الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالـي والبحــث العلمــــي
Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département Des Mathématiques et de L’informatique

Projet de Fin d’Etudes
Pour l’obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation
Thème

Dynamique De Modèle Proie-Prédateur Réaction-diffusion Avec La fonction de réponse de Leslie-Gower

Présenté Par :
Melle. MATALSI Bouchra.

Devant le jury composé de :

Dr .HAMMOUDI Ahmed	professeur	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. MAAMAR Imane	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr.MEKHALFI Kheira	M CA	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr.BENTOUT Sofiane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2021/2022

Remerciement

Mon premier remerciement va à Allah soubhanaho wa tahala pour tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon respectueux promoteur **Mr « BENTOUT.Sofiane »** Maitre de conférence « A » au département des mathématiques au faculté des sciences au Université de Ain Temouchent ,Je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre

préparation de ce mémoire.

Mes sincères remerciements vont aussi à **Mr « HAMMOUDI.Ahmed »** Professeur au département des mathématiques à la faculté des sciences au Université de Ain Temouchent pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant la présidence de ce jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à M^{me} **« MAAMAR Imane»** Maitre de conférences « B » et M^{me} **« MEKHALFI Kheira »** Maitre de conférences « A » au département des mathématiques au Université d'Ain Temouchent pour avoir voulu examiner ce travail.

J'adresse mes chaleureux remerciements à tous les enseignants de département des mathématiques qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon formation.

Dédicace

A mon père "Layad" que dieu accorde la paix sur son âme et ma mère "Fatiha BENYOUB" pour leurs efforts et sacrifices durant toute ma vie,pour l'amour et le soutien qu'ils m'ont toujours donné, leurs encouragements et toute l'aide qu'ils m'ont apportés durant mes études.
A ma famille, mes proches qu'ils m'ont chaleureusement supporté tout au long de mon parcours.
A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé,et à qui je souhaite plus de succès.
A toute la promotion de Mathématiques et à tous qui m'ont partagé les moments de la réalisation de ce mémoire.
A ma meilleure amie "Marwa BENOUADA" , "Dounya LAOUARI" et mon neveu "Djoud".
A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce modeste travail

Sommaire

Introduction

La modélisation mathématique des problèmes biologiques est nécessaire dans plusieurs disciplines telles que l'écologie, la dynamique des populations, la génétique, l'épidémiologie etc... Du fait que, l'étude de ces problèmes requiert la collaboration des scientifiques des différentes disciplines (biologie, mathématique, informatique) au sein d'une science commune, les biomathématiques. On constate qu'au cours des dernières décennies, la modélisation mathématique a été largement utilisée en biologie, et la plupart des articles publiés dans les grandes revues biologiques présentent des modèles mathématiques. On peut donc considérer la modélisation mathématique comme une étape essentielle de la recherche biologique.

Les systèmes dynamiques sont l'outil de choix pour la modélisation mathématique et informatique à ce stade. Parce qu'ils constituent un ensemble de modèles mathématiques formels permettant de décrire l'évolution d'un ensemble d'objets en interaction dans le temps.
On va s'intéresser à l'étude et l'analyse mathématique d'un modèle proie-prédateur basé sur : · des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires. · des équations aux dérivées partielles de type réaction diffusion dans des environnements homogène d'advection.

Le modèle proie-prédateurde Leslie-Gower a été introduit en1948 par Leslie [30] et a été discuté par Leslie et Gower en 1960 [31] et Pielou en 1969 [32] . Leslie(1948) utilisé l'équation logistique pour obtenir un modèle plus réaliste qui est basé sur les hypothèses suivantes : · La population de proie U suit une croissance logistique, · La réponse fonctionnelle correspond à une relation linéaire avec la densité de la population de proie U, · La population de prédateur V suit une croissance logistique et la croissance des prédateurs est limitée par la densité de proie U.

Les systèmes de réaction-diffusion sont des modèles mathématiques typiques dans des domaines tels que la biologie, la chimie et la physique... ces équations dépendent généralement de différents paramètres tels que la température et le taux de diffusion, etc... ils décrivent la distribution spatiale de la concentration ou de la densité dans deux processus : local les interactions entre les espèces et la diffusion qui provoque la propagation des espèces dans l'espace. Mathématiquement parlant, ce type de modèle décrit des systèmes déterministes et distribués dans l'espace à l'aide d'équations aux dérivées partielles. Un tel modèle est donc la somme des phénomènes de diffusion et de réaction (Fisher [33], Kolmogorov et al. [34]). En général, le modèle de réaction-diffusion est donné par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial N(X,t)}{\partial t} = \delta \triangle N(X,t) + F(N(X,t)), \quad avec(X,t) \in \mathbb{R}^{\ltimes} \times \mathbb{R}^{+},$$

où N est un vecteur à p-composantes(chaque composante représente la densité d'un espèce).$\triangle$ est l'opérateur de Laplace et δ la matrice de diffusion.La fonction vectorielle F est un terme non-linéaire décrivant toutes les réactions et interactions considérées entre les espèces.

Notre travail contient un étude mathématique sur un modèle proie-prédateur avec la fonction de Leslie-Gower avec récolte et réaction-diffusion, il se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre Il est consacré a mentionner les résultats préliminaires (Définitions,théorèmes, lemmes..) nécessaires utilisées dans le mémoire.

Le deuxième chapitre On fait l'étude d'un modèle prédateur-proie de Leslie-Gower intégrant la récolte. En construisant une fonction convenable, on trouve que le seul équilibre positif de ce système est globalement stable,puis on donne des conditions satisfaisantes pour la présence d'un équilibre bionomique.

Le troisième chapitre Il consiste à l'étude de la dynamique globale d'un système de type Leslie-Gower dans des environnements homogènes advectifs,on discute l'existence et l'unicité de l'unique équilibre positif ,et on étudie le comportement des solutions et établissons des conditions de seuil pour la persistance et l'extinction de deux espèces.

Chapitre I

Préliminaire

Dans ce chapitre on rappelle des définitions et des théorèmes qui seront utilisés dans ce mémoire.

I.1 Généralités sur les systèmes dynamiques

Définition I.1.1 (Équation différentielle).
Soit $In \subset \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on a $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associée a f l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t)\right), \tag{I.1}$$

où $f(t,x) = (f_1(t;x), \cdots, f_n(t;x))$, et chaque fonction f_i est continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction f est appelée champs de vecteurs, l'équation représente un système de n équations différentielles ordinaires. Dans la pratique, l'équation (I.1) exprime la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps t, et x représente l'état du système étudié.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x(t)), & t \in (0,b), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{I.2}$$

où $f : \Omega \to R^n$ est une fonction donnée, Ω est un ouvert de R^n, $x_0 \in \Omega$ et $b \in R_+^*$.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz [19]). *Si f est de classe C^1 de Ω et s'il existe une constante $T > 0$ telle que*

$$\| f(x_1(t)) - f(x_2(t)) \|_{R^n} \leq T \| x_1 - x_2 \|_{R^n}, \qquad \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ t > 0,$$

alors le problème (I.2) admet une solution unique et globale.

I.2 Théorème du point fixe de Banach

Définition I.2.1 ([8]).
soit E un espace de Banach et $A : E \to E$, un opérateur. On dit que A est une contraction, s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que :

$$\| Ax - Ay \|_E \leq k \| x - y \|_E \text{ , pour tout } x, y \in E.$$

Théorème 2 (Contraction de Banach [9][10])**.** *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une contraction. Alors, f admet un unique point fixe.*

I.3 Notion de stabilité et points d'équilibre

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{I.3}$$

où $f : \Omega \subset R^n \to R^n$ est une fonction de classe $\mathbb{C}^1$. Soit x^* un point d'équilibre de l'équation (**??**) i.e. $f(x^*) = 0$.

Définition I.3.1 ([36]).
L'équilibre x^* de (I.3) est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (I.3) on a :

$$\| x(0) - x^* \| < \eta \Longrightarrow \forall t \geqslant 0, \| x(t) - x^* \| < \epsilon.$$

Définition I.3.2 ([36]).
L'équilibre x^* de (I.3) est dit instable, s'il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, tel qu'il existe une solution x(t) de (I.3) vérifiant :

$$\| x(0) - x^* \| < \eta \Longrightarrow \| x(t) - x^* \| \geq \varepsilon.$$

Définition I.3.3 ([36]).
Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $e > 0$ tel que : pour toute solution $x(t)$ de (I.3) on a :

$$\| x(0) - x^* \| < e \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} \| x(t) - x^* \| = 0.$$

Définition I.3.4.
L'équilibre x^* est dit globalement attractif

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - x^* \| = 0.$$

I.4 Résultats fondamentaux pour l'invariance et la stabilité globale

Soit $f : U \subset R^n \longrightarrow R^n$ un champs de vecteur et soit $\phi(t, x)$ le flot engendré par f. Un sous ensemble ψ de U est dit positivement(resp.négativement) invariant par f si pour tout $x \in \psi$ on a $\phi(t, x) \in \psi$ pour $t \geq 0$ (resp.$t \leq 0$).
Dans le cas où ψ est à la fois positivement et négativement invariant on dit que ψ est invariant par f.
Étant donné que $x \in U$, l'ensemble w_+ noté $w_+(x)$ (resp. l'ensemble w_- noté $w_-(x)$ est l'ensemble des points z tels qu'il existe une suite t_n qui tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$) et $\phi(t_n, x)$ tend vers z. Les ensembles w limites sont des fermés et invariant par f.
Dans la suite nous serons principalement concernés par l'invariance positive du cone $R^n \times R_+$ par un champ de vecteurs donné $f(x)$.

I.4.1 Stabilité d'un système non linéaire

Soit le système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y). \end{cases} \tag{I.4}$$

Où $x, y \in R^n$, f_1 etf_2 deux fonctions de classe C^1, (x^*, y^*) c'est un point d'équilibre de système (I.4).
Pour étudier la nature des points d'équilibre, on utilise la méthode de linéarisation du système non linéaire,

Définition I.4.1 (La méthode de linéarisation [11]).
La matrice Jacobienne $J_{(x,y)}$ est défini par :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Théorème I.4.1 ([12])**.** On analyse la stabilité des points d'équilibres de la matrice jacobienne qui donne le déterminant et la trace (voir [13]), tel que :

$$det(J(x^*, y^*)) = \lambda_1\lambda_2 \quad \text{et} \quad tr(J(x^*, y^*)) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de l'équation

$$\lambda^2 - tr(J(x^*, y^*))\lambda + det(J(x^*, y^*)) = 0,$$

avec :

$$\lambda_1 = \frac{tr + \sqrt{tr^2 - 4det}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \frac{tr - \sqrt{tr^2 - 4det}}{2}.$$

La nature des points d'équilibre peut être déduite d'un signe du Δ donné par :

$$\Delta = tr(J(x^*, y^*))^2 - 4det(J(x^*, y^*),$$

donc il existe trois cas :

- 1^{er} cas : $\Delta > 0$
  - Si $det(J_{(x^*,y^*)}) < 0$ et λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, alors le point d'équilibre est un point selle (col). λ_1, λ_2 sont de signe positif, alors le point d'équilibre est un nœud instable.
  - Si $det(J_{(x^*,y^*)}) > 0$ et $tr(J_{(x^*,y^*)}) < 0$ et λ_1, λ_2 sont de signe négatif, alors le point d'équilibre est un nœud stable.

- 2^{eme} cas : $\Delta < 0$

  on trouve deux valeurs propres complexes conjuguées

  $$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$

  Donc

  $$det(J_{(x^*,y^*)}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \text{et} \quad tr(J_{(x^*,y^*)}) = 2\alpha.$$

- Si $tr(J_{(x^*,y^*)}) = 0$, alors le point d'équilibre est un centre.

- Si $tr(J_{(x^*,y^*)}) > 0$ c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est positive, alors le point d'équilibre est un foyer instable.

- Si $tr(J_{(x^*,y^*)}) < 0$ c'est-à-dire la partie réelle des valeurs propres est négative, alors le point d'équilibre est un foyer stable.

- 3^{eme} cas : $\Delta = 0$

  On trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors

$$det(J_{(x^*,y^*)}) = \lambda^2 \quad \text{et} \quad tr(J_{(x^*,y^*)}) = 2\lambda \ .$$

  Donc

  - Si $tr > 0$ c'est à dire $\lambda > 0$, alors on a un nœud dégénéré instable.

  - Si $tr < 0$ c'est à dire $\lambda < 0$, alors on a un nœud dégénéré stable.

On résume l'équilibres d'une fonction de la trace et le déterminant de la matrice $J(x^*, y^*)$ comme portrait de phase.

I.5 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition I.5.1 ([14]).
Soit $V : Z \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1

1. V est dite définie positive si :
   i) $V(0) = 0$.
   ii) $V(x) > 0$ pour $x \in Z\backslash\{0\}$
2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.
3. V est dite semi définie positive si :
   i) $V(0) = 0$.
   ii) $V(x) \geq 0$ pour $x \in \Omega\backslash\{0\}$.
4. V est dite semi définie négative si $-V$ est définie positive.

Définition I.5.2 (Fonction au sens de Lyapunov[15]).
Une fonction $V : Z \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite fonction de Lyapunov pour (I.2) si :

(i) V est définie positive,

(ii) $V'(x) < 0, \forall x \in Z\backslash\{0\}$.

Théorème I.5.1 (**Stabilité de Lyapunov**[16]). Soit x^* un point d'équilibre de (I.2) et V une fonction de Lyapunov de classe C^1 défini positive d'un voisinage de x^*

— Si $V'(x) \leq 0$, $\forall\ x \in Z\backslash\{0\}$, alors $x^* = 0$ est stable.

— Si $V'(x) < 0$, $\forall\ x \in Z\backslash\{0\}$, alors $x^* = 0$ est asymptotiquement stable.

I.6 Principe d'invariance de LaSalle

Théorème I.6.1 ([17] [18]). Soit Ω un ouvert positivement invariant pour le système (I.2) en x^*. Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (I.2) telle que :

1. $V' \leq 0$ sur Ω.
2. soient $E = \{x \in \Omega | V'(x) = 0\}$ et L est le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans E.

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque $t \to \infty$.

Corollaire I.6.1 ([17][18]).
Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point $x^* \in \Omega$, alors x^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (I.2) définit dans Ω.

Définition I.6.1.
L'origine de système (I.2) est dite :
• Stable : si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\gamma(t_0, \epsilon) > 0$ tel que :

$$\parallel \varphi_0 \parallel < \gamma \Rightarrow \parallel x(t; t_0; \varphi_0) \parallel < \epsilon, \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{I.5}$$

• uniformément stable :si$\forall \epsilon > 0$, il existe $\gamma(\epsilon) > 0$, indépendant de t_0, tel que la condition (I.5) soit satisfaite.

Définition I.6.2 ([26]).
L'origine de système (I.2) est dite :

• asymptotiquement stable : si elle est stable et s'il existe $b_0 > 0$ tel que :

$$\parallel \varphi_0 \parallel_c < b_0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t; t_0; \varphi_0) = 0.$$

• uniformément asymptotiquement stable : si elle est uniformément stable et s'il existe $b_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe un $T(\eta)$ de telle sorte que :

$$\| \varphi_0 \|_c < b_0 \Rightarrow \| x(t; t_0; \varphi_0) \| < \eta, \quad \forall t \geqslant T(\eta).$$

• globalement uniformément asymptotiquement stable :
si la condition precedente est vraie quelle que soit $\varphi_0 \in$ c.

I.7 Persistance uniforme

Soit d une métrique. On note par $\partial\mathcal{F}$ la restriction de $\mathcal{F}$ à ∂E où ∂E n'est pas nécessairement positivement invariant et soit N l'ensemble invariant maximal de $\partial\mathcal{F}$ dans ∂E, de plus N est fermé et il existe un recouvrement $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de N où A est un ensemble d'index non vide et $N_\alpha \subset \partial E$, $N \subset \cup_{\alpha\in A} N_\alpha$ et N_α $(\alpha \in A)$ sont des ensembles invariants fermés disjoints deux à deux. Nous proposons les hypothèses suivantes :

i) Tous les $(N_\alpha)_{\alpha\in A}$ sont des ensembles invariants isolés du flot $\mathcal{F}$.

ii) tout sous ensemble compact de E contient de nombreux recouvrements $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Définition I.7.1.
Soit d une distance métrique et π l'application semi flot. Le semi flot F associé au système (I.2) est dit

(i) faiblement persistant si pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\limsup_{t\to\infty} d(\pi(x,t), \partial E) > 0.$$

(ii) persistant si pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\liminf_{t\to\infty} d(\pi(x,t), \partial E) > 0.$$

(iii) faiblement uniformément persistant s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\limsup_{t\to\infty} d(\pi(x,t), \partial E) > \epsilon_0.$$

(iv) uniformément persistant s'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{E}$,

$$\liminf_{t\to\infty} d(\pi(x,t), \partial E) > \epsilon_0.$$

Théorème 3. *Soit $E \subset X$ ensemble fermé positivement invariant, et soit $\mathcal{F}$ le flot défini sur E. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{F}$ est un point dissipatif dans $\mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \mathring{E}$ et (I.7) est satisfaite.*
Alors, le flot $\mathcal{F}$ est ***uniformément persistant*** *si et seulement si :*

$$W^+(N_\alpha) \cap \mathcal{S}[\partial E, \alpha] \cap \mathring{E} = \emptyset$$

pour tout $\alpha \in A$, *où* $W^+(N_\alpha) = \{y \in X, \Lambda^+(y) \subset N_\alpha\}$.

Théorème 4. *soit* $\mathbb{X}$ *être un espace métrique complet ,Supposons que* $\mathbb{X}^o$ *est ouvert , dense dans* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{X}^o \cup \mathbb{X}_o = \mathbb{X}$ *,* $\mathbb{X}_o \cap \mathbb{X}^o = \emptyset$ *, on Suppose que* $T(H)$ *est un* C_0 *semi groupe dans* $\mathbb{X}$ *satisfait :*

$$T(t) : \mathbb{X}^o \to \mathbb{X}^o$$

$$T(t) : \mathbb{X}_o \to \mathbb{X}_o$$

Soit $T_b(t) = T(t) \mid \mathbb{X}_o$ *et soit* A_b *l'attracteur globale pour* $T_b(t)$

Lemme I.7.1.

On suppose que $T(t)$ satisfait le système ,et nous avons ce qui suit :

(i) il existe un $t_0 > 0$ tel que $T(t)$ soit compact pour $t > t_0$;

(ii) $T(t)$ est un point dissipatif dans $\mathbb{X}$;

(iii) $\overline{A_b} = \cup_{H \in A_b}$est isolé et a une couverture acyclique $\overline{M}$,ou :

$$\overline{M} = M_1, M_2, ..., M_n$$

(iv) $W^s(M_i) \cap \mathbb{X}^o = \emptyset$ pour $i = 1, 2, ..., n$

Alors $\mathbb{X}_o$ est un répulsif uniforme par rapport à $\mathbb{X}^o$,c'est à dire il y a un $\epsilon > 0$ telle que pour tout $H \in \mathbb{X}^o$, $\liminf_{t \to +\infty}(T(t)H, \mathbb{X}_o) \geq \epsilon$

Théorème 5 ([27]). *Supposons que* T *est asymptotiquement régulière et* ρ *uniformément persistant, et que* T *a un attracteur global* A*. Alors* $T : (M_0, d) \to (M_0, d)$ *a un attracteur global* A_0*. De plus, pour chaque sous-ensemble* B *de* M_0*, s'il existe* $k \geq 0$ *tel que* $\gamma^+(T^k(B))$ *est* ρ*-fortement borné, alors* A_0 *attire* B *pour* T*.*

Définition I.7.2.

Le semi-flot $\Phi : J \times X \to X$ est appelé **fortement dissipatif**, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\limsup_{t \to \infty} \Phi(t, X) > c.$$

Définition I.7.3 (Point dissipatif).

Soit $\Phi : J \times X \to X$ un semi-flot continu. Φ est appelé un point **dissipatif** s'il existe un sous ensemble B de X qui attire tout les points dans X.

Définition I.7.4 (Bassin d'attraction [28]).
Le bassin d'attraction, noté $B(A)$, d'un ensemble $A \subset X$ est l'ensemble des points (ou encore des condition initiales) de l'espace des phases tels que toutes les trajectoires qui en sont issues, convergent asymptotiquement vers A. Autrement dit :

$$B(A) = x \in X/\omega(x) \subset A.$$

Définition I.7.5 (Attracteur [28]).
Soit (X, N, f) un système dynamique. Une partie A de X est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

i) A est fermée.

ii) A est positivement invariante.

iii) A est attractive, c'est-'a-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et :

$$\forall u \in U, \lim_{n\to+\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

Définition I.7.6 (La condition aux limites de Robin).
La condition aux limites de Robin est un type de condition aux limites nommé d'après Victor Gustave Robin (1855–1897). Il consiste en une combinaison linéaire des valeurs du champ et de ses dérivées sur la frontière. Étant donné, par exemple, l'équation de Laplace, le problème aux limites avec le Robin, s'écrit :

$$\triangle\ \varphi(x) = 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

$$a\varphi(x) + b\tfrac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x), \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Où a et b sont des paramètres réels.Cette condition est également appelée « condition d'impédance ».

Définition I.7.7. 1. On dit que u est une solution faible de l'équation :

$$Au - div\Phi(x, u) + g(x, u, \nabla u) = 0.$$

Si $u \in W_0^1 L_M(\Omega), G(u) \in L_{\overline{M}}(\Omega)$ avec $G(u)(x) = g(x, u(x), \nabla u(x))$ pour $x \in \Omega$, et

$\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega \Phi(x, u, \nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega g(x, u, \nabla u) v dx = 0$ pour tout $v \in W_0^1 L_M(\Omega)$.

2. On dit que u est une sous-solution (resp.une sur-solution) de *I.7.7* .Si $u \in W_0^1 L_M(\Omega), G(u) \in L_{\overline{M}}(\Omega)$ avec $G(u)(x) = g(x, u(x), \nabla u(x))$ pour $x \in \Omega$, et

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega \Phi(x,u,\nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega g(x,u,\nabla u) v dx = 0 \text{ pour tout } v \in W_0^1 L_M(\Omega), \text{ et } v \geq 0.$$

Théorème 6 (Bendixon-Dulac). *S'il existe une fonction C^1 , $\varphi(x,y)$ appelée (fonction de Dulac) , telle que l'expression :*

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y},$$

a le même signe ($\neq 0$) presque partout dans une région simplement connexe du plan.
Alors le système autonome du plan :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y).$$

N'a pas de solutions périodiques non constantes situées entièrement dans la région "presque partout" signifie partout sauf éventuellement dans un ensemble de mesure 0 , tel qu'un point ou une ligne.

Définition I.7.8 (Compact).
Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ une application, $M \subset X$. L'application ϕ est compact sur M, si pour toute suite convergente (t_n) dans $\mathbb{R}^+$ quand $t \to \infty$, $\Phi(t_i, x_i)$ admet une sous suite convergente.

I.8 Spectre d'un opérateur borné

Rappelons que si A est une matrice carrée $n \times n$, un nombre complexe λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$ et tel que $Ax = \lambda x$, ce qui signifie que $(A - \lambda I)x = 0$, c'est à dire $A - \lambda I$ n'est pas inversible , ou I est la matrice identité sur $\mathbb{R}^n$ Comme les valeurs propres ont de nombreuses applications en dimension finie.

Définition I.8.1 (spectre [21]).
. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur spectrale** si $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
On note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs spectrales de A, c'est à dire

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \quad \text{n'est pas inversible}\}.$$

Définition I.8.2 (spectre ponctuel [21]).
Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** si $\lambda I - A$ n'est pas injectif, on note $\sigma_p(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A, c'est-à-dire

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : Ker(\lambda I - A) \neq 0\}$$

Définition I.8.3 (spectre résiduel [21]).
Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **spectre résiduel** de A et note à part $\sigma_r(A)$,l'ensemble $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans E, c'est à dire :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(\lambda I - A) = 0, Im(\lambda I - A) \neq E \quad et \overline{Im(\lambda I - A)} \neq E\}.$$

Définition I.8.4 (spectre continu [21]).
Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **spectre résiduel** de A et note à part $\sigma_c(A)$,l'ensemble $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans E, c'est à dire :

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(\lambda I - A) = 0, Im(\lambda I - A) \neq E \quad et \overline{Im(\lambda I - A)} = E\}.$$

I.9 Le degré de Leray-Shauder

On rappelle que dans un espace de dimension infinie,la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte et qu'une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés.En plus on sait que l'image d'un fermé borné est un ensemble fermé si f est une application fermée, ceci est vrai si elle est une perturbation compacte.D'une façon générale, la continuité d'une application f ne suffit plus (et même d'ailleurs une régularité supérieure C^1 ou d'autre).Pour cela on va introduire la notions des opérateurs compacts qui sont des perturbations compactes de l'identité (i.e : des opérateurs Φ du type $\Phi := I - T$, où T est un opérateur compact et Idésigne l'application identité de X) pour donner la nouvelle définition du degré topologique et pour établir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer.
Dans toute la suite X est un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|$.

Définition I.9.1.
On dit qu'un ensemble est relativement compacte si sa fermeture est compacte.

Définition I.9.2.
Soient E et F deux espaces normés, $L : E \to F$ est appelé opérateur compact , s'il transforme tout ensemble borné sur E en un ensemble relativement compact de F.

Définition I.9.3.

Soit Ω un ouvert borné de X et

$T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact n'ayant pas de point fixe sur $\partial\Omega$.

Soient $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon \subset X$, et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$

On considère F un sous espace vectoriel de dimension finie tel que : $E_\varepsilon \subset F$ tel que : $\Omega_c = F \cap \Omega \neq 0$

On définit le degré topologique de Leray-shauder par :

$$Deg(I - T, \Omega, 0) = Deg(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Invariance par Homotopie

Soit $H; \overline{\Omega} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, supposons que $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\forall(x,y) \in \partial\Omega \times [0,1]$, $H(x,t) \neq y_0$ alors $deg(H, \Omega, y_0)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$.

Théorème 7 (point fixe de Leray-Shauder)**.** *Soit Ω un sous ensemble convexe ,fermé et borné non vide d'un espace de Banach X et on a : $f : \Omega \to \Omega$ une application compacte, alors f admet au moins un point fixe .*

Preuve

Étape(01) On considère Ω comme une boule fermée,$\overline{B}(0,r) = x \ \parallel x \parallel_2 \leq r$.

a) S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$ le théorème est démontré.

b) Si $f(x) \neq x$,$\forall \in \partial\Omega$.

Considérons l'homotopie $f_t(x) = (I - tf)(x)$ pour $t \in [0,1]$.

Il faut montrer que $deg(f_t, \Omega, 0)$ est bien défini ie :($0 \notin f_t(\partial\Omega)$.

En effet supposons qu'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $f_t(x) = 0$ alors

$$tf(x) = x,$$

ce qui donne

$$r = \parallel x \parallel_2 = t \parallel f(x) \parallel_2 \leq rt, \quad \text{car } f(\Omega) \subset \Omega.$$

Pour $t = 1$,$f(x) = x$, c'est impossible.

Pour $t \in [0,1]$, on a

$$r = \parallel x \parallel_2 \leq rt \leq r,$$

D'où une contradiction,donc :

$$deg(f_t, \Omega, 0) \text{ est bien défini.}$$

D'après la propriété de l'homotopie on a

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

D'après la propriété d'existence du degré

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que } (I - f)(x_0) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que } f(x_0) = x_0,$$

Étape 02 Ω est un convexe,fermé,borné non vide.
On considère une rétraction $R : X \to \Omega$ (i.e : $R\mid_\Omega = I$) et B une boule contenant Ω.
Soit le Diagramme

$$B \to^R \Omega^f \to B$$

Alors l'application$f \circ R$ est compacte car f compacte et R borné. D'après la première étape :

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que } (f \circ R)(x_0) = x_0,$$

Puisque

$$f(\Omega) \subset \Omega. \text{ et } R(x_0) \in \Omega.$$

Alors

$$x_0 \in \Omega$$

Comme

$$R(x_0) = x_0,$$

donc

$$(f \circ R)(x_0) = f(x_0) = x_0.$$

Par conséquent

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que } f(x_0) = x_0,$$

Théorème 8 (Krein-Rutmann)**.** *Soit $< X, K >$ un réel espace de Banach ordonné avec $K^o \neq \emptyset$, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur compact fortement positif, les affirmations suivantes sont vraies :*

i) le spectre résiduel $r(T) > 0$ est une valeur propre algébriquement simple de T , c'est-à-dire :

$$geom_T(r(T)) = alg_T(r(T)) = 1,$$

avec un vecteur propre correspondant $x_o \in K^o$.

ii) *$Ker(\lambda I - T) \cap K = 0$ pour $\lambda \neq r(S)$.*

iii) *$\mid \lambda \mid < r(T)$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)\ r(T)$.*

iv) *L'adjoint $T' \in \mathcal{B}(X')$ à un vecteur propre strictement positif $x'_o \in K'\{0$ correspondant à la valeur propre algébriquement simple $r(T)$.*

On considère le problème de Cauchy :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\ , \quad x(0) = x_0.$$

Où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue de classe C^1, et supposons que sa solution $x(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$.

Théorème 9 (De Comparaison)**.** *Soit l'inégalité différentielle :*

$$\frac{dy}{dt} \geq f(t,y), \quad y(0) = y_0, \text{ avec } y_0 = x_0.$$

Alors la solution $y(t)$ de l'inégalité différentielle est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie :

$$x(t) \leq y(t).$$

Théorème 10 (Principe du maximum [35])**.** *Si le $u \in \mathcal{U}$ associe a la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[0,T]$, alors il existe une application $p(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue appelé vecteur adjoint, et un réel $P^0 \leq 0$, tels que le couple $(P(.), P^0)$ est non trivial , et tels que pour presque tout $t \in [0,T]$,*

$$\tfrac{dx}{dt} = \tfrac{\partial H}{\partial P}(t, x(t), P(t), P^0, u(t)),$$

$$\tfrac{dP}{dt} = -\tfrac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), P(t), P^0, u(t)),$$

et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0,T]$

$$H(t, x(t), P(t), P^0, u(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, x(t), P(t), P^0, v).$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final [a] *T*

$$\max_{v \in \mathcal{U}} H(T, x(T), P(T), P^0, v) = -P^0 \tfrac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

Théorème 11 (Arzéla Ascoli)**.** *Soit (E,d) un espace métrique compact ,(F,d') un espace métrique complet et $C(E,F)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur E à valeurs dans F, une partie A de $C(E,F)$ est relativement compact si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. A est équicontinue,

2. A est uniformément bornée.

Théorème 12 (Prolongement de Sobolev)**.** *On suppose que Ω est de classe $C^{0,1}$. Alors il existe un opérateur de prolongement borné*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

et une constante C, tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1 $Pu_{|\Omega} = u$,

2 $\| Pu \|_{L^p(\mathbb{R}^n} \leq C \| u \|_{L^p(\Omega}$,

3 $\| Pu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(\Omega}$

Définition I.9.4 (Inégalité de Harnack).

Si u une fonction harmonique positive définie sur un disque de centre z_0 et de rayon R, alors pour tout $r < R$

$$\frac{R-r}{R+r} u(z_0) \leq u(z_0 + re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0).$$

Chapitre II

Modèle proie-prédateur avec la fonction de Leslie-Gower et récolte

II.1 Présentation du modèle

Dans cette section, nous allons décrire le système considéré comme cas d'étude et d'application. Il s'agit d'un modèle proie-prédateur, il montre l'interaction entre les proies et les prédateurs dans les écosystèmes. Ce système est étudié indépendamment de façon théorique par Lotka-volterra. Ils sont les premier à avoir mis en évidence une équation traduisant la prédation et leur modèle est à la base de toutes les équations différentielles en écologie ou en biologie.Ce modèle n'est pas réaliste, ce modèle va nous permettre d'illustrer l'utilité de l'intégration d'un modèle hétérogène pour modéliser un système que nous pouvons qualifier de complexe (modèle proie-prédateur de Leslie Gower). Si on considère une espèce de proies et celle des prédateurs nous aurons deux types d'interactions :

1. **interaction directe** : les prédateurs capturent les proies
2. **interaction indirecte** :par exemple la quantité ou la distribution des proies à une influence sur l'efficacité des prédateurs ou encore l'effet de la compétition quand plusieurs prédateurs se disputent la même ressource,Chaque espèce possède ses propres caractéristiques physiques qui lui confèrent certaines aptitudes.

Ce modèle n'est rien d'autre qu'un système d'équations différentielles traduisant la dynamique de la population de proies et celle des prédateurs en interaction. Donc ce système doit tenir compte des processus de croissance, de mortalité et d'interaction.

Nous nous intéressons d'abord à l'équation des proies qui se décompose en deux termes. Le premier terme $(r_1 H - b_1 H^2)$ décrit la croissance logistique de la populations de proies , ce qui signifie que la croissance est limitée par la disponibilité de la ressource nutritionnelle pour les proies, le deuxième terme $(-a_1 PH)$ correspondant à la mortalité due à la prédation , En regroupant ces deux termes, on obtient :

$$\frac{dH}{dt} = (r_1 - a_1 P - b_1 H)H.$$

Dans L'équation qui modélise la dynamique des prédateurs ,la capacité de charge de l'environnement du prédateur est proportionnelle au nombre de proies ,dans lequel la croissance de la population de prédateurs est de forme logistique c'est à dire $(r_2 - a_2\frac{P}{C})P$ mais le $'C'$ conventionnel mesure la capacité de charge fixée par les ressources environnementales et $C = H$ Le terme $\frac{P}{H}$ de cette équation est appelé terme de Leslie-Gower,Il mesure la perte de population de prédateurs due à la rareté (par habitant $\frac{P}{H}$) de sa nourriture préférée.
D'où on a l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = (r_1 - a_1 P - b_1 H)H, \\ \frac{dP}{dt} = (r_2 - a_2\frac{P}{H})P. \end{cases} \tag{II.1}$$

Ou H et P sont respectivement la densité des espèces proies et prédateurs à l'instant t
r_1 et r_2 sont respectivement le taux de croissance des proies et prédateurs
a_1 : taux de prédations par unité de temps
$\frac{r_1}{b_1}$: capacité de charge de l'environnement de la proie
$\frac{r_2}{a_2}$: capacité de charge des prédateurs qui est proportionnels au nombre de proies
il existe deux équilibres pour le système $(III.1)$, l'équilibre sans prédateur $E_1 = (\frac{a_1}{b_1}, 0)$ et l'équilibre de coexistence $E_2 = (H^*, P^*) = (\frac{r_1 a_2}{a_1 r_2 + a_2 b_1}, \frac{r_1 r_2}{a_1 r_2 + b_1 a_2})$ qui existe toujours.
En construisant une fonction de Lyaponov appropriée , on montre que l'équilibre positif est globalement stable c'est à dire que le système ne pouvait pas avoir un cycle limite , une telle découverte est très intéressante , car pour un système proie-prédateur avec la fonction de Holling type II ou III ,un cycle limite existe ,puis de nombreux chercheurs ont réalisé des travaux sur l'écosystème des proies des prédateurs de type Leslie , et ils ont montrés que le modèle prédateur-proie de Leslie-Gower avec effet Allée additif est possible d'admettre deux cycles limites,Certains chercheurs ont fait valoir que les cas non autonomes sont plus réalistes si l'on considère l'influence de l'effet saisonnier de l'environnement et ils ont étudié un système prédateur-proie Leslie-Gower avec des paramètres variant selon les saisons.
Dans ce chapitre on va étudier le système$(III.1)$ sous l'hypothèse de la récolte , nous supposons que les espèces de prédateurs et de proies dans le modèle sont toutes deux d'importance commerciale et qu'elles sont soumises à un affort constant ou à la récolte avec c_1 et c_2, deux paramètres qui mesurent l'effort dépensé par une agence de récolte. Ainsi, nous formulons le système comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = (r_1 - a_1 P - b_1 H)H - c_1 H, \\ \frac{dP}{dt} = (r_2 - a_2\frac{P}{H})P - c_2 P. \end{cases} \tag{II.2}$$

où H et P sont respectivement la densité des espèces proies et des espèces prédatrices à l'instant t. Pour assurer le développement durable, ce qui signifie que nous essayons de contrôler les densités d'espèces de proies et de prédateurs dans une fourchette contrôlable, mais pas pour faire périr l'espèce , on suppose que $0 < c_i < r_i$ avec $i = 1, 2$.
Dans ce qui suit nous étudierons la propriété de stabilité de l'équilibre positif du système $(III.2)$ et discuterons l'influence de la récolte puis L'équilibre bionomique.

II.2 Dissipativité

On note par $\mathbb{R}^2_+$ le quadrant non négatif et par $Int\mathbb{R}^2_+$ le quadrant positif.

Lemme II.2.1.
On observe d'abord que les bornes du quadrant non négatif $(\mathbb{R}^2_+)$ sont invariants , cela ressort clairement du système $(III.2)$, pour cela les densités $H(t)$ et $P(t)$ sont positives , pour $t \geq 0$, le théorème d'existence et d'unicité de base pour les équations différentielles garantit que les solutions positives et l'axe ne peuvent pas se croiser , nous allons montrer que sous certaines hypothèses , les solutions du système $(III.2)$ sont finalement bornées , donnons d'abord le lemme de comparaison (classique).

Lemme II.2.2.
soit $\sigma(t)$une fonction absolument continue vérifiant l'inégalité différentielle :

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_1\sigma(t) \leq \alpha_2, \quad t \geq 0, (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}^2), \alpha_1 \neq 0. \tag{II.3}$$

Pour

$$\forall t \geq T \geq 0$$

on a :

$$\sigma(t) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - (\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \sigma(T)) \exp^{-\alpha_1(t-T)}. \tag{II.4}$$

Définition II.2.1.
une solution $\sigma(t, t_0, H_0, P_0)$ du système $(III.2)$est dite ultimement bornée par rapport à $(\mathbb{R}^2_+)$ s'il existe une région compact $\beta \in \mathbb{R}^2_+$ et un temps fini $T(T = T(t_0, H_0, P_0))$, sachant que pour tout $(t_0, H_0, P_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_+$, $\sigma(t, t_0, H_0, P_0) \in \beta$ pour tout $t > T$.

Théorème 13. *soit β l'ensemble défini par :*

$$\beta = \{(H, P) \in \mathbb{R}^2_+, 0 \leq H \leq \tfrac{r_1}{b_1}, 0 \leq H + P \leq L\},$$

tel que :

$$L = \frac{1}{4a_2b_1}(a_2r_1(r_1+4)+(r_2+1)^2r_1),$$

puis,

(a) β est positivement invariant.

(b) Toutes les solutions de ($III.2$) commençant dans $\mathbb{R}^2_+$ sont ultimement bornées par rapport à $\mathbb{R}^2_+$ et finissent par entrer dans l'ensemble attractif β.

Preuve

Soit $(H(0), P(0)) \in \beta$,et on va montrer que $(H(t), P(t)) \in \beta$, pour tout $t \geq 0$ Évidemment, d'après le lemme ($III.2$), comme $(H(0), P(0)) \in \beta$, (H(t),P(t))restent positifs . Il faut alors montrer que pour tout $t \geq 0$, $H(t) \leq \frac{r_1}{b_1}$, $H(t) + P(t) \leq L$.

($a1$) D'abord on montre que $H(t) \leq \frac{r_1}{b_1}$, puisque $H > 0$ et $P > 0$ dans $Int\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ toute solution $\sigma(t) = (H(t), P(t))$ de ($III.2$) satisfait l'inégalité différentielle $\frac{dH(t)}{t} \leq (r_1 - b_1H(t))$ Ceci est évident en considérant la première équation de($III.2$) ,Ainsi $H(t)$ peut être comparé avec la solution de $\frac{du(t)}{t} \leq (r_1 - b_1u(t))$, $u(0) = H(0) > 0$ qui sont $u(t) = \frac{1}{\frac{b_1}{r_1+ce^{-r_1t}}}$ avec $c = \frac{1}{u(0)}\frac{b_1}{r_1}$. il s'ensuit que toute solution non négative $\sigma(t)$ de ($III.2$) satisfait :

$$H(t) \leq \tfrac{r_1}{b_1}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

(a2) on montre maintenant que $H(t) + P(t) \leq L$ pour tout $t \geq 0$.

On définit la fonction $\sigma(t) = H(t) + P(t)$,dont la dérivée temporelle est :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{dt} + \frac{dP}{dt} = (r_1 - a_1P - b_1H)H - c_1H + (r_2 - a_2\frac{P}{H})P - c_2P.$$

Puisque tous les paramètres sont positifs et que les solutions commençant par $\mathbb{R}^2_+$ restent dans le quadrant non négatif, alors :

$$\tfrac{d\sigma}{dt} \leq (r_1 - b_1H)H + (r_2 - a_2\tfrac{P}{H})P,$$

est valable pour tout H et P non négatif. Ainsi, comme $Max_{\mathbb{R}_+}(r_1 - b_1H)H = \frac{r_1^2}{4a_2b_1}$, ensuite $\frac{d\sigma}{dt} \leq \frac{r_1^2}{4a_2b_1} + \sigma(t) + H + P + (r_2 - a_2\frac{P}{H})P$,et ainsi , $\frac{d\sigma}{dt} + \sigma(t) \leq \frac{r_1^2}{4a_2b_1} + H + (1 + r_2 - a_2\frac{P}{H})P$, et puis : $\frac{d\sigma}{dt} + \sigma(t) \leq \frac{r_1^2}{4a_2b_1} + \frac{r_1}{b_1} + (1 + r_2 - a_2\frac{P}{H})P$, puis dans β on a $0 \leq H(t) \leq \frac{r_1}{b_1}$.

De plus, on peut facilement vérifier que , $Max_{\mathbb{R}_+}$ $(1 + r_2 - a_2\frac{P}{H})P = \frac{r_1^2}{4a_2b_1}(r_1 + 1)^2r_1$

Par conséquent :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \sigma(t) \leq L.$$

En utilisant le lemme (1.2.2) avec ($\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = L$) , alors on obtient pour tout $t \geq T \geq 0$

$$\sigma(t) \leq L - (L_\sigma(T))e^{-(t-T)}. \tag{II.5}$$

Après si $T = 0$,

$$\sigma(t) \leq L - (L_\sigma(0))e^{-t}$$

et puis $(H(0), P(0)) \in \beta$,

$$\sigma(t) = H(t) + P(t) \leq L. \tag{II.6}$$

On doit montrer que pour $(H(0), P(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, $(H(t), P(t)) \to \beta$ quand $t \to +\infty$,Nous montrerons alors que $\lim\limits_{t\to+\infty} supH(t) \leq \dfrac{r_1}{b_1}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(H(t) + P(t)) \leq L$.
Tout d'abord, le résultat $\limsup\limits_{t\to+\infty} H(t) \leq \dfrac{r_1}{b_1}$ découle directement de $(a1)$ et du lemme (1.2.2)[4] puisque les solutions du problème de la valeur initiale $\frac{dH}{dt} = H(t)(r_1 - b_1H(t))$, $H(0) \geq 0$, satisfait $\limsup\limits_{t\to+\infty} H(t) \leq \dfrac{r_1}{b_1}$.
(b2) Pour le second résultat, soit $T_1 > 0$ tel que : $H(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $t \geq T_1$ d'après l'équation (3) avec $T = T_1$, on obtient pour tout $t \geq T_1 \geq 0$

$$\sigma(t) = H(t) + P(t) \leq L - (L_\sigma(T_1))e^{-(t-T_1)}. \tag{II.7}$$

$$\leq L - [Le^{T_1}(H(T_1) + P(T_1)e^{T_1}]e^{-t} \leq L - [L(H(T_1) + P(T_1)e^{T_1}]e^{-t}. \tag{II.8}$$

Ensuite :

$$\sigma(t) = H(t) + P(t) \leq (L + \frac{\varepsilon}{2}) - [(L + \frac{\varepsilon}{2}(H(T_1) + P(T_1)e^{T_1}]e^{-t}. \tag{II.9}$$

Pour tout $t \geq T_1 \geq 0$, soit $T_2 \geq T_1$ tel que :

$$|L - (L + \tfrac{\varepsilon}{2}) - [(L + \tfrac{\varepsilon}{2}(H(T_1) + P(T_1)e^{T_1}|e^{-t} \leq \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour tout } t \geq T_2$$

Puis $H(t) + P(t) \leq L + \varepsilon$ pour tout $t \geq T_2$, d'où :

$$\lim_{t\to+\infty} sup(H(t) + P(t)) \leq L. \tag{II.10}$$

Ceci termine la preuve, et nous concluons également que le système ($III.1$) est dissipatif en $\mathbb{R}_+^2$.

II.3 Propriétés de stabilité de l'équilibre positif

Le système (*III.2*)admet un unique point d'équilibre qui est positif

$$H_* = \frac{(r_1 - c_1)a_2}{a_1(r_2 - c_2) + a_2 b_1}, P_* = \frac{(r_1 - c_1)(r_2 - c_2)}{a_1(r_2 - c_2) + b_1 a_2}. \tag{II.11}$$

On obtient cet équilibre par résoudre l'équation :

$$r_1 - c_1 - a_1 P_* - b_1 H_* = 0, \quad r_2 - c_2 = a_2 \frac{P_*}{H_*}. \tag{II.12}$$

On annonce le résultat de la stabilité locale de l'équilibre comme suit :

Théorème 14. (H_*, P_*) *du système* (*III.2*) *est localement asymptotiquement stable.*
La matrice jacobienne du système (*III.2*)*est donnée par :*

$$J(H,P) = \begin{pmatrix} r_1 - c_1 - a_1 P - 2b_1 H & -a_1 H \\ a_2 \frac{P^2}{H^2} & r_2 - c_2 - 2a_2 \frac{P}{H} \end{pmatrix}$$

ou l'équation caractéristique de $J(H,P)$ *est donnée par :*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{II.13}$$

Ou

$$a = \frac{b_1 a_2 (r_1 - c_1)}{a_1(r_2 - c_2 + b_1 a_2)} + r_2 - c_2, \quad b = (r_1 - c_1)(r_2 - c_2). \tag{II.14}$$

Il est clair que les racines de l'équation caractéristique sont négatives ou elles ont des parties réelles négatives,ainsi, l'unique équilibre positif du système est stable ce qui prouve le théorème , et concernant la propriété de la stabilité globale nous avons ce qui suit :

II.4 Persistance

Le théorème suivant montre que le système (*III.2*) est uniformément persistant.

Théorème 15. *Soit* $r_1 > c_1$ *donc le système* (*III.2*) *est uniformément persistant.*
Pour prouver ce théorème ,nous avons besoin de la théorie de la persistance uniforme pour les systèmes de dimension infinie (voir le théorème (4) *et le lemme* (I.7.1)*).*

On peut donc énoncer la preuve du théorème .

Preuve

La condition du théorème implique que $r_1 > c_1$,et donc d'après le théorème 1, il s'ensuit que $T(t)$ est point dissipatif , on sait que $E_0(0,0)$ et $E_1(\frac{r_1-c_1}{b_1},0)$sont les seuls équilibres aux limites du système ($III.2$). L'origine est clairement instable. On linéarise autour de E_1 et obtient l'équation caractéristique :

$$(\lambda + r_1 - c_1)(\lambda - r_2 + c_2) = 0 \tag{II.15}$$

Les valeurs propres de $\lambda - r_2 + c_2$,Il existe une unique valeur propre positive $\lambda = c_1 - r_1$ ainsi l'ensemble stable de E_1 ne coupe pas le cône positif ,E_0 et E_1 sont des ensembles invariants isolés sur la frontière. Comme E_0 est instable, $\overline{A_b}$ n'est que l'union des deux états stationnaires. En prenant M_i comme ces états stationnaires, il n'y a pas de cycles sur la frontière. Par conséquent, le résultat découle du lemme 1

Théorème 16. *l'équilibre positif* (H_*, P_*) *du système* ($III.2$) *est globalement stable.*

Pour prouver ce théorème , on utilise le théorème suivant .

Théorème 17. *le système* ($III.2$) *est persistant si pour toute solution positive* $(H(t), P(t))^T$ *il existe des constantes positives* m_i, M_i *avec* $i = 1, 2$ *qui sont indépendantes de la solution du système de sorte que :*

$$m_1 \leq \lim_{t\to+\infty} inf H(t) \leq M_1, \tag{II.16}$$

$$m_1 \leq \lim_{t\to+\infty} inf H(t) \leq M_1, \tag{II.17}$$

Le théorème précédent montre que :

$$\lim_{t\to+\infty} H(t) = H_* > 0, \lim_{t\to+\infty} P(t) = P_* > 0. \tag{II.18}$$

On remarque que (H_*, P_*) ne dépend que du coefficients du système ($III.2$) et indépendante de sa solution.

Preuve

On construit la fonction de Lyaponov suivante :

$$V(H,P) = ln\frac{H}{H_*} + \frac{H_*}{H} - 1 + \frac{a_1 H_*}{a_2}(ln\frac{P}{P_*} + \frac{P_*}{P} - 1). \tag{II.19}$$

$V(H,P)$ est bien défini et continue pour tout $H, P > 0$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{H}(1 - \frac{H_*}{H^2}), \tag{II.20}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{a_1 H_*}{a_2 P}(1 - \frac{P_*}{P}). \tag{II.21}$$

Donc le point d'équilibre (H_*, P_*) est le seul extremum de la fonction $V(H, P)$ dans le quadrant positif , on calcule les dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial H^2} = \frac{1}{H^2}(-1 + \frac{2H_*}{H}), \tag{II.22}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P \partial H} = 0, \tag{II.23}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = \frac{a_1 H_*}{a_2 P^2}(-1 + \frac{2P_*}{P}). \tag{II.24}$$

Pour cela

$$d^2 V \mid_{(H_*, P_*)} = \frac{1}{H_*} dH^2 + \frac{a_1 H_*}{a_2 P_*} dP^2 > 0. \tag{II.25}$$

l'analyse ci-dessus montre que (H_*, P_*) est le seul extremum minimum de la fonction $V(H, P)$ dans le quadrant positif , on peut facilement vérifier que :

$$\lim_{H \to 0} V(H, P) = \lim_{P \to 0} V(H, P) = \lim_{H \to +\infty} V(H, P) = \lim_{P \to +\infty} V(H, P) = +\infty. \tag{II.26}$$

On peut voir que (H_*, P_*) l'équilibre positif est le global minimum qui est :

$$V(H, P) > V(H_*, P_*) = 0, \text{pour tout} \quad H, P > 0. \tag{II.27}$$

On calcule la dérivée de V :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{H}(1 - \frac{H_*}{H})(r_1 - c_1 - b_1 H - a_1 P)H + \frac{a_1 H_*}{a_2 P}(1 - \frac{P_*}{P})(r_2 - c_2 - a_2 \frac{P}{H})P$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{b_1}{H}(H - H_*)^2 - \frac{a_1}{P}(P - P_*)^2. \tag{II.28}$$

$\frac{dV}{dt} < 0$ est strictement négative pour tout $H, P > 0$ sauf pour l'équilibre positif (H_*, P_*) ou $\frac{dV}{dt} = 0$,ainsi $V(H, P)$ vérifie le théorème de stabilité asymptotique de Lyaponov , et l'équilibre positif (H_*, P_*) du système $(III.2)$ est globalement stable , ceci termine la preuve du théorème.

Remarque Avec la restriction $0 < c_i < r_i$, $i = 1, 2$ le système $(III.2)$ admet toujours un unique équilibre positif et d'après le théorème $(2, 1)$ et $(2, 2)$ on voit que cet équilibre est globalement attractif puisque sa propriété de stabilité n'est pas changé avec la variété du paramètre Le système ne pourrait pas subir la bifurcation de Hopf et il n a y a pas de cycle limite du système $(III.2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on effet nous pouvions également prouver cette déclaration en utilisant le théorème de Bendixon-Dulac

$$F(H,P) = (r_1 - a_1 P - b_1 H)H - c_1 H.$$

$$G(H,P) = (r_2 - a_2 \frac{P}{H})P - c_2 P.$$

$$B(H,P) = \frac{1}{HP}.$$

Nous avons que ces trois fonctions $F(H,P)$, $G(H,P)$,$B(H,P) \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$.
On calcule la dérivé, on trouve $\frac{\partial BH}{\partial H} + \frac{\partial BG}{\partial P} = -\frac{b_1}{P} - \frac{a_2}{H^2} < 0 \; (H,P) \in (\mathbb{R}^2_+)$.
D'après le théorème de Bendixon-Dulac , nous savons qu'il n y a pas de cycle limite pour le système ($III.2$) dans ($\mathbb{R}^2$).

II.5 L'influence de la récolte

Nous aborderons ce résultat en trois aspects :

Le cas de la seule récolte d'espèces proies

Dans ce cas

$$H_* = \frac{(r_1 - c_1)a_2}{a_1 r_2 + a_2 b_1}, P_* = \frac{(r_1 - c_1)r_2}{a_1 r_2 + a_2 b_1}. \tag{II.29}$$

H_* , P_* sont toutes des fonctions différentiables continues du paramètre c_1 et

$$\frac{dH_*}{dc_1} = \frac{-a_2}{a_1 r_2 + a_2 b_1} < 0, \quad \frac{dP_*}{dc_1} = \frac{-r_2}{a_1 r_2 + a_2 b_1} < 0. \tag{II.30}$$

les inégalités ci-dessus montrent que H_* et P_* sont toutes les deux des fonctions strictement négatives de c_1 c'est à dire que l'augmentation du taux de capture des espèces proies conduit à la diminution de la densité des espèces proies et prédateurs

Le cas de la seule récolte d'espèces prédateurs

Dans ce cas :

$$H_* = \frac{r_1 a_2}{a_1(r_2 - c_2) + a_2 b_1}, P_* = \frac{r_1(r_2 - c_2)}{a_1(r_2 - c_2) + a_2 b_1}. \tag{II.31}$$

C'est-à-dire que H_* , P_* sont toutes des fonctions différentiables continues du paramètre c_2 , on remarque que :

$$\frac{dH_*}{dc_2} = \frac{a_1 a_2 r_1}{(a_1 r_2 + a_2 b_1)^2} > 0, \quad \frac{dP_*}{dc_2} = \frac{-r_1 a_2 b_1}{(a_1 r_2 + a_2 b_1)^2} < 0. \tag{II.32}$$

On voit que H_* est la fonction strictement positive du c_2 , et P_* est la fonction strictement négative de c_2 , c'est à dire que l'augmentation du taux de capture des espèces prédateurs entraine l'augmentation de la densité des espèces proies et la diminution des espèces prédateurs .

Le cas de récolte conjointe des prédateurs et des proies

Dans ce cas , il résulte de $(III.2)$ que H_* , P_* sont toutes des fonctions différentiables continues de paramètres c_i avec $i = 1, 2$ plus qu'on a supposé $0 < c_i < r_i$ il n'est pas toujours facile de donner une analyse détailler de tous les cas , ici , nous n'étudions que le problème suivant , qui semble très intéressant

Il est possibles de choisir des paramètres appropriée c_i tel que après la récolte des prédateurs et de proies , les densités d'espèces de proies lorsque $t \to \infty$ ne changent toujours pas .

Autrement dit $H_1 = H_*$ si cela est possible qu'en est-il des comportements dynamiques des espèces prédateurs dans ce cas ?

la première partie de la question revient à dire que dans quel cas $H_1 = H_*$, c'est à dire :

$$\frac{(r_1 - c_1)a_2}{a_1(r_2 - c_2) + a_2 b_1} = \frac{r_1 a_2}{a_1 r_2 + a_2 b_1}.$$

En résolvant l'inégalité , on obtient :

$$c_2 = \frac{a_1 r_2 + a_2 b_1}{r_1 a_1}.$$

Cela signifie qu'avec les efforts de capture appropriées (c_i qui satisfait l'inégalité $(3, 6)$ les espèces proies convergent vers H_* , et nous avons :

$$P_* = \frac{r_1^2 a_1 r_2 - r_1 c_1 (a_1 r_2 + a_2 b_1)}{a_1 (r_1 - c_1)(a_1 r_2 + a_2 b_1)}.$$

Évidement P_* est la fonction différentiable continue du paramètre c_1 et

$$\frac{dP_*}{dc_1} = \frac{b_1 a_2 r_1^2}{a_1 (r_1 - c_1)^2 (a_1 r_2 + a_2 b_1} < 0.$$

C'est à dire si le taux de capture des espèces de prédateurs et de proies , alors l'augmentation de la récolte de proies et de prédateurs conduira finalement à la diminution des densités des prédateurs P_*.

II.6 L'équilibre bionomique

On doit étudier l'équilibre bionomique du système ($III.2$) puisque il a une signification pratique le terme équilibre bionomique est un amalgame des concepts d'équilibre biologique et d'équilibre économique , comme nous le savons , un équilibre biologique est donnée par ($\frac{dH}{dt}, \frac{dP}{dt} = 0$ et l'équilibre économique doit être atteint lorsque le revenu total TR (obtenu en vendant les consacré de la récolte), doivent être donnés en premiers :

P_1 est le prix par unité de biomasse de la proie H.

P_2 est le prix par unité de biomasse de prédateurs P.

q_1 est le cout de pêche par unité d'effort de la proie H.

q_2 est le cout de pêche par unité d'effort du prédateurs P.

Ensuite le revenu de la rente économique à tout moment est donnée par :

$$N = TR - TC = (p_1H - q_1)c_1 + (p_2p - q_2)c_2 = N_1 + N_2, \tag{II.33}$$

quand $N_1 = (p_1H - q_1)c_1$ et $N_2 = (p_2p - q_2)c_2$.

C'est à dire que N_1 et N_2 représentent les revenues nets pour la population H et P respectivement pour plus de commodité , nous considérons que le prix par unité de biomasse des prédateurs et le coût de pêche par unité d'efforts par prédateurs sont constants , ainsi l'équilibre bionomique est données par les équations simultanées suivantes :

$$\frac{dH}{dt} = (r_1 - a_1P - b_1H)H - c_1H, \tag{II.34}$$

$$\frac{dP}{dt} = (r_2 - a_2\frac{P}{H})P - c_2P, \tag{II.35}$$

$$N = (p_1H - q_1)c_1 + (p_2P - q_2)c_2 = 0. \tag{II.36}$$

Le prix et le coût des prédateurs n'étant pas surs ,nous considérons les cas suivants afin de déterminer l'équilibre bionomique

Le cas (1) si :

$$\frac{q_1}{p_1} > H. \tag{II.37}$$

$$p_1H - q_1 < 0. \tag{II.38}$$

Si l'on dit que le cout total dépasse le revenu total de la récolte des proies évidemment , la récolte proies sera arrêtée c'est à dire ($c_1 = 0$) et la récolte des prédateurs reste opérationnelle si :

$$p_2P - q_2 > 0$$

alors à partir de $(II.36)$, on a :

$$P_{1\infty} = \frac{q_2}{p_2}. \tag{II.39}$$

En le substituant en $(II.35)$, il s'ensuit que :

$$H_{1\infty} = \frac{r_1p_2 - a_1q_2}{b_1p_2}. \tag{II.40}$$

Encore une fois la substitution de $(II.39)$ et $(II.40)$ dans $(II.34)$ conduit à :

$$c_{2\infty} = r_2 - a_2\frac{P_{1\infty}}{H_{1\infty}} = r_2 - \frac{a_2b_1q_2}{r_1p_2a_1q_2}. \tag{II.41}$$

Donc si $r_1 > a_2(\frac{q_2}{p_2})$ et $r_2 > \frac{a_2b_1q_2}{r_1p_2 - a_1q_2}$ tenir ensemble , on à l'équilibre bionomique $[H_{1\infty}, P_{1\infty}, 0, c_{2\infty}]$
Dans le cas (2) si :

$$\frac{q_2}{p_2} > P. \tag{II.42}$$

$$p_2P - q_2 < 0. \tag{II.43}$$

Est vrai c'est-à-dire que le coût total dépasse le revenu total pour la récolte du prédateurs évidement , la récolte des proies sera arrêtée c'est à dire $(c_2 = 0)$ et la récolte des prédateurs reste opérationnels si $p_1H - q_1 > 0$ alors il découle de $(II.36)$ que :

$$H_{1\infty} = \frac{q_1}{p_1}, \tag{II.44}$$

$$P_{1\infty} = \frac{r_2q_1}{a_2p_1}. \tag{II.45}$$

La substitution de $(II.44)$ et $(II.45)$ dans $(II.34)$ conduit à :

$$c_{1\infty} = r_1 - a_1P_{1\infty} - b_1H_{1\infty} =$$

$$r_1 - \frac{(a_1r_2 - a_2b_1)q_1}{a_2p_1}.$$

Si

$$r_1 > \frac{(a_1r_2 - a_2b_1)q_1}{a_2p_1},$$

on a l'équilibre bionomique $[H_{1\infty}, P_{1\infty}, c_{1\infty}, 0]$
Dans le cas (3) si

$$\frac{q_2}{p_2} > P, \frac{q_1}{p_1} > H. \tag{II.46}$$

$$p_2P - q_2 < 0, p_1H - q_1 < 0. \tag{II.47}$$

alors il est équivalent à dire que le coût total dépasse le revenu total pour deux populations , évidement la récolte sera arrêtée c'est à dire $(c_1 = 0)(c_2 = 0)$ dans ce cas , il n y a pas d'équilibre bionomique
Dans le cas (4) si :

$$\frac{q_2}{p_2} < P, \frac{q_1}{p_1} < H, \tag{II.48}$$

$$p_2P - q_2 > 0, p_1H - q_1 > 0. \tag{II.49}$$

Dans ce cas , le revenu total dépasse le coût total pour deux populations et la récolte est opérationnelle car elle peut rapporter des bénéfices à la pêche
de($II.36$) on a :

$$H_{1\infty} = \frac{q_1}{p_1}, P_{1\infty} = \frac{q_1}{p_1}. \tag{II.50}$$

En substituant les égalités ci-dessus dans ($II.34$)et ($II.35$), il est facile d'obtenir :

$$c_{1\infty} = r_1 - \frac{(a_1p_2q_1 - b_1)p_1q_2}{q_2p_1}, \quad c_{2\infty} = r_2 - \frac{a_2p_1q_2}{p_2q_1}. \tag{II.51}$$

Donc si :

$$r_1 > \frac{(a_1p_2q_1 - b_1)p_1q_2}{q_2p_1}, \quad r_2 > \frac{a_2p_1q_2}{p_2q_1}. \tag{II.52}$$

Tenir ensemble , on à l'équilibre bionomique $[H_{1\infty}, P_{1\infty}, c_{1\infty}, c_{2\infty}]$.
il est évident que l'équilibre bionomique peut exister si le taux de croissance intrinsèque de deux espèces dépasse une certaine valeur .

II.7 Conclusion

Un modèle prédateur-proie de Leslie-Gower intégrant la récolte est étudié dans cet chapitre. On a montré d'abord qu'une récolte appropriée n'a pas d'influence sur la propriété persistante du système de récolte. Après cela, on a essayé de donner les détails de la récolte sur les comportements dynamiques du système. Notre étude montre que, pour le système ayant à la fois la récolte sur les espèces prédatrices et les proies, il admet un phénomène intéressant, peut-être qu'un tel pronostic pourrait être appliqué pour fournir les ressources scientifiques comme les sheries et les arbres forestiers. Ensuite, pour la signification pratique, nous considérons le profit économique de la récolte. On a terminé par étudier L'équilibre bionomique.

Chapitre III

Modèle de Lotka-Volterra avec réaction diffusion et la fonction de Leslie-Gower

Dans ce chapitre, nous étudions la dynamique globale d'un modèle Leslie Gower avec diffusion dans des environnements homogène d'advection, nous discutons l'existence et l'unicité des solutions stationnaires positives. Nous étudions le grand comportement au large du temps des solutions et établir des conditions de seuil pour la persistance et l'extinction de deux espèces lorsqu'elles vivent dans des environnements convectifs ouverts.

III.1 Présentation du modèle

$$\begin{cases} H_t - d_1 \triangle H = H(r_1 - H - aP), \qquad x \in \Omega, t > 0, \\ P_t - d_2 \triangle P = P(r_2 - c\frac{P}{H}), \qquad x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{III.1}$$

avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

H et P la densité de la population proies et prédateurs à l'instant t et l'emplacement x sur le domaine borné Ω

la condition aux limites de Neumann signifie qu'aucune espèce ne peut traverser la limite de Ω

d_1, d_2, r_1, r_2, a, c sont des constantes positives ,

d_1 et d_2 sont le taux de diffusion correspondants à H et P

r_1 et r_2 signifient le taux de croissance intrinsèques de chaque espèce

a et c représentent les interactions inter-spécifiques par la prédation

l'équilibre positif constant unique attire toutes les solutions positives dans certaines conditions et les solutions d'état stable positives non constantes n'existent pas lorsque les espèces vivent dans des environnement homogènes.

III.2 Dynamique d'un systéme Leslie-Gower avec diffusion

Pour étudier quelle dynamique un système Leslie-Gower avec diffusion peut avoir dans des environnements d'advection , nous proposons le modèle suivant :

$$\begin{cases} H_t = d_1 H_{xx} - qH_x + H(r_1 - H - aP), \qquad 0 < x < L, t > 0, \\ P_t = d_2 P_{xx} - qP_x + P(r_2 - c\frac{P}{H}) \qquad ,0 < x < L, t > 0, \\ d_1 H_x(0) - qH(0) = 0, \qquad t > 0, \\ d_2 P_x(0) - qP(0) = 0, \qquad t > 0, \\ d_1 H_x(L) - qH(L) = -bqH(L), \qquad t > 0, \\ d_2 P_x(L) - qP(L) = -bqP(L), \qquad t > 0, \\ H(x,0) = H_0(x) \geq 0, \neq 0, P(x,0) = P_0(x) \geq 0, \neq 0, \qquad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{III.2}$$

H et P la densité de la population proies et prédateurs à l'instant t et l'emplacement x sur le domaine borné $[0, L]$, L est la taille de l'habitat , les significations biologiques des autres paramètres sont les mêmes que celles du modèle , de plus la constante positives q est la vitesse effective du courant qui est parfois appelé "vitesse d'advection "
En ce qui concerne les conditions aux limites à l'extrémité amont $x = 0$, l'organisme supposé satisfait la condition aux limites de non-flux , ce qui signifie qu'aucun individu n'est autoriser à traverser à l'extrémité aval $x = L$,la constante non négative b mesure un taux de perte d'individus à la frontière par rapport à la vitesse d'advection , En particulier $b = 0$ signifie que les espèces vivent dans ses milieux convectifs fermés , tandis que $b > 0$ signifie qu'il existe un taux de perte d'individus à l'extrémité aval , c'est à dire que les espèces vivent dans des environnements d'advection ouverts , $H_0(x)$ et $P_0(x)$ représente la distribution initiale de la populations de proies et de prédateurs respectivement , pour plus de simplicité nous supposons que la longueur de l'habitat $L = 1$, sauf indication contraire , nous considérons d'abord la dynamique du modèle à une seule espèce comme suit :

$$\begin{cases} H_t = H_{xx} - qH_x + H(r - H), \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ dH_x(0) - qH(0) = 0, \quad t > 0, \\ dH_x(1) - qH(1) = -bqH(1), \quad t > 0, \\ H_0(x) \geq 0, \neq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.3}$$

cela conduit à l'étude du problème des valeurs propres linéaires :

$$\begin{cases} \Phi_{xx} - q\Phi_x + r\Phi = \lambda\Phi, \quad 0 < x < 1, \\ d\Phi_x(0) - q\Phi(0) = 0, \\ d\Phi_x(1) - q\Phi(1) = -bq\Phi(1). \end{cases} \tag{III.4}$$

ou $d, q, r > 0$, $b \geq 0$ représentent respectivement , le taux de diffusion , la vitesse d'advection , le taux de croissance inhérent de l'espèce et le taux de perte de l'espèce à l'extrémité aval. Le système ($III.2$) et le problèmes à valeurs propres ($III.4$) ont les résultat suivants :

Lemme III.2.1.
Supposons $d, q, r > 0$, régler $\widehat{q} = \sqrt{dr/b(1-b)}$, pour $b \in (0, \frac{1}{2}]$, et $\widehat{q} = \sqrt{4dr}$ pour $b \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, il existe $q^* = q^*(d, r, b) \in (0, \widehat{q})$, tel que pour $q \in (0, \widehat{q})$, (1.3) admet un unique état stationnaire positif (noté $\theta(d, r, q, b)$ qui est globalement asymptotiquement stable , pour $q \in [q^*, +\infty)$, $H = 0$ est globalement stable et la valeur propre principale $\lambda_1(d, q, r, b)$ vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_1(d, q, r, b) > 0 \quad si 0 < q < q^*, \\ \lambda_1(d, q, r, b) = 0 \quad si q = q^*, \\ \lambda_1(d, q, r, b) < 0 \quad si q > q^*. \end{cases} \tag{III.5}$$

On peut noter que lorsque la proie devient très rare , on a $P \to 0$, par conséquent on peut définir un équilibre biologiquement réalisable $(0, 0)$ pour le système($III.2$) , ce qui indique que les prédateurs et les proies sont éteints.

Théorème 18. *Supposons $d_1, d_2, r_1, r_2 > 0$, $b > 0$ les conclusions suivantes pour le système ($III.2$) sont vraies :*

** quand $q^*(d_1, r_1, b) \leq q^*(d_2, r_2, b)$,*

1- si $q \in (0, q^*(d_1, r_1, b))$, alors ($III.2$) admet un unique état stationnaire positif (u_s, v_s) globalement attractif

2- si $q \in [q^*(d_1, r_1, b), +\infty)$, alors la solution de($III.2$) converge uniformément vers $(0, 0)$ sur $[0, 1]$

** quand $q^*(d_1, r_1, b) > q^*(d_2, r_2, b)$,*

1- Si $q \in (0, q^*(d_2, r_2, b))$, alors ($III.2$) admet un unique état stationnaire positif (u_s, v_s) globalement attractif)

2- si $q \in (q^*(d_2, r_2, b), q^*(d_1, r_1, b))$ *alors* $(\theta(d_1, r_1, q, b))$ *est globalement asymptotiquement stable.*

3- si $q \in [q^*(d_1, r_1, b), +\infty)$ *, alors la solution de* $(III.2)$*converge uniformément vers* $(0, 0)$ *sur* $[0, 1]$.

Le théorème (18) montre que la vitesse d'advection q joue un rôle essentiel dans la détermination du comportement dynamique du système$(III.2)$ lorsque les espèces vivent dans des environnements convectifs ouverts , en particulier , pour fixer $d_i, r_i (i = 1, 2)$ et $b > 0$
Lorsque la vitesse d'advection est supérieure à la vitesse d'advection critique de la proie , c'est à dire $q > q^*(d_1, r_1, b)$ le prédateur et la proie disparaitront.
Lorsque la vitesse d'advection est si petite et qu'elle est inférieure au minimum des vitesses d'advection critiques de la proie et du prédateur, c'est-à-dire $q < min q^*(d_1, r_1, b), q^*(d_2, r_2, b)$ le prédateur et la proie coexisteront.
Lorsque la vitesse d'advection se situe dans un niveau intermédiaire , il existe un état stationnaire semi-trivial globalement asymptotiquement stable $(\theta(d_1, r_1, q, b), 0)$
quand $q \in (q^*(d_2, r_2, b), q^*(d_1, r_1, b))$
Ainsi pour obtenir la dynamique du système $(III.2)$ il est important de déterminer et de comparer les vitesses critiques d'advection $q^*(d_1, r_1, b)$ et $q^*(d_2, r_2, b)$.
Il résulte que la vitesse critique d'advection $q^*(d, r, b)$ est décroissante par rapport a b lorsque $b > \frac{1}{2}$, ce qui implique une plus grande perte d'individus a $x = L$.

Théorème 19. *Supposons* $d_1, d_2, r_1, r_2 > 0$ *, si* $b = 0$ *alors le système* $(III.2)$ *admet un unique état stationnaire* (u_s, v_s) *qui est globalement attractif pour tout* $q > 0$.

III.3 Problème de valeurs propres

Le système $(III.2)$ a un unique état stationnaire semi trivial $(\theta(d_1, r_1, q, b), 0)$ d'après le lemme $III.18$ pour la simplicité des notions , sans déclaration spéciale, nous avons défini plus loin $\theta(d_1, r_1, q, b)$ par $\theta(x)$, nous considérons d'abord un problème aux valeurs propres linéaires :

$$\begin{cases} d\omega_{xx} - q\omega_x + r(x)\omega = \lambda\omega, , & 0 < x < 1 \\ d\omega_x(0) - q\omega(0) = 0, \\ d\omega_x(1) - q\omega(1) = -bq\omega(1) \end{cases} \tag{III.6}$$

ou $d, q > 0$, $b \geq 0$ et $r(x) \in L^\infty[0, 1]$ d'après le théorème de Krein Rutmann , le problème $III.6$ admet une valeur propre principale $\lambda_1(d, q, r(x), b)$ ce qui correspond à une fonction propre positive $\omega_1(d,q,r(x),b)$, de plus le problème aux valeurs propres $III.6$ à une suite de valeurs propres :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > .... > \lambda_n \to -\infty,$$

et par l'approche de caractérisation variationnelle $\lambda_1(d,q,r(x),b)$ peut être représentée par :

$$\lambda_1(d,q,r(x),b) = \sup_{\omega\in H^1(0,1)_{\omega\neq 0}} \frac{r(x)\int_0^1 e^{\frac{q}{d}x}\omega^2 dx - \int_0^1 e^{\frac{q}{d}x}\omega_x^2 dx - qbe^{\frac{q}{d}x}\omega^2(1)}{\int_0^1 e^{\frac{q}{d}x}\omega^2 dx}.$$

Lemme III.3.1.

pour le problème aux valeurs propres (III.6) , si $r_1(x) \leq r_2(x)$, alors la valeur propre principale $\lambda_1(d,q,r_1(x),b) \leq \lambda_1(d,q,r_2(x),b)$.

Lemme III.3.2.

Supposons que $d_1, d_2, r_1, r_2, q > 0$ et $b \geq 0$ si la solution stationnaire semi trivial $(\theta(x), 0)$ de $(III.2)$ existe , alors $0 < \theta(x) \leq r_1$ sur $[0,1]$.

Preuve d'abord $\theta(x)$ satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} d_1\theta_{xx} - q\theta_x + \theta(r_1-\theta) = 0, & 0<x<1, \\ d_1\theta_x(0) - q\theta(0) = 0, \\ d_1\theta_x(1) - q\theta(1) = -bq\theta(1). \end{cases} \tag{III.7}$$

On voit que $\theta(x) > 0$ sur $[0,1]$ et $\theta(x) < r_1$ sur $[0,1]$ pour $b \geq 1$ par le maximum principale fort.

On prouve que $\theta(x) < r_1$ sur $[0,1]$ pour $0 \leq b < 1$, on pose $\theta^* = \frac{\theta_x}{\theta}$, alors θ^* satisfait :

$$\begin{cases} d_1\theta^*_{xx} + (2d_1\theta^* - q)\theta^*_x - \theta\theta^* = 0, & 0<x<1, \\ \theta^*(0) = \frac{q}{d_1}, \quad \theta^*(1) = (1-b)\frac{q}{d_1}. \end{cases} \tag{III.8}$$

Par le maximum principale on obtient : $(1-b) < \theta^* < \frac{q}{d_1}$, sur $(0,1)$ pour $0<b<1$, puisque $(1-b)\frac{q}{d_1} \leq \theta^*$ sur $(0,1)$ pour $0 \leq b < 1$

Cela montre que $\theta_x > 0$ dans $(0,1)$ pour $0<b<1$, alors $\theta(x)$ atteint un maximum M en $x=1$, si $M > r_1$, en intégrant la première équation de $(III.6)$ sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \theta(r_1-\theta)dx = bq\theta(1) \geq 1.$$

Évidemment , il existe x_1 dans $(0,1)$ tel que $\theta(x_1) = r_1$ et $\theta(x) \geq r_1$ pour $x \in [x_1,1]$, nous intégrant à nouveau la première équation de $(III.6)$ sur $[x_1,1]$, nous obtenons

$$-bq\theta(1) - d_1\theta_x(x_1) + q\theta(x_1) + \int_{x_1}^{1} \theta(r_1 - \theta)dx = 0.$$

il est facile de savoir que $\int_{x_1}^{1} \theta(r_1-\theta)dx < 0$ ce qui indique que $-bq\theta(1)-d_1\theta_x(x_1)+q\theta(x_1) > 0$, on a donc :

$$\theta^*(x_1) = \frac{\theta_x(x_1)}{\theta(x_1)} < \frac{q}{d_1}(1 - \frac{\theta(1)}{\theta(x_1)}b) < (1-b)\frac{q}{d_1}.$$

Cela contredit le fait $(1-b)qd_1 \leq \theta^*$ dans $(0,1)$ pour $0 \leq b < 1$

En suite nous nous tournons à l'étude de la monotonie de $q^*(d,r,b)$ par rapport à d, r et b , on a les propriétés suivantes concernant la vitesse critique d'advection $q^*(d,r,b)$.

Proposition III.3.1.

Soit tout $d > 0$,$r > 0$, si $b > \frac{1}{2}$, alors $q^*(d,r,b)$ est décroissante par rapport à b et croissante par rapport à r.

preuve Pour le problème linéaire aux valeurs propres (III.6), par l'approche de caractérisation variationnelle ,$\lambda_1(d,q,r(x),b)$ peut être représenté par :

$$\lambda_1(d,q,r(x),b) = \sup_{\omega\in H^1(0,1)_{\omega\neq 0}} \frac{r(x)\int_0^1 e^{\frac{q}{d}x}\omega^2 dx - \int_0^1 e^{\frac{q}{d}x}\omega_x^2 dx - qbe^{\frac{q}{d}x}\omega^2(1)}{\int_0^1 e^{\frac{q}{d}x}\omega^2 dx}.$$

on peut également obtenir que la valeur propre principale $\lambda_1(d,q,r(x),b)$ est décroissante par rapport à b et croissante par rapport à r à partir de $(III.7)$, compte tenue de la proposition (III.3.1), nous avons que la valeur propre principale $\lambda_1(d,q,r(x),b)$ est continuêment dérivable en d,q,r,b , de plus on peut savoir que $\lambda_1(d,q,r(x),b)$ est strictement décroissante par rapport à q pour $b > \frac{1}{2}$,d'après la proposition (1) et le lemme (III.18) , nous avons que $\lambda_1(d,q,r(x),b) = 0$ si et seulement si $q = q^*(d,r,b)$, par conséquent il découle du théorème des fonctions implicite que $q^*(d,r,b)$ est décroissante par rapport à b et croissante par rapport à r.

Proposition III.3.2.

Soit tout $d > 0$,$r > 0$, si $0 < b \leq 1$, alors $q^*(d,r,b)$ est strictement décroissante par rapport à d si $1 < b < \frac{3}{2}$, est strictement croissante par rapport à d suffisamment grand de plus si $b > \frac{3}{2}$ alors $q^*(d,r,b)$ est strictement décroissante en d suffisamment grand.

preuve

Se référer au lemme (1.3.1) dans [25] , il existe une taille d'habitat critique $L^*(d,q,r,b) = L = 1$ si et seulement si $q = q^*(d,r,b)$ dans le modèle $(III.3)$ et $L^*(d,q,r,b)$ est une fonction croissante de la vitesse d'advection q , d'après le théorème (2.2) et lemme (3.7) dans [25] , on sait que $L^*(d,q,r,b)$ est strictement décroissante par rapport à d lorsque $0 < b < 1$ est strictement décroissante en d suffisamment grand quand $b > \frac{3}{2}$ par le théorème des fonctions implicite, on sait que $q^*(d,r,b)$ est strictement croissante par rapport à d pour $0 < b < 1$,$q^*(d,r,b)$

est strictement croissante en d pour d suffisamment grand,pour $1 \leq b \leq, \frac{3}{2}$ est strictement décroissante en d pour d suffisamment grand pour $b \geq \frac{3}{2}$.
Plus précisément , lorsque $b = 1$, alors la valeur propre principale $\lambda_1(d, q, r(x), b)$ est strictement décroissante par rapport à q et strictement croissante par rapport à d , $\lambda_1(d, q, r(x), b) = 0$ si et seulement si $q = q^*(d, r, b)$ d'après le lemme (III.18) ainsi le théorème des fonctions implicite implique que $q^*(d, r, b)$ est strictement croissante par rapport à d pour $b = 1$. Combiné avec l'analyse ci-dessus la proposition est établie.

III.4 Existence et unicité

On applique la théorie des degrés topologiques pour étudier l'existence des solutions stationnaire positives (u_s, v_s) du système($III.2$) et on complète la preuve de l'unicité , on pose la transformation : $u(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}(x,t)$,$v(x,t) = e^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}(x,t)$, le système ($III.2$) devient :

$$\begin{cases} \widehat{u}_t = d_1\widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - \widehat{u}e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u} - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}), & 0 < x < 1, t > 0, \\ \widehat{v}_t = d_2\widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{c\widehat{v}}{\widehat{u}}e^{(\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2})}x) & ,0 < x < 1, t > 0, \\ \widehat{u}_x(0) = \widehat{v}_x(0) = 0 & t > 0, \\ d_1\widehat{u}_x(1) - q\widehat{u}(1) = -bq\widehat{u}(1), & t > 0 \\ d_2\widehat{v}_x(1) - q\widehat{v}(1) = -bq\widehat{v}(1), & t > 0 \\ \widehat{u}(x,0) = \widehat{u}_0(x) \geq 0, \neq 0, \widehat{v}(x,0) = \widehat{v}_0(x) \geq 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.9}$$

Notons que les conditions aux limites de ($III.6$) sont les conditions aux limites bien connues de Robin. La structure de l'ensemble de solutions de($III.6$) et ($III.2$) est exactement la même, et afin de rechercher le système ($III.2$), nous pouvons nous tourner pour discuter du système ($III.6$) par les méthodes correspondantes. Il est évident que les solutions stationnaires du système ($III.6$) vérifient l'équation suivante :

$$\begin{cases} d_1\widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - \widehat{u}e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u} - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}) = 0, & 0 < x < 1, \\ d_2\widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{c\widehat{v}}{\widehat{u}}e^{(\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2})}x) = 0, & ,0 < x < 1, \\ \widehat{u}_x(0) = \widehat{v}_x(0) = 0 & t > 0, \\ d_1\widehat{u}_x(1) - q\widehat{u}(1) = -bq\widehat{u}(1), & t > 0, \\ d_2\widehat{v}_x(1) - q\widehat{v}(1) = -bq\widehat{v}(1), & t > 0. \end{cases} \tag{III.10}$$

Théorème 20. *Pour $d_1, d_2, r_1, r_2, b > 0$, (III.10) à toujours une solution positive quand $q \in (0, minq^*(d_1, r_1, b), q^*(d_2, r_2, b))$*

Preuve

Nous appliquant le théorème du degré de Leray-shauder pour prouver l'existence d'une solution positive , il peut être divisé en trois étapes :

Étape (01) : pour toute paire non négative $(f,g) \in C([0,1]) \times C([0,1])$ on peut étendre le domaine de f,g correctement de sorte que pour tout $\varsigma \in [0,1]$ et $q \in (0, minq^*(d_1,r_1,b), q^*(d_2,r_2,b))$, les fonctions $e^{\frac{\varsigma q}{d_1}x}f^2 + ae^{\frac{\varsigma q}{d_2}x}fg$ et $\frac{cg^2}{f}e^{(\frac{\varsigma q}{d_2}-\frac{\varsigma q}{d_2})x}$ sont lipschitzienne continues par rapport a f et g ,en faite pour tout $\varsigma \in [0,1]$ et $q \in (0, minq^*(d_1,r_1,b), q^*(d_2,r_2,b))$, $d_1\frac{d^2}{dx^2} + \varsigma q\frac{d}{dx} + r_1$ et $d_2\frac{d^2}{dx^2} + \varsigma q\frac{d}{dx} + r_2$ sont inversibles , alors pour tout $\varsigma \in [0,1]$ et $(f,g) \in C([0,1]) \times C([0,1])$, $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ peut être déterminer d'une manière unique par le système elliptique suivant :

$$\begin{cases} d_1\widehat{u}_{xx} - \varsigma q(\widehat{u})_x + r_1\widehat{u} = e^{\frac{\varsigma q}{d_1}x}f^2 + ae^{\frac{\varsigma q}{d_2}x}fg, & 0 < x < 1, \\ d_2(\widehat{v}_{xx} - \varsigma q(\widehat{v})_x + \widehat{v}r_2\widehat{v} = \frac{cg^2}{f}e^{(\frac{\varsigma q}{d_2}-\frac{\varsigma q}{d_2})x} & ,0 < x < 1, \\ (\widehat{u})_x(0) = (\widehat{v})_x(0) = 0, \\ d_1\widehat{u}_x(1) - \varsigma q\widehat{u}(1) = 0, \\ d_2\widehat{v}_x(1) - \varsigma q\widehat{v}(1) = 0. \end{cases} \tag{III.11}$$

On peut définir une famille d'opérateurs compacts $\Gamma_\varsigma : C([0,1])\times C([0,1]) \to C([0,1])\times C([0,1])$ par $\Gamma_\varsigma(f,g) = (\widehat{u},\widehat{v})$

Étape (02) : pour $q \in (0, minq^*(d_1,r_1,b), q^*(d_2,r_2,b))$ et $\varsigma \in [0,1]$, il est facile de savoir que $\varsigma q \in (0, minq^*(d_1,r_1,b), q^*(d_2,r_2,b))$, alors d'après le théorème ((21)) il existe deux constantes positives $\underline{c}$ et$\bar{c}$ sachant que pour toute solution positive de ($III.11$) ,$(\widehat{u},\widehat{v})$ satisfait :

$$\underline{c} \leq \widehat{u},\widehat{v} < \bar{c} \text{ pour tout } \varsigma \in [0,1] \text{ , } x \in [0,1].$$

On définit :

$$D = (\widehat{u},\widehat{v}) \in C([0,1]) \times C([0,1]) \to C([0,1]) \times C([0,1]) : \underline{c}/2 \leq \widehat{u},\widehat{v} < \bar{c}.$$

pour tout $\varsigma \in [0,1]$ et $(\widehat{u},\widehat{v}) \in \partial D$,on sait $(\widehat{u},\widehat{v}) \neq \Gamma_\varsigma(\widehat{u},\widehat{v})$, par conséquent le degré de Leray-shauder $deg(I - \Gamma_\varsigma(.,.), D, 0)$ est bien défini et il dépend de ς , ou I est l'application identité , de plus $(\widehat{u},\widehat{v})$ résout $III.10$ si et seulement si $(\widehat{u},\widehat{v})$ satisfait $(\widehat{u},\widehat{v}) = \Gamma_\varsigma(\widehat{u},\widehat{v})$.

Étape (03) : on peut voir que $(\widehat{u},\widehat{v}) \in D$ satisfait :I-$\Gamma_\varsigma(.,.)(\widehat{u},\widehat{v}) = 0$ implique que $(\widehat{u},\widehat{v})$ est une solution positive de :

$$\begin{cases} d_1\widehat{u}_{xx} + \widehat{u} + (r_1 - \widehat{u} - a\widehat{v}) = 0, & 0 < x < 1, \\ d_2\widehat{v}_{xx} + \widehat{v}(r_2 - \frac{c\widehat{v}}{\widehat{u}}) = 0 & ,0 < x < 1, \\ (\widehat{u})_x(0) = (\widehat{v})_x(0) = 0, \\ (\overline{u})_x(1) = (\overline{v})_x(1) = 0. \end{cases} \tag{III.12}$$

De [29](voir théoréme 3.1 et théoréme 3.2) le problème ($III.25$) admet une unique solution positive $(\widehat{u}_*, \widehat{v}_*)$ une simple analyse de linéarisation montre que $(\widehat{u}_*, \widehat{v}_*)$ et non dégénéré et linéairement stable comme solution de ($III.25$) ,par la formule bien connu de Leray-Shauder , cela donne :

$$deg(I - \Gamma_0(.,.), D, 0) = 1.$$

Donc par l'invariance d'homotopie du degré de Leray-Shauder, on obtient :

$$deg(I - \Gamma_1(.,.), D, 0) = deg(I - \Gamma_0(.,.), D, 0) = 1.$$

Par les propriétés du degré , lorsque $q \in (0, minq^*(d_1, r_1, b), q^*(d_2, r_2, b))$,le système ($III.10$) à toujours une solution positive .

Théorème 21. *On suppose que $r_1, r_2, b > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux constantes positives $\underline{c} = \underline{c}(q, d_1, d_2, r_1, r_2, a, b, c)$ et $\bar{c}$ sachant que pour tout $\epsilon \leq d_1, d_2 \leq 1/\epsilon$,$0 < q \leq 1/\epsilon$, si $q \in minq^*(d_1, r_1, b), q^*(d_2, r_2, b)$ alors toute solution de ($III.10$) satisfait :*

$$\underline{c} \leq \widehat{u}, \widehat{v} < \bar{c} \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Preuve. du lemme ($III.4.1)(ii)$, il est facile de savoir que la solution $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ de (III.10) à une borne supérieure positive c ,ensuite nous montrons que $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ ont une borne inférieure positive Nous affirmons que $max_{[0,1]}\widehat{u}(x)$ est bornées par des constantes positives , pour établir cette affirmation nous argumentons par contradiction

Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\epsilon d_{2,i} \leq 1/\epsilon$ et $< q_i \leq 1/\epsilon$, et la solution positive correspondante de (III.10) , notée $(\widehat{u}_i(x), \widehat{v}_i(x))$ satisfait :

$$\max_{x\in[0,1]} \widehat{u}_i(x) \to 0 \text{ quand } i \to +\infty.$$

Et

$$\begin{cases} d_1(\widehat{u}_i)_{xx} - q(\widehat{u}_i)_x + (r_1 - \widehat{u}_i e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}_i - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}_i), & 0 < x < 1, \\ d_2(\widehat{v}_i)_{xx} - q(\widehat{v}_i)_x + \widehat{v}_i(r_2 - \frac{c\widehat{v}_i}{\widehat{u}_i}e^{(\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2})x}) & ,0 < x < 1, \\ (\widehat{u}_i)_x(0) = (\widehat{v}_i)_x(0) = 0, \\ d_1(\widehat{u}_i)_x(1) - q\widehat{u}_i(1) = -bq\widehat{u}_i(1), \\ d_2(\widehat{v}_i)_x(1) - q\widehat{v}_i(1) = -bq\widehat{v}_i(1). \end{cases} \tag{III.13}$$

En passant à une sous-suite si nécessaire , on suppose que $d_{2,i} \to d_2 > 0$ et $q_i \to q > 0$,puisque la norme $|| \widehat{u}_i ||_\infty$ est uniformément bornée , soit $\widehat{u}_i = \frac{\widehat{u}_i}{||\widehat{u}_i||_\infty}$, alors $\widehat{u}_i$ satisfait :

$$\begin{cases} d_1(\widehat{u}_i)_{xx} - q(\widehat{u}_i)_x + (r_1 - \widehat{u}_i e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}_i - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}_i), & 0 < x < 1, \\ (\widehat{u}_i)_x(0) = 0, \\ d_1(\widehat{u}_i)_x(1) - q\widehat{u}_i(1) = -bq\widehat{u}_i(1). \end{cases}$$

(III.14)

Par régularité standard et le théorème de prolongement de Sobolev , En passant à une sous-suite si nécessaire on sait que $\widehat{u}_i \to 0$ et $u_i \to u^*$ dans $C^1[0,1]$, ou $u^* > 0$ et $\|\ \widehat{u}_i\ \|_\infty = 1$, on note que :

$$d_{2,i}(\widehat{v}_i)_{xx} - q_i(\widehat{v}_i)_x + \widehat{v}_i(r_2 - \frac{c\widehat{v}_i}{\widehat{u}_i} e^{(\frac{q_i}{d_1} - \frac{q_i}{d_{2,i}})x}).$$

$$\leq d_{2,i}(\widehat{v}_i)_{xx} - q_i(\widehat{v}_i)_x + \widehat{v}_i(r_2 - \frac{c\widehat{v}_i e^{(\frac{q_i}{d_1} - \frac{q_i}{d_{2,i}})x}}{max_{x\in[0,1]}\widehat{u}_i e^{\frac{q_i d_1}{d_i}}}).$$

Par la méthode des solutions supérieures et inférieures et la substitution de variables appropriées , nous avons : $\widehat{v}_i \leq \frac{max_{x\in[0,1]}\widehat{u}_i e^{\frac{q_i}{d_i}}}{c} \to 0$, ainsi il est facile de voir que u^* satisfait :

$$\begin{cases} d_1 u^*_{xx} - q u^*_x + r_1 u^*, & 0 < x < 1 \\ u^*_x(0) = 0 \\ d_1(\widehat{u}_i)_x(1) - q u^*_i(1) = -bqu^*(1). \end{cases} \tag{III.15}$$

On utilise la transformation $u^* = e^{(\frac{-q}{d_1}(x)} u$, on a $\lambda_1(d_1, q_1, r_1, b) = 0$,ce qui implique $q = q^*(d_1, r_1, b)$, cela contredit l'hypothèse $0 < q < q^*(d_1, r_1, b)$, il existe donc une constante positive c_1 tel que $max_{x\in[0,1]}\widehat{u}(x) \geq c_1$,nous considérons la première équation de ($III.10$) , comme indiqué ci-dessus :

$$d_1 U_{xx} - qU_x + (r_1 - Ue^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}_i - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}_i) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{III.16}$$

Et sachez qu'il s'agit d'une équation elliptique à coefficients mesurables bornés , ainsi en appliquant l'inégalité de Harnack standard pour les solutions généralisées , il existe une constante positive $c^*(d_1, q, r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u} - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v})$,telle que :

$$\max_{x\in[0,1]} U(x) \leq c^*(d_1, q, r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u} - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}) min_{x\in[0,1]} U(x).$$

Évidemment, $\widehat{u}(x)$ est une solution de l'équation ($III.23$) ce qui signifie qu'il existe une constante positive c^{**} dépend de $q, d_1, d_2, r_1, r_2, a, b$ et c , telle que :

$$\max_{x\in[0,1]} \widehat{u}(x) \leq c^{**} \min_{x\in[0,1]} \widehat{u}(x).$$

Cela implique que $\widehat{u}(x)$ admet une borne inférieure positive uniforme

De même nous affirmons que $max_{x\in[0,1]}\widehat{v}(x)$ est borné par des constantes positives , supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que : $\epsilon \leq d_{1,i} \leq 1/\epsilon$ et $0 < q_i \leq 1/\epsilon$, et $(\widehat{u}_i(x), \widehat{v}_i(x))$ satisfait :

$$\max_{x\in[0,1]} \widehat{v}_i(x) \to 0 \text{ quand } i \to +\infty.$$

Et

$$\begin{cases} d_{1,i}(\widehat{u}_i)_{xx} - q_i(\widehat{u}_i)_x + (r_1 - \widehat{u}_i e^{\frac{q_i}{d_1}x}\widehat{u}_i - ae^{\frac{q_i}{d_2}x}\widehat{v}_i), & 0 < x < 1, \\ d_2(\widehat{v}_i)_{xx} - q_i(\widehat{v}_i)_x + \widehat{v}_i(r_2 - \frac{c\widehat{v}_i}{\widehat{u}_i}e^{(\frac{q_i}{d_1}-\frac{q_i}{d_2})x}) & ,0 < x < 1, \\ (\widehat{u}_i)_x(0) = (\widehat{v}_i)_x(0) = 0 \\ d_1(\widehat{u}_i)_x(1) - q_i\widehat{u}_i(1) = -bq_i\widehat{u}_i(1), \\ d_2(\widehat{v}_i)_x(1) - q_i\widehat{v}_i(1) = -bq_i\widehat{v}_i(1). \end{cases}$$

(III.17)

En utilisant la méthode ci-dessus et en répétant ce processus similaire , nous avons $q = q^*(d_1, r_1, b)$, cela contredit l'hypothèse $0 < q < q^*(d_1, r_1, b)$, en appliquant l'inégalité de Harnack à la deuxième équation de $(III.10)$, on obtient que $\widehat{v}(x)$ a une borne inférieure positive uniforme.

Lemme III.4.1.

Pour $d_1, d_2, r_1, r_2, b > 0$,si (u, v) est une solution stationnaire non négative de $(III.2)$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

(i) $q \in (0, min q^*(d_1, r_1, b), q^*(d_2, r_2, b))$;

(ii) $0 < u < r_1$ et $0 < v < \frac{r_1 r_2}{c}$ sur $[0, 1]$.

Preuve

Il est clair que $\widehat{u} = e^{\frac{q}{d_1}x}u > 0$, $\widehat{v} = e^{\frac{q}{d_2}x}v > 0$ sur $[0, 1]$, par le maximum principale fort dans $(III.6)$ comme on peut le voir dans $(III.2)$ la solution (u, v) est une solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - qu_x + u(r_1 - u - av), & 0 < x < 1, \\ v_t = d_2 v_{xx} - qv_x + v(r_2 - c\frac{v}{u}) & ,0 < x < 1, \\ d_1 u_x(0) - qu(0) = 0, & t > 0, \\ d_2 v_x(0) - qv(0) = 0, & t > 0, \\ d_1 u_x(L) - qu(L) = -bqu(L), & t > 0, \\ d_2 v_x(L) - qv(L) = -bqv(L), & t > 0. \end{cases} \tag{III.18}$$

D'après l'équation de u et le lemme (III.18) on a :

$$0 = \lambda_1(d_1, q, r_1 - u - av, b) < \lambda_1(d_1, q, r_1, b).$$

Ce qui implique que $q \in (0, q^*(d_1, r_1, b))$ par le lemme (III.3.1) , de plus de l'équation de $\widehat{u}$ dans ($III.7$) on obtient :

$$0 = d_1\widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - \widehat{u}e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u} - ae^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}) < \widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - \widehat{u}e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}).$$

En utilisant la même transformation entre les systèmes($III.2$) et ($III.6$) , on peut convertir ($III.3$) en l'équation suivante :

$$\begin{cases} d_1\widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - \widehat{u}e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}) = 0, & 0 < x < 1, \\ \widehat{v}_t = d_2\widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{c\widehat{v}}{\widehat{u}}e^{(\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2})x}), & 0 < x < 1, \\ \widehat{u}_x(0) = 0, \\ d_1\widehat{u}_x(1) - q\widehat{u}(1) = -bq\widehat{u}(1). \end{cases} \tag{III.19}$$

D'après le lemme ($III.3.1$) on a $e^{\frac{q}{d_1}x}\theta(x)$ est l'unique solution positive de ($III.9$), Par la méthode des solutions supérieures et inférieures et Lemme ($III.3.2$) on en déduit : $\widehat{u} = e^{\frac{q}{d_1}x}u < e^{\frac{q}{d_1}x}\theta(x) < e^{\frac{q}{d_1}x}r_1$ sur $[0, 1]$,ce qui implique que $u < r_1$.
De même, il découle de l'équation de v que :

$$0 = \lambda_1(d_2, q, r_2 - \frac{cv}{u}, b) < \lambda_1(d_2, q, r_2, b).$$

Et

$$0 = d_2\widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{c\widehat{v}}{\widehat{u}}e^{(\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2})x}) < d_2\widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{c\widehat{v}}{\widehat{u}}e^{(\frac{q}{d_1})x}).$$

Grâce à une substitution de variables appropriée, nous pouvons obtenir $q \in (0, q^*(d_2, r_2, b))$ et $0 < v < \frac{r_1 r_2}{c}$ sur $[0, 1]$,Les conclusions ci-dessus sont établies.

Théorème 22. *On fixe $d_1, d_2, r_1, r_2 > 0$, si $q \in (0, min q^*(d_1, r_1, b), q^*(d_2, r_2, b))$, alors ($III.10$) à une unique solution positive.*

III.5 Persistance

On discute le comportement dynamique du système($III.2$) pour t le temps grand , nous montrons d'abord que le système ($III.2$) possède une solution unique $(u(x, t), v(x, t))$ définie pour tout $t > 0$ est bornée dans L^∞.

Lemme III.5.1.

pour tout $d_1, d_2, r_1, r_2 > 0$ et $b \geq 0$,le système ($III.2$) admet une unique solution (u, v) définie pour tout $x \in [0, 1]$ et $t > 0$, et il existe des constantes positives ρ_1 et ρ_2 qui ne dépend que des données initiales $u_0(x), v_0(x)$, telles que :

$$0 < u(x,t) \leq \rho_1, \quad 0 < v(x,t) \leq \rho_2, \quad x \in [0,1], t > 0.$$

Preuve

l'existence locale et l'unicité des solutions de ($III.9$) sont standards ,par le maximum principale de l'équation parabolique, on peut voir que la solution $(\widehat{u}(x,t), \widehat{v}(x,t))$ de ($III.9$) vérifie : $\widehat{u}(x,t) > 0$, $\widehat{v}(x,t) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$, alors pour la première formule du modèle ($III.9$)on a :

$$\widehat{u}_t \leq d_1 \widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}), \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

Soit $\overline{u}(x,t)$ la solution de :

$$\begin{cases} \overline{u}_t = d_1 \overline{u}_{xx} - q\overline{u}_x + \overline{u}(r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u}), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \overline{u}_x(0) = 0, d_1\overline{u}_x(1) - q\overline{u}(1) = -bq\overline{u}(1) = 0, & t > T, \\ \overline{u}(x,0) = \widehat{u}_0(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.20}$$

Le théorème de comparaison pour les équation paraboliques implique que $\widehat{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$, par une telle transformation $u(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u}(x,t)$

$$\begin{cases} ut = d_1 u_{xx} - qu_x + u(r_1 - e^{\frac{q}{d_2}x}u), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0) = 0, d_1 u_x(1) - qu(1) = -bqu(1) = 0, & t > T, \\ u(x,0) = e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u}(x,t), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.21}$$

Du lemme ($III.18$) et ($III.3.2$) , on sait que : $u(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u}(x,t) \leq \theta(x) \leq r_1$ uniformément sur $[0,1]$ quand $t \to +\infty$, on obtient alors :

$$\limsup_{t \to +\infty} \widehat{u}(x,t) \leq e^{\frac{-q}{d_1}x} r_1 \text{ , pour tout } x \in [0,1].$$

Il existe donc une constante positive ρ_1^* dépend uniquement de la condition initiale $\widehat{u}_0(x)$ telle que $0 < \widehat{u}(x,t) \leq \rho_1^*$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$. De même, pour la seconde équation du système ($III.9$), on a :

$$\widehat{v}_t \leq d_2 \widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{ce^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}}{e^{\frac{q}{d_1}}\rho_1^*}) \text{ , } x \in (0,1) \text{ ,} t \in (0, +\infty).$$

Grâce à une substitution de variable appropriée et à l'utilisation d'un argument similaire à celui ci-dessus, nous pouvons également en déduire

$$\limsup_{t\to+\infty} \widehat{v}(x,t) \leq e^{\frac{-q}{d_2}x} \frac{e^{\frac{q}{d_1}} r_2 \rho_1^*}{c} \text{ , pour tout } x \in [0,1].$$

Il existe donc une constante positive ρ_2^* dépend uniquement de la donnée initiale $\widehat{v}_0(x)$ telle que $0 < \widehat{v}(x,t) \leq \rho_2^*$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$ .D'après la transformation entre la solution (u,v) de ($III.2$) et la solution $(\widehat{u},\widehat{v})$ de ($III.9$), il doit y avoir des constantes positives ρ_1 et ρ_2 telles que :

$$0 < u(x,t) \leq \rho_1 \text{ , } 0 < v(x,t) \leq \rho_2 \text{ , } x \in [0,1] \text{ ,} t > 0.$$

Ou ρ_1 et ρ_2 dépend uniquement de la donnée initiale $\widehat{u}_0(x)$ et $\widehat{v}_0(x)$, la preuve est terminée .

Théorème 23. *pour tout $d_1, d_2, r_1, r_2, b > 0$ quand $q^*(d_1, r_1) > q^*(d_2, r_2, b)$, alors la solution $(\theta(x), 0)$ de ($III.2$) est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve

Avec le principe de maximum de l'équation parabolique on voit que la solution $(\widehat{u}(x,t), \widehat{v}(x,t))$ de ($III.2$) satisfait $\widehat{u}(x,t) > 0$, $\widehat{v}(x,t) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$, par conséquent nous avons :

$$\widehat{u}_t \leq d_1 \widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}), \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

Soit $\overline{u}(x,t)$ la solution de (III.9) , le théorème de comparaison pour les équation paraboliques implique :

$$\widehat{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t) \text{ pour tout } x \in [0,1] \text{ et } t > 0.$$

On utilise la même transformation $u(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u}$, l'équation ($III.9$) elle se transforme en ($III.10$) , compte tenu de $q \in (q^*(d_1, r_1), q^*(d_2, r_2, b))$ il résulte du lemme (III.18) et du lemme ($III.3.2$) que $u(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u} \to \theta(x) \leq r_1$ pour tout $x \in [0,1]$ lorsque $t \to +\infty$. On obtient alors : $\limsup_{t\to+\infty} \overline{u}(x,t) \leq e^{\frac{q}{d_1}x}\theta(x) \leq e^{\frac{q}{d_1}x} r_1$ pour tout $x \in [0,1]$. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ sachant que $\overline{u}(x,t) \leq e^{\frac{q}{d_1}x} r_1 + \leq e^{\frac{q}{d_1}x}\epsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > T$ Ensuite, cela conduit à :

$$\widehat{v} \leq d_2 \widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{ce^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}}{r_1 + \epsilon}), x \in (0,1), t \in (T, +\infty)$$

Le théorème de comparaison pour les équations paraboliques implique $\widehat{v}(x,t) \leq \overline{V}(x,t)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > T$ ou $\overline{v}(x,t)$ est la solution de :

$$\begin{cases} \overline{V}_t = d_2 \overline{V}_{xx} - q\overline{V}_x + \overline{V}(r_2 - \frac{ce^{\frac{q}{d_2}x}\overline{V}}{r_1+\epsilon}), & 0 < x < 1t > 0. \\ \overline{V}_x(0) = 0, d_2\overline{V}_x(1) - q\overline{V}(1) = -bq\overline{V}(1) = 0, & t > T, \\ \overline{V}(x,T) = \overline{v}(x,T), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.22}$$

Posons $v(x,t) = e^{\frac{q}{d_2}x}\overline{V}$ alors l'équation (III.22) devient l'équation suivante :

$$\begin{cases} V_t = d_2 V_{xx} - qV_x + V(r_2 - \frac{cV}{r_1+\epsilon}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ d_2 V_x(0) - qV(0) = 0, d_2 V_x(1) - qV(1) = -bqV(1) = 0, \qquad t > T, \\ V(x,T) = e^{\frac{q}{d_2}x}\overline{V}(x,T), \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.23}$$

Comme $q \in (q^*(d_1,r_1), q^*(d_2,r_2,b))$, par substitution de variable appropriée à (III.23) , on peut facilement savoir que $v(x,t) \to 0$ uniformément sur $[0,1]$ lorsque $t \to +\infty$ selon le Lemme $III.18$ En conséquence, nous avons :

$$\lim_{t\to+\infty} \widehat{v}(x,t) = 0, \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

On prouve que $\lim_{t\to+\infty} \widehat{u}(x,t) \to e^{\frac{q}{d_1}x}\theta(x)$ uniformément sur $[0,1]$,Pour tout $\epsilon \in> 0$ il existe $T_1 > T$ tel que $\widehat{v}(x,t) < \epsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > T_1$ qui conduit à :

$$\widehat{u}_t \leq d_1\widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u} - ae^{\frac{q}{d_2}x}\epsilon), \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

Le théorème de comparaison pour les équations paraboliques implique $\widehat{u}(x,t) \geq U^\epsilon(x,t)$ sur $[0,1]$, ou $U^\epsilon(x,t)$ est la solution de :

$$\begin{cases} U^\epsilon_t = d_1 U^\epsilon_{xx} - qU^\epsilon_x + (r_1 - U^\epsilon e^{\frac{q}{d_1}x} U^\epsilon - ae^{\frac{q}{d_2}x}\epsilon), \qquad 0 < x < 1, t > 0, \\ U^\epsilon_x(0) = 0, \quad d_1 U^\epsilon_x(1) - qU^\epsilon_x(1) = 0, \qquad t > 0, \\ U^\epsilon(x,T_1) = \widehat{u}(x,T_1), \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.24}$$

Posons $\underline{U}^\epsilon(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}U^\epsilon(x,t)$, puis on considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \underline{U}^\epsilon_t = d_1 \underline{U}^\epsilon_{xx} - q\underline{U}^\epsilon_x + \underline{U}^\epsilon(r_1 - \underline{U}^\epsilon - ae^{\frac{q}{d_2}x}\epsilon, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ d_1\underline{U}^\epsilon_x(0) - q\underline{U}^\epsilon(0) = 0, d_1\underline{U}^\epsilon_x(1) - q\underline{U}^\epsilon(1) = -bq\underline{U}^\epsilon(1) = 0, \qquad t > T, \\ \underline{U}^\epsilon(x,T_1) = e^{\frac{q}{d_1}x}U^\epsilon(x,T_1), \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{III.25}$$

D'après le lemme $III.18$, on a $\lambda_1(d_1,q,r_1,b) > 0$ pour $q \in (q^*(d_1,r_1), q^*(d_2,r_2,b))$, nous pouvons choisir ϵ si petit pour que $\lambda_1(d_1,q,r_1,ae^{\frac{q}{d_2}x}\epsilon)$,Il résulte du lemme $III.18$ que $\underline{U}^\epsilon \to \theta^\epsilon(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ lorsque $t \to +\infty$, où $\theta^\epsilon(x)$ est l'unique solution positive du système stationnaire de(III.22). De plus, en vertu de $0 < \theta^\epsilon(x) < r_1 - a\epsilon$ qui peut être obtenu à partir du lemme $III.3.2$, en intégrant le système stationnaire de (III.22) sur $(0,x)$, on conclut que θ^ϵ_x est uniformément bornée sur $[0,1]$. En utilisant à nouveau les solutions stationnaires de (III.24), on obtient que θ^ϵ_{xx} est uniformément borné dans $[0,1]$, Par les estimations L_p et les théorèmes de plongement de Sobolev, on peut en déduire que $\theta^\epsilon(x) \to \theta(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, et on conclu que :

$$\liminf_{t\to+\infty} \widehat{u}(x,t) \geq e^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(x) \ , \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

En combinant avec (III.25), on obtient $\liminf_{t\to+\infty} \widehat{u}(x,t) = e^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(x)$ uniformément sur$[0,1]$,Donc la transformation entre les solutions (u,v) de $III.2$ et la solution $(\widehat{u},\widehat{v})$ de (III.9) , on a :

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \theta(x), \quad \lim_{t\to+\infty} v(x,t) = 0$$

pour tout $x \in [0,1]$.
Pour $q \in (q^*(d_1,r_1), q^*(d_2,r_2,b))$ la solution $(\theta(x),0)$ de (III.2) est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 24. *On suppose que* $d_1, d_2, r_1, r_2, b > 0$, *si* $q \in q^*(d_1,r_1)$ *donc la solution de* (III.2)*converge vers* $(0,0)$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

Preuve

Par le principe de maximum de l'équation parabolique , la solution $(\widehat{u}(x,t), \widehat{v}(x,t))$ de (III.9) , satisfait $\widehat{u}(x,t) > 0$ et $\widehat{v}(x,t) > 0$, pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$ par conséquent nous avons :

$$\widehat{u}_t \leq d_1\widehat{u}_{xx} - q\widehat{u}_x + (r_1 - e^{\frac{q}{d_1}x}\widehat{u}), \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

Par le théorème de comparaison pour les équation paraboliques ça implique , $\widehat{u}(x,t) \leq \overline{u}(x,t)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$, $\overline{u}(x,t)$ est la solution de l'équation (III.20), tant que $q > q^*(d_1,r_1)$, il résulte du lemme ($III.18$) que $u(x,t) = e^{\frac{q}{d_1}x}\overline{u}(x,t) \to 0$ pour tout $x \in [0,1]$ quand $t \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \widehat{u}(x,t) = 0 \ , \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Puis pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\tau_\epsilon > 0$, sachant que $\widehat{u}(x,t)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t > \tau_\epsilon$
D'après la deuxième équation du système (III.9), on a :

$$\widehat{v}_t \leq d_2\widehat{v}_{xx} - q\widehat{v}_x + \widehat{v}(r_2 - \frac{ce^{\frac{q}{d_2}x}\widehat{v}}{e^{\frac{q}{d_2}}\epsilon}), x \in (0,1), t \in (T_\epsilon, +\infty).$$

Grâce a une substitution de variables appropriée et en utilisant la même méthode que le lemme ($III.5.1$), nous pouvons déduire :

$$\lim_{t\to+\infty} sup\widehat{v}(x,t) \leq e^{\frac{-q}{d_2}x}\frac{e^{\frac{q}{d_1}r_2\epsilon}}{\epsilon} \ , \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

On a $e^{\frac{-q}{d_2}x}\frac{e^{\frac{q}{d_1}r_2\epsilon}}{\epsilon} \to 0$ pour tout $x \in [0,1]$, quand $\epsilon \to 0$, ce qui implique que :

$$\lim_{t\to+\infty} \widehat{v}(x,t) = 0 \ , \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

D'après les transformations entre les solutions (u,v) de (III.2)et $(\widehat{u},\widehat{v})$ de (III.9) on a :

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} v(x,t) = 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

pour $q > q^*(d_1, r_1)$, la preuve est terminée. En suite nous établirons l'attractivité globale de (u_s, v_s) , en construisant une fonction de Lyaponov.

Théorème 25. *Pour tout $d_1, d_2, r_1, r_2, b > 0$ quand $q^*(d_1, r_1) > q^*(d_2, r_2, b)$ alors la solution de(III.2) converge vers (u_s, v_s) pour tout $x \in [0,1]$*

Preuve

On construit la fonction de Lyaponov :

$$E(u,v) = \int_0^1 e^{\frac{q}{d_1}x}(\frac{d_1}{2}(u_x)^2 - r_1\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}dx$$

$$+\frac{q}{2}u^2(0,t) - \frac{q}{2}(1-b)e^{\frac{q}{d_1}}u^2(1,t) + \int_0^1 e^{\frac{q}{d_2}x}(\frac{d_2}{(v_x)^2} - r_2\frac{v^2}{2})dx$$

$$+\frac{q}{2}v^2(0,t) - \frac{q}{2}(1-b)e^{\frac{q}{d_2}}v^2(1,t) + \int_0^1 Q(x,t)dx$$

, avec $Q(x,t) = \int_0^t ae^{\frac{q}{d_1}x}u(x,\tau)v(x,\tau)u_\tau d\tau + \int_0^t ce^{\frac{q}{d_2}x}\frac{v^2(x,\tau)}{u(x,\tau)}v_\tau d\tau$ et (u,v) est la solution positive de (III.2) , puis on a : $\frac{d}{dt}E(u(.,t), v(.,t))$

$$= \int_0^1 e^{\frac{q}{d_1}x}(d_1u_xu_{xt} - r_1uu_t + auvu_t)dx + qu(0,t)u_t(0,t)$$

$$-q(1-b)e^{\frac{q}{d_1}}u(1,t)u_t(1,t) + \int_0^1 e^{\frac{q}{d_2}x}(d_2v_xv_{xt} - r_2vv_t + c\frac{v^2}{u}v_t)dx$$

$$+qv(0,t)v_t(0,t) - q(1-b)e^{\frac{q}{d_2}}v(1,t)v_t(1,t)$$

$$= \int_0^1 d_1e^{\frac{q}{d_1}x}u_xdu_t - \int_0^1 d_1e^{\frac{q}{d_1}x}(r_1u_u^2 - auv)u_tdx + qu(0,t)u_t(0,t)$$

$$-q(1-b)e^{\frac{-q}{d_1}}u(1,t)u_t(1,t) + \int_0^1 d_2e^{\frac{q}{d_2}v_xdv_t}$$

$$-\int_0^1 e^{\frac{q}{d_2}x}(r_2v - c\frac{v^2}{u})v_tdx + qv(0,t)v_t(0,t)$$

$$-q(1-b)e^{\frac{q}{d_2}x}v(1,t)v_t(1,t)$$

$$= d_1e^{\frac{q}{d_1}x}u_xu_t\mid_0^1 - \int_0^1((d_1e^{\frac{q}{d_1}x}u_x)_x + e^{\frac{q}{d_1}x}(r_1u - u^2 - auv)u_tdx + qu(0,t)u_t(0,t)$$

$$-q(1-b)e^{\frac{q}{d_1}}u(1,t)u_t(1,t) + d_2e^{\frac{q}{d_2}x}v_xv_t\mid_0^1$$

$$-\int_0^1({}_2e^{\frac{q}{d_2}x}v_x)_x + e^{\frac{q}{d_2}x}(r_2v - c\frac{v^2}{u})v_tdx + qv(0,t)v_t(0,t) - q(1-b)e^{\frac{q}{d_2}x}v(1,t)v_t(1,t)$$

$$= u_t(1,t)e^{\frac{q}{d_1}}(d_1u_x(1,t) - q(1-b)u(1,t)) - u_t(0,t)(d_1u_x(0,t) - qu(0,t)) + v_t(1,t)e^{\frac{q}{d_2}}(d_2v_x(1,t)$$

$$-q(1-b)v(1,t)) - v_t(0,t)(d_2v_x(0,t) - qv(0,t))$$

$$\begin{aligned} &- \int_0^1 e^{\frac{q}{d_1}x}(u_t)^2 dx - \int_0^1 e^{\frac{q}{d_2}x}(v_t)^2 dx \\ &= - \int_0^1 e^{\frac{q}{d_1}x}(u_t)^2 dx - \int_0^1 e^{\frac{q}{d_2}x}(v_t)^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

On note que $\frac{d}{dt}E(u(.,t),v(.,t)) = 0$ si et seulement si $u_t = v_t = 0$, ce qui signifie que (u, v) est une solution stationnaire du système ($III.2$) , nous savons que le système ($III.2$) admet une solution stationnaire positive unique (u_s, v_s) pour $q \in (q^*(d_1, r_1), q^*(d_2, r_2, b))$, noter que $E(u, v)$ est bornée par le bas , en se référant au principe d'invariance de la salle (23), on sait que

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = u_s, \quad \lim_{t \to +\infty} v(x,t) = v_s.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour $q \in (q^*(d_1, r_1), q^*(d_2, r_2, b))$.

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié de la stabilité globale d'un modèle proie-prédateur avec la fonction de réponse de Leslie-Gower en introduisant la récolte et avec la réaction diffusion . Dans le premier chapitre nous avons étudié un modèle de proie-prédateur avec récolte, Ce modèle représente l'interaction entre deux populations. Tout d'abord on fait l'analyse mathématique du modèle. On a prouvé que le modèle est persistant sous certaines conditions en utilisant le théorème de comparaison. et on a montré aussi la stabilité globale de la solution en construisant une fonction de Lyaponuv appropriée.Puis on s'est intéressé a l'influence de la récolte dans plusieurs cas, et on a discuté l'existence de l'équilibre bionomique.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié le modèle de proie-prédateur avec réaction-diffuion dans des environnements homogènes ,on a cherché la dynamique du modèle, puis on a proposé un problèmes de valeurs propres. On a prouvé l'existence de solution avec les notions du degré de Leray shauder et l'unicité, et on a étudié la persistance , on a montré à l'aide du théorème de comparaison et le principe de maximum que la solution $(\theta(x), 0)$ est globalement asymptotiquement stable et la solution converge vers $(0, 0)$. A la fin en construisant une fonction de Lyapunov , on résulte l'attractivité globale de l'équilibre endémique .

Bibliographie

[1] W.Abid. Analyse de la dynamique de certains modèles proie-prédateur et applications. Mathématiques générales [math.GM]. Université du Havre ; Université de Tunis El Manar, 2016.

[2] J.DIATTA,Existence de solution positive et périodique pour un système proie-prédateur intégrant une migration des prédateurs.

[3] N.Zhang,F.Chen,Q.Su,and T.Wu, Dynamic Behaviors of a Harvesting Leslie-Gower Predator-Prey Model.

[4] B.Zhang.G.Zhang and X.Wang THRESHOLD DYNAMICS OF A REACTION-DIFFUSION-ADVECTION LESLIE-GOWER PREDATOR-PREY SYSTEM

[5] A.Aberqi,J.Bennouna,M.Elmassoudi,Sub-supersolution Method for Non linear Elliptic Equation wit hnon-coercivity in divergentiel form in Orlicz Spaces.

[6] PERSISTENCE AND BIFURCATION ANALYSIS ON A PREDATOR–PREY SYSTEM OF HOLLING TYPE

[7] J,DIEUDONNE, Eléments d'analyse. tome i.fondements de l'analyse moderne. 3 éme édition. Paris Gauthier-Villars 1979.

[8] J.P. Denailly, Analyse Numérique et Équations différentielles, Collection Grenoble Sciences, France, 2006.

[9] A. Granas, J. Dugundji Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] Y.Zhou, Basic Theory of Fractional Differantial Equations, World Scientific, New Jersey, 2014.

[11] MUSTAFA.R.S.KULENOVIC, O. M. Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica. -chapman and Hall-CRC, 2002.

[12] L,Perko. Differential equations and dynamical systems, vol. 7. Springer Science Business Media, 2013

[13] M.EUGENE. Dynamical Systems in Neuroscience - the geometry of Excitability and Bursting.(Computation Neuroscience)-The MIT Press, 2006.

[14] X. Liao, L. Wang, P. Yu, Stability of Dynamical Systems. Elsevier, première edition, 2007.

[15] P. Auger, C, Lett , et J, Poggiale. Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés.

[16] E,Moulay. Stabilité des équations différentielles ordinaires.

[17] J,LaSalle Stability theory for ordinary differential equations. J.Differ. Equations 1968.

[18] J.P.LaSalle the Stability of dynamical systems, society for industrial and applied mathematics, philadelphia, pa.,. Regional conference Series in Applied Mathematics. 1976.

[19] J,DIEUDONNE, Eléments d'analyse. tome i.fondements de l'analyse moderne. 3 éme édition. Paris Gauthier-Villars 1979.

[20] J. LaSalle,Stability of nonautonomous systems,Nonlinear Anal, Theory, Methods Appl,1976.

[21] A.Beniani,A.Benaissa,Théorie spectrale,Cours et exercices corrigés,2020-2021

[22] T.A.BUNTON,Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations,Academic Press,inc,1985.

[23] Magal, P., Zhao, X.-Q,Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems,SIAM J. Math. Anal,2005.

[24] Jean-Pierre Françoise,Oscillations en biologie. Analyse qualitative et modèles,Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598 CNRS. Université P.-M. Curie, Paris VI,2000.

[25] Y. Lou and P. Zhou, Evolution of dispersal in advective homogeneous environment : The effect of boundary conditions, J. Differential Equations, 259 (2015), 141–171.

[26] J. Hale, S. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1993.

[27] Magal, P., Zhao, X.-Q,Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems,SIAM J. Math. Anal,2005.

[28] Jean-Pierre Françoise,Oscillations en biologie. Analyse qualitative et modèles,Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598 CNRS. Université P.-M. Curie, Paris VI,2000.

[29] Y. Du and S.-B. Hsu, A diffusive predator-prey model in heterogeneous environment, J. Differential Equations, 203 (2004), 331–364.

[30] LeslieP.H. Somefuthernotesontheuseofmatricesinpopulationmathematics. Biometrika,(35) :213–245, 1948.

[31] LeslieP.H.andJ.C.Gower. Thepropertiesofastochasticmodelforthepredator-preytypeofinteraction between two species. Biometrika, (47) :219–234, 1960.

[32] E.C. Pielou. Mathematical Ecology. John Wiley and Sons, New York, 1977.

[33] Fisher R. Annals of Eugenics. 7 :355, 1937.

[34] Kolmogorov A. I. Petrovsky and N. Piscounov. Stability and complexity in model ecosystems. Moscou University Mathematics Bulletin A1 :1, 1937.

[35] Version générale du principe du maximum de Pontryagin (PMP).Université de STRASBOURG.Master 2 - CSMI.

[36] H,DANG-VU, et DELCARTE, C, Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses, 2000.