

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et de l'Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation
Thème

Étude d'un Système Dynamique d'ordre Fractionnaire

Présenté Par :

Melle. KHALDI Yousra Rania

Devant le jury composé de :

Pr. HAMMOUDI Ahmed	Professeur	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. MEKHALFI Kheira	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr. BENTOUT Sofiane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
Dr. MAMMAR Imane	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2021/2022

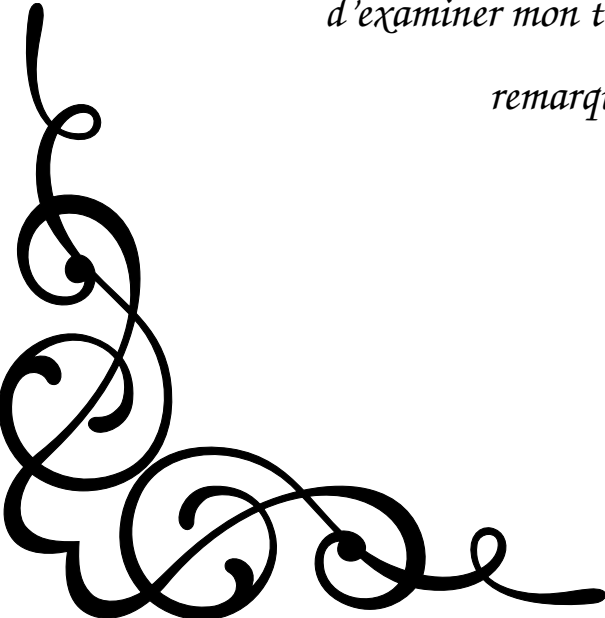
Remerciement



*Mes remerciements au Dieu tout puissant pour
la volonté, la santé et la patience qu'il m'a
donné durant toutes ces années d'études.*

*Mes premiers remerciements vont à M^{me}
Mammar Imane qui m'a proposé ce thème et
pour ses conseils pertinents, et ses orientations
sages, sa patience et sa vigilance.*

*Je remercie également les membres de jury pour
l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant
d'examiner mon travail, et pour tous leurs
remarques et conseils.*



Dédicace



*Je dédie ce modeste travail tout
d'abord :*

*A mes très chers parents, qui sont la
lumière de ma vie, qui ont tant
soufferts et qui ont sacrifiés tellement
de choses pour que je sois heureuse,
pour leurs conseils, leur affection et
leurs encouragements. Je vous remercie
pour tout vos efforts fournis pour moi,
que Dieu vous garde, vous protège, et
vous bénisse la vie.*

*A mes sœurs et mon frère, qui me
donnent de l'amour et de la vivacité.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours
encouragé, et à qui je souhaite plus de
succès.*

Merci !



Sommaire

Notations et abréviations	5
Introduction Générale	6
I Préliminaires	8
I.1 Équations différentielles ordinaires	8
I.2 Calcul fractionnaire	9
I.2.1 Fonctions spéciales	9
I.3 Intégrale fractionnaire	13
I.3.1 Intégrale de Riemann-Liouville	13
I.4 Dérivée fractionnaire	14
I.4.1 Dérivée fractionnaire au sens du Riemann-Liouville	14
I.4.2 Dérivée fractionnaire au sens du Caputo	16
I.5 Équation différentielle à dérivée fractionnaire	17
I.5.1 Existence et unicité	17
II Stabilité d'un système dynamique d'ordre entier et fractionnaire	19
II.1 Stabilité d'un système dynamique d'ordre entier	19
II.1.1 Stabilité d'un Point d'équilibre	19
II.1.2 Stabilité d'un système linéaire	20
II.1.3 Stabilité d'un système par linéarisation	21
II.1.4 Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (Tr, det)	21
II.1.5 Stabilité au sens de Lyapunov	23
II.2 Théorie de bifurcation	25
II.2.1 Définition de bifurcation	25
II.2.2 Diagramme et portrait de phase de bifurcation	25
II.2.3 Type de bifurcation	26

II.3	Stabilité des systèmes d'ordre non entier	29
II.3.1	Point d'équilibre	30
II.3.2	Stabilité des systèmes fractionnaire linéaire	30
II.3.3	Stabilité des systèmes fractionnaire non linéaire	33
II.3.4	La méthode directe de Lyapunov	34
II.3.5	La méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation)	35
III	Applications	37
III.1	Un modèle de finance	37
III.1.1	Points d'équilibre	38
III.1.2	Stabilité des points d'équilibre	38
III.1.3	Extension au cas fractionnaire	40
III.1.4	Les points d'équilibre	40
III.1.5	Stabilité des points d'équilibre	41
III.2	Un modèle de Lotka-Voltera	42
III.2.1	Les points d'équilibre	43
III.2.2	La nature des points d'équilibre	43
III.2.3	Extension au cas fractionnaire	44
III.2.4	Les points d'équilibre	45
III.2.5	La stabilité des points d'équilibre	45
	Conclusion Générale	48
	Bibliographie	49

Notations et abréviations

EDO	Une équation différentielle ordinaire.
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réelles.
\mathbb{C}	L'ensemble des nombres complexes.
z	un nombre de complexe.
$\Re(z)$	La partie réelle de z .
$\Im(z)$	La partie imaginaire de z .
Γ	La fonction Gamma.
B	La fonction Bêta.
E_α	La fonction de Mittag-Leffler.
ψ	la fonction digamma.
I^α	L'intégrale fractionnaire.
D^α	La dérivée fractionnaire.
$J_f(x_0)$	La matrice jacobienne de la fonction f au point x_0 .

Introduction Générale

Les processus dynamiques sont souvent modélisés par des équations différentielles, du fait que les équations, décrivant un phénomène quelconque caractérisé par une ou plusieurs variables d'état, dépendent continûment du temps.

Le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini est lié directement à la stabilité, c'est l'un des aspects qualitatifs le plus important dans les systèmes dynamiques et leur comportement asymptotique, il a fait l'objet d'une recherche depuis le *XIX*^{ème} siècle.

La théorie des «systèmes dynamiques» a connu une longue histoire, relativement progressive et cumulative, depuis les travaux pionniers d'Henri Poincaré jusqu'aux années soixante. c'est une théorie développée par des mathématiciens en particulier, Alexandre Lyapunov à la fin du *XIX*^{ème} siècle, les travaux de George D. Birkhoff sur la topologie des systèmes dynamiques, les recherches de Balthasar Van der Pol et aussi d'autres ingénieurs dans les années 1930.

Depuis 1920 jusqu'à présent les systèmes dynamiques ont aidé non seulement à mieux comprendre le monde qui nous entoure, mais aussi à apporter des applications dans beaucoup de disciplines scientifiques par exemple : La biologie (dynamique de population), la médecine, la physique (mécanique céleste, météo...), l'électronique (les circuits électroniques, l'informatique (traitement de l'image), cryptographie (chiffrement des messages, images).

Le calcul fractionnaire est l'une des théories les plus populaires, car il peut apporter un résultat efficace à la modélisation, les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu des intérêts considérables dans de nombreux domaines. Son origine remonte à la fin du *XVII*^{ème} siècle, l'époque où Newton et Gottfried Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Gottfried Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigner la n ième dérivée d'une fonction f , mais L'Hôpital a répondu : que signifie $\frac{d^n}{dt^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$, ce problème, est aujourd'hui admis comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire .

Le 30 décembre 1695, Leibniz écrit à L'Hôpital comme suit : "...C'est un paradoxe

apparent, à partir duquel un jour, des conséquences utiles seront tirées . . .", on peut dire que cette lettre du 30 décembre est la naissance du calcul fractionnaire.

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaires a été défini aux *XIX*^{ème} siècle par Riemann-Liouville et Leitinkov. Leur but est de prolonger la dérivation ou l'intégration en utilisant non seulement un ordre entier mais aussi un ordre non entier.

En 1930, le calcul fractionnaire a été utilisé en mécanique et en électronique, et depuis les années 60 le calcul fractionnaire a été reconnu comme l'un des meilleurs outils pour d'écrire les processus de mémoire longue. De tels modèles sont intéressants pour les ingénieurs et les physiciens mais aussi pour les purs mathématiciens. Les plus importants parmi ces modèles sont ceux d'écrits par des équations différentielles contenant des dérivées d'ordre fractionnaire.

Dans ce mémoire on a présenté trois chapitres, **Le premier chapitre**, on a donner des notions fondamentales sur les équations différentielles ordinaires et des définitions relatives au calcul fractionnaire (fonction Gamma, Bêta, Mittag-Leffler) et aux opérateurs fractionnaires, et quelques propriétés principales des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire.

Dans **le deuxième chapitre**, on a donner les notions générales d'un système dynamique d'ordre entier et non-entier (linéaire et non-linéaire) avec quelques résultats de stabilité.

Le troisième chapitre est consacré à l'application, on a étudié deux modèles le premier un modèle en finance et le deuxième un modèle de Lotka-Voltera, on a étudié les deux modèles dans le cas des dérivées d'ordre entier et dans le cas des dérivées d'ordre fractionnaire .

À la fin on a terminé avec une conclusion et quelques bibliographies.

Préliminaires

Dans ce chapitre on va présenter quelques définitions, théorèmes et résultats préliminaires qu'on a utilisé dans le chapitres deux et trois.

I.1 Équations différentielles ordinaires

Est U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition I.1.1. [16] Une équation différentielle ordinaire du 1^{er} ordre (EDO) sur U est une relation du type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (\text{I.1})$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Remarque I.1.1. Si $n = 1$, on parle d'équation différentielle scalaire.

Si $n > 1$, on parle d'équation différentielle vectorielle.

Définition I.1.2. [11] Soit x une fonction d'une partie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n

1. La fonction x est dite solution de l'équation (I.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continument dérivable sur I , si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, et si x satisfait la relation (I.1) sur I .
2. Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné, la fonction x est dite solution du problème à valeur initiale associé à l'équation (I.1) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x soit solution de l'équation (I.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

Définition I.1.3. [22] Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème (I.2) est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.

Théorème I.1.1. [17] Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$ le problème (I.2) admet au moins une solution.

Définition I.1.4. [11] Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que $f = f(t, x)$ est localement lipschitzienne en x si pour tout fermé et borné (compact) K dans U , il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans K .

Théorème I.1.2. [11] Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, si la fonction $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitzienne en x alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$ le problème (I.2) admet une solution unique.

Lemme I.1.1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné avec $a < b$ et f une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est continue par morceaux si et seulement s'il existe une fonction continue $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction en escalier $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

Définition I.1.5. [9] On dit qu'une fonction continue $Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe \mathbb{K} si elle est strictement croissante et $Q(0) = 0$.

Définition I.1.6. [9] Deux fonctions de classe \mathbb{K} , Q_1 et Q_2 sont dites fonctions avec rythme de croissance global de même niveau s'il existe $c_i > 0$, ($i = 1, 2$) tel que

$$c_1 Q_1(r) \leq Q_2(r) \leq c_2 Q_1(r), \quad (r \in \mathbb{R}_+).$$

I.2 Calcul fractionnaire

I.2.1 Fonctions spéciales

Généralement les fonctions spéciales sont des fonctions analytiques non élémentaires qui sont apparues comme solutions d'équations mathématiques, comme la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler.

Fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma. Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel à des nombres réelles et complexes.

Définition I.2.1. [6] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\Re(z) > 0). \quad (\text{I.3})$$

Cette intégrale est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ si, $\Re(z) > 0$.

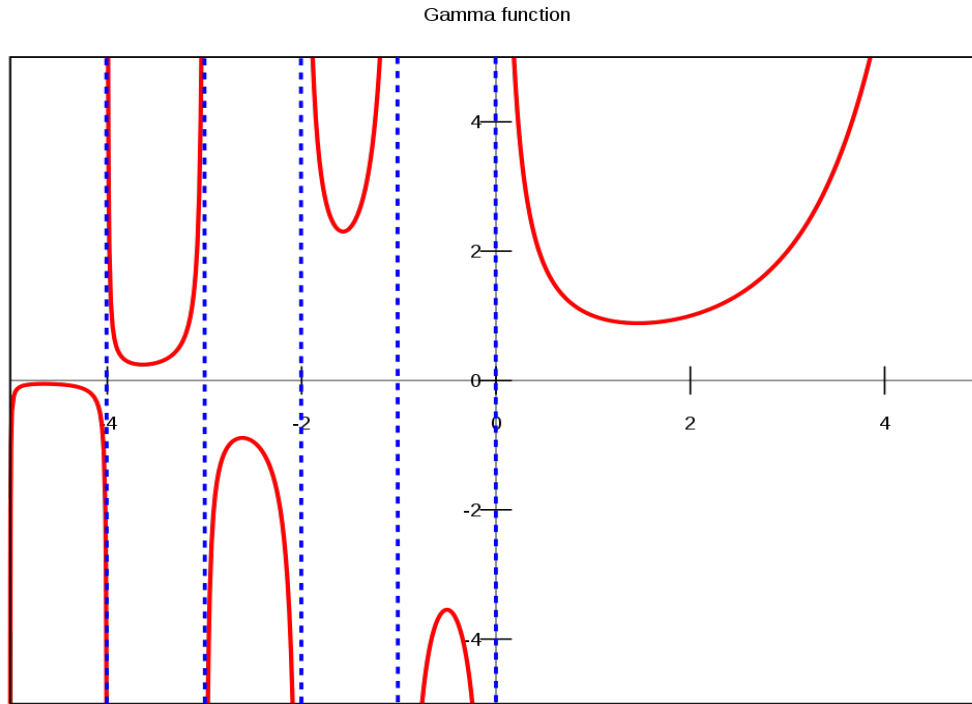


Figure I.1 – La fonction de Gamma.

Théorème I.2.1. [1] La fonction Gamma est de classe C^∞ et définie sur $]0, +\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule

$$\Gamma^k(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^k dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{I.4})$$

Proposition I.2.1. [6] La fonction Gamma satisfait l'équation fonctionnelle suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

On peut démontrer par une intégration par parties de l'intégrale (III.1.1), en effet

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= [e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \end{aligned}$$

donc :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

En particulier $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{(1-1)}dt = 1,$$

alors pour $n \in \mathbb{N}$, On a

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!. \quad (\text{I.5})$$

Proposition I.2.2. [6] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \quad (\text{I.6})$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Proposition I.2.3. [10] La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\psi(z), \quad (\text{I.7})$$

où ψ est la fonction digamma donnée par

$$\psi(z) = \frac{d}{dx} \ln[\Gamma(z)].$$

Proposition I.2.4. [1] La fonction Gamma peut être écrite en termes de deux composantes, comme suit

$$\Gamma(z) = \gamma(z, a) + \Gamma(z, 0), \quad (a \in \mathbb{R}_+). \quad (\text{I.8})$$

Où $\gamma(z, a)$ la fonction Gamma incomplète inférieure donnée par

$$\gamma(z, a) = \int_0^a e^{-t}t^{z-1}dt, \quad (\Re(z) > 0),$$

et $\Gamma(z, a)$ la fonction Gamma incomplète supérieure. Elle est définie par

$$\Gamma(z, a) = \int_a^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad (\Re(z) > 0).$$

Fonction Bêta

Définition I.2.2. [8] La fonction Bêta est définie pour tous nombres complexes z et ω de parties réelles strictement positives par l'intégral d'Euler de seconde espèce

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad \Re(\omega) > 0. \quad (\text{I.9})$$

Cette intégrale est convergente pour tout $z, \omega \in \mathbb{C}$ si $\Re(z) > 0$ et $\Re(\omega) > 0$.

Proposition I.2.5. [10] Pour tous z et $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$ et $\Re(\omega) > 0$, la fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}. \quad (\text{I.10})$$

D'où il résulte que cette fonction a les propriétés

1. $B(z, \omega) = B(\omega, z)$
2. $B(z, \omega) = B(z+1, \omega) + B(z, \omega+1)$
3. $B(z, \omega+1) = \frac{\omega}{z} B(z+1, \omega) = \frac{\omega}{z+\omega} B(z, \omega)$
4. $B(z, \omega) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1} (\cos t)^{2\omega-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+\omega}} dt$
5. $B(z, z) = 2^{1-2z} B(\frac{1}{2}, z)$

Proposition I.2.6. Les dérivées partielles de la fonction bêta utilisent les équations fonctionnelles de Gamma

$$\frac{\partial}{\partial z} B(z, \omega) = B(z, \omega) \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \right) = B(z, \omega) (\psi(z) - \psi(z+\omega)). \quad (\text{I.11})$$

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler notée $E_{\alpha, \beta}$, est une fonction spéciale qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres complexes α et β .

Définition I.2.3. [10] Pour $z \in \mathbb{C}$ la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha, \beta}$ est définie comme suit

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (\text{I.12})$$

Pour $\beta = 1$

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Remarque I.2.1. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$ on a

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (\text{I.13})$$

Donc, pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

Exemple I.2.1. Pour des valeurs spéciale de α et β on, a

1. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$,
2. $E_{1,3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$,
3. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$,
4. $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$,
5. $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$.

Propriétés I.2.1. [6]

1. $\forall m \in \mathbb{N}, E_{1,m} = \frac{1}{z^{m-1}} [e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}]$,
2. $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) dt = \frac{1}{z-1}$.

I.3 Intégrale fractionnaire

I.3.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, On considère l'intégrale

$$\begin{aligned} I_a^{(1)} f(t) &= \int_a^t f(s) ds, \\ I_a^{(2)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(s) ds \\ &= \int_a^t f(s) ds \int_s^t dt_1 \\ &= \int_a^t (t-s) f(s) ds, \\ I_a^{(3)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} f(s) ds \\ &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} (t-s) f(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-s)^2 f(s) ds. \end{aligned}$$

Et par récurrence dans le cas général, on a la formule de Cauchy répété n-fois :

$$\begin{aligned} I_a^{(n)} f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

D'après la généralisation de la fonction factorielle par la fonction Gamma $(n-1)! = \Gamma(n)$; On obtient un sens même pour des valeurs non-entières de n , et on a la définition suivante

Définition I.3.1. [10] [4] Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville (notée par R-L) est donnée par

$$I_f^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (x > a). \quad (\text{I.14})$$

Et pour $a = 0$, on a :

$$I_0^\alpha = I^\alpha.$$

Proposition I.3.1. [10] [1] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$ et $f \in C([a, b])$ on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x),$$

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

I.4 Dérivée fractionnaire

I.4.1 Dérivée fractionnaire au sens du Riemann-Liouville

Définition I.4.1. [1] Soient $\Re(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C([a, b])$. On appelle la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$

$$D_a^\alpha f(x) = D^n [I_a^{n-\alpha} f(x)],$$

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a. \quad (\text{I.15})$$

Où $D^n = \left(\frac{d}{dx} \right)^n$.

En particulier

1. pour $\alpha = 0$, on a

$$D_a^0 f(x) = D^1 [I^1 f(x)] = f(x).$$

2. pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a

$$D_a^n f(x) = D^{n+1} [I_a^{n+1-n} f(x)] = D^{n+1} [I_a^1 f(x)] = D^n f(x).$$

Théorème I.4.1. [10] Soient f et g deux fonctions dérivables au sens de Riemann-Liouville alors pour $\Re(\alpha) \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$D_a^\alpha (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \mu D_a^\alpha g(x).$$

Lemme I.4.1. [1] Soient $f \in C([a, b])$ et $\Re(\alpha) > 0$ alors l'intégrale :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x). \quad (\text{I.16})$$

En effet

en utilisant la définition (I.4.1), on a

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) &= D^n [I_a^{n-\alpha} (I_a^\alpha f(x))] \\ &= D^n [I_a^n f(x)] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Lemme I.4.2. Soient $n-1 \leq \alpha < n$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. En supposant que $D_a^\alpha f(x) = 0$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-n+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha-n}, \quad (\text{I.17})$$

où c_k sont des constantes quelconques.

Preuve. On a $D_a^\alpha f(x) = 0$, alors

$$(D_a^n I_a^{n-\alpha} f)(x) = 0 \implies (I^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k,$$

par composition avec I_a^α , on obtient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^{n-\alpha} f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_a^\alpha (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}, \end{aligned}$$

en remplace (I_a^n) par son expression

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(I_a^{n-\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha}, \end{aligned}$$

par une dérivation d'ordre n par rapport à x

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-n+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha-n}.$$

Proposition I.4.1. [1] Soient $n > \Re(\alpha) > n-1 > 0$, $m > \Re(\beta) > m-1 > 0$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$, alors

1. Si $\Re(\alpha) > \Re(\beta)$, alors pour $f \in C([a, b])$ on a

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x). \quad (\text{I.18})$$

2. Si $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\Re(\alpha) > k > 0$, on a

$$(D_a^k I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-k} f(x)$$

Proposition I.4.2. Soient $\Re(\beta) > 0$ et $\Re(\alpha) > 0$, on a

$$D_a^\beta \circ D_a^\alpha \neq D_a^\alpha \circ D_a^\beta. \quad (\text{I.19})$$

Donc la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est non-commutative.

I.4.2 Dérivée fractionnaire au sens du Caputo

Définition I.4.2. [4] Soient $\Re(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \Re(\alpha) + 1$ et $f \in C^n([a, b])$. On appelle la dérivée au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^c D_a^\alpha$, et définie par

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha &= I_a^{n-\alpha} [D^n f(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad x > a. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Si $a = 0$ on note ${}^c D_0^\alpha$ par ${}^c D^\alpha$.

Propriétés I.4.1. [2] Si $\Re(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$, la relation entre la

dérivée de Riemann-Liouville (I.15) et celle de Caputo (I.20) est donnée par

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}.$$

Lemme I.4.3. [15] Soient $\Re(\alpha) \in]n - 1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n([a, b])$, alors

$$({}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x). \quad (\text{I.21})$$

I.5 Équation différentielle à dérivée fractionnaire

Soit le système suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & t \in J = [0, T], & 1 < \alpha < 2. \\ y(0) = y_0 & y(T) = y_a. \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Où $f : [0, T] \times E \longrightarrow E$ et $y_0, y_a \in E$, avec E un espace de Banach.

I.5.1 Existence et unicité

Définition I.5.1. Une fonction $y \in [0, T] \longrightarrow E$ est dite solution du système de (I.22), si y satisfait l'équation et la condition initiale du (I.22).

Lemme I.5.1. Soit $1 < \alpha < 2$ et $f : [0, T] \longrightarrow E$ une fonction continue. le problème aux limites linéaire (I.22), admet une solution unique donnée par

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t, s) f(s) ds, \quad (\text{I.23})$$

avec

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_a,$$

et

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t - s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T - s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ -\frac{t}{T}(T - s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq T \end{cases}.$$

Soit le problème aux conditions initiales suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ {}^c D^k y(0) = y_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

Avec, $n - 1 < \alpha < n$ et $t \in [0, T]$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemme I.5.2. [21] *Si la fonction f est continue, alors le problème (I.24) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire suivante*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds.$$

Théorème I.5.1. [21] *Soit $K > 0$, $h^* > 0$ et $y_0^i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. On définit $G = [0, h^*] \times \mathbb{R}$ et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant la condition de Lipschitz par rapport à y suivante*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|.$$

Posons

$$h = \min\left\{h^*, \left(\frac{K\Gamma(\alpha+1)}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right\},$$

avec

$$M = \sup_{(t,y) \in G} |f(t, y)| \quad K \geq \frac{Mh}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Alors il existe une unique solution y du problème (I.24) tel que $y \in \mathbb{C}[0, h]$.

Stabilité d'un système dynamique d'ordre entier et fractionnaire

Dans ce chapitre on va donner quelques notions sur la stabilité des systèmes dynamique d'ordre entier et d'ordre fractionnaire.

II.1 Stabilité d'un système dynamique d'ordre entier

Dans le cas continu un système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \quad t_0 \in I \subset \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 2$.

II.1.1 Stabilité d'un Point d'équilibre

Définition II.1.1. [2] On dit que x_e est un point d'équilibre du système (II.1) si $f(x_e) = 0$.

1. x_e est un point d'équilibre stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall t > 0$

$$\|x_0 - x_e\| \leq \eta \implies \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.2})$$

2. x_e est dit asymptotiquement stable, s'il est stable et si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0. \quad (\text{II.3})$$

3. Un point d'équilibre du système (II.1) est dit attractif s'il existe un voisinage $U(x_e)$, tel que

$$\exists x_e \in U(x_e) \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = x_e. \quad (\text{II.4})$$

Définition II.1.2. *L'origine du système non autonome*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

est uniformément asymptotiquement stable si

1. *L'origine est uniformément stable i.e pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $\|x(t_0)\| < \delta(\epsilon)$ alors $\|x(t)\| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$.*
2. *il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x(t_0)\| < \delta$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.*

II.1.2 Stabilité d'un système linéaire

Soit le système linéaire autonome suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

où A une matrice carré de dimension $n \times n$, $\det(A) \neq 0$.

Remarque II.1.1. *Un tel système ne possède qu'un seul point d'équilibre l'origine de l'espace d'état.*

Définition II.1.3. [23] *L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (II.5) si*

$$\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (\text{II.6})$$

Définition II.1.4. [23] *Le système linéaire (II.5) est dit stable ou asymptotiquement stable si l'origine est stable (asymptotiquement stable respectivement), dans ce cas la matrice A de ce système est dite stable (asymptotiquement stable).*

Théorème II.1.1. [23] *Le point d'équilibre du système linéaire (l'origine) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative.*

On appelle le domaine de stabilité, le demi-plan gauche ouvert du plan complexe, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexe à partie réelle strictement négative.

On dit alors que A est une matrice de stabilité si ses valeurs propres appartiennent au domaine de stabilité.

II.1.3 Stabilité d'un système par linéarisation

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

avec $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ deux fonctions non linéaire, $x, y \in \mathbb{R}^n$, (x_e, y_e) un point d'équilibre du système (III.10).

On pose les coordonnées locales (ou variable locale) $\begin{cases} u(t) &= x(t) - x_e \\ v(t) &= y(t) - y_e \end{cases}$ et on effectue un développement en série de Taylor au premier ordre des fonctions f_1, f_2 au voisinage de (x_e, y_e)

$$\begin{cases} \dot{u} &= \dot{x} = f_1(x_e, y_e) + \frac{\partial f_1}{\partial x}|_{(x_e, y_e)}(x - x_e) + \frac{\partial f_1}{\partial y}|_{(x_e, y_e)}(y - y_e) \\ \dot{v} &= \dot{y} = f_2(x_e, y_e) + \frac{\partial f_2}{\partial x}|_{(x_e, y_e)}(x - x_e) + \frac{\partial f_2}{\partial y}|_{(x_e, y_e)}(y - y_e) \end{cases}.$$

Or on a $f_1(x_e, y_e) = f_2(x_e, y_e) = 0$, d'où

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J_e \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

avec J est la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre.

$$J_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}|_{(x_e, y_e)} & \frac{\partial f_1}{\partial y}|_{(x_e, y_e)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}|_{(x_e, y_e)} & \frac{\partial f_2}{\partial y}|_{(x_e, y_e)} \end{pmatrix}.$$

D'où on obtient un système linéaire qui approxime le système de départ au voisinage d'un point d'équilibre (x_e, y_e) .

II.1.4 Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (Tr, det)

On peut utiliser la méthode analytique pour déterminer la nature du point d'équilibre (x_e, y_e) .

La matrice A admet des valeurs propres solution de l'équation caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \text{ avec } \begin{cases} \text{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

Donc la nature des points d'équilibre dépend du signe du discriminant

$$\Delta = [Tr(A)]^2 - 4det(A).$$

• 1^{er} Cas $\Delta = 0$

On a une valeur propre double : λ_0 et $det(A) = \frac{1}{4}[Tr(A)]^2$

1. Si $\lambda_0 > 0$, $Tr(A) = 2\lambda_0 > 0$ et $det(A) = \lambda_0^2 > 0$ c'est-à-dire l'origine est une étoile ou un nœud dégénéré instable.
2. Si $\lambda_0 < 0$ et $Tr(A) = 2\lambda_0 < 0$ c'est-à-dire l'origine est une étoile ou un nœud dégénéré stable.

• 2^{eme} Cas $\Delta > 0$

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes.

1. Si $det(A) < 0$ et les valeurs propres de la matrice A sont de signes opposées alors, l'origine est un point selle (instable).
2. Si $det(A) > 0$ et $Tr(A) < 0$, alors l'origine est un nœud stable.
3. Si $det(A) > 0$ et $Tr(A) > 0$, alors l'origine est un nœud instable.

• 3^{eme} Cas $\Delta < 0$

On a deux valeurs propres conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$

1. Si $Tr(A) > 0$ et la partie réelle des valeurs propres est positive, alors l'origine est un foyer instable.
2. Si $Tr(A) < 0$ et la partie réelle des valeurs propres est négative, alors l'origine est un foyer stable.
3. Si $Tr(A) = 0$ et la partie réelle des valeurs propres est nulle, alors l'origine est un centre.

On peut résumer la stabilité dans le plan $(x, y) = (Tr(A), det(A))$ et l'équation de la parabole $\Delta = 0$ correspondent à $det(A) = \frac{1}{4}[Tr(A)]^2$, cette parabole divise le plan en deux régions :

$\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

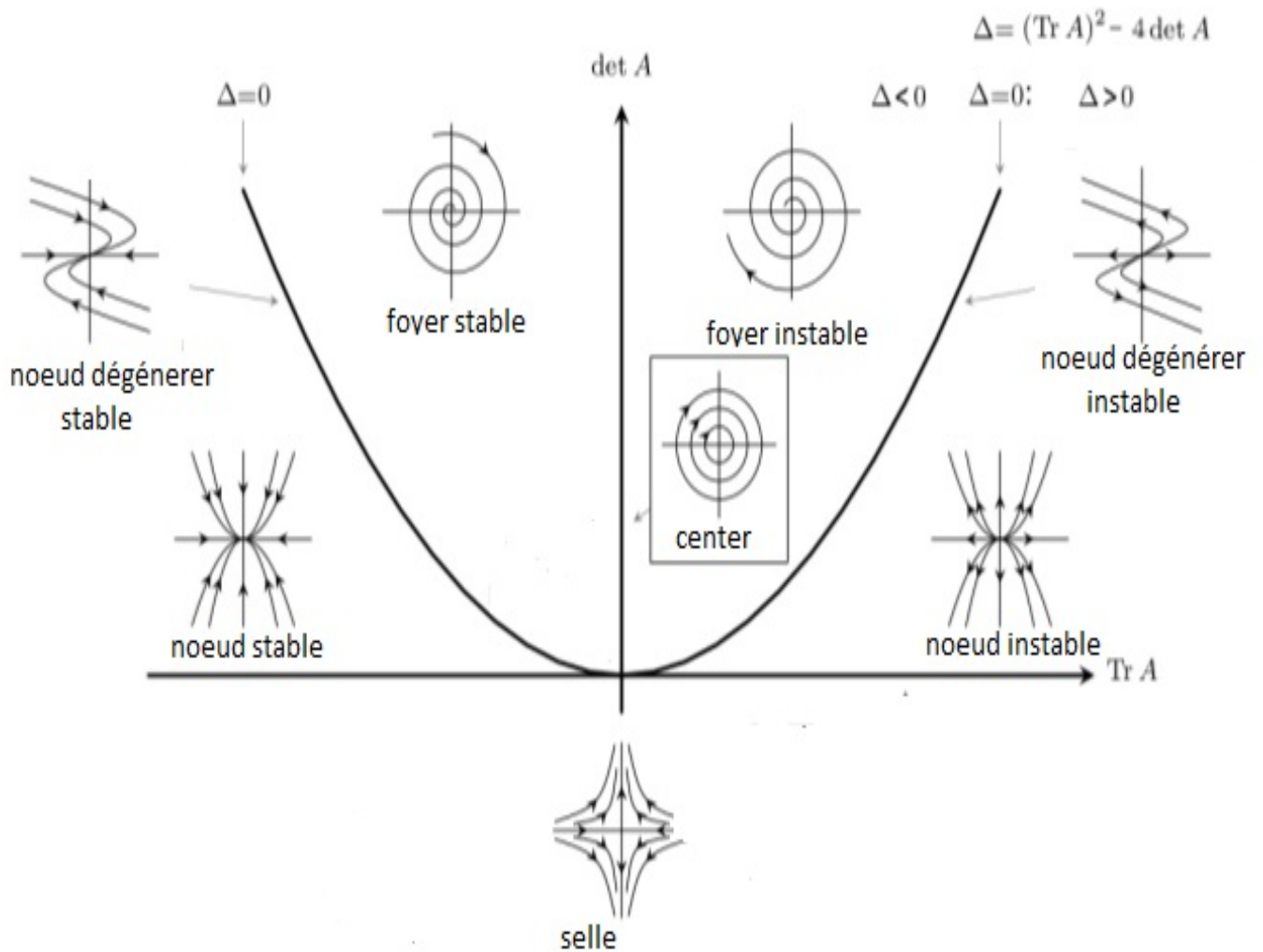


Figure II.1 – Portrait de phase de système $\dot{X} = AX$.

II.1.5 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{II.8}$$

avec f une fonction non linéaire, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition II.1.5. [9] Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $V(0) = 0$

— On dit que V est définie positive si

$$V(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

— On dit que V est semi-définie positive si

$$V \geq 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Théorème II.1.2. [9] Si x_e un point d'équilibre du système (II.8) et D un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_e si il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement dérivable telle que

1. $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$, dans $D - \{x_e\}$ alors on a
2. $\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} \leq 0$, dans D , alors x_e est stable.
3. $\dot{V}(x) < 0$ dans D , alors x_e est asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et $r \in [0, \epsilon]$ tel que $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\} \subset D$, soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ on a $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ d'où

$$\alpha > x_e.$$

Soit $\beta \in [x_e, \alpha]$ et $\Omega_\beta = \{x \in B_r, V(x) \leq \beta\}$,

alors Ω_β est invariant \implies on a propriété que tout trajectoire commençant dans Ω_β à l'instant $t = 0$ reste dans Ω_β , $\forall t \geq 0$.

Puisque $\dot{V}(x) \leq 0 \implies V[x(t)] \leq V[x(0)] \leq \beta, \forall t \geq 0$.

Et puisque Ω_β est un compact, alors le problème (II.8) admet une unique solution définit pour toute $t \geq 0$ avec $x(0) \in \Omega_\beta$.

Comme V est continue, $V(0) = 0$ alors $\exists \delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \delta \implies V(x) < \beta,$$

alors $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r \subset D$, et $x(0) \in B_\delta \implies x(0) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in B_r, \forall t \geq 0$, d'où

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < r < \epsilon, \forall t \geq 0.$$

x_e est stable.

Pour montrer la stabilité asymptotique, on a besoin de montrer que $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Or :

$$\forall y > 0, \exists K > 0 \text{ tel que } \|x(t)\| < y, \forall t > K.$$

On sait que pour tout $y > 0$, on peut choisir $a > 0$ tel que $\Omega_a \subset B_a$ où

$$\Omega_a = \{x \in B_r, V(x) \leq a\} \text{ et } B_y = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < y\},$$

puisque $V(x)$ est décroissant et minorée par 0, alors

$$V(x) \rightarrow c \geq 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Montrons que $c = 0$, pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $c > 0$.

Par continuité de V , on a

$$\exists d > 0 \quad \text{tel que } B_d \subset \Omega_c.$$

$V[x(t)] \rightarrow c$ quand $t \rightarrow \infty$ implique que la trajectoire $x(t)$ sort de B_d pour tout $t \geq 0$.

Soit $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}$,

alors d'après (3) : $-\gamma < 0$

Donc

$$V[x(t)] = V[x(0)] + \int_0^t V[x(r)] dr \leq V[x(0)] - \gamma t.$$

D'où $c = 0$, donc l'origine est asymptotiquement stable.

Remarque II.1.2. Le choix de la fonction de Lyapunov a un effet sur l'évaluation de la zone de stabilité d'un système non-linéaire.

Théorème II.1.3. Théorème d'invariance de LaSalle [9] Soit Ω un compact invariant de $D \subset \mathbb{R}^n$, et soit V une fonction de classe $C^1([D, \mathbb{R}])$, telle que la fonction \dot{V} est définie négative sur Ω .

Soit I le plus grand sous ensemble invariant de E avec $E = \{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\}$. Alors $\lim_{t \rightarrow \infty} d_I(x(t, x_0)) = 0$, c'est-à-dire toute solution commençant dans Ω converge vers I quand $t \rightarrow \infty$.

II.2 Théorie de bifurcation

Soit le système d'équation différentielle suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

tel que $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre de contrôle, et x^* la solution de ce système.

II.2.1 Définition de bifurcation

Une bifurcation est un changement qualitatif ou quantitatif de la solution x^* du système (II.9) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions [18].

II.2.2 Diagramme et portrait de phase de bifurcation

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

Définition II.2.1. [3] *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

II.2.3 Type de bifurcation

Bifurcation selle-nœud

Cette bifurcation est appelée une **bifurcation selle nœud** et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibres l'un instable (un point selle) et l'autre stable (un nœud). D'une manière générale lorsque les deux isoclines, l'isocline verticale $\dot{x} = 0$ et l'isocline horizontale $\dot{y} = 0$, initialement disjointes deviennent tangentes et ensuite se coupent en deux points d'équilibre puis aucun point d'équilibre, cette bifurcation se produit[18].

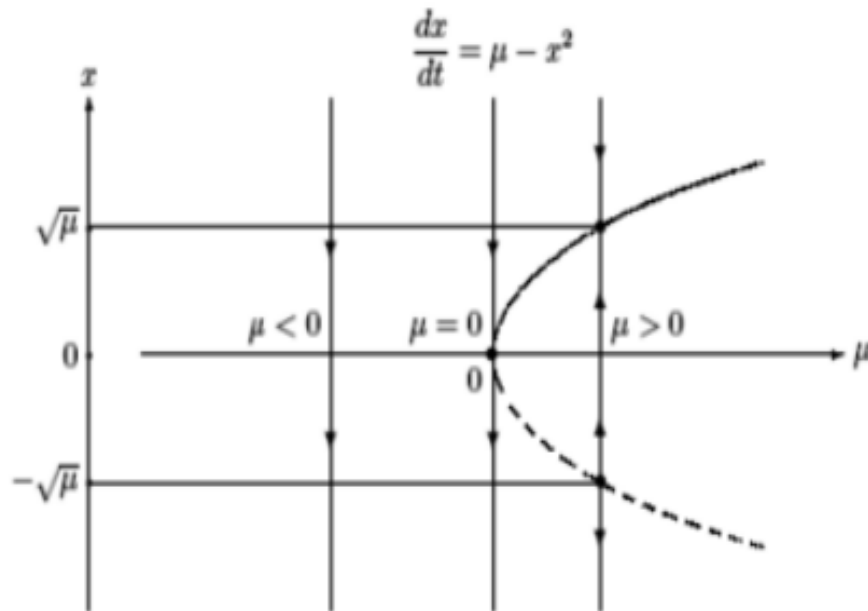


Figure II.2 – Diagramme de bifurcation de selle-nœud.

Bifurcation transcritique

Dans cette bifurcation le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur stabilité passe de stable à instable.

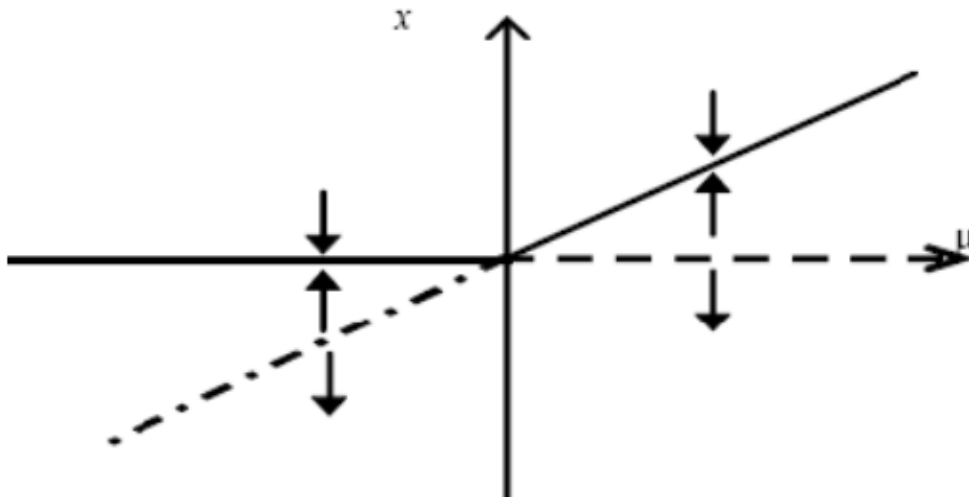


Figure II.3 – Diagramme de bifurcation transcritique.

Bifurcation de fourche

Cette bifurcation est appelée **bifurcation fourche super-critique** lorsque le nombre de point d'équilibre passer de trois à un donc nous avons un point selle entouré de deux nœud asymptotiquement stable.

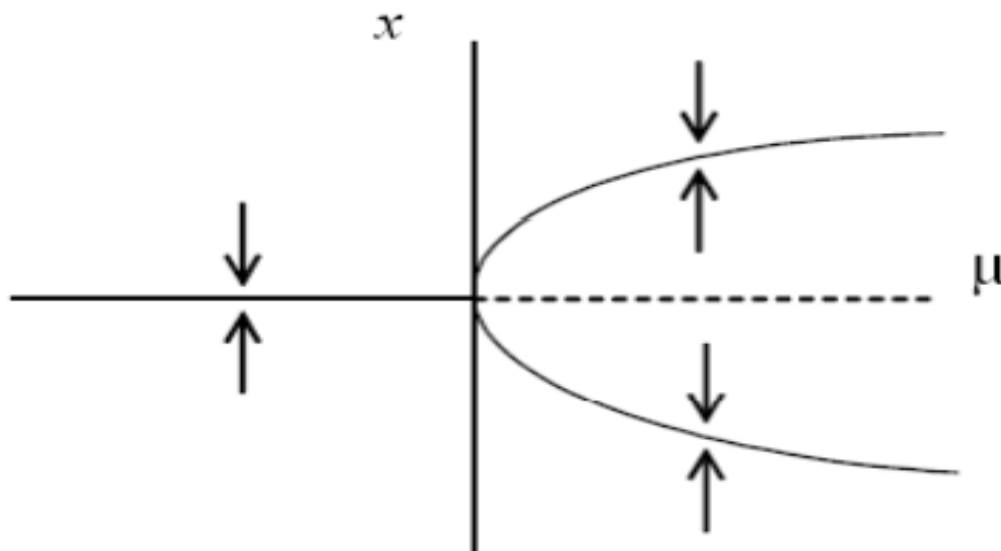


Figure II.4 – Diagramme de bifurcation fourche super-critique.

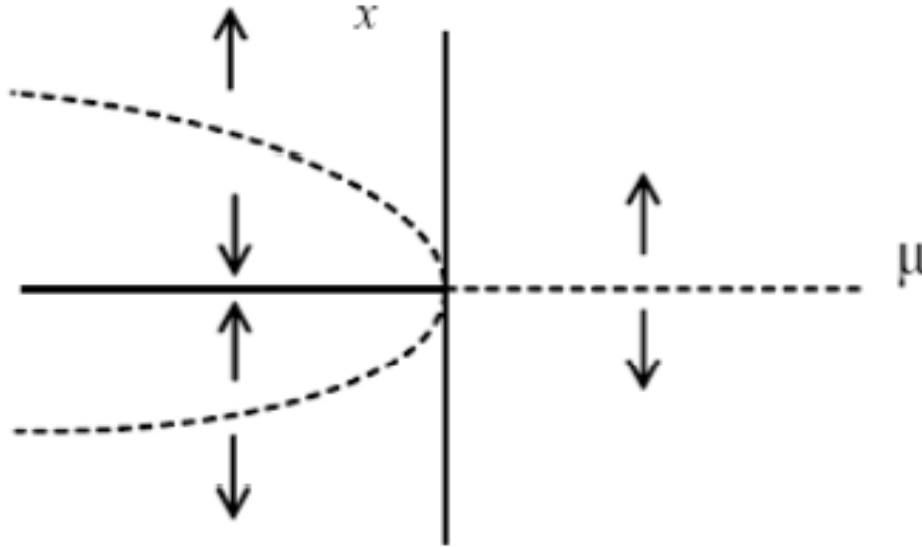


Figure II.5 – Diagramme de bifurcation fourche sous-critique.

Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

Le système suivant [12]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) \\ \dot{y} = g(x, y, \mu) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$x, y \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$.

Le système (III.1.1) admet un point d'équilibre $(x^*(\mu), y^*(\mu))$.

Soit $J_{(x^*(\mu), y^*(\mu))}$ la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre, et les valeurs propres complexes conjuguée de la matrice Jacobienne et s'écrivent sous la forme $\lambda_{1,2} = a(\mu) + ib(\mu)$ avec $a(\mu)$ la partie réelle et $b(\mu)$ la partie imaginaire.

Soit μ^* une valeur particulier de paramètre μ pour laquelle on a $a(\mu^*) = 0, b(\mu) \neq 0$ et $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) \neq 0$. Alors si $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) > 0$, il y-a trois cas possible

1. Lorsque $\mu = \mu^*$, il existe des trajectoires concentrique autour de $(x^*(\mu^*), y^*(\mu^*))$. Le point d'équilibre $(x^*(\mu), y^*(\mu))$ correspond à des centres.

On parle à bifurcation de **Hopf dégénérée**.

2. Lorsque $\mu = \mu^*$ le point d'équilibre $(x^*(\mu^*), y^*(\mu^*))$ est asymptotiquement stable, et $\exists \tilde{\mu} > \mu^*, \forall \mu$ vérifiant $\mu^* < \mu < \tilde{\mu}$ tel qu'il existe, autour de $(x^*(\mu), y^*(\mu))$ qui est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{\mu - \mu^*}$.

On parle de bifurcation de **Hopf Super-critique**.

3. Lorsque $\mu = \mu^*$, le point d'équilibre $(x^*(\mu^*), y^*(\mu^*))$ est instable, et $\exists \tilde{\mu} < \mu^*, \forall \mu$ vérifiant $\tilde{\mu} < \mu < \mu^*$ tel qu'il existe, autour de $(x^*(\mu), y^*(\mu))$ qui est asymptotiquement

stable, un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|\mu - \mu^*|}$.

On parle de bifurcation de **Hopf sous-critique**.

Remarque II.2.1. Si $\frac{da}{d\mu}(\mu^*) < 0$, il faut inversé les conclusion, c'est à dire le cycle limite asymptotiquement stable (respectivement instable) apparait pour des valeurs du paramètre inférieurs (respectivement supérieures) à μ^* .

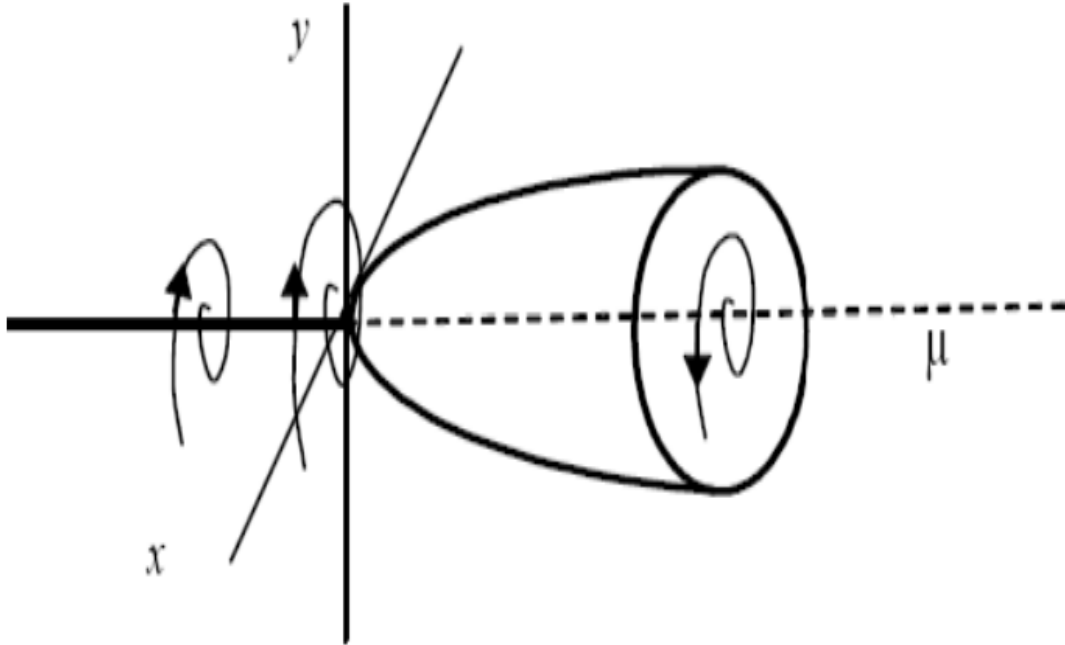


Figure II.6 – Diagramme de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

II.3 Stabilité des systèmes d'ordre non entier

Pour étudier la stabilité, on s'intéresse par le comportement de la solution du système lorsque $t \rightarrow \infty$, soit

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = f(t, x), & x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

où ω un domaine de \mathbb{R}^n qui contient l'origine $x = 0$ et $f : [t_0, \infty[\times \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à x .

Le système (II.11) à valeur initiale admet une unique solution $x = 0$ pour $t \geq 0$.

II.3.1 Point d'équilibre

Pour trouver les points d'équilibre du système (II.11) il suffit de résoudre l'équation

$$D^\alpha x(t) = 0. \quad (\text{II.12})$$

Si x_e est une solution de l'équation (II.12), alors

$$f(t, x_e) = 0.$$

Définition II.3.1. *Sous les hypothèses précédentes, donc la solution $x(t) = 0$ du système (II.11) est dite*

- *Stable, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

- *Asymptotiquement stable, s'il est stable et si*

$$\exists \gamma > 0 : \|x_0\| < \gamma \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

II.3.2 Stabilité des systèmes fractionnaire linéaire

Soit le système linéaire autonome d'ordre fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{II.13})$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, soit λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ les valeurs propres de la matrice A .

Théorème II.3.1. [5] • *Le système (II.16) est localement asymptotiquement stable si et seulement si*

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n.$$

• *Le système (II.16) est stable si et seulement si*

$$|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n,$$

et les valeurs propres critiques qui satisfaisant $|\arg(\lambda_i)| = \alpha \frac{\pi}{2}$, ont la multiplicité géométrique.

- Le système (II.16) est instable si et seulement s'il existe une valeur propre de A vérifiant

$$|\arg(\lambda)| < \alpha \frac{\pi}{2}.$$

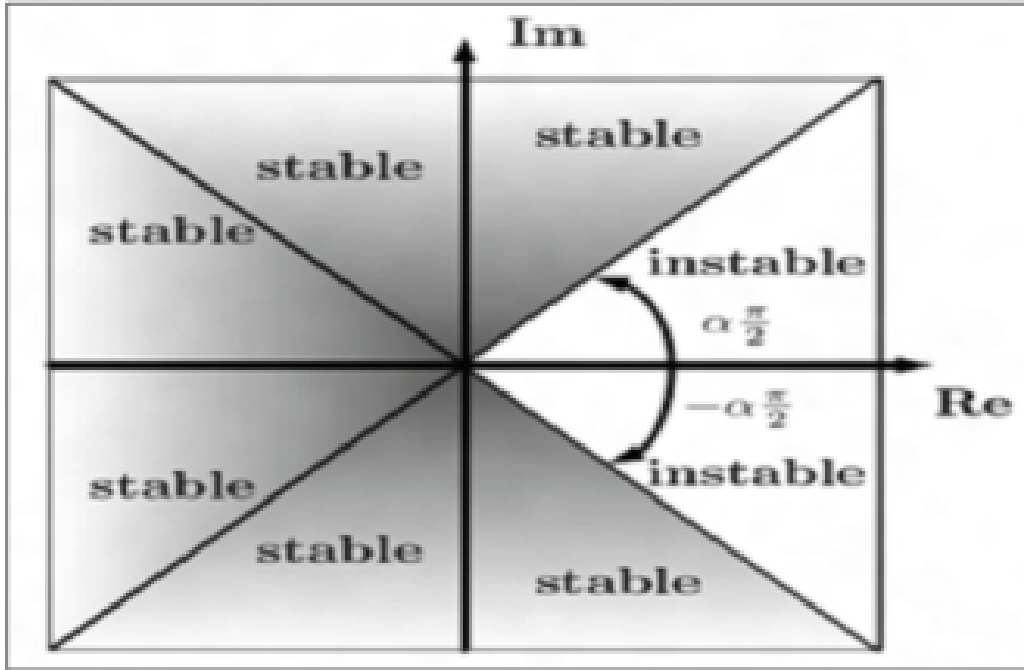


Figure II.7 – Région de stabilité d'un système fractionnaire linéaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$.

Exemple II.3.1. Soit le système linéaire suivant

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{3}}x(t) = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Avec $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$ et A une matrice carrée telle que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A , soit $\lambda_j = 1 \pm i$, $j = 1, 2$.

L'argument de chacune des valeurs propres de la matrice A est

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(1 - i)| = \left| \frac{(-\pi)}{4} \right|,$$

et

$$|\arg(\lambda_2)| = |\arg(1 + i)| = \left| \frac{(\pi)}{4} \right|.$$

On conclue que le système (II.14) est asymptotiquement stable car

$$|\arg(\lambda_1)| > \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\arg(\lambda_2)| > \frac{1}{3} \frac{\pi}{2}.$$

Remarque II.3.1. Dans le cas non linéaire suivant

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = f(t, x), & 0 < \alpha < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire, on peut linéariser le système (II.15) qui devient $D_t^\alpha x = Ax$, où A est la matrice jacobienne de la fonction f , et on applique le théorème (II.16).

Théorème II.3.2. Soit le système

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = Ax & 1 < \alpha < 2, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, soit λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ les valeurs propres de la matrice A .

Le Système (II.16) est localement asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

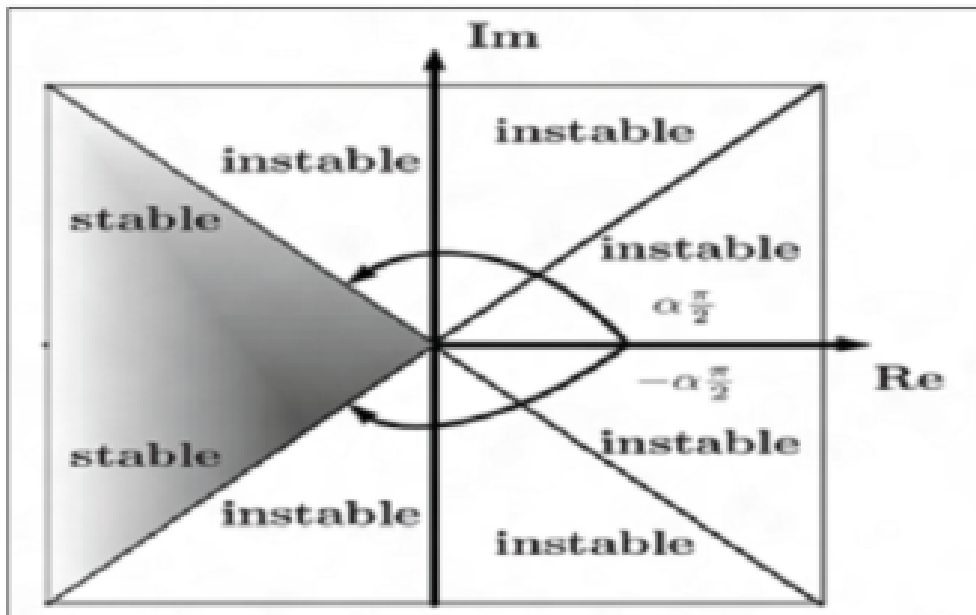


Figure II.8 – Région de stabilité d'un système fractionnaire Linéaire d'ordre $\alpha \in (1, 2)$.

Exemple II.3.2. Soit le système suivant

$$\begin{cases} D^{\frac{4}{3}}x(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Avec $\alpha = \frac{4}{3}$.

L'argument de chacune des valeurs propres de la matrice A est donné par

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(2 + 2i)| = \left|\frac{\pi}{4}\right|,$$

et

$$|\arg(\lambda_2)| = |\arg(2 - 2i)| = \left|\frac{-\pi}{4}\right|.$$

D'où le système (II.17) est instable car $|\arg(\lambda_1)| < \frac{2\pi}{3}$ et $|\arg(\lambda_2)| < \frac{2\pi}{3}$.

Corollaire II.3.1. [20] Supposons que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ et tous les α_i sont des nombres rationnels entre 0 et 1.

Soit d le plus petit commun multiple des dénominateurs du w_i de $\alpha_i \quad i = (1, 2, \dots, n)$, où $\alpha_i = \frac{u_i}{w_i}$, u_i et $w_i \in \mathbb{Z}^+$.

En posant $\sigma = \frac{1}{d}$, donc le système (II.16) est asymptotiquement stable si

$$|\arg(\lambda)| > \sigma \frac{\pi}{2},$$

pour toutes les racines λ de l'équation caractéristique suivant

$$\det(\text{diag}[\lambda^{d\alpha_1}, \dots, \lambda^{d\alpha_n}] - A) = 0.$$

Ce corollaire dit que l'équation caractéristique dans le cas des ordres rationnels peut être transformée en une équation polynomiale d'ordre entier.

II.3.3 Stabilité des systèmes fractionnaire non linéaire

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{II.18})$$

où f est une fonction continue par morceaux en t et localement lipschitzienne en x telle que $f : [t_0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et Ω un domaine de \mathbb{R}^n qui contient l'origine $x = 0$.

Définition II.3.2. $x_e \in \Omega$ est un point d'équilibre du système (II.18) si et seulement si $f(t, x_e) = 0$.

Définition II.3.3. Le point d'équilibre x_e est dit

- Localement stable si et seulement si

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,$ tel que $|x(t) - x_e| < \epsilon, \forall x_0 \in \{z \in \mathbb{R} : |z - x_e| < \delta\}$ et $\forall t \geq 0$.

- Localement asymptotiquement stable si et seulement si le point d'équilibre est localement stable et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.

Définition II.3.4. [13] La solution de (II.18) est dite stable au sens de Mittag-Leffler si

$$\|x(t)\| \leq g[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t - t_0)^\alpha)^c,$$

où t_0 est le temps initial, $g(0) = 0, c > 0, 0 < \alpha < 1, g(x) \geq 0$ et $g(x)$ est localement lipschitzienne par rapport à $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition II.3.5. [13] La solution de (II.18) est dite stable généralisée au sens de Mittag-Leffler si

$$\|x(t)\| \leq g[x(t_0)](t - t_0)^{-\delta} E_{\alpha, 1-\delta}(-\lambda(t - t_0)^\alpha)^c,$$

où t_0 est le temps initial, $c > 0, \lambda > 0, 0 < \alpha < 1, -\alpha < \delta < 1 - \alpha, g(0) = 0, g(x) \geq 0$ et $g(x)$ est localement lipschitzienne par rapport à $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$.

II.3.4 La méthode directe de Lyapunov

Définition II.3.6. [9] Une fonction $V(t, x)$ définie sur $J_a \times I_b$ est dite définie positive, si et seulement si $V(t, 0) = 0$, pour tout $t \in J_a$, et il existe $Q(r) \in \mathbb{K}$, telle

$$Q(r) \leq V(t, x), \quad \|x\| = r, \quad (t, x) \in J_a \times I_b,$$

où $I_b = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq b\}$ et $J_a = \{a^n, a \in]0, 1[, n \in \mathbb{Z} \cup 0\}$.

Définition II.3.7. [9] Une fonction $V(t, x)$ définie sur $J_a \times I_b$, est dite décroissante, si et seulement si $V(t, 0) = 0$, pour tout $t \in J_a$ et il existe $Q(r) \in \mathbb{K}$, telle que

$$V(t, x) \leq Q(r), \quad \|x\| = r, \quad (t, x) \in J_a \times I_b.$$

Théorème II.3.3. [3] Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (II.18) tel que $\alpha \in [0, 1]$ et Ω un domaine de \mathbb{R}^n qui contient l'origine.

Soit $V(t, x(t)) : [0, \infty[\times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable et localement lipschitzienne par rapport à x telle que

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab}, \quad (\text{II.19})$$

$${}^c D_t^\beta V(t, x(t)) \leq \alpha_3 \|x\|^{ab}, \quad (\text{II.20})$$

Où $t \geq 0$, $x \in \Omega$, $\beta \in]0, 1[$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b des constantes positives.

Alors $x = 0$ est stable au sens de fonction Mittag-Leffler.

Remarque II.3.2. Si les hypothèses précédentes sont satisfaites dans \mathbb{R}^n alors la stabilité dans ce cas est globale.

Théorème II.3.4. [7] Soit $x = 0$ le point d'équilibre du système (II.18) et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient l'origine.

Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(t, x(t)) : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui admet des dérivé du Caputo telle que $V(t, 0) = 0$, et α_1 une fonction de classe \mathbb{K} vérifiant :

$$\alpha_1 \|x\| \leq V(t, x(t)), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$${}^c D_t^\alpha V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \forall t_0 \geq 0,$$

alors le point $x = 0$ est stable.

Si, de plus pour certaine fonction $\alpha_2 \in \mathbb{K}$

$$V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Donc $x = 0$ est uniformément stable.

II.3.5 La méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation)

Pour étudier la stabilité du système (II.18), on linéarise le système autour du point d'équilibre x_e

On défini $\epsilon = x - x_e$ pour analyser le point, donc

$$D^\alpha x(t) = f(x_e + \epsilon(t)).$$

Par développement en série de Taylor de la fonction f au voisinage du point d'équilibre x_e , on

obtient

$$f(x_e + \epsilon(t)) \approx f(x_e) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t).$$

On a $f(x_e) = 0$, alors

$$f(x_e + \epsilon(t)) \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t), \quad (\text{II.21})$$

d'où, (II.21) devient

$$D^\alpha x(t) = D^\alpha(x_e + \epsilon(t)) = D^\alpha x_e + D^\alpha \epsilon(t) = D^\alpha \epsilon(t), \text{ car } (D^\alpha x_e = 0),$$

et

$$D^\alpha \epsilon(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e} \epsilon(t).$$

Alors

$$D^\alpha \epsilon(t) = J_f(x_e) \epsilon(t). \quad (\text{II.22})$$

Où J_f est la matrice jacobienne associée à f au tour de x_e . On peut maintenant appliquer les théorèmes précédents pour étudier la stabilité des solutions du système fractionnaire (II.18).

Applications

Dans ce chapitre on va étudier un modèle dynamique en finance et un modèle de Lotka-Volterra, en utilisant les équations différentielles ordinaire, et en utilisant les dérivées fractionnaire.

III.1 Un modèle de finance

Les récents travaux ont introduit un modèle dynamique de financement, composé de trois équations différentielles de premier ordre.

Le modèle décrit les variations temporelles de trois variables d'état le taux d'intere x , la demande d'investissement y , et l'indice des prix z .

Le système est donné par [24]

$$\begin{cases} \dot{x} &= (y - a)x + z \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2 \\ \dot{z} &= -cz - x \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où a est le montant d'épargne, b est le coût d'investissement, et c est l'élasticité de la demande des marchés commerciaux. Dans le modèle (III.1), les facteurs qui influent sur les changements dans x viennent principalement des contradictions dans les investissements sur le marché et les ajustements structurelles des prix des marchandises. L'évolution du taux de y est proportionnelle au taux d'investissement, ainsi qu'à une inversion du coût de l'investissement et les taux des intérêts. Les changements dans z sont d'une part contrôlés par la contradiction entre l'offre et la demande sur les marchés commerciaux, et d'autre part ils sont influencés par les taux des inflations. Il est évident que les trois constantes, a , b et c , dans le modèle (III.1) sont positifs.

III.1.1 Points d'équilibre

Pour trouver Les points d'équilibre du système (III.1) on résout

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - a)x + z = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -cz - x = 0 \end{cases}$$

- Si $c - b - abc > 0$, le système admet trois points d'équilibre $(\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}, \frac{1}{c} + a, \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}})$ et $(-\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}, \frac{1}{c} + a, -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}})$ et $(0, \frac{1}{b}, 0)$
- Si $c - b - abc < 0$, le système (III.1) admet un seul point d'équilibre $(0, \frac{1}{b}, 0)$.

III.1.2 Stabilité des points d'équilibre

On s'intéresse seulement au point $(0, \frac{1}{b}, 0)$, ie le cas ou $c - b - abc < 0$.

On effectue le changement suivant

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \frac{1}{b} \\ Z = z \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Alors le système devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} = Z + [Y + \frac{1}{b} - a]X \\ \dot{Y} = \dot{y} = 1 - b(Y - \frac{1}{b}) - X^2 \\ \dot{Z} = \dot{z} = -X - cZ \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{X} = Z + (\frac{1}{b} - a)X + XY \\ \dot{Y} = bY - X^2 \\ \dot{Z} = -X - cZ \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Le système (III.3) admet un seul point d'équilibre $(0, 0, 0)$ pour $(c - b - abc) < 0$, pour étudier sa nature on calcule la matrice Jacobienne associé à ce système

$$J_{(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} - a + Y & X & 1 \\ -2X^2 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix},$$

au point $(0, 0, 0)$ on trouve

$$J_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} - a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique donnée par

$$(\det J - \lambda I) = (-b - \lambda)(\lambda^2 + (c + a - \frac{1}{b})\lambda + 1 + ca - \frac{c}{b}) = 0. \quad (\text{III.4})$$

Donc l'équation(III.4) admet trois racine $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telle que

$$(-b - \lambda) = 0,$$

et

$$(\lambda^2 + (c + a - \frac{1}{b})\lambda + 1 + ca - \frac{c}{b}) = 0.$$

Le signe de λ_2, λ_3 dépend des signes de $1 + ac - \frac{c}{b}$ et $c + a - \frac{1}{b}$, on a 4 cas

1. **Si** $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$ **et** $c + a - \frac{1}{b} < 0$

Alors l'équation (III.4) admet trois valeurs propres de signe opposée $\lambda_1 = -b, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$. Le point d'équilibre $(0, \frac{1}{b}, 0)$ est un point selle.

2. **Si** $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$ **et** $c + a - \frac{1}{b} > 0$

L'équation (III.4) admet 3 valeurs propres de même signe $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ et $\lambda_3 < 0$, donc le point d'équilibre est stable.

3. **Si** $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$ l'équation (III.4) devient

$$(-b - \lambda)(\lambda^2 + (c + a - \frac{1}{b})\lambda) = 0. \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.5) admet trois valeurs propres $\lambda_1 = -b, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -(c + a - \frac{1}{b})$

Dans ce cas on peut traiter deux cas d'après la valeur de c

- 1^{er} Cas $c < 1$

$\lambda_3 = -(c + a - \frac{1}{b})$ on remplace a par $\frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ on obtient, $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} > 0$, puisque $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_3 > 0$ donc le point d'équilibre $(0, \frac{1}{b}, 0)$ est instable.

- 2^{eme} Cas $c > 1$

D'après le théorème de variété centrale le point $(0, \frac{1}{b}, 0)$ est stable.

4. **Si** $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$ **et** $c + a - \frac{1}{b} = 0$, l'équation (III.4) devient

$$(-b - \lambda)(\lambda^2 + 1 + ac - \frac{c}{b}) = 0,$$

d'où $\lambda_1 = -b$ et $\lambda^2 = -(ac + 1 - \frac{c}{b})$ avec $-(ac + 1 - \frac{c}{b}) < 0$, alors on a

$$\lambda_1 = -b,$$

$$\lambda_2 = i\sqrt{ac + 1 - \frac{c}{b}},$$

$$\lambda_3 = -i\sqrt{ac + 1 - \frac{c}{b}}.$$

Puisque les valeurs propres complexes conjuguée et s'écrivent sous la forme $a(\lambda) + ib(\lambda)$ on prend $q = -(c + a - \frac{1}{b})$ donc $\frac{\partial q}{\partial a} = -1$ donc on a une bifurcation de Hopf, est le points $(0, \frac{1}{b}, 0)$ est stable.

III.1.3 Extension au cas fractionnaire

Dans cette partie on prend le même système mais avec des dérivée d'ordre fractionnaire, alors nous réécrivons le système financier (III.1) sous la forme suivante [19]

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x &= z + (y - a)x \\ D^{\alpha_2} y &= 1 - by - x^2 \\ D^{\alpha_3} z &= -x - cz \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

III.1.4 Les points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibres on utilise la même méthode dans le cas entier et ils ne change pas, par contre la stabilité peut changer, alors

— Si $c - b - abc \leq 0$ le système (III.6) admet un point d'équilibre

$$(0, \frac{1}{b}, 0).$$

— Si $c - b - abc > 0$ le système (III.6) admet trois points d'équilibre

$$(0, \frac{1}{b}, 0)$$

et

$$\left(\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{ac + 1}{c}, \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}} \right)$$

et

$$\left(-\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{ac + 1}{c}, -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}} \right)$$

III.1.5 Stabilité des points d'équilibre

On considérons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ telle que $0 < \alpha < 1$ et on pose, $b = 0.1$ et $c = 1$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On remplace b et c dans $c - b - abc \leq 0$ et on obtient

$a \geq 9$, alors le système (III.6) admet un point d'équilibre $(0, 10, 0)$.

Et on remplace dans $c - b - abc > 0$, on obtient

$a < 9$, donc le système (III.6) admet trois points d'équilibre $(0, 10, 0)$, $(\pm\sqrt{\frac{9-a}{10}}, (a+1), \pm\sqrt{\frac{9-a}{10}})$.

Pour le point d'équilibre $(0, 10, 0)$, la matrice jacobienne associée est

$$J_{(0,10,0)} = \begin{pmatrix} 10 - a & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

l'équation caractéristique est donnée par

$$(-0.1 - \lambda)(\lambda^2 + (-9 + a)\lambda - 9 + a).$$

Alors, le signe de Δ dépend la valeur de a tel que

$$\lambda_1 = -0.1,$$

et

$$\lambda_{(2,3)} = \begin{cases} \frac{9-a \pm \sqrt{a^2 - 22a + 117}}{2} & \text{si } a \in]0, 9[\cup]13, +\infty[, \\ \frac{9-a \pm i\sqrt{a^2 - 22a + 117}}{2} & \text{si } a \in]9, 13[, \end{cases}$$

— Si $a > 9$, la partie réelle est strictement négative donc $|\arg(\lambda_{1,2,3})| > \alpha \frac{\pi}{2}$, d'où le point $(0, 10, 0)$ est asymptotiquement stable pour $0 < \alpha \leq 1$.

— Si $a < 9$, on a deux valeurs propres réelles négatives mais la troisième est réelle positive, alors le point d'équilibre $(0, 10, 0)$ est instable quelque soit $0 < \alpha < 1$.

Pour les points d'équilibre $(\pm\sqrt{\frac{9-a}{c}}, a+1, \pm\sqrt{\frac{9-a}{10}})$, la matrice Jacobienne associée est

$$J_{(\pm\sqrt{\frac{9-a}{c}}, a+1, \pm\sqrt{\frac{9-a}{10}})} = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{9-a}{10}} & 1 \\ \pm 2\sqrt{\frac{9-a}{10}} & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice J ,

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\lambda + (1,8 - \frac{1}{5}a)\lambda + (1,8 - \frac{1}{5}a).$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \min_i |\arg(\lambda_i)|, \quad i = 1, 2, 3.$$

a	λ_1	λ_2	λ_3	α
0.5	-0.7681	0.3341+1.4497 i	0.3341-1.4497 i	0.8555
1	-0.7609	0.3304+1.412 i	0.3304-1.412 i	0.8536
1.2	-0.7578	0.3289+1.3965 i	0.3289-1.3965 i	0.8527
2	-0.7447	0.3223+1.3327i	0.3223-1.3327 i	0.8494
2.5	-0.7355	0.3178+1.2909 i	0.3178-1.2909 i	0.8463
3	-0.7256	0.3128+1.2474 i	0.3128-1.2474 i	0.8435
3.5	-0.7146	0.3073+1.202 i	0.3073-1.202 i	0.8406
4	-0.7026	0.3013+1.1544 i	0.3013-1.1544 i	0.8374
4.5	-0.6891	0.2946+1.1042 i	0.2946-1.1042 i	0.8340
5	-0.674	0.287+1.51 i	0.287-1.051 i	0.8302
5.5	-0.6568	0.2784+0.9941 i	0.2784-0.9941 i	0.8261
6	-0.6369	0.2685+0.9327 i	0.2685-0.9327 i	0.8232
6.8	-0.585	0.2425+0.7905 i	0.2425-0.7905 i	0.8105
7.9	-0.5058	0.2029+0.6116 i	0.2029-0.6116 i	0.7960
8.5	-0.4228	0.1614+0.4587 i	0.1614-0.4587 i	0.7846

On remarque qu'il y a toujours une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres complexes conjuguées avec la partie réelle positive, les deux points d'équilibre sont localement instable.

III.2 Un modèle de Lotka-Voltera

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : des proies (lapins ou sardines) et des prédateurs (renards ou requins, respectivement).

Le modèle que nous étudions a été proposé par Volterra (et indépendamment par Lotka) en 1926 dans un ouvrage intitulé "Théorie mathématique de la lutte pour la vie" qui est probablement le premier traité d'écologie mathématique. Volterra avait été consulté par le

responsable de la pêche italienne à Trieste qui avait remarqué que, juste après la première guerre mondiale (période durant laquelle la pêche avait été nettement réduite) la proportion de requins et d'autres prédateurs impropres à la consommation que l'on pêchait parmi les poissons consommables était nettement supérieure à ce qu'elle était avant la guerre et à ce qu'elle redevint ensuite.

Le modèle concerne deux populations dont les effectifs au temps t sont respectivement notés $x(t)$ et $y(t)$, la seconde (les prédateurs) se nourrissant de la première (les proies).

Ceci conduit au modèle suivant [14]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(r - kx(t) - by(t)) \\ \dot{y}(t) = y(t)(-d + \beta x) \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Où les coefficients r, k, b, d, β sont positifs telle que

r , le taux de natalité des proies.

k , le taux de capacité.

b , le taux de mortalité des proies du aux prédateurs rencontrés.

d , taux de mortalité intrinsèque des prédateurs.

β , le taux de production des prédateurs en fonction de proies.

III.2.1 Les points d'équilibre

Pour trouver Les points d'équilibre du système (III.7), on résout

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(r - kx(t) - by(t)) = 0 \\ \dot{y}(t) = y(t)(-d + \beta x) = 0 \end{cases}$$

- Si $r > \frac{kd}{\beta}$ le système admet trois points d'équilibres, $(0, 0)$, $(\frac{r}{k}, 0)$ et $(\frac{d}{\beta}, \frac{r}{b} - \frac{kd}{b\beta})$.
- Si $r < \frac{kd}{\beta}$ le système admet deux points d'équilibres, $(0, 0)$, $(\frac{r}{k}, 0)$ car la composante négative n'a pas un sens biologique.

III.2.2 La nature des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre, on calcule la matrice Jacobienne associée au système (III.7).

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} r - 2kx - by & -bx \\ \beta y & -d + \beta x \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne au point d'équilibre $(0, 0)$ est donnée par

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

donc la matrice Jacobienne admet deux valeurs propres de signe opposé $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -d$, alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable (point selle). On peut même affiner le résultat et dire que la direction x est instable alors que la direction y est asymptotiquement stable.

La matrice Jacobienne au point d'équilibre $(\frac{r}{k}, 0)$ est donnée par

$$J_{(\frac{r}{k}, 0)} = \begin{pmatrix} -r & \frac{r}{k} \\ 0 & -d + \frac{r\beta}{k} \end{pmatrix},$$

— 1^{er} Cas $r > \frac{dk}{\beta}$

La matrice Jacobienne admet deux valeurs propres de signe opposé $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = -d + \frac{r\beta}{k}$, donc le point $(\frac{r}{k}, 0)$ est instable (point selle).

— 2^{ème} Cas $r < \frac{dk}{\beta}$

La matrice Jacobienne admet deux valeurs propres de signe négative $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = -d + \frac{r\beta}{k}$, alors le point d'équilibre $(\frac{r}{k}, 0)$ est un nœud stable.

La matrice Jacobienne au point d'équilibre au $(x^*, y^*) = (\frac{d}{\beta}, \frac{r}{b} - \frac{k}{\beta})$ est donnée par

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} -kx^* & -bx^* \\ \beta y^* & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$\det(J_{(x^*, y^*)}) = b\beta x^* y^* > 0$ et $Tr(J_{(x^*, y^*)}) = -kx^* < 0$, donc le point est instable.

III.2.3 Extension au cas fractionnaire

Soit le système suivant [13]

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = x(r - kx - by) \\ D_t^\alpha y(t) = y(-d + \beta x) \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{III.8})$$

avec $x > 0$, $y > 0$ représente la population du proies et prédateurs .

III.2.4 Les points d'équilibre

Pour calculer les points d'équilibre on utilise la même méthode dans le cas entier et il ne change pas, alors on résout

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = 0 \\ D_t^\alpha y(t) = 0 \end{cases}$$

donc

- Si $r > \frac{kd}{\beta}$ le système admet trois points d'équilibre, $(0, 0)$, $(\frac{r}{k}, 0)$ et $(\frac{d}{\beta}, \frac{r}{b} - \frac{kd}{b\beta})$.
- Si $r < \frac{kd}{\beta}$ le système admet deux points d'équilibre, $(0, 0)$, $(\frac{r}{k}, 0)$ car la composante négative n'a pas un sens biologique.

III.2.5 La stabilité des points d'équilibre

La matrice jacobienne associée au système (III.8) est donnée par

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} r - 2kx - by & -bx \\ \beta y & -d + \beta x \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne associée au point $(0, 0)$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

on a $\lambda_1 = r$ est un réel positif et $\lambda_2 = -d$ donc $|\arg(\lambda_1)| < \alpha \frac{\pi}{2}$, alors le point est localement instable.

pour le point $(\frac{r}{k}, 0)$, on effectue le changement suivant

$$\begin{cases} X(t) = x - \frac{r}{k} \\ Y(t) = y \end{cases}$$

Alors le système (III.8) devient

$$\begin{cases} D_t^\alpha X(t) = (X + \frac{r}{k})(-kX - bY) \\ D_t^\alpha Y(t) = Y(-d + \beta X + \frac{\beta r}{k}) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

On prend la fonction de Lyapunov suivante

$$V(X, Y) = V_1 + V_2 = X^2 + Y^2,$$

nous avons $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 2X \dot{X} + 2Y \dot{Y}$, où $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$ la dérivée de $X(t)$, $Y(t)$ par rapport à t avec le constante ε , on obtient

$$\int_t^{t+\varepsilon} X(\tau)\dot{X}(\tau) + Y(\tau)\dot{Y}(\tau) = \frac{1}{2}[X^2(t+\varepsilon) - X^2(t)] + \frac{1}{2}[Y^2(t+\varepsilon) - Y^2(t)]. \quad (\text{III.10})$$

En appliquant la dérivée du Riemann-Liouville au système (III.8), on obtient

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = D_t^{1-\alpha}(X + \frac{r}{k})(-kX - bY) \\ \dot{Y}(t) = D_t^{1-\alpha}Y(-d + \beta X + \frac{\beta r}{k}) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = [\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}(X(\tau) + \frac{r}{k})(-kX(\tau) - bY(\tau))]_{\tau=t+} \\ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}(X(\tau) + \frac{r}{k})(-kX(\tau) - bY(\tau))d\tau \\ \dot{Y}(t) = [\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}Y(-d + \beta X + \frac{\beta r}{k})]_{\tau=t+} \\ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}Y(-d + \beta X + \frac{\beta r}{k})d\tau \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

On a $X(0)X(t) > 0$, $Y(0)Y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, +\infty]$

$X(0)X(t) \leq X^2(0)$, $Y(0)Y(t) \leq Y^2(0)$ où l'égalité est vraie si et seulement si $t = 0$.

On multiplie $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$ par $X(0)$, $Y(0)$ respectivement et on obtient

$$\begin{cases} X(0)\dot{X}(t) \leq -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}rX^2(0) < 0 \\ Y(0)\dot{Y}(t) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}Y^2(0)(-d + \frac{\beta r}{k}) < 0 \end{cases}$$

On à $X(0)X(t) > 0$ et $Y(0)Y(t) > 0$ donc l'équation (III.10) est négative, alors la fonction

$V(X, Y) = V_1 + V_2 = X^2(t) + Y^2(t)$ est décroissante.

On supposons qu'il existe une constante positive ξ qui vérifie $X(0)X(t) \geq \xi$ et $Y(0)Y(t) \geq \xi$ pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha V &= D_t^\alpha X^2(t) + D_t^\alpha Y^2(t), \\ &= D_t^{\alpha-1}(2X\dot{X}) + D_t^{\alpha-1}(2Y\dot{Y}), \\ &\leq \frac{2\xi}{X^2(0)}D_t^{\alpha-1}X(0)\dot{X}(t) + \frac{2\xi}{Y^2(0)}D_t^{\alpha-1}Y(0)\dot{Y}(t), \\ &\leq \frac{-2r\xi}{\Gamma(\alpha)}D_t^{\alpha-1}t^{\alpha-1} + \frac{2(-d + \frac{\beta r}{k})\xi}{\Gamma(\alpha)}D_t^{\alpha-1}t^{\alpha-1}, \\ &\leq -2\xi \frac{r + (d - \frac{\beta r}{k})}{X^2(0) + Y^2(0)}V(X, Y). \end{aligned}$$

Où $\alpha^3 = 2\xi \frac{r + (d - \frac{\beta r}{k})}{X^2(0) + Y^2(0)} > 0$.

Donc, le point d'équilibre $(\frac{r}{k}, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

La matrice jacobienne au point d'équilibre $(x^*, y^*) = (\frac{d}{\beta}, \frac{r}{b} - \frac{kd}{b\beta})$

$$J_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} -kx^* & -bx^* \\ \beta y^* & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$p(\lambda) = \lambda^2 + kx^* \lambda - d(r - \frac{kd}{\beta}).$$

Si $\Delta = (kx^*)^2 - 4d(r - \frac{kd}{\beta}) > 0$, alors la matrice jacobienne admet deux valeurs propres négative, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(kx^* + \sqrt{kx^* - 4(r - \frac{kd}{\beta})})$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-kx^* + \sqrt{kx^* - 4(r - \frac{kd}{\beta})})$.

D'où $|\arg(\lambda_1(1, 2))| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2}$, avec $0 < \alpha < 1$ Le point est localement asymptotique stable.

Si $\Delta = (kx^*)^2 - 4d(r - \frac{kd}{\beta}) < 0$, alors La matrice Jacobienne admet deux valeurs propres complexe $\lambda_1(1, 2) = \frac{1}{2}(-kx^* \pm i\sqrt{kx^* - 4(r - \frac{kd}{\beta})})$.

D'où $\arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{k} > \alpha \frac{\pi}{2}$, alors le point d'équilibre $(\frac{d}{\beta}, \frac{r}{b} - \frac{kd}{b\beta})$ est localement asymptotique stable.

Conclusion Générale

Le but de ce mémoire est l'étude d'un système dynamique d'équations différentielles aux dérivées d'ordre fractionnaire.

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre entier, les critères de la stabilité étant déjà anciens, le problème reste posé pour les modèles non linéaires donc on a présenté deux méthodes pour l'étude de la stabilité :

1. La méthode indirecte de Lyapunov : consiste à calculer les points d'équilibre afin de linéariser et examiner les valeurs propres de la matrice jacobienne et autour de ces points pour évaluer la stabilité.
2. La méthode directe de Lyapunov : consiste à trouver une fonction appropriée de Lyapunov, si elle existe donc le système est stable.

Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire on détermine différentes régions de stabilité et d'instabilité, et pour le système non linéaire on peut définir une fonction de Lyapunov.

Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and application of fractional differential equations*, Elsevier, New York, 2006.
- [2] A. EL JAI et E. ZERRIK, *stabilité des systèmes dynamiques*, ISBN, 2013.
- [3] A. Gasri, *Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Mentouri-Constantine-1. 2018.*
- [4] B. N. Sadovskii, *On a fixed point principle. Funct. Anal. Appl. 1*, pp.74-76 1967.
- [5] D. Matignon. *Stability results for fractional differential equations with applications to Control processing. In Proc. IEEE-IMACS Système. Man Cyber, 1996.*
- [6] E. Artin. *Einführung in die Théorie der Gamma Function. Teubner, Leipzig 1931.*
- [7] F. Jarad, Th. Abdeljawad, and D. Baleanu, *Stability of q-fractional non-autonomous systems. Nonlinear Analysis : Real World Applications 14* , p780-784, 2013.
- [8] G. M. Mittag-Leffler. *Sur la nouvelle fonction $\alpha(x)$. C. R. Acad. Sci. Paris(Ser. II), 137 :554-558, 1903.*
- [9] H. KHALIL, *non linear system, Third Édition, Prentice Hall, 2002.*
- [10] I. Podlubny, *Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/London/Toronto, 1999.*
- [11] J. K. Hale - *Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1980.*
- [12] J. Marsden, M. McCracken, P. Sethna, and G. Sell G. *The Hopf bifurcation and its applications, volume 19(2012).*
- [13] J. Yua, H. Hu, S. Zhou et X. Lin, *Generalized Mittag-Leffler stability of multi-variables fractional order nonlinear systems, Volume 49, Issue 6, Pages 1798-1803, 2013.*
- [14] J. Yu, *Elsevier 2013.*
- [15] K. Diethelm. *Fractional Differential Equations Theory and Numerical Treatment February 13, 2003.*

- [16] *K. Yadi. Perturbations Singulières : Approximations, Stabilité Pratique et Applications à des Modèles de compétition, Thèse de doctorat , Université de Haute-Alsace de Mulhouse, 2008.*
- [17] *M. Fan, Q. Wang et X. Zou - Dynamics of non-autonomous ratio-dependent predator-prey system, Proceedings of the royal society of Edinburgh, vol. 133A, p. 97-118. 2003.*
- [18] *Menacer, Tidjani. Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine1.2014.*
- [19] *M. S. Abd-Elouahab, N. Hamri, et J. Wang Chaos Control of a Fractional-Order Financial System, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2010, 18 pages, 2010.*
- [20] *M. S. Thavazoei and M. A. Haeri note on the stability of fractional order system Mathematics and Computers in Simulation 79 (5) (2009).*
- [21] *M. Weilbeer, Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background. Thèse de Doctorat, Carl-Friderich-Gauss Facultat fur Mathematik und Informatik, der Technischen Universitat Braunschweig, 2005.*
- [22] *P. Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble sciences, 1996.*
- [23] *R. Toscano, Commande et diagnostics des système dynamiques , modélisation, analyse, commande par PID et par retour d'état, diagnostics ; 2005.*
- [24] *Tun-hai. Ma, Chen. Yu, Applied Mathematics and Mecanics (English Edition, vol 22, 11 Nov 2001).*