

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation

Modèle mathématique avec impulsion

Présenté Par :

Mlle Kaddour Ben Dahma Khadra Ikram

Devant le jury composé de :

D. Bennafla	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
A. Hammoudi	Pr	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
F. Boukhalfa	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2020/2021

Remerciements

Je remercie le Dieu qui m'a donné la volonté , la patience et le courage durant toutes mes années d'étude. Mes très chaleureux remerciement vont à Madame Boukhalfa Fatima qui a dirigé mon travail. Ses qualités humaines, la richesse de ces conseils m'a toujours donné une aide précieuse.

Je remercie aussi les membres de jury Mr.Hammoudi pour sa générosité, et d'avoir accepté d'être examinateur de mon jury. Je remercie également Mme Bennafla qui a accepté de présider notre jury.

Je tiens à remercier tous les membres du Département de mathématique.

Dédicaces

*Je dédie ce mémoire à mes parents,
mes soeurs et mon frère.*

Table des matières

Introduction	5
1 Préliminaires	7
1.1 Généralités sur les équations différentielles	7
1.2 Problème d'existence	8
1.3 Notions sur la stabilité	9
1.4 Présentation de la stabilité par linéarisation	10
1.5 Stabilité au sens de Lyapunov	11
1.6 Portrait de phase	13
1.7 Un modèle d'une équation différentielle impulsive	14
2 Application du système proie-prédateur sans impulsion	16
2.1 Présentation du modèle	16
2.2 Existence des solutions	17
2.3 La bornitude de solution maximale	19
2.4 Positivité des solutions	20
2.5 Comportement au voisinage d'un point d'équilibre	21
2.6 Etude globale des solutions	24
3 Application du système proie-prédateur avec impulsion	29
3.1 Modèle à une seule espèce avec une récolte impulsive :	30
3.2 Existence et la stabilité des solutions positives périodiques avec $\tau = 0$	31
3.3 Existence et la stabilité des solutions positives périodiques avec :	
$0 < \tau < \tau_0$	33
3.4 Analyse de la stabilité exponentielle	37

Conclusion	40
Bibliographie	41

Introduction

Les mathématiques sont de plus en plus présentes dans diverses disciplines et notamment en biologie. La modélisation en biologie a commencé à être utilisée en dynamique de population, afin de modéliser non seulement la croissance des populations, mais aussi les différentes interactions qui peuvent exister entre elles.

Modèle de Malthus

Ce modèle a été proposé par Thomas Malthus en 1798, il suppose que la population possède un taux de croissance r constant, ($r =$ la différence entre taux de natalité et taux de mortalité), car la population est supposée isolée c'est-à-dire aucune migration n'est envisagée.

En désignant par $N(t)$ la taille de la population étudiée à l'instant t .

La forme générale de la loi de croissance de la population est la suivante :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \quad \text{avec} \quad N(0) = N_0.$$

La solution de cette équation différentielle est donnée par :

$$N(t) = N_0 \exp(rt).$$

Modèle de croissance logistique

C'est suite aux considérations précédentes, que le biologiste belge Pierre-François Verhulst propose en 1838 un modèle amélioré, tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population, il suppose que le taux d'accroissement par capita de la population est donné par :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

K : la capacité limite du milieu .

La solution est donnée par :

$$N(t) = N_0 \frac{K \exp(rt)}{K + N_0(\exp(rt) - 1)}.$$

Le système de proie-prédateur a été imaginé par **Volterra** en 1925 pour modéliser l'évolution de sardines et des requins dans la mer Adriatique. Un modèle similaire

a été développé par Lotka, un scientifique américain à la même époque. Ce modèle se présente sous la forme de deux équations différentielle [11].

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(-c + dx), \end{cases}$$

avec $a, b, c, d > 0$ et $x(0) > 0, y(0) > 0$, où :

x : représente la densité de proies .

y : représente la densité de prédateur .

a : représente le taux de croissance de population $x(t)$.

c : représente le taux de décroissance de population $y(t)$.

b, d : représente le taux de l'interaction entre les deux populations .

Le modèle de Lotka Volterra prévoit des centres, qui sont structurellement instables, cela veut dire que ce dernier admet des solutions périodiques .

Notre objectif est de connaître l'évolution des quantités x et y au cours du temps t .

Dans le premier chapitre, on va rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales à propos de l'étude des équations différentielles ordinaires, qui seront utilisées directement dans la suite de ce mémoire, citons par exemple : l'équation autonomes, solutions (locales-globales-maximales), théorème de Cauchy-Lipshitz, points d'équilibre, notions sur la stabilité, fonctions de Lyapunov et de Lambart ... etc.

Le deuxième chapitre, porte sur l'application des notions introduites dans le premier chapitre. L'étude sera sur l'analyse qualitative des solutions du système proie-prédateur.

Dans le troisième chapitre, on va introduire le système des équations différentielles ordinaires avec impulsion.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les équations différentielles

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)), & t \in [0; b] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \Omega$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.1.1. [4]

La fonction $x \in C^1(\Omega)$ est dite solution de (1.1) si x vérifie le système (1.1).

Définition 1.1.2. (Système invariant) [7]

Un système dynamique est dit **invariant** dans le temps ou tout simplement invariant si son équation d'état ne dépend pas explicitement du temps t .

Sinon le système est dit **variant** dans le temps.

Définition 1.1.3. (Système autonome) [7]

Un système dynamique invariant dans le temps est dit **autonome** si son équation d'état ne dépend que de l'état $x(t)$, elle est donnée par :

$$\dot{x} = f(x(t)),$$

sinon le système est dite non - autonome.

La fonction de Lambert

Définition 1.1.4. [18]

La fonction W de Lambert, c'est la fonction réciproque de f définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = ze^z \implies W(z)e^{W(z)} = z$$

Corollaire 1.1.1[18]

$W_0(z)$ satisfait l'égalité suivantes $-1 < W_0(z) < 0$, $\forall z \in (-e^{-1}, 0)$.

1.2 Problème d'existence

Existence locale

Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale, c'est donc un problème du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $t_0 \in I$, $x_0 \in \Omega$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Théorème 1.2.1. [7]

Si f est continue sur Ω et s'il existe une constante $l > 0$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$, il existe $t > 0$ telle que

$$\| f(x_1(t)) - f(x_2(t)) \| \leq l \| x_1 - x_2 \|,$$

alors le problème (1.2) admet une solution maximale et elle est unique.

Existence globale

On peut parfois montrer que toutes les solutions maximales de problème du Cauchy (1.2) sont globales. C'est le cas si la fonction f est définie sur \mathbb{R}^n et si elle est globalement Lipschitzienne : car alors il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition, ni du domaine de validité de sa constante de **Lipschitz**.

Théorème 1.2.2. [7]

Soit $f \in C(I \times \mathbb{R}^n)$ et globalement lipschitzienne par rapport à y alors, quel que soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution globale $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du problème (1.2). De plus, toute solution locale est une restriction de celle-ci.

1.3 Notions sur la stabilité

On considère des systèmes dynamiques (ODE autonomes) possédant une position d'équilibre unique.

Stabilité des équilibres

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.3}$$

Définition 1.3.1. (Point d'équilibre) [15]

Le point x^* est un point d'équilibre (ou état d'équilibre) du système (1.3) s'il est solution du système d'équation $\dot{x}(t) = 0$ tel que

$$f(x^*) = 0.$$

Définition 1.3.2. [15]

L'équilibre x^* de (1.3) est dit instable s'il existe $\varepsilon > 0$ pour tout $\eta > 0$ tel qu'il existe une solution $x(t)$ de (1.3) vérifiant

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \implies \|x(t) - x^*\| \geq \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.3.3. [15]

L'équilibre x^* de (1.3) est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.3) on a

$$\|x(0) - x^*\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

1.4 Présentation de la stabilité par linéarisation

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile ; en effet, en raison de leurs comportements assez compliqués, les méthodes utilisées dans le cas linéaires ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que dans la majorité des cas, les points d'équilibres des systèmes non linéaires peuvent être ramenés au même type de points d'équilibres des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système (1.1) en point d'équilibre $x^* \in \mathbb{R}^n$. [19]

On pose le développement de Taylor comme suit :

$$\dot{x}(t) = D_f(x^*)x + O(|x|^2)$$

Puis, pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéaire associé à (1.1)

$$\dot{x} = D_f(x^*)x. \tag{1.4}$$

Notons que $D_f(x^*)$ est la matrice jacobienne de f au point x^*

$$D_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Sous quelles conditions les systèmes (1.1) et (1.4) sont-ils équivalents ?

Théorème de linéarisation classique

Théorème 1.4.1. *Considérons le système (1.1), soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de f où f est continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine. La linéarisation du système (1.1) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x^*}$, est une matrice carrée d'ordre n .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (avec $s = 1, \dots, n$) les valeurs propres de la matrice A alors :

1. Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles nulles ou négatives alors l'équilibre x^* est stable.
2. Si les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives alors l'équilibre x^* est asymptotiquement stable.
3. Si l'une des valeurs propres de A a une partie réelle positive alors l'équilibre x^* est instable.

1.5 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $0 \in \Omega$, et $f(0) = 0$.

Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de (1.5) et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie au voisinage Ω de l'origine et admettant des dérivées partielles continues [13].

On note par

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x).$$

La dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteur f . Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de V et se note $L_f V$. Pour toute solution $x(t)$ de (1.5) on a :

$$\frac{dV(x)}{dt} = \dot{V}(x(t)).$$

Définition 1.5.1. [13]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $0 \in \Omega$ et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\Omega/\{0\}$.

1. V est dite définie positive si :

$$V(0) = 0$$

$$V(u) > 0 \text{ pour } u \in \Omega/\{0\}$$

2. V est dite définie négative si $-V$ est définie positive.
3. V est dite semi - définie positive si :

$$V(0) = 0$$

$$V(u) \geq 0 \text{ pour tout } u \in \Omega.$$
4. V est dite semi -définie négative si $-V$ est semi -définie positive.

Théorème 1.5.1. (Stabilité au sens de Lyapunov)[13]

L'origine du système (1.5) est stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction $V(x)$ tel que :

- (i) $V(x)$ est définie positive.
- (ii) $\dot{V}(x)$ est définie négative.

Une telle fonction est dite **fonction de Lyapunov**.

Preuve:

Puisque V est définie positive dans Ω , il existe une sphère de rayon $r > 0$ contenue dans Ω telle que :

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \text{pour } x \neq 0 \text{ et } |x| < r, \\ \dot{V}(x) \leq 0 & \text{pour } |x| \leq r \end{cases}$$

Soit x la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ pour $x(0) = x_0$ où f est supposée localement lipchizienne, alors par le théorème de Cauchy-Lipschits, la solution existe pour

$$0 \leq t < t^*$$

Cette solution peut-etre continue pour $t \geq t^*$, et on note par t_1 , la plus grand valeur de t pour laquelle la solution existe.

Il y a deux possibilités, soit $t_1 = \infty$ ou bien $t_1 < \infty$.

On peut montrer que pour $|x_0|$ est suffisamment petit que $t_1 = \infty$.

En effet, par la définition de la dérivée

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) = \dot{V}(x(t)), \quad 0 \leq t < t_1,$$

On peut intégrer cette équation, ce qui donne :

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq 0.$$

Puisque \dot{V} est définie négative, cela veut dire que

$$0 < V(x(t)) \leq V(x_0) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < t_1$$

Soit ε telle que $0 < \varepsilon \leq r$, et soit S la sphère fermée avec un rayon intérieur ε et un rayon extérieur r .

Par continuité de V , et puisque S est fermée, $\mu = \min_{x \in S} V(x)$ existe et il est strictement positif.

Puisque $V(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow 0$, on peut choisir δ avec $0 < \delta < \mu$ tel que pour $|x_0| < \delta$, on ait $V(x_0) < \mu$ alors que $0 < V(x(t)) \leq V(x_0) < \mu$, pour $0 \leq t < t_1$.

Théorème 1.5.2. (Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov) ([13])

L'origine du système(1.5) est asymptotique stable s'il existe une fonction $V(x)$ telle que :

- (i) $V(x)$ est définie positive.
- (ii) $\dot{V}(x)$ est définie négative.

1.6 Portrait de phase

Soit le système différentiel sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

où f_1 et f_2 sont des polynômes en point (x, y) à coefficients réels.

Définition 1.6.1. [16]

Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.6) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions

constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (x, y) est le plan de phase.

Définition 1.6.2. (Solution périodique) [16]

On appelle solution périodique toute solution $x(t) = \phi(t)$ de l'équation (1.6) telle qu'il existe un nombre T , vérifiant $\phi(t+T) = \phi(t)$. Une solution périodique de (1.6) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

1.7 Un modèle d'une équation différentielle impulsive

Soit le système différentiel impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) & t \neq \theta_i & t > t_0 & i = 1, 2, \dots \\ \Delta x = I_i(x) & t = \theta_i & & \\ x(t_0^+) = x_0 & & & \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $f(t, x)$ est une fonction réelle définie sur $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, D est un domaine dans \mathbb{R}^2 , $\{I_i\}$ est une suite de nombres réels pour $x \in \Omega$, et $\{\theta_i\}$ est une suite de nombres réels qui satisfait $\theta_i < \theta_{i+1}$ et

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \theta_i = \infty,$$

discontinuités du premier type aux instants θ_i satisfaisant la condition

$$\Delta x = x(\theta_i^+) - x(\theta_i^-) = I_i(x(\theta_i^-)),$$

avec

$$x(\theta_i^+) = \lim_{t \rightarrow \theta_i^+} x(t) \quad \text{et} \quad x(\theta_i^-) = \lim_{t \rightarrow \theta_i^-} x(t),$$

on suppose également que $f(t, x) \in C(D)$ et $I_i(x) \in C(\Omega)$.

Définition 1.7.1. [15]

Une fonction réelle $x(t)$ est appelée une solution de (1.7) sur $[t_0, t_0 + T)$, $T > 0$, si :

(i) $x(t_0^+) = x_0$ et $(t, x(t)) \in D$ pour $t \in [t_0, t_0 + T)$.

(ii) $x(t)$ est continûment différentiable et satisfait $x'(t) = f(t, x(t))$ sur chaque sous intervalle de $[t_0, t_0 + T)$ ne contenant pas θ_i .

(iii) $x(\theta_i^+) = x(\theta_i) + I_i(x(\theta_i))$ pour $\theta_i \in [t_0, t_0 + T)$, avec $x(\theta_i^-) = x(\theta_i)$.

On note que le problème aux valeurs initiales (1.7) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^n I_i(x(\theta_i)).$$

Chapitre 2

Application du système proie-prédateur sans impulsion

Dans ce chapitre, on va étudier la dynamique d'un système continu de dimension deux, on va analyser la bornitude des solutions positives, la stabilité locale et la stabilité globale des points d'équilibre positifs.

2.1 Présentation du modèle

On va s'intéresser à un modèle de type proie-prédateur :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(t) [a - by(t)], \\ \dot{y} = y(t) \left[\frac{\lambda bx(t)}{1+bx(t)} - d \right] \end{cases} \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales : $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, $\lambda > 0$, $a > 0$, $b > 0$ et $h > 0$.

$x(t)$: représente la densité de la population des proies à l'instant t .

$y(t)$: représente la densité de la population des prédateurs à l'instant t .

a : représente le taux de croissance de la population de proie en absence de prédateur.

b : représente le taux de prédation.

d : représente le taux de mort de population de prédateur en absence de proie .

λ : représente le temps de chercher pour les proies.

h :représente le temps de capturer les proies.

Pour des conditions biologiques du système (2.1) , $\lambda > dh$.

2.2 Existence des solutions

Existence locale

On va démontrer l'existence et l'unicité de la solution maximale de (2.1).

Posons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le système (2.1) devient

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)), \\ u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $f(x, y) = \left(x(t) [a - by(t)]; y(t) \left[\frac{\lambda bx(t)}{1 + bhx(t)} - d \right] \right)$ où $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Soit $(x_0, y_0) \in ([0, T], \mathbb{R}^2)$ un voisinage de (x_0, y_0) tel que :

$V(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \alpha \text{ et } |y - y_0| < \delta\}$ où $\alpha > 0, \delta > 0$, muni d'une norme $\|u\| = \|(x, y)\| = |x| + |y|, \forall u_1, u_2 \in V(x_0, y_0)$, on trouve

$$\begin{aligned} \|f(u_1(t)) - f(u_2(t))\| &= \left\| a(x_1 - x_2) - b(y_1 - y_2) + \frac{y_1(t)\lambda bx_1(t)}{1 + bhx_1(t)} - \frac{y_2(t)\lambda bx_2(t)}{1 + bhx_2(t)} - d(y_1 - y_2) \right\| \\ &\leq a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2| + d|y_1 - y_2| + \lambda bh|x_1 x_2||y_1 - y_2| + \lambda b|y_1||x_1 - x_2| \\ &\quad + \lambda b|x_2||y_1 - y_2| \\ &\leq (a + \lambda b|y_1|)|x_1 - x_2| + (b + d + \lambda b|x_2|)|y_1 - y_2| \\ &\leq k_1|x_1 - x_2| + k_2|y_1 - y_2| \\ &\leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \end{aligned}$$

où

$$k_1 = a + \lambda b|y_1| \quad \text{et} \quad k_2 = b + d + \lambda b|x_2|,$$

et

$$K = \max(k_1, k_2),$$

d'après la théorème de Cauchy-Lipschitz f est localement lipschitzienne, donc le système (2.1) admet une unique solution maximale.

$$(x(t), y(t)) \in C([0, T], \mathbb{R}^2).$$

Existence globale

Pour l'existence globale, on utilise la proposition suivante :

Proposition 2.2.1

Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x, y > 0$ par :

$$H(x, y) = \frac{\lambda}{h} \ln |1 + bhx| - d \ln |x| - a \ln |y| + by,$$

où ; $a, b, h, \lambda > 0$, alors H est une intégrale première pour le système (2.1) i.e si $(x(t), y(t))$ est solution de (2.1) sur $[0, T)$ alors $\forall t \in [0, T)$, $H(x(t), y(t)) = \text{cst}$.

Preuve:

Pour trouver l'intégrale première de système (2.1) , on a

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\dot{y}} &= \frac{x}{y} \frac{a - by}{\frac{\lambda bx}{1 + bhx} - d} \\ \implies \frac{\dot{x}}{\dot{y}} &= \frac{x}{y} \frac{(a - by)}{x(\lambda b - dbh) - d} \\ \implies \dot{x}y [x(\lambda b - dbh) - d] &= \dot{y}x(a - by)(1 + bhx) \\ \implies (\lambda b - dbh) \frac{\dot{x}}{1 + bhx} - d \frac{\dot{x}}{x} + \frac{dbh\dot{x}}{1 + bhx} &= \frac{a\dot{y}}{y} - b\dot{y} \\ \implies (\lambda b - dbh) \int_0^t \frac{\dot{x}(s)ds}{1 + bhx(s)} - d \int_0^t \frac{\dot{x}(s)ds}{x(s)} + d \int_0^t \frac{bh\dot{x}(s)}{1 + bhx(s)} ds &= a \int_0^t \frac{\dot{y}(s)ds}{y} - b \int_0^t \dot{y}(s)ds \\ \implies \left[\frac{(\lambda b - dbh)}{bh} \right] \ln |1 + bhx| + d \ln \left| \frac{1 + bhx}{x} \right| &= a \ln |1 + bhx| - by + \text{const} \\ \implies H(x, y) = \frac{\lambda}{h} \ln |1 + bhx| - d \ln |x| - a \ln |y| + by &= \text{const} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2

On tout point $M(x, y)$ le gradient de H est perpendiculaire au champ des vecteurs

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \text{ où } (x, y) \text{ est une solution du système (2.1).}$$

Preuve:

On a le gradient de H :

$$\nabla H(x, y) = \left(\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\lambda b}{1 + bhx} - \frac{d}{x}, \frac{-a}{y} + b \right),$$

alors, on a

$$\langle \dot{u}, \nabla H(x, y) \rangle = (ax - bxy) \left(\frac{\lambda b}{1 + bhx} - \frac{d}{x} \right) + y(t) \left(\frac{\lambda bx(t)}{1 + bhx(t)} - d \right) \left(\frac{-a}{y} + b \right),$$

$$\langle \dot{u}, \nabla H(x, y) \rangle = \frac{ax\lambda b}{1 + bhx} + bdy - \frac{ax\lambda b}{1 + bhx} - bdy,$$

$$\langle \dot{u}, \nabla H(x, y) \rangle = 0,$$

d'où le gradient de H est perpendiculaire au champ des vecteurs $(\dot{x}, \dot{y})^t$ pour le système (2.1).

2.3 La bornitude de solution maximale

La connaissance de l'intégrale première H nous permet de montrer que (x, y) est bornée.

Proposition 2.1.1

La solution maximale $(x(t), y(t))$ est bornée.

Preuve:

Soit

$$f(x) = \frac{\lambda}{h} \ln |1 + bhx| - d \ln |x| \quad \text{et} \quad g(y) = by - a \ln y$$

Prenons

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} + d \right) \ln(1 + bhx) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(y) = g(y) - \frac{b}{2}y$$

On a

$$\tilde{f}'(x) = -\frac{d}{x} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} + d \right) hb}{1 + bhx} = \frac{\left(\frac{\lambda}{h} - d \right) hbx - 2d}{2x(1 + bhx)}.$$

$\exists A > 0$ tel que $\forall x \in A$, on a $\tilde{f}'(x) > 0$ pour $x > \frac{2d}{hb(\lambda - dh)}$, alors $\tilde{f}(x) > 0$, où

$$f(x) > \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + bhx).$$

La même chose pour

$$\tilde{g}'(y) = \frac{b}{2} - \frac{a}{y} = \frac{by - 2a}{2y},$$

$\exists B > 0$ tel que $\forall x \in B$, on a $\tilde{g}'(y) > 0$ pour $y > \frac{2a}{b}$ et $\tilde{g} > 0$ où $g(y) > \frac{b}{2}y$ alors

$$\begin{cases} f(x) > \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + bhx), \\ g(y) > \frac{b}{2}y \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) + g(y) &> \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + bhx) + \frac{b}{2}y, \\ H(x, y) - \frac{by}{2} &> \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + bhx), \\ H(x_0, y_0) &> \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + bhx), \quad \text{car} \quad H(x_0, y_0) = H(x, y) = \text{const.} \\ x &< \frac{\left(e^{\frac{2}{\lambda-dh}H(x_0, y_0)} - 1 \right)}{b}. \end{aligned}$$

Et pour y on a

$$\begin{aligned} H(x, y) &> \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \ln(1 + bhx) + \frac{by}{2}, \\ H(x, y) &> \frac{by}{2}, \\ y &< \frac{2}{b}H(x_0, y_0), \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$0 < x < \max \left\{ A, \frac{\left(e^{\frac{2}{\lambda-dh}H(x_0, y_0)} - 1 \right)}{bh} \right\}, .$$

et

$$0 < y < \max \left\{ B, \frac{2}{b}H(x_0, y_0) \right\}.$$

2.4 Positivité des solutions

Théorème 2.4.1. [18]

1. $(0, 0)$ est un point d'équilibre trivial de système (2.1).
2. Si $x_0 > 0$ (resp. $y_0 > 0$) alors $\forall t \in [0, T)$ on a $x(t) > 0$ (resp. $y(t) > 0$).

Remarque 2.4.1. Pour $x_0 = 0$ (resp. $y_0 = 0$) (2.1) a une solution demi-triviale $(0, y_0 e^{-dt})$ (resp. $(0, x_0 e^{at})$).

Preuve:

Si $x_0 = 0$ le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0, \\ \dot{y}(t) = -dy(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

D'où on trouve

$$\dot{x}(t) = 0 \implies \int_0^t \dot{x}(s) ds = \int_0^t 0 ds \implies x(t) - x(0) = 0 \implies x(t) = x_0 = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = -dy(t) &\implies \int_0^t \frac{\dot{y}}{y} dt = \int_0^t -d dt, \\ &\implies \ln|y(t)| = -dt + c, \\ &\implies y(t) = Ce^{-dt}. \end{aligned}$$

Or $y(0) = C = y_0$, donc $y(t) = y_0 e^{-dt}$. La solution du système (2.4) est $(0, y_0 e^{-dt})$; donc $\forall t \in [0, T)$, $x(t) = 0$ on voit ainsi que les ensembles de la forme $\{0\} \times]0, y_0]$ sont des trajectoires.

2.5 Comportement au voisinage d'un point d'équilibre

Théorème 2.5.1. [18]

Le système (2.1) admet deux points d'équilibres qui sont :

$$O(0,0) \quad \text{et} \quad W\left(\frac{d}{(\lambda b - bdh)}, \frac{a}{b}\right).$$

Preuve:

Les points d'équilibres sont obtenus en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0, \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{d}{\lambda b - bdh} \\ y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Ce dernier admet deux points d'équilibre, un point d'équilibre trivial $O(0,0)$, et autre point d'équilibre $W(\frac{d}{\lambda b - bdh}, \frac{a}{b})$.

Etude de stabilité $O(0,0)$

Théorème 2.5.2. [18]

1. Le point d'équilibre O est instable .
2. Le point d'équilibre $W(\frac{d}{\lambda b - bdh}, \frac{a}{b})$ est un point-col .

Preuve:

1. Etudier la stabilité locale de point $O(0,0)$ est déterminé par les signes des valeurs propres de la matrice jacobienne au voisinage de O .

Notre système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y), \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y) \end{cases}$$

La matrice jacobienne autour de (x^*, y^*) est

$$D_f(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à la matrice jacobienne est donné par :

$$\lambda^2 - tr\lambda + det = 0$$

alors les valeurs propres de cette équation sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr \pm \sqrt{tr^2 - 4det}}{2}$$

La matrice jacobienne au voisinage de (x, y) est :

$$D_f(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ \frac{\lambda by}{(1+bhx)^2} & -d + \frac{\lambda bx}{1+bhx} \end{pmatrix}$$

Alors la matrice jacobienne au voisinage de $O_{(0,0)}$ est :

$$D_f(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = a > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -d < 0$$

Sachant que $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, l'une des valeurs propres est de partie réelle strictement positive alors le point critique $O(0,0)$ est instable.

2. La matrice jacobienne au voisinage de $W\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$:

$$D_f\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-d}{\lambda - dh} \\ \frac{a(\lambda b - dbh)^2}{\lambda b^2} & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\lambda_1 = i \sqrt{\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda}},$$

$$\lambda_2 = -i \sqrt{\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda}},$$

dans ce cas, on peut rien dire sur la stabilité de $\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$.

Cherchons maintenant la fonction de **Lyapunov**.

Soit

$$V(x,y) = H(x,y) - H\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right),$$

(a) $V(x,y) > 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$, car $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$, d'après la bornitude des solutions, on trouve que :

$$H(x,y) - \frac{by}{2} > \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad H(x,y) > \frac{1}{2} + \frac{by}{2}$$

alors

$$H\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right) > \frac{1}{2} + \frac{by}{2} \quad \text{donc} \quad V(x,y) > 0.$$

(b) $V\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right) = 0$, car

$$V\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right) = H\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right) - H\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right).$$

(c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve que $V'(x, y) = 0$, car

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ V'(x, y) &= \left(\frac{\lambda b}{1 + bhx} - \frac{d}{x} \right) (x(a - by)) + \left(-\frac{a}{y} + b \right) \left(y \left(-d + \frac{\lambda bx}{1 + bhx} \right) \right) \\ V'(x, y) &= \frac{\lambda abx}{1 + bhx} - \frac{\lambda abx}{1 + bhx} + \frac{\lambda b^2 xy}{1 + bhx} - \frac{\lambda b^2 xy}{1 + bhx} + ad - ad + aby - aby \\ V'(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque les conditions de la stabilité au sens de Lyapunov est vérifiées, alors le point critique $W \left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b} \right)$ est stable.

2.6 Etude globale des solutions

D'après de ce qui précédé, il reste deux cas : est ce que les orbites de système de proie-prédateur sont stables et périodiques, ou stables non périodiques ?

Périodicité des solutions

On choisit le plan de phase (x, y) suivant :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$$

Le long des isoclines verticales, les vecteurs de vitesse ont pour coordonnées $u \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix}$.

Les isoclines verticales sont donc les courbes solution de l'équation $\dot{x} = 0$ qui conduit à $x = 0$ ou bien $y = \frac{a}{b}$.

Le long des isoclines horizontales, les vecteurs de vitesse ont pour coordonnées $v \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les isoclines horizontales sont donc les courbe solutions de l'équation $\dot{y} = 0$.

Qui a conduit à $y = 0$ ou bien $x = \frac{d}{b(\lambda - dh)}$

Le sens des vecteurs de vitesses

$$\begin{aligned}
 I &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x < \frac{d}{b(\lambda - dh)}, \quad y < \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} < d, \quad by - a < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x(\frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} - d) < 0, \quad x(by - a) < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \dot{x} < 0, \quad \dot{y} < 0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 II &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x < \frac{d}{b(\lambda - dh)}, \quad y > \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} < d, \quad by - a > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x(\frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} - d) < 0, \quad x(by - a) > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \dot{x} < 0, \quad \dot{y} > 0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x > \frac{d}{b(\lambda - dh)}, \quad y < \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} > d, \quad by - a < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x(\frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} - d) > 0, \quad x(by - a) < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \dot{x} > 0, \quad \dot{y} < 0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 IV &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x > \frac{d}{b(\lambda - dh)}, \quad y > \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} > d, \quad by - a > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x(\frac{x\lambda b}{b(1 + xbh)} - d) > 0, \quad x(by - a) > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / \dot{x} > 0, \quad \dot{y} > 0\}
 \end{aligned}$$

Notre preuve consiste à suivre une trajectoire à travers de ces zones pour montrer qu'elle est périodique voir *FIGURE 2.1* .

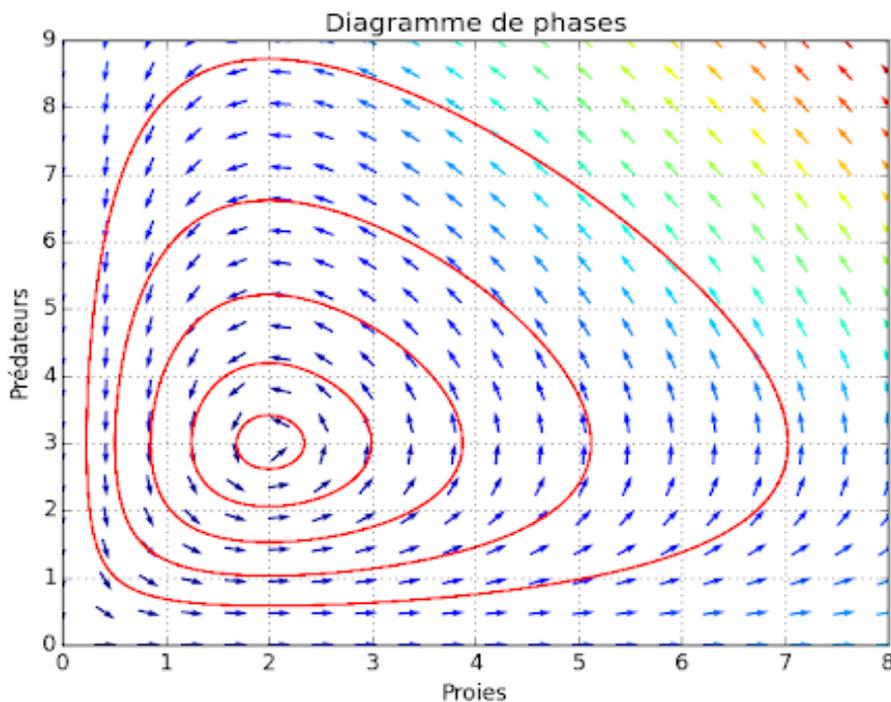


FIGURE 2.1 Le sens des vecteurs

On note d'abord les lignes de champ, matérialisées par les flèches sur le plan de phase. Vous pouvez noter que toutes les flèches sont tangentes à une orbite.

Le trace de ce champ permet d'avoir une bonne idée de la dynamique du système sans calculer sa solution.

Moyenne sur une période

1. Pour la proie :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) = \langle x \rangle \quad \text{ou} \quad f(x(t)) = \frac{1}{1 + bx(t)}$$

2. Pour le prédateur :

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) = \langle y \rangle$$

Proposition 2.5.1

on a

$$\langle x \rangle = \lambda \left(\frac{\lambda}{h} - d \right) \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{a}{b}.$$

Preuve:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) [a - by(t)], & (01) \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[\frac{\lambda bx(t)}{1+bhx(t)} - d \right], & (02) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (01) &\implies \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a - by(t), \\ &\implies \int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int_0^T a dt - b \int_0^T y(t) dt, \\ &\implies \ln x(T) - \ln x(0) = aT - b \int_0^T y(t) dt. \end{aligned}$$

Comme $x(T) = x(0)$, donc

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b},$$

$$\begin{aligned} (02) &\implies \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\lambda bx(t)}{1+bhx(t)} - d \\ &\implies \int_0^T \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = \int_0^T \left(\frac{\lambda bx(t)}{1+bhx(t)} - d \right) dt \\ &\implies \ln y(T) - \ln y(0) = \lambda b \left(\int_0^T \frac{1}{bh} - \int_0^T \frac{\frac{1}{bh}}{1+bhx} dt \right) - dT \\ &\implies \ln y(T) - \ln y(0) = \lambda T(h)^{-1} - dT - \frac{1}{\lambda} \int_0^T \frac{1}{1+bhx} dt \end{aligned}$$

comme $y(T) = y(0)$, on trouve

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt = \lambda \left(\frac{\lambda}{h} - d \right).$$

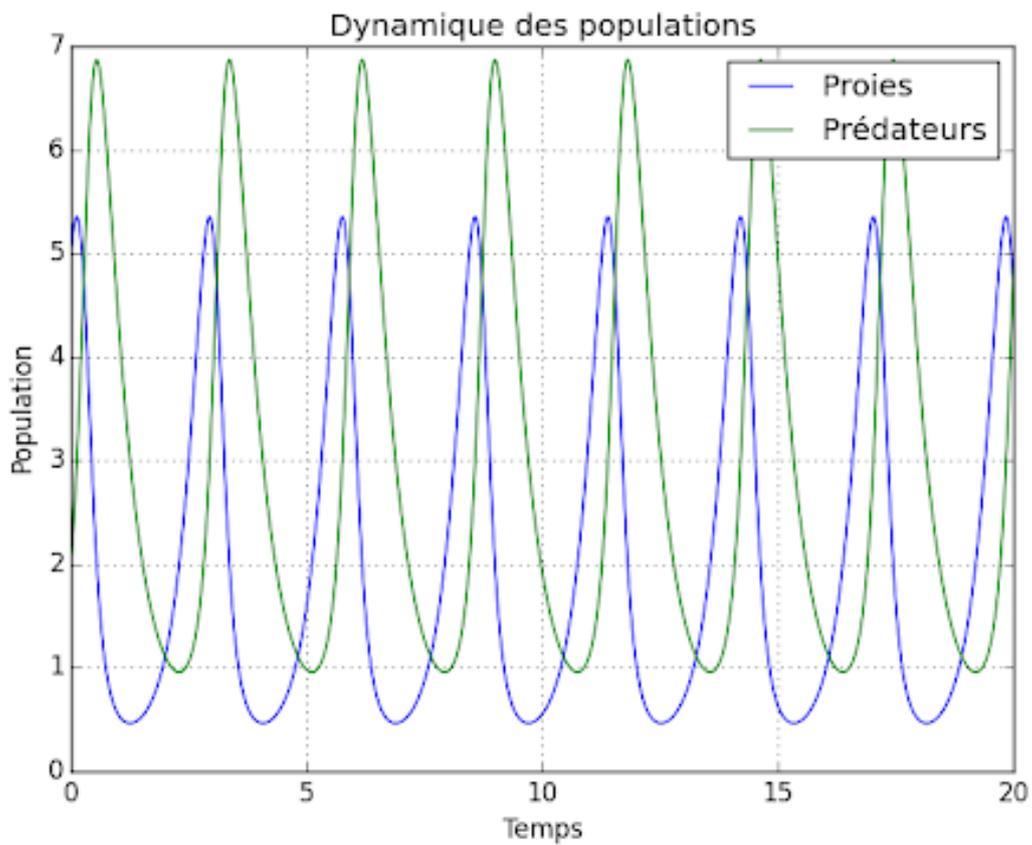


FIGURE 1.2 La période de modèle Proie-Prédateur

Sur la courbe du haut, en vert l'évolution de la population des prédateurs et en bleu celle des proies.

Les amplitudes maxima sont constantes dans les deux populations. C'est écologiquement irréaliste, notre modèle est un peu simpliste.

La période est identique pour les deux populations

Chapitre 3

Application du système proie-prédateur avec impulsion

Dans ce chapitre, on va étudier un système proie-prédateur avec une récolte constante de la proie en des instants fixes donnés par le système d'équations différentielles impulsives suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(t)[a - by(t)] & x \neq h_2 \\ \dot{y} &= y(t) \left[\frac{\lambda bx(t)}{1+bx(t)} - d \right] & x \neq h_2 \\ \Delta x &= -px & x = h_2 \\ \Delta y &= -qy & x = h_2 \end{cases} \quad (3)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ désignent le nombre de proie-prédateur au temps t respectivement.

Pour discuter la dynamique du système (3), on va définir les trajectoires suivants :

$$\Sigma_1 = \{(x, y), x = (1 - p)h_2, y \geq 0\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y), x = h_1, y \geq 0\},$$

$$\Sigma_3 = \{(x, y), x = h_2, y \geq 0\}.$$

La trajectoire Σ_1 va croiser avec Σ_3 périodiquement [18].

3.1 Modèle à une seule espèce avec une récolte impulsive :

Existence et la stabilité des solutions triviales :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) & x \neq h_2 \\ \Delta x = -px & x = h_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que (3.1) a une solution positive et de 1-périodique $z(t) = (\phi(t), \varphi(t))$ avec une condition initiale $z_0 = z(0) = ((1-p)h_2, y_0)$ où $y_0 \geq 0$. Soit $y(t) = 0$ pour $t \in [0, \infty)$ alors on obtient :

Théorème 3.1.1. [18]

$((1-p)h_2 e^{at}, 0)$ est un solution périodique semi-triviale.

Preuve:

Soit $x_0 = x(0) = (1-p)h_2$ alors :

$$\frac{\dot{x}}{x} = a \implies \int_0^t \frac{\dot{x}}{x} dt = \int_0^t a dt \implies x(t) = C e^{at},$$

avec $C = (1-p)h_2$, donc $x(t) = (1-p)h_2 e^{at}$.

D'après l'intersection de trajectoires Σ_1 et Σ_3 alors on trouve que : $x(T) = h_2 = (1-p)h_2 e^{aT}$, alors $e^{aT} = 1-p$, donc $aT = \ln(1-p)$, finalement, on trouve $T = a^{-1} \ln(1-p)$.

Pour montrer que $x(T^+) = x_0$, on a $x(T^+) - x(T) = -px(T)$, alors $x(T^+) = x(T)(1-p)$, où $x(T^+) = (1-p)h_2 = x_0$, donc $x(T^+) = x_0$.

Cela veut dire que le système (3) avec $\tau = 0$ a des solutions semi-triviales périodiques et pour $(k-1)T \leq t \leq kT$ avec $(k = 1, 2, \dots)$.

Finalement, on obtient

$$\begin{cases} \phi(t) = (1-p)h_2 e^{a(t-(k-1)T)}, \\ \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

3.2 Existence et la stabilité des solutions positives périodiques avec $\tau = 0$

Pour étudier la stabilité de ce semi-triviale périodique solution on a les résultats suivants :

Théorème 3.2.1[18]

Si

$$|\mu| = \left| \frac{a - b\mu_0 + bq\eta_0}{a - b\eta_0} \right| < 1,$$

alors $(x_s, 0)$ est un solution arbitraire asymptotiquement stable et semi-triviale périodique du système (3) .

Preuve

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), & \varphi(x, y) \neq 0 \\ \dot{y} = Q(x, y), & \varphi(x, y) \neq 0 \\ \Delta x = \varepsilon(x), & \varphi(x, y) = 0 \\ \Delta y = \eta(y), & \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où P, Q sont des fonctions continues et intégrables et le grade de $\varphi(x, y) \neq 0$.

On sait que

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x(t)[a - by(t)], \\ Q(x, y) &= y(t) \left[-d + \frac{\lambda b h x}{1 + b h x} \right], \\ \varepsilon(x, y) &= -p x, \\ \eta(x, y) &= -q y, \\ \varphi(x, y) &= x - h_2. \end{aligned}$$

Soit $(\alpha(t), \beta(t))$ la solution positive et T -périodique du système (3.2).

Lemme 3.2.1[18]

Si $|\mu| < 1$ où

$$\mu = \prod_{j=0}^n k_j \exp \int_0^T \left(\frac{\partial P(\alpha(t), \beta(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\alpha(t), \beta(t))}{\partial y} \right) dt,$$

3.2. EXISTENCE ET LA STABILITÉ DES SOLUTIONS POSITIVES
PÉRIODIQUES AVEC $\tau = 0$

où

$$k_j = \frac{(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x})P_+ + (\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y})}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q},$$

alors la solution positive et 1-périodique $(\phi(t), \varphi(t))$ est asymptotiquement orbitaire stable .

Preuve:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0,$$

On trouve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -p.$$

Sachant que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(0) = \alpha(T^+) = (1-p)h_2, \\ \alpha(T) = h_2, \\ \beta(0) = y_0, \\ \beta(T) = y = \frac{y_0}{1-q} = \eta_0, \\ \beta(T^-) = (1-q)\eta_0, \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{aligned} k &= \frac{(1-q)P_+(\alpha(T^+), \beta(T^+))}{P(\alpha(T), \beta(T))} \\ &= \frac{(1-q)(1-p)h_2(a - b(1-q)\eta_0)}{h_2(a - b\eta_0)} \\ &= \frac{(1-q)(1-p)(a - b\eta_0(1-q))}{a - b\eta_0} \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^T \left(\frac{\partial P(\alpha(t), \beta(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\alpha(t), \beta(t))}{\partial y} \right) dt = \int_0^T \left(a - b\beta(t) + \frac{\lambda b\beta(t)}{1 + bh\beta(t)} - d \right) dt,$$

alors

$$\mu = ke^{\int_0^T \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(t)} + \frac{\beta(t)}{\beta(t)} \right) dt} = \frac{(1-q)(1-p)(a - b\eta_0(1-q))}{a - b\eta_0} \left(\frac{\alpha(T)\beta(T)}{\alpha(0)\beta(0)} \right),$$

donc

$$|\mu| = \left| \frac{a - b\eta_0 + bq\eta_0}{a - b\eta_0} \right|,$$

3.3. EXISTENCE ET LA STABILITÉ DES SOLUTIONS POSITIVES
 PÉRIODIQUES AVEC : $0 < \tau < \tau_0$

finalement

$$|\mu| = \left| 1 + \frac{bq\eta_0}{a - b\eta_0} \right| < 1,$$

car d'un point de vue géométrique la construction du portrait de phase du système (3) considéré, si

$$\eta_0 > \frac{a}{b},$$

alors la solution positive et 1-périodique $(\phi(t), \varphi(t))$ est asymptotiquement orbitaire stable.

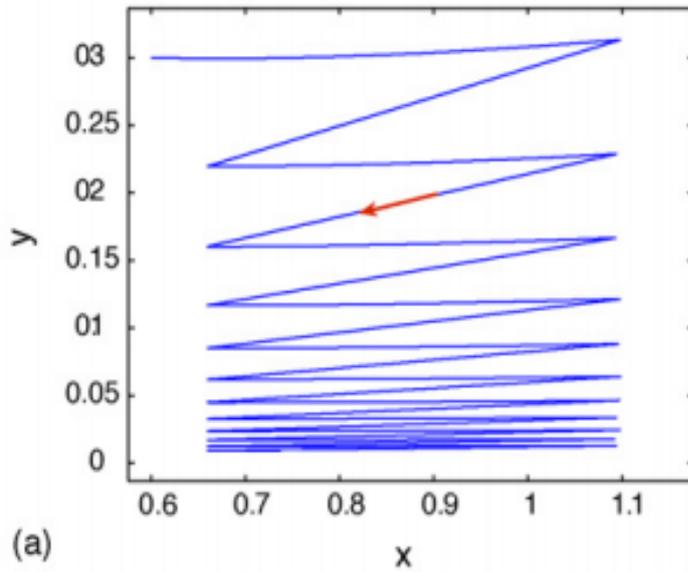


FIGURE 2.1 La trajectoire du système(3.2) avec
 $\tau = 0$ $p = 0.4, q = 0.3$ et $h_2 = 1.1$

Le FIG 2.1 nous montre que les solutions sont semi-trivales positives et 1-périodiques.

3.3 Existence et la stabilité des solutions positives périodiques avec : $0 < \tau < \tau_0$

Théorème 3.3.1. [18]

$\forall p, q \in [0, 1]$ si

$$0 < \tau < \frac{a}{b} \quad W_0 \left(-\exp \left(\frac{L_1 - a}{a} \right) \right) + \frac{a}{b} = \tau_0,$$

3.3. EXISTENCE ET LA STABILITÉ DES SOLUTIONS POSITIVES
 PERIODIQUES AVEC : $0 < \tau < \tau_0$

avec

$$h_2 \leq \frac{d}{\lambda b - dbh},$$

alors le système a une solution positive et 1-périodique.

Remarque 3.3.1. [18]

$\forall E_1(x_1, y_1) E_2(x_2, y_2)$, on a

$$a \ln \left(\frac{y_2}{y_1} \right) - b(y_2 - y_1) = \frac{\lambda}{h} \ln \left(\frac{1 + bhx_2}{1 + bhx_1} \right) - d \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = L_1.$$

Preuve:

Posons

$$f(x) = \frac{\lambda}{h} \ln \left(\frac{1 + bhx}{1 + bh(1-p)h_2} \right) - d \ln \left(\frac{x}{(1-p)h_2} \right) = L_1 \quad \text{et} \quad f((1-p)h_2) = 0.$$

On a

$$f'(x) = \frac{(\lambda b - bdh)x - d}{c(1 + bhx)} \implies f'(x) < 0 \iff x < \frac{d}{\lambda b - dbh},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \ln \left[\left(\frac{1 + bhx}{1 + (1-p)h_2bh} \right)^{\lambda - dh} \left(\frac{1 + (1-p)h_2bh(1-p)(1-p)h_2}{(1 + bhx)x} \right)^{\lambda} \right] = +\infty.$$

Puisque

$$0 < 1 - p < 1 \implies 0 < (1-p)h_2 < h_2 \quad \text{et} \quad h_2 \leq \frac{d}{\lambda b - dbh},$$

alors

$$(1-p)h_2 < \frac{d}{\lambda b - dbh},$$

donc

$$\forall x \in \left[(1-p)h_2, \frac{d}{\lambda b - dbh} \right] \quad L_1 \leq 0.$$

Soit les deux points $((1-p)h_2, \frac{a}{b})$ (h_1, y^*) dans une intersection de deux trajectoires.

$$L_1 = a \ln \left(\frac{by^*}{a} \right) - by^* + a \implies -\frac{by^*}{a} \exp\left(-\frac{by^*}{a}\right) = \exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right)$$

cela implique

$$y^* = -\frac{a}{b} W_0 \left(\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right) \right).$$

3.3. EXISTENCE ET LA STABILITÉ DES SOLUTIONS POSITIVES
 PÉRIODIQUES AVEC : $0 < \tau < \tau_0$

Car si on pose $X = e^x = g(x) = y \implies X e^X = e^y$ donc $X = W_0(e^y)$. Pour la trajectoire qui démarre de $O^+(S, t_0)$ de point $S((1-p)h_2, y)$ avec $y \in [0, \frac{a}{b}]$ dans la section Σ_1 qui va croiser infiniment avec Σ_2 et Σ_3 d'après les effets d'impulsions.

Posons $\tau_0 = \frac{a}{b} - y^* \implies y^* = \frac{a}{b} - \tau_0 \implies \tau_0 = \frac{a}{b} W_0 \left(\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right) \right) + \frac{a}{b}$.

D'après corollaire 1.1.1 on a

$$-1 < W_0(z) < 0,$$

alors

$$-1 < W_0 \left(\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right) \right) < 0,$$

donc

$$-\frac{a}{b} < W_0 \left(\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right) \right) < 0,$$

alors

$$0 < \tau_0 < \frac{a}{b}.$$

Théorème 3.3.2 [18]

$\forall p, q \in [0, 1]$, si $h_2 < H^*$ et $0 < \tau < \tau^*$ où $\tau^* = \rho^* - \rho_0$ avec $\rho^* > \rho_0$ or $\tau^* = \frac{a}{b} - \rho_0$ alors le système (3.2) a une solution positive 1-périodique .

Preuve:

On prend la trajectoire Γ qui est démarré de $Q_1(h_2, \frac{a}{b})$ dans Σ_3 passant par $Q_2(h_1, \rho^*)$ dans Σ_2 où $\rho = \frac{a}{b}$ et $\rho^* \leq \frac{a}{b}$.

On sait que

$$a \ln \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right) - b(\rho - \rho^*) = \frac{\lambda}{h} \ln \left(\frac{1 + bh h_2}{1 + bh h_1} \right) - d \ln \left(\frac{h_2}{h_1} \right) = L_1.$$

Du même manière du théorème précédente , on trouve

$$\rho = \frac{a}{b} = -\frac{a}{b} W_0 \left(-\frac{b\rho^*}{a} \exp\left(\frac{L_1 - b\rho^*}{a}\right) \right),$$

alors

$$\rho^* \exp\left(\frac{L_2 - b\rho^*}{a}\right) = \frac{a}{b} \exp(-1),$$

pour les deux points A_1 et B_1 où

$$A_1 \left((1-p)h_2, (1-q)\frac{a}{b} \right) \quad \text{et} \quad B_1(h_1, \rho_0),$$

alors

$$\rho_0 = -\frac{a}{b}W_0 \left(-(1-q)\exp \left(\frac{L_1 - (1-q)a}{a} \right) \right)$$

on a

$$\tau^* = \rho^* - \rho_0 = \frac{a}{b} \left[\exp \left(- \left(\frac{a + L_2 - b\rho^*}{a} \right) \right) - W_0 \left(-(1-q)\exp \left(\frac{L_1 - (1-q)a}{a} \right) \right) \right],$$

par la condition du théorème 3.3.2 et les résultats du théorème 3.3.1 d'une part
 on a $\rho > \rho^*$ et $\tau^* = \rho - \rho^*$, alors $\tau^* > 0$.

D'autre part

$$0 < \rho^* \leq \frac{a}{b} \implies -\frac{a}{b} < \rho^* + \frac{a}{b}W_0 \left(-(1-q)\exp \left(\frac{L_1 - (1-q)a}{a} \right) \right) \leq \frac{a}{b},$$

car

$$-1 < W_0 \left(-(1-q)\exp \left(\frac{L_1 - (1-q)a}{a} \right) \right) < 0 \implies -\frac{a}{b} < \frac{a}{b}W_0 \left(-(1-q)\exp \left(\frac{L_1 - (1-q)a}{a} \right) \right) < 0, \text{ alors}$$

$$-\frac{a}{b} < \rho^* + W_0 \left(-(1-q)\exp \left(\frac{L_1 - (1-q)a}{a} \right) \right) \leq \frac{a}{b},$$

donc

$$-\frac{a}{b} < \tau^* < \frac{a}{b},$$

avec

$$\rho^* > \rho_0 \implies \rho^* - \rho_0 > 0 \implies 0 < \tau^* \leq \frac{a}{b}.$$

Et

$$0 < \tau < \frac{a}{b},$$

puisque $\tau^* = \frac{a}{b}$ alors $\tau \in [0, \tau]$.

3.4 Analyse de la stabilité exponentielle

On note par $\varphi(t)$ l'unique solution du système (3.2) le flot du système dynamique (3.2).

On a $x_0 = x(0)$, on suppose que le flot applique au temps T_1 donc

$$x(T) = \varphi(T, x_0), \quad \text{où } 0 < t \leq T_1.$$

$x(T^+)$: l'état de population de proie après le traitement chimique est déterminé au façon de

$$x(T^+) = \theta(x(T)) = \theta(\varphi(T, x_0)).$$

Soit l'opérateur

$$\psi(T, x) = (\psi_1(T, x), \psi_2(T, x)) = \theta(\varphi(T, x)),$$

avec

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \text{ et } \theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\theta_1 = (1 - p)x \quad \text{et} \quad \theta_2 = (1 - q)y.$$

Proposition[18]

1. x est un solution de période T du système (3.2) ssi :

$$\psi(T, x_0) = x_0,$$

2. x_0 est un point fixé de $\psi(T, x_0)$ est exponentiellement stable ssi le rayon du spectre $\rho\left(\frac{d\psi(T, x_0)}{dt}\right)$ est inférieur de 1, avec

$$\begin{cases} \phi(t) = (1 - p)h_2 \exp(at), \\ \varphi(t) = 0. \end{cases}$$

Preuve:

On a

$$\dot{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \end{pmatrix} \psi(t) ,$$

Où

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Or

$$\dot{\psi}(t)(\phi(t), \varphi(t)) = \begin{pmatrix} a & -b\phi(t) \\ 0 & -d + \frac{\lambda b\phi(t)}{1+bh\phi(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \psi_{11}(0) & \psi_{12}(0) \\ \psi_{21}(0) & \psi_{22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{11}(t) = a\psi_{11} - b((1-p)h_2 \exp(at))\psi_{21} & (1) \\ \dot{\psi}_{12}(t) = a\psi_{12} - b(1-p)h_2 \exp(at)\psi_{22}(t) & (2) \\ \dot{\psi}_{21}(t) = \left[-d + \frac{\lambda b(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}\right]\psi_{21}(t) & (3) \\ \dot{\psi}_{22}(t) = \left[-d + \frac{\lambda b(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}\right]\psi_{22}(t) & (4) \end{cases}$$

Pour $0 < t < T$ de (4) on a

$$\frac{\dot{\psi}_{22}}{\psi_{22}} = \left[-d + \frac{\lambda b(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}\right] dt,$$

alors

$$\psi_{22}(t) = C_1 \exp\left(\int_0^t \left[-d + \frac{\lambda b(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}\right] dt\right),$$

donc

$$\psi_{22}(t) = C_1 e^{-dt} [1 + (1-p)hh_2 e^{at}]^{\frac{\lambda}{ah}},$$

puisque

$$\psi_{22}(0) = 1 = C_1 e^0 [1 + (1-p)hh_2 e^0]^{\frac{\lambda}{ah}},$$

$$C_1 = [1 + (1-p)hh_2 e^0]^{-\frac{\lambda}{ah}},$$

finalement , on obtient

$$\psi_{22}(t) = \left[1 + (1-p)hh_2e^t\right]^{\frac{-\lambda}{ah}} e^{-dt} \left[1 + (1-p)hh_2e^{at}\right]^{\frac{\lambda}{ah}},$$

et

$$\psi_{22}(T) = \left[1 + (1-p)hh_2e^T\right]^{\frac{-\lambda}{ah}} e^{-dT} \left[1 + (1-p)hh_2e^{aT}\right]^{\frac{\lambda}{ah}},$$

donc

$$\psi_{22}(T) = (1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+(1-p)bhh_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}}.$$

De (3) on a

$$\frac{\dot{\psi}_{21}}{\psi_{21}} = \left[-d + \frac{\lambda b(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh((1-p)h_2 \exp(at))}\right] dt,$$

alors

$$\psi_{21}(t) = C_2 \left[1 + (1-p)hh_2e^{at}\right]^{\frac{\lambda}{ah}} e^{-dt},$$

et puisque

$$\psi_{21}(0) = 0,$$

Puisque $C_2 = 0$, on trouve

$$\psi_{21}(t) = 0 \tag{5}$$

remplaçons (5) dans (1) , on trouve

$$\frac{\dot{\psi}_{11}}{\psi_{11}} = a dt,$$

$\psi_{11}(t) = C_3 e^{at}$ donc $C_3 = 1$, alors $\psi_{11}(t) = e^{at}$

$$\psi(T) = \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{aT} & \psi_{12}(t) \\ 0 & (1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+(1-p)bhh_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} \end{pmatrix}$$

$$\psi(T) = \begin{pmatrix} 1 & K(T) \\ 0 & (1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+(1-p)bhh_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} \end{pmatrix}$$

alors

$$|\psi(T)| = (1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+(1-p)bhh_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} < 1,$$

car $0 < q < 1$ et $0 < p < 1$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié un système de Proie-Prédateur sans impulsion et avec impulsion, l'étude qualitative montre que :

- 1. Le système (2.1) admet une solution maximale positive et périodique .*
- 2. Les points d'équilibre du système (2.1) sont : $(0, 0)$ est instable et $(\frac{d}{(\lambda b - b d h)}, \frac{a}{b})$ est stable .*
- 3. Les portraits de phase sont fermés pour chaque point de départ (x_0, y_0) .*

Dans le cas d'impulsion on a trouvé que les solutions sont asymptotiquement stables et périodiques sous certaines conditions .

Bibliographie

- [1] A.LAKMECHE AND O. ARINO ,Bifurcation of Non-trivial Periodic Solutions of Impulsive Differential Equations Arising Chemotheraping Treatment , *dynamics of continous ,discrete and impulsive systems (2000)265-278*
- [2] A.LAKMECHE AND O.ARINO ,Non Linear Mathematical Model of Pulsed-Therapy of Heterogenous Tumor , *Nonlinear Analysis (RWA)2(2001)455-465*
- [3] A.M.SAMOILENKO AND N.A.PERESTYUK , Implusive Diffrential Equations , *World Scientific,1995.*
- [4] C.FAYCAL ,Un système de Lotka-Volterra avec ou sans impulsion , *Nonlinear Analysis (RWA)2(2001)455-465*
- [5] G.BALLINGER , X.Z.LIU,Permanence of population growth models with impulsive effects ,*Math.Comput.Model.26(1997)59-72.*
- [6] H.J.BARCLAY,Models for pest control using predator release , habitat management and pesticide release in combination, *J.Appl.Ecol.19(1982)337-348.*
- [7] J.A.DIEUDONNE , Eléments d'analyse .Tome I.Fondements de l'analyse moderne. 3éme Edition .Paris Gauthier -Villars , 1979
- [8] G.W.KELLEY ,A.C.PETERSON , The Theory of Differential Equations, Classical and Qualitative ,*Second Edition , Springer , 2010*
- [9] J. HOFBAUER AND K.SIGMUND , Evolutionary Games and Population Dynamics , *Cambridge University Press ,1998*
- [10] J.A.DIEUDONNE , Eléments d'analyse .Tome I.Fondements de l'analyse moderne. 3éme Edition .Paris Gauthier -Villars , 1979
- [11] L.DONG , I.CHEN , L.SUN AND J.JIA ,Ultimate Behavior of Predator -Prey System With Constant Harvesting of The Prey Impulsively , *J.appl .Math . Computing vol.22(2006),No 1-2, pp 149-158*

- [12] R.DAJOZ ,Dynamique de population , *MASSON et Cie , Paris , 1974*
- [13] R.CHABOUR , B.KALITINE AND R. OUTBIB , Semi-definite Lyapunov functions stability and stabilization, *Springer -Verlag London Limited ,Math . Control Signals Systems (1996)95-106*
- [14] S.AHMED ,I.M.STAMOVA ,Asymptotic stability of competitive systems with delays and impulsive perturbations , *J.Math.Anal.App.334(2007) 686-700*
- [15] T.A . BURTON, Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations , *Academic Press , inc , 1985*
- [16] X.ZIAO , L.WANG ,P.YU Stability of Dynamical System , *Elsevier,première edition 2007*
- [17] W.ABID Analyse de la dynamique de certains modèles proie-prédateur et applications, *thèse de doctorat, 2016*
- [18] Z .Teng Existence and stability of periodic solution of a predator–prey model with state-dependent impulsive effects ,*Mathematics and Computers in Simulation 79 (2009) 2122–2134*
- [19] T.Benouaz and O.Arino, (1995) *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire,94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.*