarisation est :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\mu_s S(t) - \beta \int_0^h k(\tau) f_2(E_0) i(t - \tau) d\tau, \\ \frac{di}{dt} = \beta \int_0^h k(\tau) f_2(E_0) i(t - \tau) d\tau - (\mu_I + \gamma) i(t). \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

La substitution de  $(S(t), i(t)) = e^{\lambda t} (S_0, i_0)$  dans (III.4) donne :

$$\begin{cases} S_0 \lambda e^{\lambda t} = -\mu_s S_0 e^{\lambda t} - \beta \int_0^h k(\tau) f_2(E_0) i_0 e^{\lambda(t-\tau)} d\tau, \\ i_0 \lambda e^{\lambda t} = \beta \int_0^h k(\tau) f_2(E_0) i_0 e^{\lambda(t-\tau)} d\tau - (\mu_I + \gamma) i_0 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

L'annulation de  $e^{\lambda t}$  de chaque terme est le réarrangement dans l'équation linéaire homogène

$$A_0 \begin{pmatrix} S_0 \\ i_0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu_s) & -\beta f_2(E_0) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ 0 & \beta f_2(E_0) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau - (\lambda + \mu_I + \gamma) \end{pmatrix}.$$

Il existe des solutions non nulles si et seulement si  $\det(A_0)$  est nulle, ainsi l'équation caractéristique est :

$$(\lambda + \mu_s)(\lambda + \mu_I + \gamma - \beta f_2(E_0) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau) = 0. \quad (\text{III.5})$$

On montre que toutes les solutions  $\lambda$  ont une partie réelle négative.

Supposons que ait une partie réelle non négative alors  $\lambda + \mu_S \neq 0$ , aussi

$$\begin{aligned} |\beta f_2(E_0) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau| &\leq \beta f_2(E_0) \int_0^h k(\tau) |e^{-\lambda\tau}| d\tau, \\ &\leq \beta f_2(E_0), \\ &= \mathcal{R}_0(\mu_I + \gamma), \\ &< (\mu_I + \gamma), \\ &\leq |\lambda + \mu_I + \gamma|. \end{aligned}$$

Donc  $\lambda$  ne peut pas être une solution de (III.5), par conséquent, toutes les racines caractéristiques ont une partie réelle négative et donc  $E_0$  est localement asymptotiquement stable [19], (chapitre 2) nous donnons maintenant des conditions sur  $f$  qui sont utilisées ici pour montrer qu'un équilibre endémique est localement asymptotiquement stable, et pour montrer qu'il est globalement asymptotiquement stable, comme pré-condition nous supposons que  $\mathcal{R}_0 > 1$  garantissant l'existence d'un équilibre endémique  $E^* = (S^*, I^*)$  voir théorème (III.3.1)

$$(H_2) \quad |f(S, I^*) - f(S^*, I^*)| = |S - S^*| \quad \text{pour tout } S > 0.$$

$$(H_3) \quad \text{pour tout } S, I > 0, \frac{f(S, I)}{f(S, I^*)} \text{ est dans l'intervalle fermé avec extrémités à } 1 \text{ et } \frac{I}{I^*}.$$

(H<sub>4</sub>) soit  $f_1(S^*, I^*) > 0$  ou  $f_2(S^*, I^*) < \frac{f(S^*, I^*)}{I^*}$ , afin d'apprécier que l'hypothèse (H<sub>4</sub>) n'est pas très restrictive, on considère (H<sub>2</sub>) au voisinage  $S = S^*$ , on déduisant

$$f_1(S^*, I^*) \geq 0. \tag{III.6}$$

De même, considérant (H<sub>3</sub>) en  $S = S^*$  et au voisinage de  $I = I^*$ , on déduit

$$\frac{f(S^*, I^*)}{I^*} \geq f_2(S^*, I^*) \geq 0. \tag{III.7}$$

Nous pouvons maintenant voir que (H<sub>4</sub>) exige simplement qu'au moins l'un de (H<sub>2</sub>) et (H<sub>3</sub>) conduise à une inégalité stricte, par contre si (H<sub>4</sub>) n'est pas satisfait, alors l'équilibre endémique est toujours globalement attractif mais n'est pas localement asymptotiquement stable car l'équation caractéristique de la linéarisation en  $E^*$  aura  $\lambda = 0$  comme racine  $\square$

**Théorème III.4.2.** Si  $\mathcal{R}_0 > 1$  et  $(H_2)$ ,  $(H_3)$  et  $(H_4)$  sont vérifiées, alors tout équilibre endémique existent et localement asymptotiquement stable

*Preuve.* La linéarisation de l'équation (III.1) à un équilibre endémique  $E^* = (S^*, I^*)$  est :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\mu_S S(t) - \beta \int_0^h k(\tau)[f_1(E^*)S(t) + f_2(E^*)i(t-\tau)]d\tau, \\ \frac{di}{dt} = \beta \int_0^h k(\tau)[f_1(E^*)S(t) + f_2(E^*)i(t-\tau)]d\tau - (\mu_I + \gamma)i(t). \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Nous démontrons que tout les zéros de l'équation caractéristique ont une partie réelle négative. Afin de trouver l'équation, nous substituons  $(S(t), i(t)) = e^{\lambda t}(S_0, i_0)$  dans (III.8) pour obtenir

$$\begin{cases} S_0 \lambda e^{\lambda t} = -\mu_S S_0 e^{\lambda t} - \beta \int_0^h k(\tau)[f_1(E^*)S_0 e^{\lambda t} + f_2(E^*)i_0 e^{\lambda(t-\tau)}]d\tau, \\ i_0 \lambda e^{\lambda t} = \beta \int_0^h k(\tau)[f_1(E^*)S_0 e^{\lambda t} + f_2(E^*)i_0 e^{\lambda(t-\tau)}]d\tau - (\mu_I + \gamma)i_0 e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

L'annulation de  $e^{\lambda t}$  de chaque terme est le réarrangement dans l'équation linéaire homogène

$$A \begin{pmatrix} S_0 \\ i_0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ou

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu_S + \beta f_1(E^*)) & -\beta f_2(E^*) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ \beta f_1(E^*) & \beta f_2(E^*) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau - (\lambda + \mu_I + \gamma) \end{pmatrix} .$$

Il existe des solutions non nulles si et seulement si  $\det(A)$  est nulle, ainsi l'équation caractéristique est :

$$(\lambda + \mu_S + \beta f_1(E^*))(\lambda + \mu_I + \gamma) - (\lambda + \mu_S)(\beta f_2(E^*) \int_0^h k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau) = 0. \quad (\text{III.10})$$

Puisque  $(H_2)$  et  $(H_3)$  vérifiées les inégalités (III.6) et (III.7) sont satisfaites on utilisant l'équation d'équilibre pour remplace  $f(E^*)$  dans (III.7), ensuite

$$0 \leq \beta f_2(E^*) \leq \mu_I + \gamma \quad (\text{III.11})$$

Supposons que  $\lambda$  soit solution de (III.10) à partie réelle non négative.

Ensuite en utilisant (III.6) et (III.11) en déduit :

$$\begin{aligned}
 |(\lambda + \mu_S)\beta f_2(E^*) \int_0^h k(\tau)e^{-\lambda\tau} d\tau| &\leq |\lambda + \mu_S|\beta f_2(E^*) \int_0^h k(\tau)|e^{-\lambda\tau}|d\tau, \\
 &\leq |\lambda + \mu_S|\beta f_2(E^*), \\
 &\leq |\lambda + \mu_S|(\mu_I + \gamma), \\
 &\leq |(\lambda + \mu_S + \beta f_1(E^*))(\lambda + \mu_I + \gamma)|. \quad (\text{III.12})
 \end{aligned}$$

et donc l'équation (III.10) n'a pas de solution  $\lambda$  de partie réelle non négative que si toutes les inégalités de (III.12) sont en fait égales.

L'inégalité finale est stricte sauf si  $f_1(E^*) = 0$  (et  $\lambda = 0$ ), l'avant dernière inégalité est stricte sauf  $f_2(E^*) = f(\frac{E^*}{I^*})$ , l'hypothèse  $(H_4)$  implique qu'un moins un est stricte et donc les solutions qu'au de (III.10) doivent avoir une partie réelle négative. Ainsi l'équilibre endémique  $E^*$  est localement asymptotiquement stable.

## III.5 Stabilité asymptotiquement globale pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$

L'expression pour  $\mathcal{R}_0$  donnée dans l'équation (III.3) dépend de comportement de  $f$  près de l'équilibre sans maladie  $E_0$ , qui est localement asymptotiquement stable pour  $\mathcal{R}_0 < 1$ , résultats sur la Stabilité globale pour  $\mathcal{R}_0$  moins que l'on exigera nécessairement d'autres hypothèses sur la forme de  $f$ .

$$(H_5) \quad (S - S_0)(f_2(S, 0) - f_2(S_0, 0)) \geq 0 \text{ pour tout } S > 0.$$

$$(H_6) \quad f(S, I) \leq If_2(S, 0) \text{ pour tout } S, I > 0.$$

$$(H_{7.1}) \quad (S - S_0)(f_2(S, 0) - f_2(S_0, 0)) \geq 0 \text{ pour tout } S > 0 \text{ avec égalité seulement si } S = S_0.$$

$$(H_{7.2}) \quad f(S, I) < If_2(S, 0) \text{ pour tout } S, I > 0.$$

□

**Théorème III.5.1.** Supposons que  $(H_5)$  et  $(H_6)$ , sont vérifiées si  $\mathcal{R}_0 < 1$ , alors l'équilibre sans maladie  $E_0$  est globalement asymptotiquement stable, si  $\mathcal{R}_0 = 1$  et que l'un de  $(H_{7.1})$  et  $(H_{7.2})$  est vérifiée, alors  $E_0$  est globalement attractif.

*Preuve.* On définit la fonction de Lyapunov comme suit  $U_+(t)$ , qui sera l'un des termes impliquées dans une fonctionnelle de Lyapunov  $U$  soit :

$$U_+(t) = \int_0^h V(\tau)I(t - \tau)d\tau.$$

Ou

$$V(\tau) = \beta \int_{\tau}^h K(S)dS. \quad (\text{III.13})$$

Notons que  $V(\tau) > 0$  pour  $0 \leq \tau < h$  puisque le support a une mesure positive près de  $h$ , et donc  $I \geq 0$  implique  $U_+(t) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $I$  est identique zéro sur l'intervalle  $[t - h, t]$ . On dérive  $U_+$

$$\begin{aligned} \frac{dU_+}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^h V(\tau)I(t - \tau)d\tau, \\ &= \int_0^h V(\tau) \frac{d}{dt} I(t - \tau)d\tau, \\ &= - \int_0^h V(\tau) \frac{d}{d\tau} I(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Par intégration par partie, on obtient :

$$\frac{dU_+}{dt} = -V(\tau)I(t - \tau)|_0^h + \int_0^h \frac{dV}{d\tau}(\tau)I(t - \tau)d\tau.$$

De (III.13), il résulte que  $V(h) = 0$  et  $\frac{dV}{d\tau} = -\beta K(\tau)$ , en utilisant ceux-ci ainsi que l'expression pour  $V(0)$  nous trouvons :

$$\frac{dU_+}{dt} = \beta \int_0^h K(\tau)(I(t) - I(t - \tau))d\tau. \quad (\text{III.14})$$

En suite rappelons que  $(H_1)$  requiert que  $f(S, I)$  soit positif si  $S$  et  $I$  sont tous les deux positifs. Combiné avec  $(H_6)$  cela implique  $f_2(S, 0) > 0$  pour  $S > 0$ , ce qui permet de faire la définition suivante sans Gainte de division par zéro soit :

$$G(x) = x - S_0 - \int_{S_0}^x \frac{f_2(S_0, 0)}{f_2(\sigma, 0)} d\sigma.$$

Alors

$$\frac{dG}{dx} = 1 - \frac{f_2(S_0, 0)}{f_2(x, 0)}.$$



Ce qui  $(H_5)$  implique des changements de non positif à non négatif lorsque  $x$  augmente jusqu'à  $S_0$ , ainsi  $G$  minimisé en  $S_0$  avec  $G(S_0) = 0$ , ainsi  $G(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$  soit :

$$U(t) = G(S(t)) + I(t) + f_2(S_0, 0)U_+(t).$$

Alors  $U(t)$  est non négatif pour  $S > 0$  et  $I \geq 0$  en utilise ((III.14)) et  $\Lambda = \mu_S S_0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \left(1 - \frac{f_2(S_0, 0)}{f_2(S, 0)}\right) \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + f_2(S_0, 0) \frac{dU_+}{dt}, \\ &= \left(1 - \frac{f_2(S_0, 0)}{f_2(S, 0)}\right) \left(\mu_S(S_0 - S) - \beta \int_0^h k(\tau) f(S, I_\tau) d\tau\right) + \left(\beta \int_0^h k(\tau) f(S, I_\tau) d\tau - (\mu_I + \gamma)I\right) \\ &\quad + \beta f_2(S_0, 0) \int_0^h K(\tau)(I - I_\tau) d\tau, \\ &= -\mu_S(S - S_0) \left(1 - \frac{f_2(S_0, 0)}{f_2(S, 0)}\right) - (\mu_I + \gamma)I + f_2(S_0, 0) \beta \int_0^h K(\tau) \left(\frac{f(S, I_\tau)}{f_2(S, 0)} + I - I_\tau\right) d\tau, \\ &= -\mu_S(S - S_0) \left(1 - \frac{f_2(S_0, 0)}{f_2(S, 0)}\right) + (\mu_I + \gamma)I(\mathcal{R}_0 - 1) + f_2(S_0, 0) \beta \int_0^h K(\tau) \left(\frac{f(S, I_\tau)}{f_2(S, 0)} - I_\tau\right) d\tau. \end{aligned}$$

On rappelle que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (S + I) \leq \frac{\Lambda}{\mu_S}$ , soit  $A_0 = \left\{ (S, I) \in (0, \frac{\Lambda}{\mu_S}) \times C : \frac{dU}{dt} = 0 \right\}$ .

Et soit  $M_0$  le plus grand sous ensemble invariant de  $A_0$ .

Si  $\frac{dU}{dt}$  est non positif, alors le théorème de Lyapunov – LaSalle [8] implique que chaque point limite oméga est continu dans  $M_0$ .

## III.6 Stabilité asymptotiquement globale pour $\mathcal{R}_0 > 1$

Dans cette section nous résolvons la stabilité globale pour  $\mathcal{R}_0 > 1$ , étant donné que certain hypothèse sur  $f$  sont satisfaites, on rappelle que le théorème (III.3.1), implique q'un équilibre endémique  $E^*$  existe si  $\mathcal{R}_0 > 1$  □

**Théorème III.6.1.** Supposons que  $\mathcal{R}_0 > 1$ , et que  $(H_2)$  et  $(H_3)$  soit maintenus alors l'équilibre endémique  $E^*$  est unique et toutes les solutions pour lesquelles la maladie est initialement présente tendent vers  $E^*$ . Si  $(H_4)$  est également vrai, alors  $E^*$  est globalement asymptotiquement

stable.

**Preuve.** L'unicité de  $E^*$  découle du fait qu'elle est globalement attractive, nous travaillons maintenant à démontrer l'attractivité de  $E^*$ , l'évaluation des deux nombres de (III.1) en  $E^*$  donne

$$\Lambda = \mu_S S^* + \beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I^*) d\tau. \quad (\text{III.15})$$

et

$$(\mu_I + \gamma) I^* = \beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I^*) d\tau. \quad (\text{III.16})$$

Qui seront utilisées comme substitutions dans les calculs ci-dessus- laisser

$$g(x) = x - 1 - \ln x.$$

et

$$V_S(t) = S(t) - S^* - \int_{S^*}^{S(t)} \frac{f(S^*, I^*)}{f(\sigma, I^*)} d\sigma.$$

$$V_I(t) = I^* g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right). \quad (\text{III.17})$$

$$V_+(t) = \int_0^h \alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau.$$

Où

$$\alpha(\tau) = \beta \int_{\tau}^h K(S) f(S^*, I^*) dS. \quad (\text{III.18})$$

Notons que  $(H_2)$  implique  $V_S \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $S = S^*$ .

De plus  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  a le strict minimum global  $g(1) = 0$ , ainsi  $V_I(t) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $I = I^*$ , de même puisque  $\alpha$  est positif sur  $[0, h]$  et  $I(t)$  est continue pour  $t \geq -h$ , il s'en suit que  $V_+ \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $I(t-\tau) = I^*$  pour tout  $\tau \in [0, h]$ , nous étudions le comportement de la fonctionnelle de Lyapunov

$$V(t) = V_S + V_I + V_+. \quad (\text{III.19})$$

Ce qui satisfait  $V(t) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $\frac{S(t)}{S^*} = \frac{I(t)}{I^*} = 1$  et  $\frac{I(t-\tau)}{I^*} = 1$  pour tout  $\tau \in [0, h]$ , pour plus de clarté les dérivées de  $V_S$ ,  $V_I$  et  $V_+$  sont calculées séparément puis combinées pour obtenir  $\frac{dV}{dt}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dV_S}{dt} &= \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \frac{dS}{dt}, \\ &= \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \left(\Lambda - \mu_S S - \beta \int_0^h k(\tau) f(S, I_\tau) d\tau\right). \end{aligned}$$

Utiliser (III.15) pour remplacer  $\Lambda$  donne

$$\begin{aligned} \frac{dV_S}{dt} &= \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \left(\mu_S(S^* - S) + \beta \int_0^h k(\tau)(f(S^*, I^*) - f(S, I_\tau)) d\tau\right), \\ &= -\mu_S(S - S^*) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) + \beta \int_0^h k(\tau) f(S^*, I^*) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) \left(1 - \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)}\right) d\tau, \\ &= -\mu_S(S - S^*) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) + \beta \int_0^h k(\tau) f(S^*, I^*) \\ &\quad \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} - \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} + \frac{f(S, I_\tau)}{f(S, I^*)}\right) d\tau. \end{aligned} \tag{III.20}$$

En suite nous calculons  $\frac{dV_I}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dV_I}{dt} &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \frac{dI}{dt}, \\ &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\beta \int_0^h K(\tau) f(S, I_\tau) d\tau - (\mu_I + \gamma)I\right), \\ &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I^*) \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} d\tau - (\mu_I + \gamma)I^* \frac{I}{I^*}\right). \end{aligned}$$

Utiliser (III.16) pour remplacer  $(\mu_I + \gamma)I^*$  qui donne

$$\begin{aligned} \frac{dV_I}{dt} &= \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I^*) \left(\frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} - \frac{I}{I^*}\right) d\tau, \\ &= \beta \int_0^h k(\tau) f(S^*, I^*) \left(\frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} - \frac{I}{I^*} - \frac{I^*}{I} \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} + 1\right) d\tau. \end{aligned} \tag{III.21}$$

calculant maintenant la dérivée de  $V_+(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dV_+}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^h \alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= \int_0^h \alpha(\tau) \frac{d}{dt} g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau, \\ &= - \int_0^h \alpha(\tau) \frac{d}{d\tau} g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau.\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, nous obtenons

$$\frac{dV_+}{dt} = -\alpha(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) \Big|_{\tau=0}^h + \int_0^h \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau) g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) d\tau.$$

De (III.18) il résulte que  $\alpha(h) = 0$  et  $\frac{d\alpha}{d\tau}(\tau) = -\beta K(\tau) f(S^*, I^*)$ , on remplace pour ces derniers et pour  $\alpha(0)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dV_+}{dt} &= \beta \int_0^h k(\tau) f(S^*, I^*) \left( g\left(\frac{I}{I^*}\right) - g\left(\frac{I(t-\tau)}{I^*}\right) \right) d\tau, \\ &= \beta \int_0^h k(\tau) f(S^*, I^*) \left( \frac{I}{I^*} - \frac{I_\tau}{I^*} + \ln\left(\frac{I_\tau}{I^*}\right) - \ln\left(\frac{I}{I^*}\right) \right) d\tau.\end{aligned}\tag{III.22}$$

En combinant les équations (III.20) (III.21) et (III.22), on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -\mu_S(S - S^*) \left( 1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} \right) + \beta \int_0^h k(\tau) f(S^*, I^*) C(\tau) d\tau,$$

avec

$$C(\tau) = 2 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} + \frac{f(S, I_\tau)}{f(S, I^*)} - \frac{I^*}{I} \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} - \frac{I_\tau}{I^*} + \ln\left(\frac{I_\tau}{I^*}\right) - \ln\left(\frac{I}{I^*}\right).$$

En ajoutant et en soustrayant la quantité  $1 + \ln \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} + \ln \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}$ , on obtient

$$\begin{aligned}C(\tau) &= \left( 1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} + \ln \frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)} \right) + \left( 1 - \frac{I^*}{I} \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} + \ln \left( \frac{I^*}{I} \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)} \right) \right) + \left( 1 - \frac{I_\tau}{I^*} + \ln \frac{I_\tau}{I^*} \right) \\ &\quad + \left( \frac{f(S, I_\tau)}{f(S, I^*)} - 1 - \ln \frac{f(S, I_\tau)}{f(S, I^*)} \right), \\ &= -g\left(\frac{f(S^*, I^*)}{f(S, I^*)}\right) - g\left(\frac{I^*}{I} \frac{f(S, I_\tau)}{f(S^*, I^*)}\right) - g\left(\frac{I_\tau}{I^*}\right) + g\left(\frac{f(S, I_\tau)}{f(S, I^*)}\right).\end{aligned}$$

Puisque la fonction  $g$  est monotone de part et d'autre de 1 est minimisé en 1 ( $H_3$ ) implique

$$g\left(\frac{f(S, I_\tau)}{f(S, I^*)}\right) \leq g\left(\frac{I_\tau}{I^*}\right)$$

, puisque  $g \geq 0$  nous avons  $C(\tau) \leq 0$  alors ( $H_2$ ) implique  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ , d'après [8] les solutions tendant vers  $M$ , le plus grand sous-ensemble invariant de  $\left\{\frac{dV}{dt} = 0\right\}$  pour que  $\frac{dV}{dt}$  soit égale à zéro il faut avoir  $S = S^*$  et  $K(\tau)g\left(\frac{I^* f(S, I_\tau)}{I f(S^*, I^*)}\right) = 0$

pour presque tout  $\tau \in [0, h]$  c'est-à-dire  $K(\tau) = 0$  ou  $f(S^*, I_\tau) = f(S^*, I^*)\frac{I}{I^*}$  presque partout.

Puisque  $S = S^*$  dans  $M$  nous avons  $\frac{dS}{dt} = 0$  en chaque point de  $M$ , soit

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \mu_S S^* - \beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I_\tau) d\tau, \\ &= \Lambda - \mu_S S^* - \beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I^*) \frac{I}{I^*} d\tau, \\ &= \Lambda - \mu_S S^* - \frac{I}{I^*} \beta \int_0^h K(\tau) f(S^*, I^*) d\tau. \end{aligned}$$

Cela détermine que  $I$  est constante et donne en fait  $I = I^*$  pour tout  $t$ . Ainsi, chaque élément de  $M$  satisfait  $S(t) = S^*$  et  $I(t) = I^*$ . On peut conclure que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t)) = (S^*, I^*) = E^*$  d'après théorème (III.4.2), si ( $H_4$ ) également vérifiées, alors  $E^*$  est localement asymptotiquement stable, et il s'ensuit maintenant qu'il est globalement asymptotiquement stable.

### Remarque :

Si l'équation (III.1) est modifiée pour avoir un retard infini, alors le calcul de base de la fonctionnelle de Lyapunov toujours, tant que le noyau de retard  $K$  est limite au dessus pour une fonction exponentielle décroissante et que l'espace de phase est choisi peut être un espace mémoire d'évanouissement appropriées [2, 12, 15].

Cependant, il devient nécessaire de prouver une persistance uniforme même alors, puisque les conditions initiales pourrait impliquer que  $I(\cdot)$  soit nulle sur les ensembles de mesure positive la fonctionnelle de Lyapunov ne serait pas définie pour ces conditions initiales comme le délai est infini, le problème persisterait pour toujours ainsi, il devient nécessaire de faire le calcul

de Lyapunov pour les solutions situées dans les ensembles limites oméga ( ou attracteur ), qui par persistance uniforme sont bornée à partir de zéro. Cela montrerait que les solutions dans l'attracteur se limitent à l'équilibre endémique  $E^*$ .

En suite on argument que l'autre solution doit aussi se limiter à  $E^*$ . Voir [23] pour un exemple de cette approche. □

---

## Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons effectué l'étude d'un modèle d'épidémie *SIR* retard avec un taux d'incidence généralisée, ou le délai représenté par la période d'incubation.

Le taux de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  est obtenu et déterminé si la maladie est éteinte ou non.

Dans le deuxième chapitre on a étudié le cas d'une maladie infectieuse décrite par un modèle *SIR* avec retard, nous avons étudié le taux de reproduction de base, ensuite on a présenté des résultats pour la stabilité globale de point d'équilibre endémique.

Dans le troisième chapitre on a analysé le modèle épidémiologique *SIR* avec retard et incidence non linéaire générale et on a prouvé que :

1. La stabilité locale des points d'équilibres si  $\mathcal{R}_0 < 1$  l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable de plus, si  $\mathcal{R}_0$  est supérieur à 1 l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.
2. La stabilité globale pour  $\mathcal{R}_0$  est inférieure et supérieure à 1 et La méthode de fonctionnelle de Lyapunov était utilisée pour élaborer la stabilité globale de l'équilibre sans maladie et de l'équilibre endémique.

# Bibliographie

- [1] *H. Amann*, Ordinary differential equations : model building, An introduction to non-linear Analysis, Walter de Gruyter, Berlin. New York, 1990.
- [2] *F. V. Atkinson* and *J. R. Haddock*, On determining phase spaces for functional differential equations, Funkcial. Ekvac., 31 (1988), 331–347.
- [3] *P. Auger*, *C. Lett*, and *J. Poggiale*. Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés.
- [4] *K.L. Cooke*, Stability analysis for a vector disease model, Rocky Mountain J. Math. 9 (1979) 31-42.
- [5] *H. DANG-VU*, and *DELCARTE*, Bifurcations et chaos : une introduction à la C, dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses, 2000.
- [6] *J.P. DENAILLY*, *Analyse Numérique et Équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences, France, **2006**.
- [7] *O. Diekmann*, *J. A. P. Heesterbeek* and *J. A. J. Metz*, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $\mathcal{R}_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations, J. Math. Biol., 28 (1990), 365–382.
- [8] *J. DIEUDONNE*, *Eléments d'analyse. tome i.fondements de l'analyse moderne. 3<sup>ème</sup> édition.* Paris Gauthier-Villars 1979.
- [9] *Z. Feng* and *H. Thieme*, Endemic models for the spread of infectious diseases with arbitrarily distributed disease stages I : General theory, SIAM J. Appl. Math., 61 (2000), 803–833.
- [10] *A. GRANAS*, AND *J. DUGUNDJI* *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, **2003**. Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, **1993**.
- [11] *J. Hale*, and *S. Verduyn Lunel*, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1993.
- [12] *J. K. Hale* and *J. Kato*, Phase space for retarded equations with infinite delay, Funkcial. Ekvac., 21 (1978), 11–41.



- [13] *H. W. Hethcote*, Qualitative analyses of communicable disease models, *Math. Biosci.*, 28 (1976), 335–356.
- [14] *H. W. Hethcote*, The mathematics of infectious diseases, *SIAM Review*, 42 (2000), 599–653.
- [15] *Y. Hino, S. Murakami and T. Naito*, "Functional Differential Equations with Infinite Delay", Springer-Verlag, 1993.
- [16] *W.O.Kermak and A.G.Mckendrick*, A contribution on to the mathematical theory of epidemics-i, *Royal soc.london*, (1926-1927).
- [17] *A. Korobeinikov*, Global properties of infectious disease models with nonlinear incidence, *Bull. Math. Biol*, 69 (2007), 1871–1886.
- [18] *A. Korobeinikov et P. K. Maini*, Nonlinear incidence and stability of infectious disease models, *Math. Med. and Biol.*, 22 (2005), 113–128.
- [19] *Y. Kuang*, "Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics", Mathematics in Science and Engineering, vol 191, Academic Press, Cambridge, 1993.
- [20] *J.LaSalle* *Stability theory for ordinary differential equations. J.Differ. Equations* 1968.
- [21] *J.P.LASALLE* *the Stability of dynamical systems, society for industrial and applied mathematics, philadelphia, pa.,. Regional conference Series in Applied Mathematics.* 1976.
- [22] *X. LIAO, L. WANG, AND P. YU*, *Stability of Dynamical Systems.* Elsevier, première édition, 2007.
- [23] *C. C. McCluskey*, Global stability for an *SEIR* epidemiological model with varying infectivity and infinite delay, *Math. Biosci. and Eng*, 6 (2009), 603–610.
- [24] *C. C. McCluskey*, Global stability for an *SIR* epidemic model with delay and nonlinear incidence, *Nonlinear Anal. RWA*, 11 (2010), 3106–3109.
- [25] *C. C. McCluskey*, Global stability for an *SIR* epidemic model with delay and general nonlinear incidence.
- [26] *E. Moulay*. Stabilité des équations différentielles ordinaires.
- [27] *V. Müller*, Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras, Institute of Mathematics Czech Academy of Sciences, 2000.
- [28] *R.S MUSTAFA. and O. M KULENOVIC*. Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica. -chapman and Hall-CRC, 2002.
- [29] *L,Perko*. Differential equations and dynamical systems, vol. 7. Springer Science Business Media, 2013
- [30] *Y. Takeuchi, W. Ma and E. Beretta*, Global asymptotic properties of a delay *SIR* epidemic model with finite incubation times, *Nonlinear Anal*, 42(2000), 931~947.

- 
- [31] *P. van den Driessche, and J. Watmough.* Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Math. Biosci.* 180 (2002) 29.
- [32] *R. Xu, Z. Ma,* Global stability of a *SIR* epidemic model with non linear incidence rate and time delay, *Non linear Anal. RWA* 10 (2009) 3175-3189.
- [33] *Y.ZHOU,* *Basic Theory of Fractional Differential Equations,* World Scientific, New Jersey, 2014.