

# Polycopiés MEF 2021



Universitaire d'Ain Témouchent  
Faculté des Sciences et Technologie  
Département de Génie Mécanique

## [COURS ET APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS]

---

*Dr AMIRAT Mohamed &  
Dr BELOUFA Mohammed Amine*

---

Dans ce cours de la méthode des éléments finis, on présente les principes de base de cette méthode. Ce cours est composé de six chapitres où on présente les éléments : 1D, 2D et 3D. Chaque chapitre est suivi par des exemples d'application. Ce cours est destiné aux étudiants en L3 Licence et en Master.

## Table des matières

Chapitre 1 .....	2
NOTIONS INTRODUCTIVES .....	2
I. Introduction .....	2
I.1. Bref historique : .....	3
I.2 Domaines d'application : .....	3
II. INTRODUCTION A LA NOTATION MATRICIELLE : .....	3
III. DESCRIPTION GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE DES L'ÉLÉMENTS FINIS .....	4
IV. NOEUDS ET ELEMENTS .....	7
V. CLASSIFICATION DES PROBLEMES D'ANALYSE DES CONTRAINTES .....	8
VI. Connaissances requises pour la réalisation des logiciels MEF .....	8
VII. Connaissances nécessaires à un utilisateur MEF .....	8
VIII. Les avantages de la méthode des éléments finis: .....	9
IX. Discrétisation .....	9

# CHAPITRE 1

## NOTIONS INTRODUCTIVES

### I. INTRODUCTION

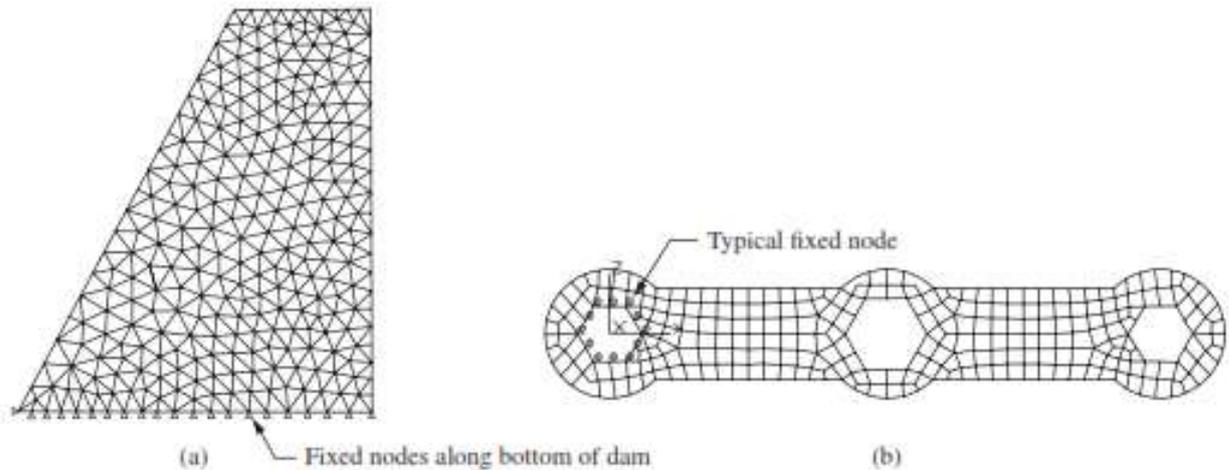
Dans ce polycopié de cours préparatoire, nous allons présenter l'objectif de la Méthode des Eléments Finis (MEF) et son champ d'application après des rappels succincts de la Mécanique des Milieux Continus (MMC).

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique. Cette méthode a été appliquée pour la première fois dans des problèmes liés à l'analyse des contraintes et depuis, elle a été étendue dans d'autres problèmes liés au milieu continu.

Dans toutes les applications, l'analyste recherche à calculer une quantité de champ, comme par exemple :

La MEF est une méthode approximative à moins qu'un certain problème puisse être extrêmement simple conduisant ainsi à une formule exacte toujours valable.

Par conséquent, ce processus de modélisation d'un corps en le divisant en un système équivalent de plus petits corps d'unités (éléments finis) interconnectés en des points communs à deux ou plusieurs éléments (points nodaux ou nœuds) et / ou lignes de délimitation et / ou surfaces est appelé discrétisation. La figure 1 montre une coupe transversale d'un barrage en béton et d'une clé à vélo, respectivement, qui illustrent ce processus de discrétisation, où le barrage a été divisé en 490 éléments triangulaires plans et la clé a été divisée en 254 éléments quadrilatéraux plans. Dans les deux modèles, les éléments sont connectés aux nœuds et le long des lignes de délimitation entre les éléments. Dans la méthode des éléments finis, au lieu de résoudre le problème pour l'ensemble du corps en une seule opération, nous formulons les équations pour chaque élément fini, puis les combinons pour obtenir la solution pour l'ensemble du corps.



**Figure I.1** : Modèles bidimensionnels (a) barrage discrétisé et (b) clé à vélo discrétisée.  
Tous les éléments et nœuds se trouvent dans un plan.

### I.1. BREF HISTORIQUE :

Les modèles développés de la méthodes des éléments finis ont commencé depuis les années 1940, dans le domaine des structures par Hrennikoff [1] en 1941 et McHenry [2] en 1943 qui ont utilisés les éléments barres et poutres pour la solution des contraintes des solides continues. Après cela, l'introduction de l'élément triangulaire a été faite en 1947 par Levy.

Durant les années cinquante, le groupe Boeing a utilisé la MEF pour le calcul d'ailes d'avion. Durant les années soixante, cette méthode a été nommée « Méthode des éléments finis ». Dès 1970, l'application de la MEF a été utilisée progressivement dans tous les domaines de l'ingénierie.

### I.2 DOMAINES D'APPLICATION :

Analyse des structures, transferts de chaleur, mécanique des solides, mécanique des fluides, électromagnétisme, écoulements sous terrains, combustion, diffusion des polluants...etc

## II. INTRODUCTION A LA NOTATION MATRICIELLE :

Les méthodes matricielles sont un outil nécessaire utilisé dans la méthode des éléments finis afin de simplifier la formulation des équations de rigidité des éléments. La notation matricielle représente donc une notation simple et facile à utiliser pour écrire et résoudre des ensembles d'équations algébriques simultanées.

Une matrice est un tableau rectangulaire de quantités disposées en lignes et en colonnes qui est souvent utilisé pour aider à exprimer et résoudre un système d'équations algébriques. Comme exemples de matrices qui seront décrites dans les chapitres suivants, les composantes

de la force ( $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}$ ) agissant aux différents nœuds ou points ( $1, 2, \dots, N$ ) sur une structure et l'ensemble correspondant de nœuds les déplacements ( $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n$ ) peuvent tous deux être exprimés sous forme de matrices:

L'ensemble des valeurs de force ou de déplacement dans la matrice de colonne est simplement représenté par  $\{F\}$  ou  $\{d\}$ .

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ \vdots \\ F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{Bmatrix} \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}$$

Le cas le plus général d'une matrice rectangulaire connue sera indiqué par l'utilisation de la notation crochet [ ]. Par exemple, les matrices de rigidité d'élément et de structure globale  $[k]$  est développée tout au long de ce chapitre pour différents types d'éléments les représentées par des matrices carrées.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ & & k_{li} & & k_{ln} \\ & & k_{ii} & & k_{in} \\ & & k_{in} & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

### III. DESCRIPTION GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Dans la méthode des éléments finis, la continuité de la matière, tel qu'un solide, un liquide ou un gaz, représente un assemblage de subdivisions appelées éléments. Ces éléments sont considérés comme interconnectés au niveau de joints spécifiés appelés nœuds ou points nodaux. Les nœuds se trouvent généralement sur les limites des éléments où les éléments adjacents sont considérés comme connectés. Les fonctions d'approximation (également appelées modèles d'interpolation) sont définies en termes des valeurs des variables de champ aux nœuds. Lorsque les équations de champ (comme les équations d'équilibre) pour l'ensemble du corps sont écrites, les nouvelles inconnues seront les valeurs nodales de la variable de champ. En résolvant les équations aux éléments finis, qui sont généralement sous

forme d'équations matricielles, les valeurs nodales de la variable de champ seront connues. Une fois les variables sont déterminées, les fonctions d'approximation définissent la variable de champ tout au long de l'assemblage des éléments. La solution d'un problème général par la méthode des éléments finis suit toujours un processus d'étape par étape. En ce qui concerne les problèmes structurels statiques, la procédure est comme suit:

**Étape 1:** Divisez la structure en éléments discrets (discrétisation).

La première étape de la méthode des éléments finis consiste à diviser la structure en subdivisions ou éléments. Par conséquent, la structure doit être modélisée avec des éléments finis appropriés. Le nombre, le type, la taille et la disposition des éléments doivent être décidés.

**Étape 2:** Sélectionnez un modèle d'interpolation ou de déplacement approprié.

Étant donné que la solution de déplacement d'une structure complexe dans des conditions de charge spécifiées ne peut pas être prédite avec précision, nous supposons une solution appropriée dans un élément pour approximer la solution inconnue. La solution supposée doit être simple d'un point de vue informatique, mais elle doit satisfaire à certaines exigences de convergence. En général, la solution ou le modèle d'interpolation est pris sous la forme d'un polynôme.

**Étape 3 :** Détermination de la matrice de rigidité des éléments et les vecteurs de charge.

**Étape 4 :** Assemblez les équations des éléments pour obtenir les équations d'équilibre global. Comme la structure est composée de plusieurs éléments finis, les matrices de rigidité des éléments individuels et les vecteurs de charge doivent être assemblés de manière appropriée et les équations d'équilibre global doivent être formulées comme suit:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (I.1)$$

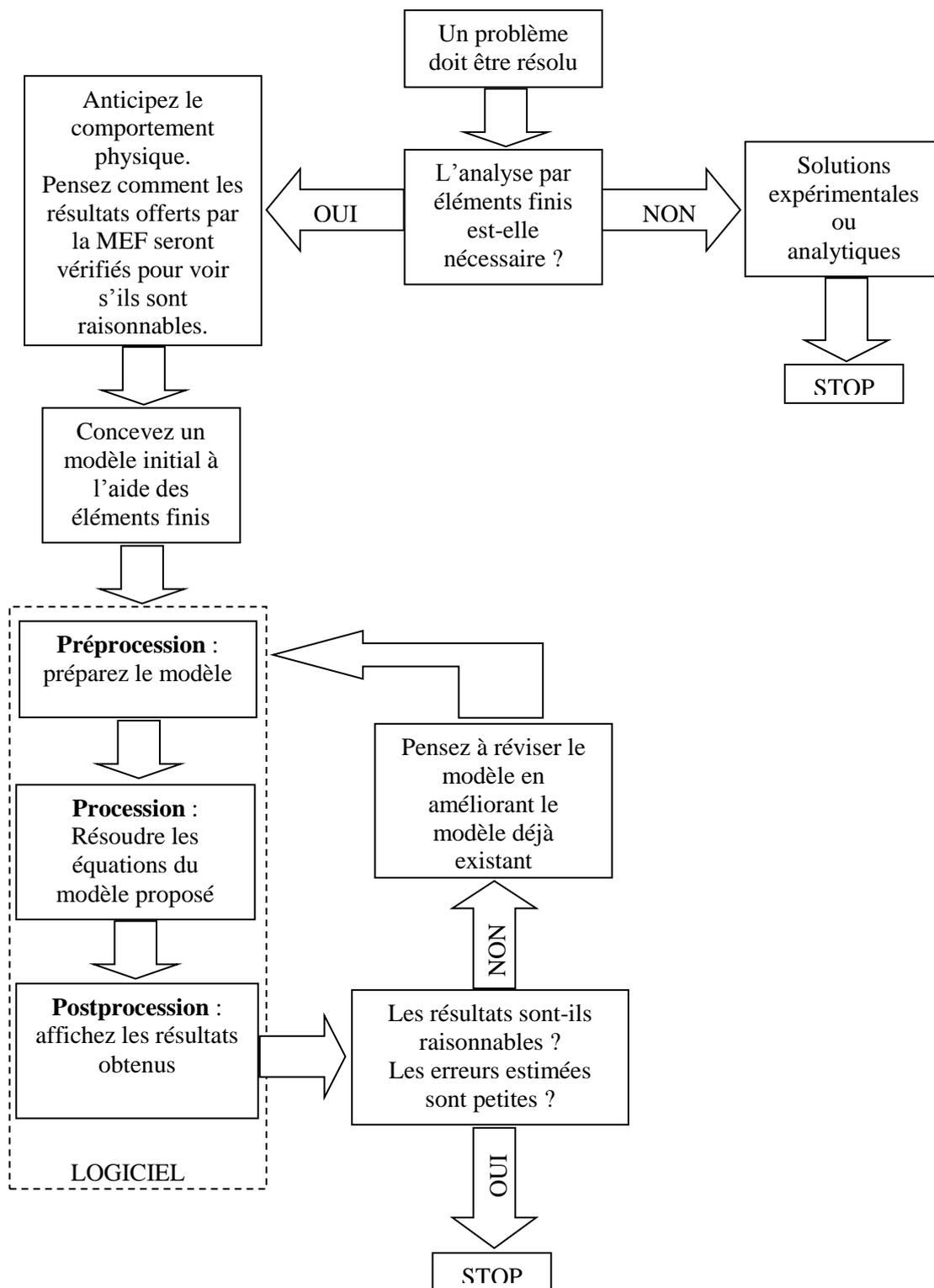
**Étape 5 :** Résoudre les déplacements nodaux inconnus. Les équations d'équilibre globales doivent être modifiées pour tenir compte des conditions aux limites du problème. Après l'incorporation des conditions aux limites.

**Étape 6:** Calculez les déformations et les contraintes des éléments.

A partir des déplacements nodaux connus  $u$ ; si nécessaire, les déformations et contraintes des éléments peuvent être calculées en utilisant les équations nécessaires de la mécanique des solides.

**Étape 7 :** Interpréter les résultats : la détermination des zones dans la structure où se produisent de grandes déformations et de grandes contraintes est généralement importante pour prendre des décisions de conception. Les programmes informatiques du post processeur aident l'utilisateur à interpréter les résultats en les affichant sous forme graphique.

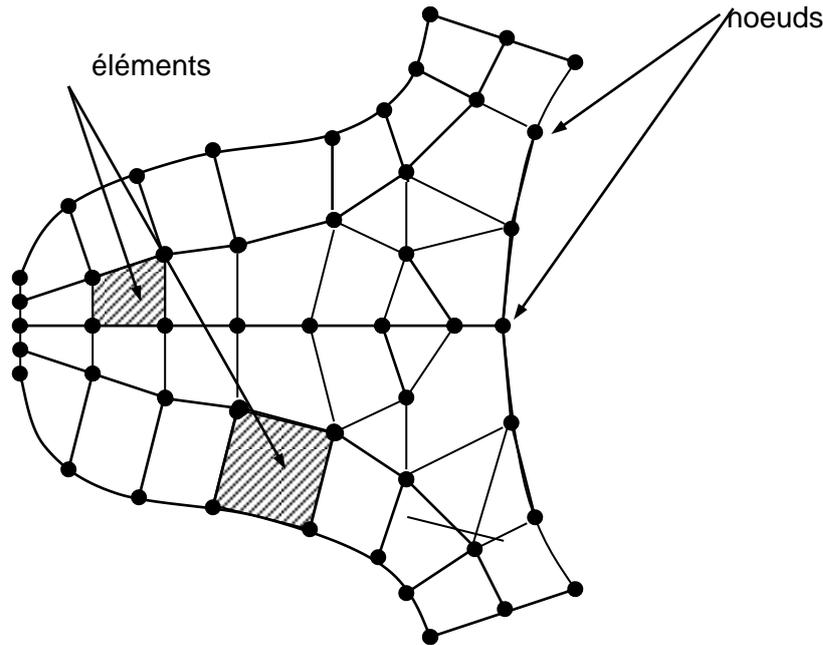
Les étapes précédentes sont résumées dans l'organigramme suivant :



**Figure I.2 :** Principales étapes pour une analyse par la Méthode des Eléments Finis [1]

## IV. NOEUDS ET ELEMENTS

Une description non-sophistiquée de la MEF pourrait être définie sous la forme suivante : la structure à analyser est divisée en plusieurs éléments. Ces éléments sont ensuite reconnectés par l'intermédiaire des nœuds (Fig. I.2). Ces nœuds maintiennent les éléments dans un ensemble unitaire.



**Figure I.3 :** Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée).

Le comportement de chaque élément est décrit par un groupe d'équations algébriques. Dans l'analyse des contraintes ces équations sont des équations d'équilibre des nœuds. Du fait que le nombre de ces équations est très grand (centaines ou milliers), l'utilisation d'un ordinateur est absolument obligatoire.

Autrement dit, dans un élément, une quantité de champ (ex. le champ de déplacement) est interpolé à partir des valeurs existantes dans les nœuds. En connectant les éléments ensemble, la quantité de champ devient interpolée sur l'ensemble de la structure. Les meilleures valeurs de la quantité de champ dans les nœuds sont celles qui minimisent certaines fonctions (telle que l'énergie totale). Le processus de minimisation génère un ensemble d'équations algébriques simultanées pour les différentes valeurs de la quantité de champ dans les nœuds.

Cet ensemble d'équations est décrit sous forme matricielle par :

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\}$$

où :

$\{U\}$  = vecteur d'inconnues (ex : vecteur des déplacements) ;

$[K]$  = matrice des constantes (ex : matrice de rigidité) ;

$\{F\}$  = vecteur des chargements (ex : vecteur des forces nodales).

## **V. CLASSIFICATION DES PROBLEMES D'ANALYSE DES CONTRAINTES**

Les éléments finis peuvent être divisés en plusieurs catégories en fonction de la structure : éléments plans, éléments solides 3D, éléments solides à symétrie axiale, éléments de plaque, éléments de coque,...etc. De plus, on trouve de même des éléments de barre articulée (en anglais : TRUSS), éléments de poutre (en anglais : BEAM), éléments de fondation élastique, ... etc.

## **VI. CONNAISSANCES REQUISES POUR LA REALISATION DES LOGICIELS MEF**

La MEF a un caractère pluridisciplinaire. Pour pouvoir réaliser des logiciels qui puissent résoudre certains types de problèmes dans le domaine du génie mécanique, il s'impose de maîtriser les disciplines suivantes :

- la mécanique des structures (statique, dynamique, la résistance des matériaux, les vibrations mécaniques) ;
- l'analyse numérique (procédés et algorithmes de calcul, graphique sur l'ordinateur) ;
- programmation linéaire (C++, FORTRAN, Pascal,... etc.)
- De la famille des grands logiciels, avec de multiples facilités, réalisés par des compagnies spécialisées qui sont généralement utilisés par des équipes de recherche, font partie, entre autres, NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, COSMOS, ALGOR, IMAGES3D,... etc.

## **VII. CONNAISSANCES NECESSAIRES A UN UTILISATEUR MEF**

Un utilisateur est mis dans la situation de résoudre un certain problème. On doit mentionner dès le début que le logiciel appliqué au problème respectif ne le résoudra pas. Il ne fait que résoudre un modèle créé par l'utilisateur. Les résultats peuvent être confirmés ou pas, en fonction du modèle choisi par l'utilisateur. La modélisation est une activité de simplification de la structure en encadrant ses différentes portions dans une des catégories suivantes : barres, plaques, blocs massifs, en tenant compte des chargements, appuis,... etc.

La modélisation correcte (la plus proche de la réalité) est un problème d'expérience, d'inspiration, ainsi que la connaissance des fondements théoriques de la méthode des éléments finis.

## **VIII. LES AVANTAGES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:**

Comme mentionné précédemment, la méthode des éléments finis a été appliquée à de nombreux problèmes, structurels et non structurels. Cette méthode présente un certain nombre d'avantages par rapport aux méthodes approximatives conventionnelles, telles que présentées par les cours traditionnels de mécanique des matériaux, pour la modélisation et la détermination des quantités physiques, telles que les déplacements, les contraintes, les températures, les pressions et les courants électriques,...etc. Ces avantages comprennent la capacité de :

- Modéliser des corps de forme irrégulière assez facilement,
- Gérer sans difficulté les conditions générales de charge,
- Modéliser des corps composés de plusieurs matériaux différents parce que les équations des éléments sont allouées individuellement.

## **IX. DISCRETISATION**

Les types d'éléments utilisés dans La Méthode des Eléments Finis sont présentés dans le Tableau 1 qui, pour le début, peuvent être classifiés en :

- éléments finis unidimensionnels (généralement des barres) ;
- éléments finis bidimensionnels (coques, plaques ...) ;
- éléments finis tridimensionnels (blocs massifs).

Les éléments finis sont générés par des points qui ne sont que des nœuds de la structure. Il existe des éléments ayant un degré supérieur « cubiques » (qui sont les plus performants) mais le plus couramment sont utilisés les éléments linéaires et paraboliques.

Certains éléments finis ont des nœuds intérieurs pour améliorer la précision, mais l'utilisateur ne travaille pas avec ces nœuds. Ils sont générés et ensuite condensés dans la phase de calcul des matrices de rigidité des éléments.

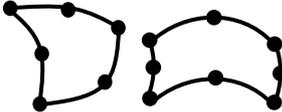
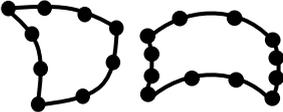
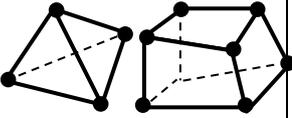
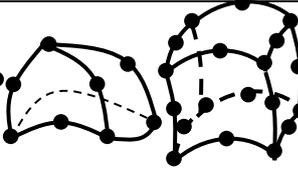
Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			

Tableau I : différents type d'élément utilisés dans MEF

## Table des matières

Chapitre II- PArtie 1 .....	12
ANALYSE LINEAIRE STATIQUE DES BARRES ARTICULEES .....	12
I. Introduction .....	12
1.1. Définition de la matrice de rigidité :.....	13
II. Dédution de la matrice de rigidité pour l'élément de barre articulée.....	14
2.1 modèle continu de barre.....	14
2.2 Méthode directe : .....	15
2.3. Fonctions d'interpolation de l'élément barre.....	16
Exemple 1 : .....	19
Exemple 2 : .....	20
Exemple 3 : .....	21
Chapitre II- Partie 2 : DÉDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ POUR LES BARRES ARTICULÉES EN TREILLIS .....	24
III. Transformation des coordonnées du système local en système global.....	24
III.1 Transformation des forces du système local en système global .....	25
II.2 Dédution de la matrice de rigidité d'un élément de barre articulée dans le système global d'axes.....	26
Exemple 1 : .....	26
Exemple 2 : .....	31

# **CHAPITRE II- PARTIE 1**

## **ANALYSE LINEAIRE STATIQUE DES BARRES**

### **ARTICULEES**

#### **I. INTRODUCTION**

L'élément barre est l'un des éléments de structure les plus simples et les plus utilisés dans les structures en treillis. L'élément barre est conçu pour ne prendre que des forces axiales, donc il ne se déforme que dans sa direction axiale. La section transversale de la barre peut être arbitraire, mais les dimensions de la section transversale doivent être beaucoup plus petites que celles dans la direction axiale. Des équations d'éléments finis pour de tels éléments seront développées dans ce chapitre. L'élément développé est communément appelé élément de barre. De tels éléments sont applicables pour l'analyse du type treillis à la fois dans les plans bidimensionnels et dans l'espace tridimensionnel. Les concepts, procédures et formulations de base peuvent également être trouvés dans de nombreux manuels existants [6-7].

Dans les treillis planes, il y a deux composantes dans les directions  $x$  et  $y$  pour les déplacements ainsi que pour les forces. Pour les treillis spatiales, il y aura trois composantes dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour les déplacements et les forces. Dans les structures squelettiques constituées de poutres en treillis, les poutres en treillis sont reliées entre elles par des rotules ou des charnières (pas par soudage), de sorte qu'il n'y a que des forces (pas des moments) transmises entre les barres.

Dans le but d'expliquer les concepts plus clairement, ce chapitre supposera que les éléments des treillis ont une section transversale uniforme. Par conséquent, pour traiter des barres avec des sections transversales variables, il convient de développer des équations pour un élément barre avec une section transversale variable, ce qui peut également être fait très facilement en suivant la procédure pour les éléments de barres uniformes. Notez qu'il n'y a aucune raison du point de vue mécanique d'utiliser des barres avec une section transversale variable, car la force dans une barre est uniforme.

Au final, nous ne chercherons pas à obtenir une présentation optimale sur le plan informatique. Ce n'est pas le but de cet ouvrage. Le lecteur doit rester conscient qu'il existe plusieurs façons de présenter la méthode des éléments finis et que celle que nous avons retenue a l'avantage d'être relativement simple et suffisamment générale.

Dans ce chapitre sera présenté et expliqué le sens physique des matrices de rigidité pour les éléments de barre articulée.

Après avoir fait une analyse préliminaire approximative, les principales étapes qu'il faut prendre en compte au cours d'une analyse par MEF sont les suivantes :

1. Préparation du modèle. En ce sens l'analyse doit contenir :
  - a) la discrétisation de la structure ou du milieu continu divisé en éléments finis ;
  - b) l'application du chargement ;
  - c) la prescription des supports.
2. Accomplissement des calculs. Le logiciel doit :
  - a) générer la matrice de rigidité  $[k_i]$  de chaque élément «  $i$  » ;
  - b) relier les éléments ensemble, ce qui veut dire rassembler les matrices  $[k_i]$  de chaque élément «  $i$  » pour obtenir la matrice globale  $[K]$  ;
  - c) rassembler les chargements dans un vecteur global de chargements  $\{F\}$  ;
  - d) imposer les conditions dans les supports ;
  - e) résoudre les équations  $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$  pour le vecteur des inconnues  $\{u\}$  (déplacements nodaux).
3. Postprocessing de l'information contenue dans le vecteur  $\{u\}$ . Dans l'analyse des contraintes, cela est équivalent au calcul des contraintes et des déformations.

### 1.1. DEFINITION DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

La connaissance de la matrice de rigidité est essentielle pour comprendre la méthode de rigidité. Nous définissons la matrice de rigidité comme suit: Pour un élément, une matrice de rigidité  $[k]$  est une matrice telle que :

$$[k]\{u\} = \{F\} \quad (\text{II-1})$$

où  $[k]$  relie les déplacements nodaux  $\{u\}$  aux forces nodales  $\{F\}$  d'un seul élément, comme le l'élément barre illustré par la figure suivante (Fig. II.1).

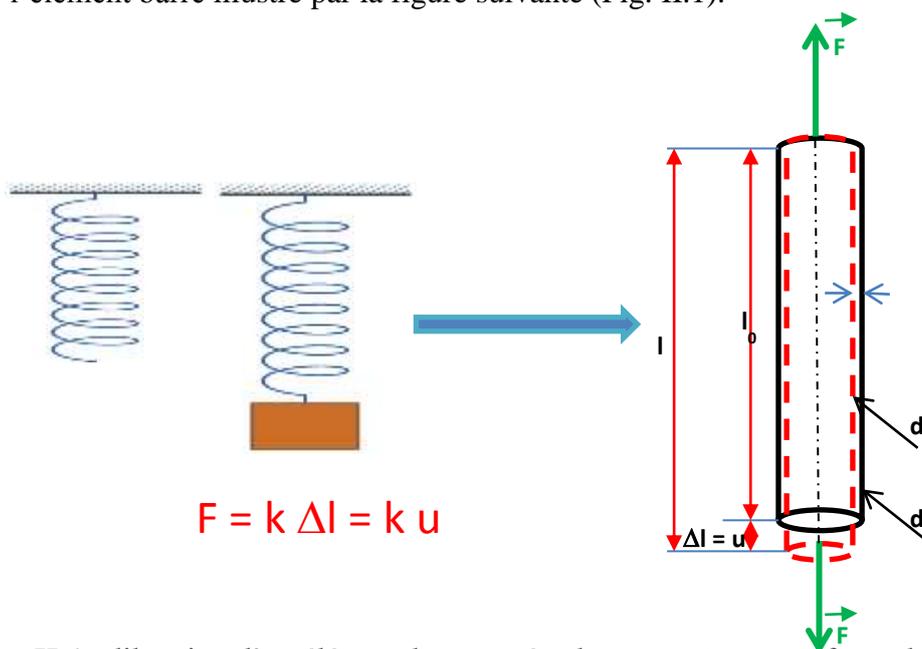


Figure II.1 : dilatation d'un élément barre après chargement par une force de traction

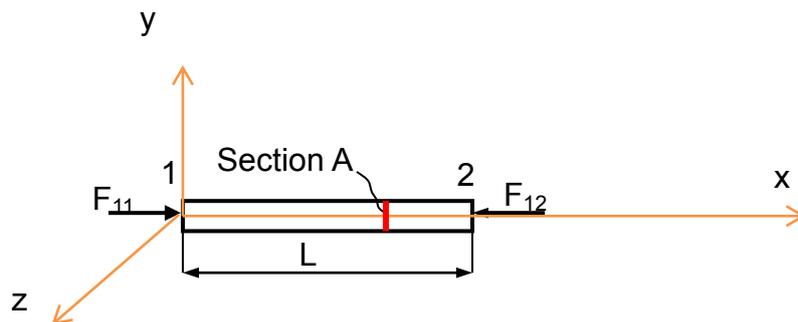
Pour un support ou une structure continue comprenant une série d'éléments, la matrice de rigidité  $[K]$  correspond aux coordonnées globales  $(x, y, z)$ , les déplacements nodaux  $\{u\}$  par rapport aux forces globales  $\{F\}$  de l'ensemble du milieu extérieur ou de la structure.

## II. DEDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE POUR L'ELEMENT DE BARRE ARTICULEE

### 2.1 MODELE CONTINU DE BARRE

Nous allons maintenant voir la démonstration de la matrice de rigidité pour l'élément de barre à section transversale constante linéaire-élastique représenté sur la figure II-2. L'obtention de la matrice  $[k]$  sera directement applicable à la solution des barres connectées par des axes. La barre est soumise à une force de traction  $F$  dirigées le long de l'axe local de la barre et appliquées aux nœuds 1 et 2.

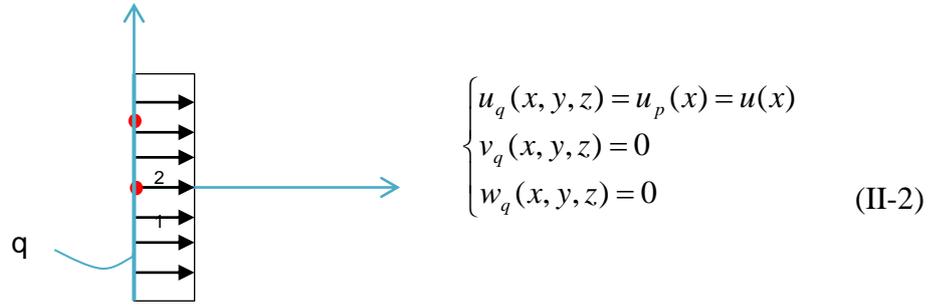
L'élément de barre est supposé avoir une section  $A$  constante, un module d'élasticité  $E$  et une longueur initiale  $L$ . Les degrés de liberté nodaux sont des déplacements axiaux locaux (déplacements longitudinaux dirigés le long de la longueur de la barre) représentés par  $u_1$  et  $u_2$  aux extrémités de la barre comme illustré sur la figure II.2.



**Figure II.2** : l'élément de barre à section transversale constante linéaire-élastique

Les caractéristique de l'élément barre sont :

- 2 dimensions,  $y$  et  $z$ , petite par rapport à  $x$
- L'axe de référence  $x$  est droit
- La barre ne transmet pas que des efforts normaux  $N$  dans la direction  $x$
- La barre est liée aux autres éléments par des rotules
- Moment transmis nuls aux liaisons



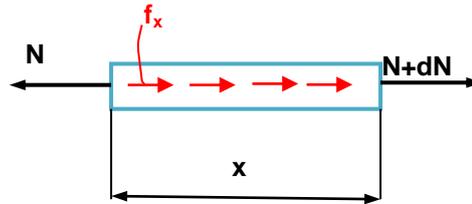
**Figure II.3 :** section transversale constante de l'élément de barre en traction

D'après la loi de Hooke et la relation déformation/déplacement, nous écrivons

Loi de HOOKE, 1D

$$\sigma_y = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II.3})$$

A l'équilibre, un élément infinitésimal de longueur  $dx$  peut être présenté comme le montre la figure suivante :



L'Equation d'équilibre statique :

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f_x = 0 \quad (\text{II.4})$$

L'Equation d'équilibre dynamique :

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f_x = \gamma \ddot{u} \quad \gamma = \rho A \quad (\text{II.5})$$

Sachant que :  $\gamma \ddot{u}$  est les forces d'inertie

$$N = \int_A \sigma_x dydz \quad (\text{II.6})$$

## 2.2 METHODE DIRECTE :

On considère un élément de barre uniforme, prismatique et élastique, de longueur  $L$ , de module élastique  $E$  et d'aire de la section transversale  $A$  (Fig. II.2). Un nœud est localisé à chacune des extrémités de la barre. Les seuls déplacements qui sont permis sont ceux axiaux.

On déplace d'abord le premier nœud, ensuite le deuxième et, dans chaque cas, on calcule les forces qui doivent être appliquées dans les nœuds pour maintenir le même état de déplacement.

Ces forces sont faciles à déterminer à partir de la formule élémentaire de la Résistance des matériaux,  $U = \frac{FL}{EA}$ , d'où la force qui résultera sera :  $F = \frac{EA}{L} \cdot U$ .

En fait, si on revient à la loi de comportement :

$$N = H_m \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{où} \quad H_m = \int_A E dy dz \quad (H_m = EA) \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} + f_x = \gamma \ddot{u} \\ N = H_m \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow H_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_x = \gamma \ddot{u} \quad (\text{II.8})$$

Si on revient à la méthode énergétique, en appliquant les formule précédente, on peut avoir les relations suivantes :

### Energie potentielle interne de déformation pour une barre

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_v \sigma_x \varepsilon_x dv = \frac{1}{2} \int_0^L H_m \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{II.9})$$

### Energie potentielle externe pour une barre

$$\pi_{\text{ext}} = \int_0^L u f_x dx + \sum_i u_i F_i \quad (\text{II.10})$$

### Energie potentielle externe pour une barre

$$\pi = \pi_{\text{int}} - \pi_{\text{ext}} \quad (\text{II.11})$$

**Principe du Minimum de l'Energie Potentielle Totale (PMEPT) :** Parmi tous les champs de déplacements  $u$  cinématiquement admissible, celui qui rend  $\pi$  **minimum** correspond à la solution du problème.

Ce principe peut être appliqué pour les différentes méthodes suivantes :

- Domaine statique
- Méthode de Ritz
- Méthode des éléments finis

## 2.3. FONCTIONS D'INTERPOLATION DE L'ELEMENT BARRE

Considérez une structure composée d'un certain nombre de barres. Chaque barre peut avoir deux nœuds ( $n = 2$ ) comme le montre la figure II.2. Dans chaque nœud, on aura un déplacement axial  $u_i$  unitaire suivant l'axe  $x$ . Ce déplacement peut être écrit sous une forme approximative  $u$  à l'intérieur de l'élément.

$N$  est une matrice de fonctions de forme

$u$  vecteur des déplacements aux deux nœuds de l'élément

La relation entre  $u$  et  $N$  peut être écrit comme suit :

$$u = \sum_i N_i u_i = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (\text{II-12})$$

L'ordre du polynôme des fonctions d'interpolation dépend du nombre des fonctions d'interpolation du nombre de nœuds et degrés de liberté dans l'élément. Puisque nous avons deux nœuds avec un total de deux degrés de liberté (DDL) dans l'élément, nous choisissons d'avoir deux termes de fonctions de base, ce qui donne :

$$N_i(x) = a_i x + b_i \quad (\text{II-13})$$

Donc, nous supposons que les fonctions d'interpolation sont des polynômes d'ordre deux :

$$\begin{cases} N_1(x) = a_1 x + b_1 \\ N_2(x) = a_2 x + b_2 \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

Où  $a_1, b_1, a_2, b_2$  ce sont des constantes qu'on doit déterminer :

Pour déterminer les fonctions d'interpolation ou de de forme, nous utilisons les conditions initiales tel que :

$$\begin{aligned} \text{pour } x = 0, \quad u(x = 0) &= u_1 \\ \text{pour } x = l, \quad u(x = l) &= u_2 \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

à partir des équations (II.14) et (II.15), on aura :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_i \\ a_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

On aura donc :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Au final le déplacement  $u(x)$  peut être écrit comme suit :

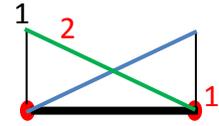
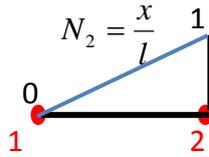
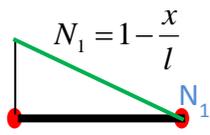
$$u(x) = (1 \quad x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_i \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (\text{II.18})$$

Ce qui donne aussi :

$$u(x) = \{1 - x/l \quad x/l\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{N_1 \quad N_2\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Où les fonctions d'interpolation seront comme suit :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{l} \\ N_2 &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$



Comme indiqué précédemment, il n'y a qu'une seule composante de contrainte  $\sigma_x$  dans une barre, et la déformation correspondante peut être obtenue par :

$$\text{La déformation axiale } \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \left[ \frac{d}{dx} N \right] \cdot \{u\} = [B] \cdot \{u\} = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \cdot \{u\}$$

$$\varepsilon_x = [B] \cdot \{u\} = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \cdot \{u\} \quad (\text{II.21})$$

L'équation d'énergie peut être réécrite sous forme matricielle comme

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle \int_0^L \underbrace{\{B\} H_m \langle B \rangle dx}_{[K]} \{u_n\} \quad (\text{II.22})$$

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [K] \{u_n\} \quad (\text{II.23})$$

Au final la matrice de rigidité a la forme suivante pour l'élément de barre:

$$[K] = \frac{H_m}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } H_m = EA \quad (\text{II.24})$$

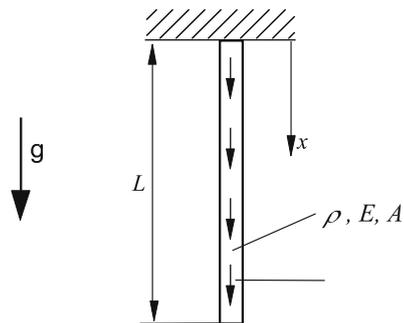
$[K]$  Matrice de rigidité élémentaire de l'élément de barre 1D

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

### Exemple 1 :

La figure suivante présente une barre de longueur  $L$  avec une section transversale constante  $A$ , un module d'élasticité constant  $E$  et une densité constante  $\rho$  le long de l'axe de la barre. La barre est maintenant chargée à travers son poids propre.

Déterminer les déplacements nodaux.



### Solution :

La base de la solution par éléments finis est la relation de rigidité suivante :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} q_0 L \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec une approximation linéaire de la distribution de déplacement.

$$k = \frac{EA}{L}, \quad q_0 = \rho g A$$

Si les formulations sont insérées pour la rigidité  $k$  et la charge répartie  $q_0$ , on aura :

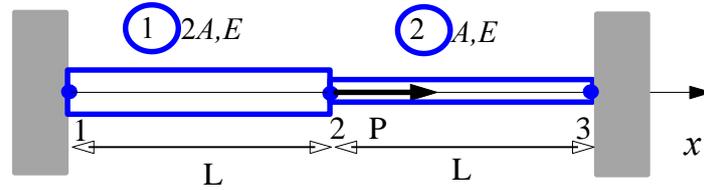
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir de laquelle, le déplacement à l'extrémité inférieure de la barre  $u_2$  est

$$u_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{E}$$

Car, d'après les conditions aux limites ( $u_1 = 0$ ).

### Exemple 2 :



Trouvez les contraintes dans l'assemblage à deux barres qui est chargé avec la force P et encasté aux deux extrémités, comme indiqué sur la figure ci-dessus.

### Solution:

utilisez deux éléments de barre 1D,

La matrice de rigidité de l'élément 1 :  $[K] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   $\begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix}$

La matrice de rigidité de l'élément 2 :  $[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   $\begin{matrix} u_2 & u_3 \end{matrix}$

La matrice globale du système sera comme suit;

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites du système sont les suivantes :

$$u_1 = u_3 = 0 \quad F_2 = P$$

Les équations d'éléments finis seront :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

A partir de équations EF , on obtient :

$$\frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{P\}$$

Ainsi,

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

Et

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les contraintes dans l'élément 1 seront :

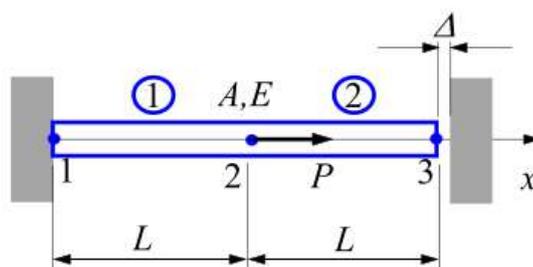
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E\varepsilon_1 = E\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left( \frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A} \end{aligned}$$

La même chose pour l'élément 2 :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= E\varepsilon_2 = E\mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 = E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left( 0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A} \end{aligned}$$

### Exemple 3 :

Déterminer les forces de réactions dans les deux extrémités de la barre.



**Données :**  $P = 6.10^4 \text{ N}$ ,  $E = 2.10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $A = 250\text{mm}^2$ ,  $L = 150\text{mm}$ ,  $\Delta = 1,2 \text{ mm}$

### Solution :

Nous vérifions d'abord si le contact de la barre avec le mur de droite se produira ou non. Pour ce faire, nous imaginons que le mur de droite est supprimé et calculons le déplacement à l'extrémité droite.

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{(6.0 \times 10^4)(150)}{(2.0 \times 10^4)(250)} = 1.8 \text{ mm} > \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

Ainsi, le contact se produit. L'équation EF globale sera,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions initiales et le chargement sont :

$$F_2 = P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}$$

$$u_1 = 0, \quad u_3 = \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

L'équation EF globale devient :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Donc, la seconde équation donne :

$$\frac{EA}{L} [2 \quad -1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{P\}$$

On obtient donc,

$$\frac{EA}{L} [2] \{u_2\} = \left\{ P + \frac{EA}{L} \Delta \right\}$$

La solution de l'équation donne :

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{PL}{EA} + \Delta \right) = 1.5 \text{ mm}$$

Au final :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 1.2 \end{Bmatrix} (\text{mm})$$

Pour calculer les forces de réaction, nous appliquons le 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> équation de l'équation globale EF.

La première équation donne,

$$F_1 = \frac{EA}{L} [1 \quad -1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2) = -5.0 \times 10^4 \text{ N}$$

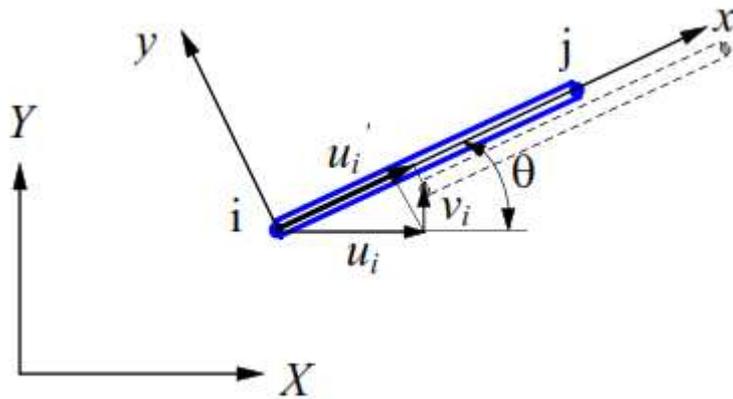
La troisième donne :

$$F_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3)$$
$$= -1.0 \times 10^4 \text{ N}$$

# CHAPITRE II- PARTIE 2 : DÉDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ POUR LES BARRES ARTICULÉES EN TREILLIS

## III. TRANSFORMATION DES COORDONNEES DU SYSTEME LOCAL EN SYSTEME GLOBAL

Dans la figure II.4, on présente un exemple typique de barre articulée ainsi que les deux repères de coordonnées, local  $xOz$  et global  $XOZ$ . Les déplacements dans le système local sont  $u_1$  et  $u_2$  et dans le système global  $u_1, v_1$  et  $u_2, v_2$ . L'angle  $\theta$  est l'angle entre l'axe X et la direction positive de la barre articulée.



(II.23)

**Figure II.4** : Système local et global de coordonnées

Les déplacements dans le système local  $xOy$  peut être exprimé en fonction des déplacements globaux.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \\ u_2 &= u_2 \cos \theta + v_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (II.26)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{u\} = [T] \cdot [U] \quad (II.27)$$

Où  $[T]$  s'appelle matrice de transformation du système local dans celui global et :

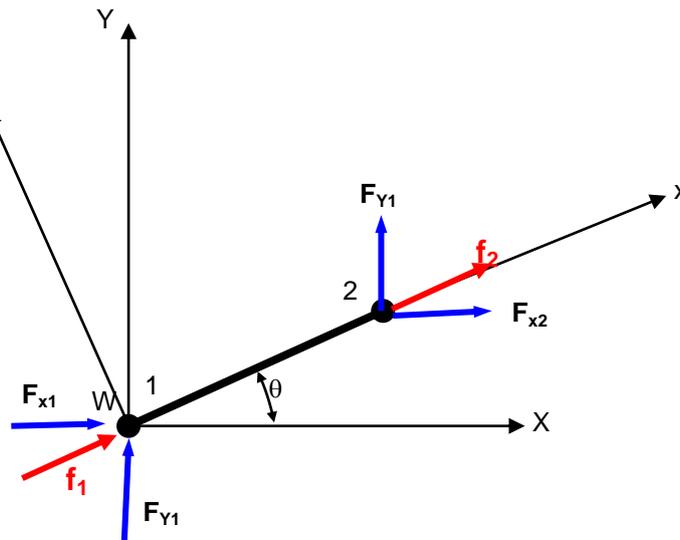
$$\cos \theta = \frac{X_2 - X_1}{L}, \quad \sin \theta = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad \text{et} \quad L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2},$$

$L$  représente la longueur de l'élément de barre articulée.

### III.1 TRANSFORMATION DES FORCES DU SYSTEME LOCAL EN SYSTEME GLOBAL

On considère la barre articulée de la figure II.5 soumise dans le système local par les forces  $f_1$  et  $f_2$  appliquées dans les nœuds 1 et 2 dans le système local d'axes de coordonnées. Les composantes de ces forces dans le système global seront :

$$\begin{aligned} F_{x1} &= f_1 \cos \theta ; & F_{y1} &= f_2 \cos \theta \\ F_{x2} &= f_1 \sin \theta ; & F_{y2} &= f_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$



**Figure.II.5 :** Forces nodales dans le système local et global d'axes de coordonnées

Sous forme matricielle, les relations (II.28) peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_e \quad (\text{II.29})$$

ou bien :

$$\{F^e\} = [T^e]^T \cdot \{f^e\} \quad (\text{II.30})$$

## II.2 DEDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT DE BARRE ARTICULEE DANS LE SYSTEME GLOBAL D'AXES

En partant de l'équation (II.30) on aura, pour le système global d'axes :

$$\{F^e\} = [T^e]^T \cdot \{f^e\} = [T^e]^T \cdot [k^e] \cdot \{u^e\} = \underbrace{[T^e]^T \cdot [k^e] \cdot [T]}_{[K^e]} \cdot \{U^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\} \quad (\text{II.31})$$

où :

$\{F^e\}$  = vecteur des forces nodales dans le système global d'axes ;

$\{f^e\}$  = vecteur des forces nodales dans le système local d'axes ;

$[K^e]$  = matrice de rigidité dans le système global d'axes ;

$[k^e]$  = matrice de rigidité dans le système local d'axes ;

$\{U^e\}$  = vecteur des déplacements nodaux dans le système global d'axes ;

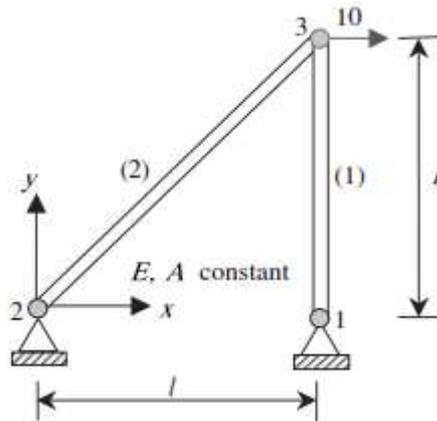
$\{u^e\}$  = vecteur des déplacements nodaux dans le système local d'axes.

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

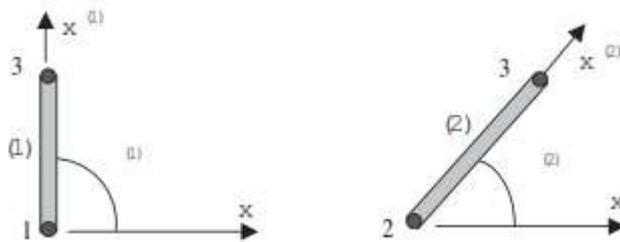
où  $c = \cos\theta$  et  $s = \sin\theta$ .

### Exemple 1 :

La figure suivante montre les propriétés des matériaux, la géométrie, les charges et les conditions aux limites de la structure à deux barres. Dans cet exemple, nous soulignons les quatre étapes principales de la méthode des éléments finis (FEM), à savoir (1) le prétraitement, (2) la construction du comportement local (élément), (3) l'assemblage des matrices locales pour obtenir le comportement global et (4) le traitement.



**Solution :**



- Etape 1 : consiste à subdiviser la structure en éléments, à affecter les numéros d'éléments à chaque barre, les numéros de nœuds à chaque joint, en commençant par les nœuds où les déplacements sont prescrits. Le modèle des éléments finis se compose de deux éléments numérotés 1 et 2 et de trois nœuds.
- Etape 2 : traite de la formulation de chaque élément en commençant par l'élément 1.
- L'élément 1 est numéroté avec les nœuds globaux 1 et 3. Il est positionné selon un angle  $\theta = 90^\circ$  par rapport à l'axe x. Les autres relations sont les suivantes:  
 $\cos 90^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad l_e = l,$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [3] \\ [1] \\ [3] \end{matrix}$$

Élément 2:

L'élément 2 est numéroté avec les nœuds globaux 2 et 3. Il est positionné à un angle  $\theta = 45^\circ$

$$\cos 45^\circ = 0.71, \quad \sin 45^\circ = 0.71, \quad l_e = 1.41.l$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} [2] \\ [2] \\ [3] \\ [3] \end{matrix}$$

- Étape 3: traiter la matrice globale du système.

La matrice globale K est :

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [2] \\ [2] \\ [3] \\ [3] \end{matrix}$$

Ainsi le vecteur déplacement, le vecteur force et le vecteur des réactions :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque encore une fois que si la composante de force externe à un nœud est prescrite, alors la composante de déplacement correspondante à ce nœud est inconnue. D'un autre côté, si une composante de déplacement à un nœud est prescrite, alors la composante de force correspondante à ce nœud est une réaction inconnue.

Le système global sera donc :

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puisque certains déplacements sont nulles, on peut réduire le système globale au vecteurs suivant :

$$\mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

Les déplacements inconnus peuvent être déduits à partir de l'équation suivante :

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \frac{l}{AE} \begin{bmatrix} 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}$$

On trouve aussi, le vecteur de réaction  $\mathbf{r}_E$  :

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_E \bar{\mathbf{d}}_E + \mathbf{K}_{EF} \mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

La procédure pour déterminer la contrainte dans les deux éléments est la suivante:

$$\sigma^e = E^e \frac{u_{2x}^e - u_{1x}^e}{l^e} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ \bar{u}_{2y}^e \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e$$

$$\begin{aligned}\sigma^e &= E^e \frac{u_{2x}^e - u_{1x}^e}{l^e} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ u_{2y}^e \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e \\ &= \frac{E^e}{l^e} [-\cos \phi^e \quad -\sin \phi^e \quad \cos \phi^e \quad \sin \phi^e] \mathbf{d}^e.\end{aligned}$$

Pour le premier élément :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(1)} &= \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{l}{AE}, \\ \sigma^{(1)} &= [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \frac{-10}{A}.\end{aligned}$$

Pour le premier élément :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(2)} &= \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{l}{AE}, \\ \sigma^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \frac{10\sqrt{2}}{A}.\end{aligned}$$

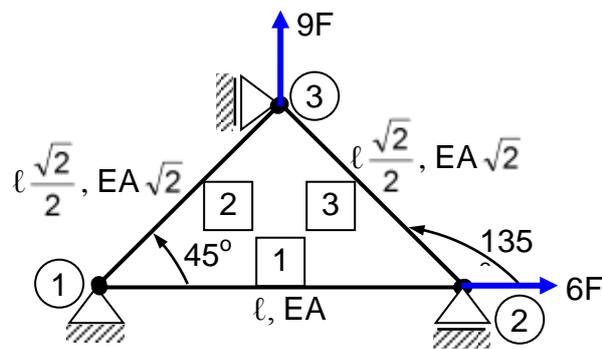
### Exemple 2 :

A partir du système montré dans la figure ci-dessous détermine :

Les efforts et les contraintes dans chaque barre ;

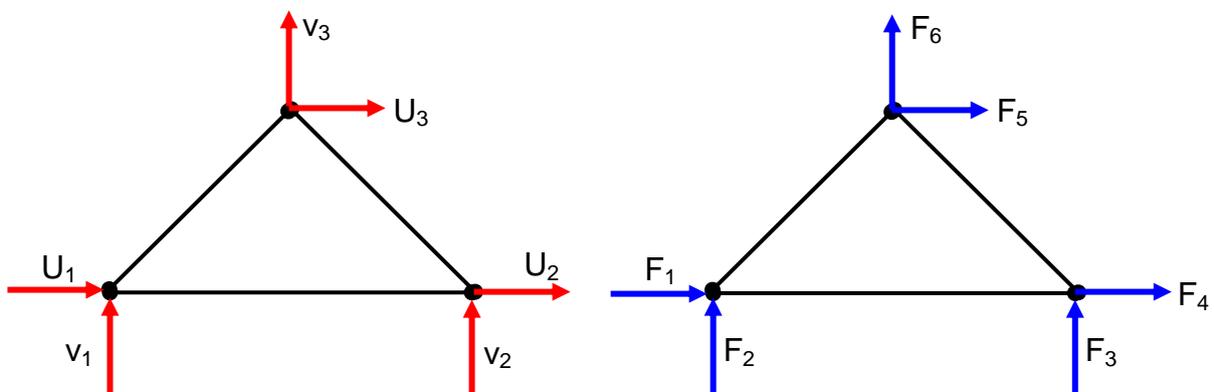
Les déplacements nodaux.

On considère comme connues  $E$ ,  $F$ ,  $\ell$  et  $A$ . Application numérique :  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $A = 200 \text{ mm}^2$ ,  $\ell = 1 \text{ m}$  et  $F = 10 \text{ kN}$ .



### Solution :

- Numérotation des nœuds et des éléments
- Application des forces nodales et des déplacements nodaux.



- complètement du tableau

Barre	Noeuds		$\theta_e$ [°]	$\cos \theta_e$	$\sin \theta_e$	$c^2$	$s^2$	cs	$\ell_e$	$EA_e$	$\frac{EA_e}{\ell_e}$
	i	j									
1	1	2	0	1	0	1	0	0	$\ell$	EA	$\frac{EA}{\ell}$
2	1	3	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\ell \frac{\sqrt{2}}{2}$	$EA\sqrt{2}$	$\frac{2EA}{\ell}$
3	2	3	135	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\ell \frac{\sqrt{2}}{2}$	$EA\sqrt{2}$	$\frac{2EA}{\ell}$

- Ecriture de la matrice de rigidité pour chaque élément de barre séparément

$$\begin{aligned}
 [K^1] &= \frac{EA}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [K^2] &= \frac{2EA}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \\
 [K^3] &= \frac{2EA}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

- Emplacement des trois matrices dans une matrice globale [K]

$$[K^1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EA & 0 & EA & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [K^2] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ EA & EA & 0 & 0 & EA & EA \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA & -EA & 0 & 0 & EA & EA \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ -EA & -EA & 0 & 0 & EA & EA \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

- Assemblage des matrices de rigidité  $[K^i]$  dans la matrice globale de rigidité

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ EA & EA & 0 & 0 & EA & EA \\ \frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ EA & EA & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ -EA & -EA & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- détermination des déplacements nodaux et des forces nodales :

$$\begin{cases} F_1 = ? \\ F_2 = ? \\ F_3 = 6F \\ F_4 = ? \\ F_5 = ? \\ F_6 = 9F \end{cases} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = ? \end{cases}$$

En choisissant les lignes 3 et 6 on peut facilement calculer les déplacements nodaux :

$$\begin{cases} 2 \frac{EA}{\ell} u_2 + \frac{EA}{\ell} v_3 = 6F \\ \frac{EA}{\ell} u_2 + 2 \frac{EA}{\ell} v_3 = 9F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{F\ell}{EA} = \frac{10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,25 \text{ mm} \\ v_3 = \frac{4F\ell}{EA} = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

Les forces nodales peut être déterminé des équations des lignes 1, 2, 4 et 5. On aura dans ce cas :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5F \\ -4F \\ -5F \\ -F \end{Bmatrix}.$$

L'allongement  $\Delta\ell$  pour un élément quelconque  $i - j$  se calcule avec la formule :

$$\Delta\ell_{ij} = (u_j - u_i) \cos\theta - (v_j - v_i) \sin\theta$$

- Calcul des efforts dans chaque élément de barre.

Les efforts dans un élément de barre articulée  $i - j$  se calculent avec la formule :

$$N_{ij}^e = \frac{EA^e}{\ell^e} \cdot \Delta\ell_{ij}^e = \frac{EA^e}{\ell^e} \cdot \begin{Bmatrix} -c & -s & c & s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}_e$$

Donc les efforts dans les barres 1-2, 1-3 et 2-3 sont :

$$N_{12}^1 = \frac{EA}{\ell} \cdot \{-1 \ 0 \ 1 \ 0\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F\ell \\ EA \\ 0 \end{Bmatrix} = F = 10000 \text{ [N]}$$

$$N_{13}^2 = \frac{EA\sqrt{2}}{\ell \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4F\ell}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = 4\sqrt{2}F = 56568,54 \text{ [N]}$$

$$N_{23}^3 = \frac{EA\sqrt{2}}{\ell \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{F\ell}{EA} \\ \frac{F\ell}{EA} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4F\ell}{EA} \end{Bmatrix} = 5\sqrt{2}F = 70710,67 \text{ [N]}$$

Ainsi, les contraintes dans chaque élément de barre se calculent avec la

formule :  $\sigma_{ij}^e = \frac{N_{ij}^e}{A_e}$  :

$$\sigma_{12}^1 = \frac{N_{12}^1}{A_1} = \frac{10000}{200} = 50 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{13}^2 = \frac{N_{13}^2}{A_2} = \frac{56568,54}{200\sqrt{2}} = 200 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{23}^3 = \frac{N_{23}^3}{A_3} = \frac{70710,67}{200\sqrt{2}} = 250 \text{ [MPa]}$$

## Table des matières

Chapitre III :.....	37
DÉDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ POUR LES ELEMENTS POUTRES .....	37
I.Introduction .....	37
II. Les équations qui régissent une poutre .....	37
II.1. Champ de déformations et de contraintes .....	38
II.1.1 Energie potentielle interne de déformation : .....	38
II.1.2 Méthode directe.....	39
II.2. Fonctions d'interpolation de l'élément poutre .....	40
II.3. Détermination de la matrice de rigidité :.....	42
II.3.1.Energie de déformation .....	42
III. Systèmes de coordonnées globales et locaux.....	44
4.1 Transformation des coordonnées du système local en système global.....	44
Exemple 1 .....	45
Solution :.....	46

# CHAPITRE III :

## DÉDUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ POUR LES ELEMENTS POUTRES

### I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons déterminer la matrice de rigidité pour un élément de poutre simple. Une poutre est un élément structural long et mince généralement soumis à une charge transversale qui produit des effets de flexion importants par rapport aux effets de torsion ou axiaux. Cette déformation en flexion est mesurée comme un déplacement transversal ( $v$ ) et une rotation ( $\theta$ ). Par conséquent, les degrés de liberté considérés par nœud sont le déplacement transversal et la rotation.

La figure III.1 montre une poutre sous une charge répartie de longueur dans le plan ( $x, y$ ).

### II. LES EQUATIONS QUI REGISSENT UNE POUTRE

Le déplacement longitudinal de la poutre

$$u_x = u$$

$$u = -y \sin \theta(x)$$

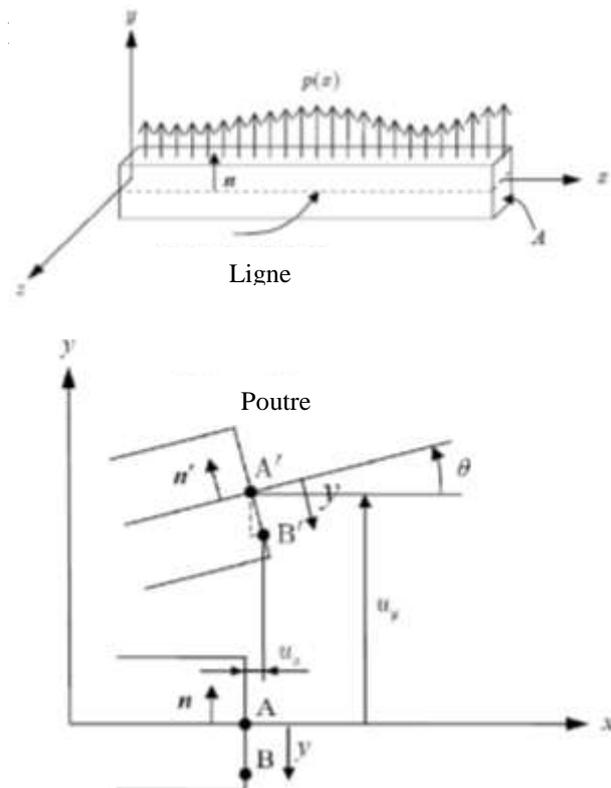
**Remarque :**  $y < 0 \Rightarrow u > 0$

Pour des  $\theta(x)$  petits,  $\sin \theta = \theta$

$$u_y(x, y) = v(x)$$

$$\theta = \frac{dv(x)}{dx}$$

$$u = -y \frac{dv}{dx} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$



**Figure III.1 :** déformation d'une poutre

## II.1. CHAMP DE DEFORMATIONS ET DE CONTRAINTES

A partir des lois d'élasticité d'une poutre, on a recours aux équations suivantes.

$$M(x) = EIy'' = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{III.1})$$

$$T = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) \quad (\text{III.2})$$

$$q = -\frac{dT}{dx} = -\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

Le champ de déformations d'une poutre déformée est le suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} + y \frac{d\theta}{dx} \\ \gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \theta = \gamma \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Ainsi, le champ de contraintes finale obtenu à partir des équations de déformation est le suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} = G\gamma \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

### II.1.1 Energie potentielle interne de déformation :

L'énergie potentielle interne de déformation d'une poutre s'écrit :

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{du}{dx} N + \frac{d\theta}{dx} M + \gamma T \right) dx \quad (\text{III.6})$$

Tel que :

N : Effort normal

M : Moment fléchissant

T : Effort tranchant

L'équation (III.6) devient :

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{xx} \left( \frac{du}{dx} + y \frac{d\theta}{dx} \right) + \sigma_{xy} \gamma_{xy} \right) dV \quad (\text{III.7})$$

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \int_A \sigma_{xx} A + \frac{d\theta}{dx} \int_A y \sigma_{xx} A + \gamma \int_A \sigma_{xy} A \right) dx \quad (\text{III.8})$$

Sachant que :

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma_{xx} dA \\ M = \int_A y \sigma_{xx} dA \\ T = \int_A \sigma_{xy} dA \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

### II.1.2 Méthode directe

La figure III.2 montre un élément de poutre dans le plan. L'élément est prismatique, ayant un module d'élasticité longitudinal  $E$ , de moment d'inertie  $I$  pour la section axiale. L'axe qui passe par les centres de chaque section a un déplacement latéral  $v = v(x)$ . Conformément à la théorie des poutres la fonction  $v = v(x)$  est un polynôme cubique en  $x$  pour une poutre uniforme prismatique chargée à ses extrémités.

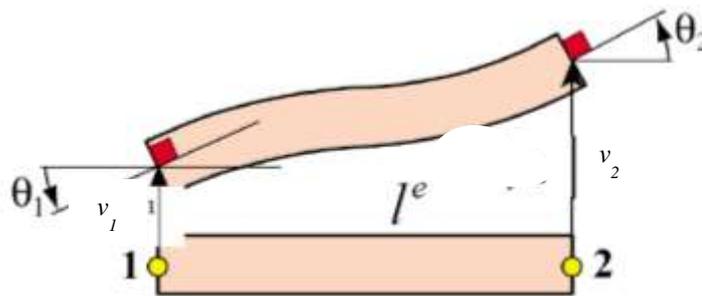


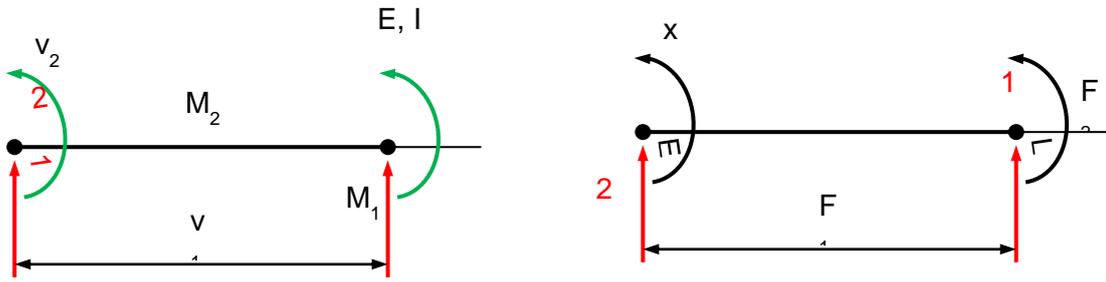
Figure III.2 : Élément de poutre déformé

A partir de la figure III.2, on remarque bien qu'il y en a deux déplacements  $v_1$ ,  $v_2$  et deux rotations  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ . Indice 1 représente le nœud 1 et 2 représente le nœud 2. Donc au total le champ de déplacement sera présenté par un vecteur de 4 éléments ainsi que le vecteur force.

Vecteur force  $f^e$  et le vecteur de déplacement sont présentés comme suit :

$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} T_{y1} \\ M_1 \\ T_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad \{v_n^e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

## II.2. FONCTIONS D'INTERPOLATION DE L'ÉLÉMENT POUTRE



**Figure III.3 :** Présentation des déplacements et des forces nodales appliqués sur un élément poutre

Concept d'interpolation nodale :

$$v(x) = \sum_i N_i v_i = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 = \langle N \rangle \{v_n\}$$

Cette somme, on peut l'écrire de forme vectorielle :

$$v(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{y1} \\ v_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{v_n\}$$

$$N_1 = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1$$

$$N_2 = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$$

$$N_3 = a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3$$

$$N_4 = a_4 x^3 + b_4 x^2 + c_4 x + d_4$$

Détermination des fonctions d'interpolation nodale

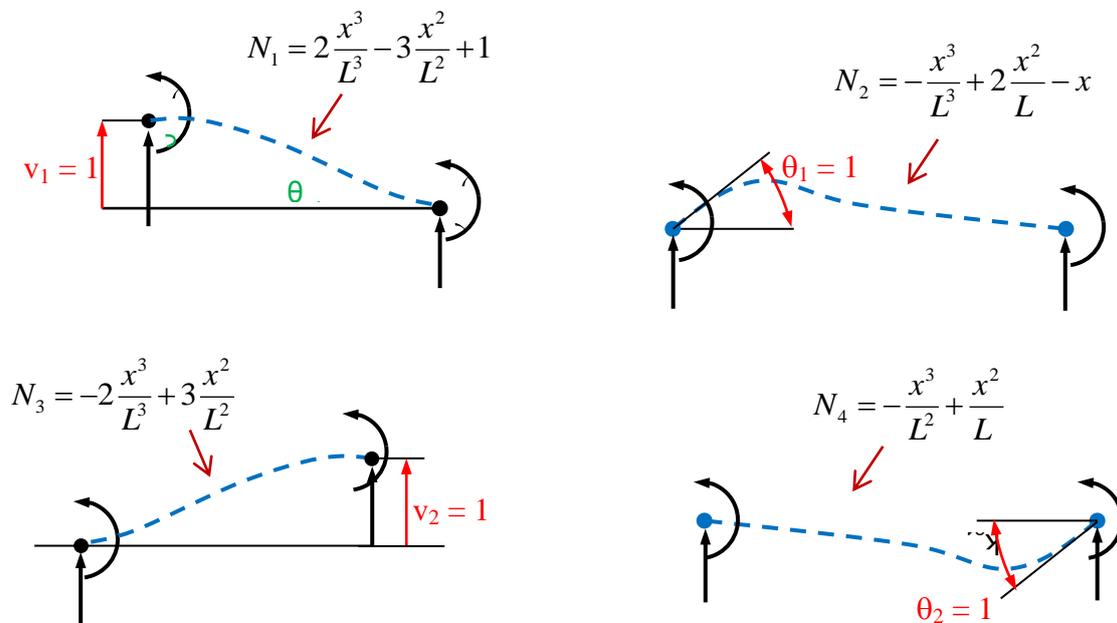
$$v(x) = N_1 v_1 + N_2 \left( -\frac{dv_1}{dx} \right) + N_3 v_2 + N_4 \left( -\frac{dv_2}{dx} \right)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{dN_1}{dx} v_1 + \frac{dN_2}{dx} \left( -\frac{dv_1}{dx} \right) + \frac{dN_3}{dx} v_2 + \frac{dN_4}{dx} \left( -\frac{dv_2}{dx} \right)$$

Les fonctions de forme associées par l'activation de l'un des quatre degrés de liberté sont présentées comme suit :

Activation du degré de liberté	Fonction de forme correspondante
Déplacement du nœud 1	$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du nœud 1	$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$
Déplacement du nœud 2	$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du nœud 2	$N_4 = -\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^2}$

On peut les représenter les fonctions de forme dans la figure suivante :



**Figure III.4** : Présentation des fonctions de forme de l'élément poutre

## II.3. DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

### II.3.1. Energie de déformation

D'après le comportement mécanique de la poutre, on peut donner l'énergie de déformation interne suivante :

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \int_A \sigma_{xx} A + \frac{d\theta}{dx} \int_A y \sigma_{xx} A \right) dx$$

$$\text{Sachant : } \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad \chi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \left[ \int_0^L \left( \varepsilon \int_A \sigma_{xx} A \right) + \int_0^L \left( \chi \int_A y \sigma_{xx} A \right) \right]$$

Sachant aussi que :

$$M = EIy'' = EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \qquad \int_0^L \left( \chi \int_A y \sigma_{xx} A \right) dx = \int_0^L (\chi M) dx$$

Donc :

$$\int_0^L \left( \chi \int_A y \sigma_{xx} A \right) dx = \int_0^L (\chi \cdot EI \cdot \chi) dx$$

$$\int_0^L (\chi \cdot EI \cdot \chi) dx = \int_0^L (\langle \mathbf{B} \rangle \{v_n\} EI \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \{v_n\}) dx = \int_0^L (\langle v_n \rangle \{ \mathbf{B} \} EI \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \{v_n\}) dx$$

$$\text{Avec } [\mathbf{B}] = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}$$

$$\int_0^L (\langle v_n \rangle \{ \mathbf{B} \} EI \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \{v_n\}) dx = \langle v_n \rangle \left( \int_0^L \{ \mathbf{B} \} EI \cdot \langle \mathbf{B} \rangle dx \right) \{v_n\}$$

$$\uparrow$$

$$[\mathbf{K}]$$

Donc, l'approche générale pour la détermination de la matrice de rigidité de l'élément est,

$$[\mathbf{K}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}] dx$$

La déformation de la poutre est donnée comme suit :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Quand on remplace, le vecteur u et N, le vecteur B peut déduit de la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1''(x) & N_2''(x) & N_3''(x) & N_4''(x) \end{bmatrix}$$

Au final le vecteur  $\mathbf{B}$  et après calcul est donnée par le vecteur suivant :

$$[\mathbf{B}] = \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad ; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]$$

Pour trouver les composantes de la première colonne de la matrice de rigidité  $[\mathbf{K}]$  correspondant à l'élément de poutre, respectivement  $[k_{11} \quad k_{21} \quad k_{31} \quad k_{41}]^T$  on a utilisé les conditions suivantes :

- $v_1 = 1$  dans le nœud 1, ce qui conduit à :  $\frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1$

$$\theta_1 = 0 \text{ dans le nœud 1, ce qui conduit à : } -\frac{k_{11}L^2}{2EI} + \frac{k_{21}L}{EI} = 0$$

A part ces deux équations, les équations d'équilibre de la statique seront ajoutées pour déterminer les deux autres composantes, respectivement  $k_{31}$  et  $k_{41}$  :

$$\sum F = 0 \Rightarrow k_{11} + k_{31} = 0$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow k_{21} + k_{41} - k_{11} \cdot L = 0$$

De façon similaire, on aura pour chacun des trois états de déformation restés un groupe de quatre équations. En ce cas, chacun de ces trois états complètera les trois colonnes restées inachevées de la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité  $[\mathbf{K}]$  opère sur le vecteur des degrés de liberté associés à chaque nœud,  $[v] = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$ .

Le résultat de ce processus sera donc :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & -\frac{6EI}{L^2} & 2EI \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 2EI & -\frac{6EI}{L^2} & 4EI \end{bmatrix}$$

En ce qui concerne le calcul des contraintes, on sait du cours de Résistance des matériaux que dans le cas d'une poutre soumise à la flexion,

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot z \quad \text{où} \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \cdot [B] \cdot \{v\} \quad (\text{III.16})$$

Pour l'élément de poutre 2D (bidimensionnel), celui-ci est la combinaison entre un élément de barre et un élément de poutre. Dans ce cas, la matrice de rigidité  $[K]$  sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

### III. SYSTEMES DE COORDONNEES GLOBALES ET LOCALS

L'utilisateur définit la géométrie d'un modèle avec éléments finis dans un système de coordonnées global. Le logiciel génère typiquement une matrice de rigidité pour un élément quelconque dans un système local de coordonnées  $xyz$  et le convertit dans le système global pour réaliser l'assemblage des éléments.

#### 4.1 TRANSFORMATION DES COORDONNEES DU SYSTEME LOCAL EN SYSTEME GLOBAL

Pour déterminer une matrice de rigidité dans un repère quelconque on utilise la même méthode qui a été utilisé pour l'élément barre. Les déplacements dans le système local sont  $u_1$  et  $u_2$  et dans le système global  $u_1, v_1$  et  $u_2, v_2$ . Les rotations  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées. L'angle  $\theta$  est considéré l'angle entre l'axe  $x$  et la direction positive de la poutre.

Les déplacements dans le système local  $xOy$  peut être exprimé en fonction des déplacements globaux.

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \\ u_2 &= -U_2 \sin \theta + v_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

pour le nœud 1.

De façon similaire, pour le nœud 2 on aura :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Sachant que :

$$\{u^e\} = [T^e] \cdot \{U^e\} \quad (\text{III.31})$$

il en résulte :

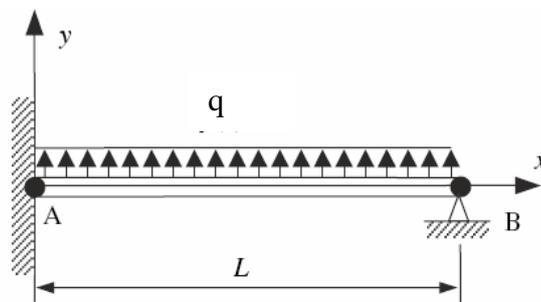
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ \varphi_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

La matrice de transformation des déplacements du système local au système global, par l'intermédiaire de la matrice de transformation  $[T^e]$ .

L'expression de la matrice de rigidité attachée à un élément de poutre  $[K^e]$  dans le système global d'axes aura la forme :

$$[K^e] = [T^e]^T \cdot [k^e] \cdot [T^e] \quad (\text{III.33})$$

**Exemple 1 : (un seul élément poutre avec une charge répartie):**



Considérons une poutre AB soumise à une charge transversale uniforme comme indiqué dans la figure, on utilise un seul élément fini.

Déterminer la flèche maximale.

### Solution :

La matrice de rigidité de l'élément poutre est donnée comme suit :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La force due à la charge distribuée est donnée par :

$$\{f_{ext}\} = \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ L/6 \\ 1 \\ -L/6 \end{Bmatrix}$$

Les limites ont aussi des forces de réaction et des moments. Le vecteur de force due à des forces et des moments de réaction est donné par :

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} R_{v1} \\ 0 \\ R_{v2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{v1} \\ M_1 \\ R_{v2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage des vecteurs de forces nous donne :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} + R_{v1} \\ \frac{qL^2}{12} + M_1 \\ \frac{qL}{2} + R_{v2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Pour avoir les déplacements, nous utilisons la formule globale  $ku=f$

$$[K]\{u\} = \{f\} \Rightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} + R_{v_1} \\ \frac{qL^2}{12} + M_1 \\ \frac{qL}{2} + R_{v_2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

En raison des conditions aux limites, nous savons que  $v_1$ ,  $\theta_1$ , et  $v_2$  sont nuls, de sorte que nous pouvons réduire la matrice.

$$[K]\{u\} = \{f\} \Rightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} + R_{v_1} \\ \frac{qL^2}{12} + R_{\theta_1} \\ \frac{qL}{2} + R_{v_2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

A partir de ces conditions, nous pouvons en déduire la rotation  $\theta_2$  comme suit :

$$\frac{4EI}{L} \theta_2 = \frac{-qL^2}{12} \Rightarrow \theta_2 = \frac{-qL^3}{48EI}$$

L'équation de la flèche est donnée comme suit :

$$v(x) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-qL^3}{48EI} \end{Bmatrix}$$

La flèche maximale correspond au point où la dérivée du déplacement est nul, donc :

$$\frac{dv(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dN_4}{dx} \frac{-qL^3}{48EI} = 0$$

sachant

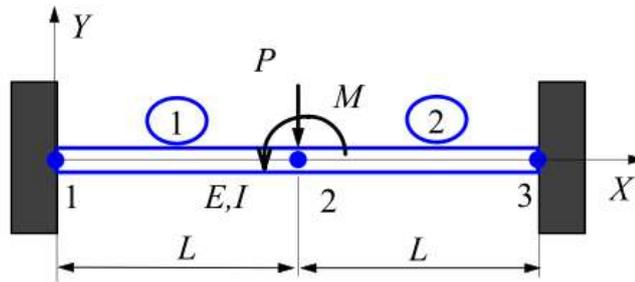
que :

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \Rightarrow \frac{dN_4}{dx} \frac{-qL^3}{48EI} = \left( -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \frac{-qL^3}{48EI} = 0 \Rightarrow \left( -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) = 0$$

Après calcul nous trouvons que le déplacement maximal  $v_{max}$  :

$$v_{max} = \frac{qL^4}{324EI}$$

**Exemple 2 (deux éléments poutre):**



La poutre illustrée ci-dessus est serrée aux deux extrémités et soumise à l'action de la force  $P$  et du moment  $M$  au milieu.

Déterminer la rotation au nœud central et les forces et les moments de réaction aux deux extrémités.

**Solution :**

Les matrices de rigidité des éléments sont,

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{4EI} \\ \frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} & -\frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{4EI} \\ \frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} & -\frac{L^2}{L^2} & \frac{L}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Le système d'équation globale est :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

D'après les conditions aux limites :

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = \theta_3 = 0$$

$$F_2 = -P \quad M_2 = M$$

Le système d'équation devient donc :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 = -P \\ M_2 = M \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le système réduit sera donc :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

Après calcul, la solution de ce système est :

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI} \begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}$$

De l'équation globale d'EF, nous obtenons les forces de réactions et les moments de réaction,

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2P + 3M/L \\ PL + M \\ 2P - 3M/L \\ -PL + M \end{Bmatrix}$$

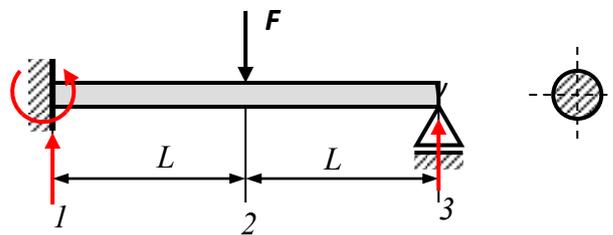
Les contraintes dans la poutre aux deux extrémités peuvent être calculées à l'aide de la formule :

$$\sigma = \sigma_x = -\frac{My}{I}$$

**Exemple 3 (deux éléments poutre):**

Pour la poutre de section circulaire de diamètre d.

1. Calculez le déplacement transversal du nœud 2 ainsi que les réactions  $T_1$ ,  $M_1$  et  $T_3$ .
2. Tracez les diagrammes T et M et déterminez la contrainte maximale supportée par la poutre. Application numérique :  $L = 0,8 \text{ m}$ ,  $E = 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $F = 4 \text{ kN}$ ,  $d = 60 \text{ mm}$ .



On part de l'expression de la matrice de rigidité pour un élément de poutre dans un système local d'axes de coordonnées :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

On particularise cette expression pour chacune des deux régions 1-2 respectivement 2-3, en négligeant les lignes et les colonnes 1 et 4, à cause de l'absence des forces axiales :

$$[K^1] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^{II}] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_I = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II}$$

$$\text{Donc, } \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}_I = [K^I] \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2^I \\ \varphi_2^I \end{Bmatrix}_I \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} T_2^{II} \\ M_2^{II} \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{II} = [K^{II}] \cdot \begin{Bmatrix} v_2^{II} \\ \varphi_2^{II} \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}_{II}$$

En assemblant les deux matrices de rigidité, on aura :

$$[K] = [K^I] + [K^{II}] = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

En écrivant l'équation fondamentale de la MEF, on aura :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_I \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et,}$$

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ M_2 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_I \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

Par l'addition des deux relations, il en résulte :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 = -F \\ M_2 = 0 \\ T_3 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 = 0 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

En choisissant les lignes et les colonnes 3, 4 et 6, on obtiendra :

$$\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}, \text{ d'où il en résulte : } v_2 = -\frac{7 FL^3}{96 EI}, \varphi_2 = -\frac{3 FL^2}{96 EI}$$

et  $\varphi_3 = \frac{12 FL^2}{96 EI}$ . En remplaçant ces trois valeurs dans le système matriciel, écrit pour les lignes et les colonnes 1, 2 et 5, on obtiendra :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 6L & 0 \\ -6L & 2L^2 & 0 \\ -12 & -6L & -6L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{7 FL^3}{96 EI} \\ -\frac{3 FL^2}{96 EI} \\ \frac{12 FL^2}{96 EI} \end{Bmatrix}, \text{ d'où il en résulte : } T_3 = \frac{5}{16} F$$

$$v_1 = \frac{11}{16} F, \text{ et } M_1 = -\frac{3}{8} FL.$$

En ce qui concerne la contrainte maximale, en appliquant la relation de Navier, on obtiendra :

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_y} = \frac{3FL}{8 \cdot \frac{\pi d^3}{32}} = \frac{3 \cdot 4000 \cdot 800 \cdot 32}{8 \cdot \pi \cdot 60^3} = 56,58 \text{ MPa}.$$

## Table des matières

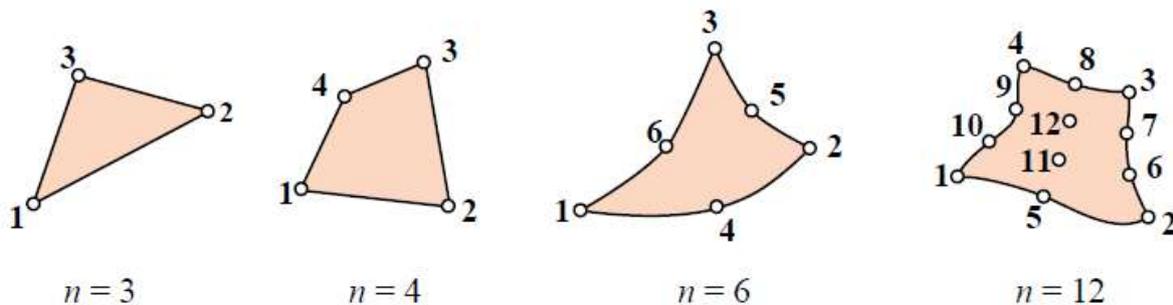
Chapitre VI .....	54
PROBLÈMES PLANS –Elément Triangulaire T3.....	54
I.Introduction .....	54
II.État de contrainte et de déformation bidimensionnel.....	54
II.1 Relations contrainte-déformation.....	55
II.2 Relations déformations-déplacements.....	56
II.3 Détermination de la matrice de rigidité.....	57
II.3.1 Détermination des fonctions d'interpolation :.....	58
II.3.2 Détermination de la matrice [B] :.....	61
Exemple 1:	60
Exemple 2:	65

# CHAPITRE VI

## PROBLÈMES PLANS –ELEMENT TRIANGULAIRE T3

### I.INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on considère l'élément fini bidimensionnel. Les éléments bidimensionnels (plans) sont définis par trois nœuds ou plus dans un plan bidimensionnel. Les éléments sont connectés au niveau de nœuds communs et/ou le long d'arêtes communes pour former une continuité des structures. La figure IV.1 montre quelque exemples d'éléments bidimensionnels. La compatibilité du déplacement nodal est ensuite renforcée lors de la formulation des équations d'équilibre nodal pour les éléments bidimensionnels.



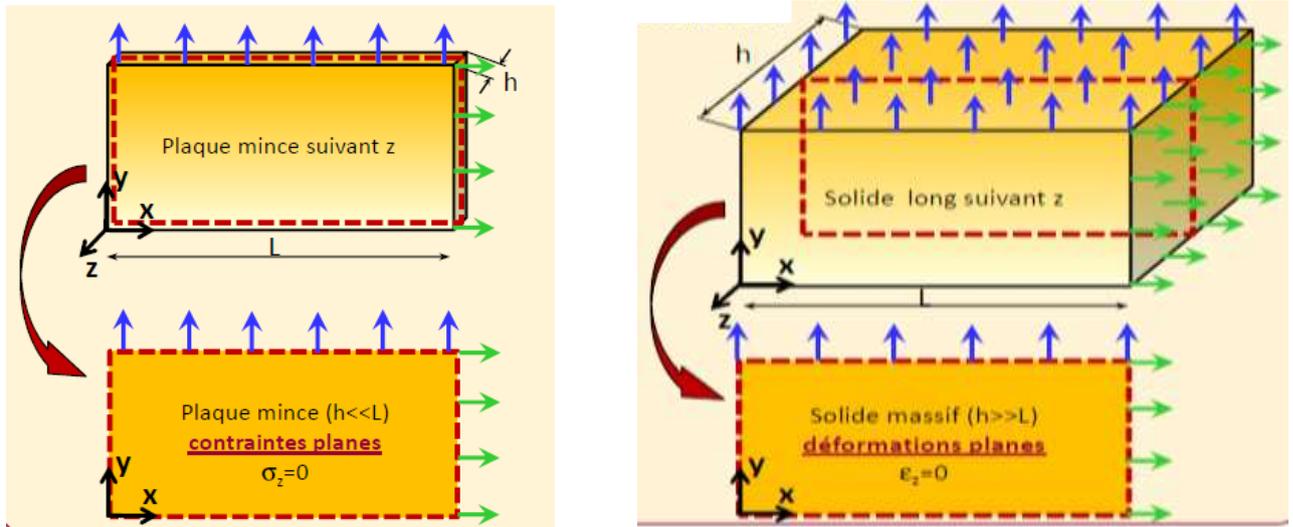
**Figure VI.1:** différentes géométries planes et configurations de nœuds d'éléments finis.

Nous commençons ce chapitre par le développement de la matrice de rigidité pour un élément fini bidimensionnel ou plan de base, appelé élément triangulaire à déformation constante (T3). Nous considérons la matrice de rigidité du triangle de déformation constante, car sa dérivation est la plus simple parmi les éléments bidimensionnels disponibles.

### II.ÉTAT DE CONTRAINTE ET DE DEFORMATION BIDIMENSIONNEL

Le concept d'un état de contrainte et de déformation bidimensionnel et les relations contrainte/déformation sont nécessaires pour bien comprendre le développement et l'application de la matrice de rigidité.

Nous décrirons les concepts de contrainte plane et de déformation plane. Ces concepts sont importants car le développement de ce chapitre est directement applicable qu'aux systèmes à contrainte ou déformation plane.



**Figure IV.2 :** Solide à géométrie plane (x, y) ou solide 3D infiniment long suivant z.

## II.1 RELATIONS CONTRAINTE-DEFORMATION

Par définition, on considère que l'élément est plan et a une épaisseur constante. Dans le cas d'un matériau linéaire élastique et isotrope, la relation entre les déformations et les contraintes:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Ou bien sous forme restreinte:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \cdot \{\sigma\} \quad (\text{IV.2})$$

Où :

$E$  représente le module d'Young,  $G$  - le module de cisaillement,  $\nu$  - le coefficient de Poisson ( $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ ),

Pour déterminer  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$ , on utilise l'inverse de l'équation (IV.2) :

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{IV.3})$$

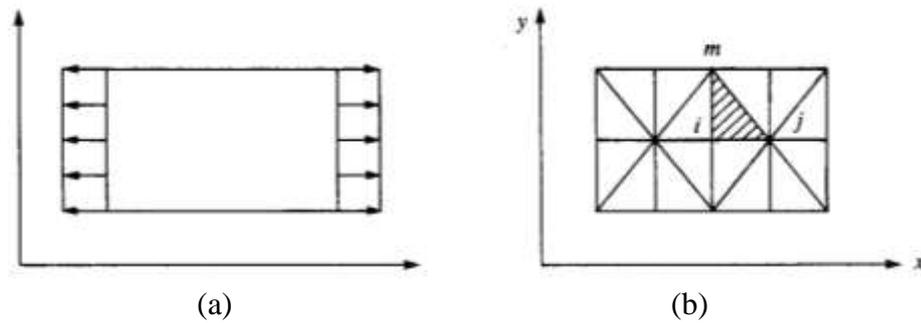
$$\text{avec } [D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \text{ pour l'état de contrainte plane.}$$

Dans le cas d'un état de déformation planes, l'épaisseur reste constante. La matrice  $[E]$  aura dans ce cas la forme :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (IV.4)$$

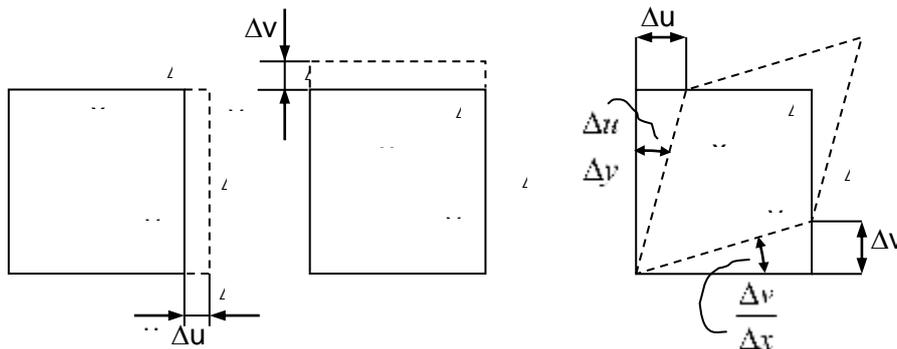
## II.2 RELATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS

Pour illustrer les étapes et introduire les équations de base nécessaires pour l'élément triangulaire plan, nous considérons une plaque mince soumise à des charges de traction en surface T (Fig. IV.3).



**Figure IV.3 :** (a) plaque soumise à la traction, (b) discrétisation de la plaque en élément triangulaire (T3)

La déformation représente la variation des dimensions géométriques d'un corps dans le voisinage d'un point et peuvent être des déformations linéaires ou angulaires. Le changement de la position de certains points d'un solide au cours de sa déformation s'appelle déplacement. Ces déplacements peuvent être linéaires ou angulaires (Fig. IV.4).



**Figure IV.4 :** Rectangle à dimensions incrémentales soumis à la traction et au cisaillement suivant les axes x, y.

Les relations qui existent entre les déformations et les déplacements sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (\text{IV.5})$$

Généralement les déplacements  $u$  et  $v$  sont des fonctions de deux variables,  $u = u(x,y)$  et  $v = v(x,y)$ . C'est pourquoi on doit utiliser les dérivées partielles. Donc, la relation (IV.5) peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Comme indiqué dans les deux chapitres précédents, les déplacements sont interpolés à partir des déplacements nodaux, comme ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (\text{IV.6})$$

A partir des relations (IV.5) et (IV.6) on peut écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \text{ où } \mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \text{ (ou bien : } \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{d\}). \quad (\text{IV.7})$$

La matrice  $[\mathbf{B}]$  : est matrice déformation-déplacement.

Le vecteur  $\{d\}$  : est le vecteur de déplacements nodaux

### II.3 DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

A partir de l'énergie de déformation (énergie rapportée à l'élément de volume) pour un matériau élastique,  $U_0 = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot [D] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ , on aura :

$$U = \frac{1}{2} \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot [D] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{d\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{d\} dV = \frac{1}{2} \{d\}^T \cdot [K] \cdot \{d\} \quad (\text{IV.8})$$

Donc :

$$[K] = \int [B]^T \cdot [E] \cdot [B] dV$$

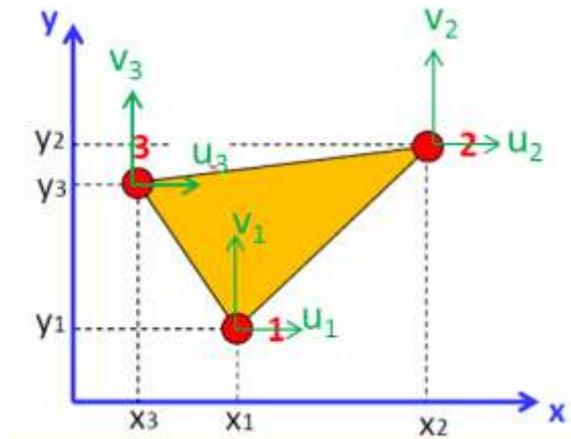
$$\Rightarrow [K] = h \int_A [B]^T [E]_{(3 \times 3)} [B] dA \quad (\text{IV.9})$$

On suppose que l'épaisseur de l'élément  $h$  est constant.

La matrice de rigidité  $[K]$  est une matrice générale qui correspond n'importe quel type d'élément fini. La nature de la matrice de rigidité  $[K]$  dépend exclusivement de la matrice  $[B]$  qui dépend à son tour de la matrice des fonctions d'interpolation  $[N]$ .

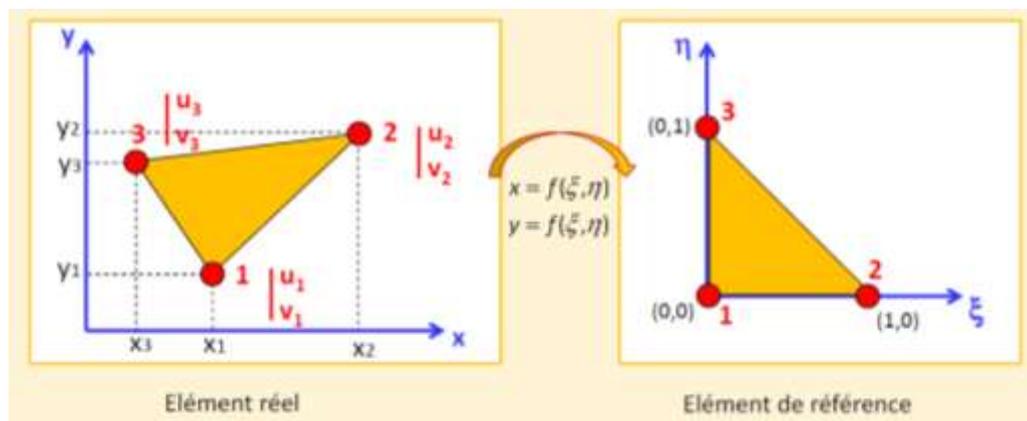
### II.3.1 Détermination des fonctions d'interpolation :

L'élément triangulaire dans le repère global peut être présenté dans la figure IV.5



**Figure IV.5 :** Élément fini triangulaire T3 avec les déplacements dans le repère (x, y).

Nous introduisons les coordonnées naturelles  $(\xi, \eta)$  sur le triangle, puis les fonctions de forme peuvent être représentées simplement par la transformation géométrique (Fig. IV.6).



**Figure IV.6 :** Transformation géométrique de l'élément triangulaire.

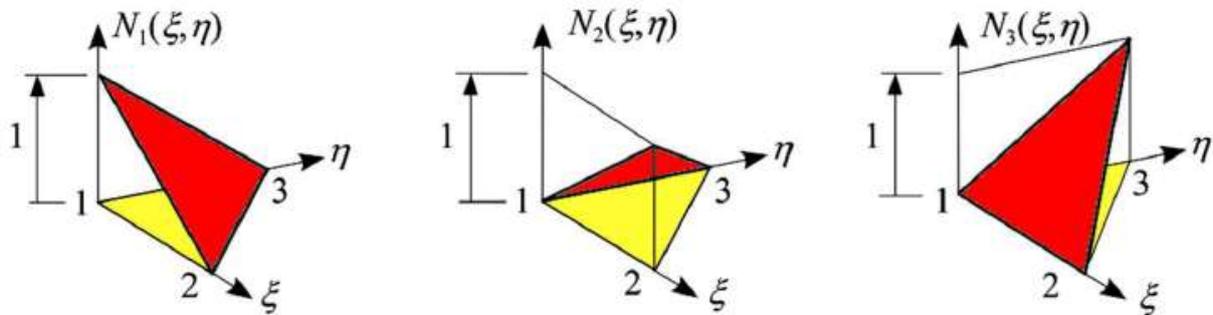
La transformation géométrique de l'élément de référence à l'élément réel est donnée par :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (\text{IV.10})$$

Avec :

- $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence,
- $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont les coordonnées d'un point de l'élément réel,
- $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du nœud de l'élément réel,
- $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions d'interpolations.

Précédemment, nous avons expliqué que le nombre de fonctions de forme correspond au nombre de nœuds. dans le cas de l'élément triangulaire, ce dernier présente 3 nœuds, ce qui veut dire que le nombre de fonctions de forme est de trois  $N_i(\xi, \eta)$ . D'après la figure IV.7, les fonctions de forme correspondents aux 3 positions suivantes :



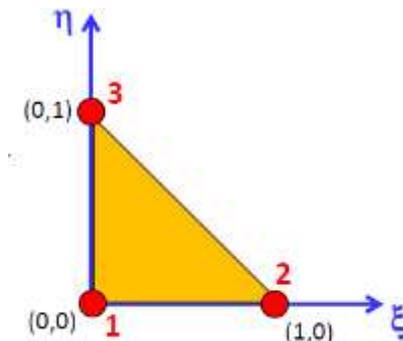
**Figure IV.7 :** positions des fonctions de forme de l'élément T3

La formule générale de la fonction d'interpolation ou de forme de l'élément triangulaire est :

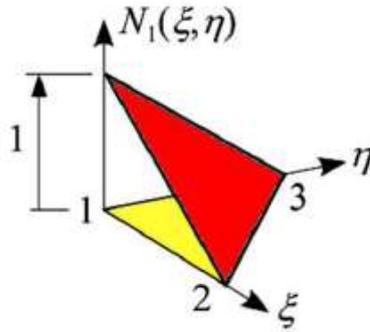
$$N_i(\xi, \eta) = a_i + b_i \xi + c_i \eta = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} \quad (IV.11)$$

- **Calcul de  $N_1$  :**

Le repère de référence peut être présenté comme suit :



**Figure IV.8 :** Elément T3 présenté dans un repère de référence.



**Figure IV.9** : Position de la première fonction de forme.

La forme matricielle de la première fonction de forme peut être écrite de la forme suivante :

$$N_1(\xi, \eta) = a_1 + b_1\xi + c_1\eta = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

A partir de la figure IV-8 et IV-9, nous pouvons déduire le système matriciel suivant :

$$\begin{Bmatrix} N_1(\xi_1, \eta_1) \\ N_1(\xi_2, \eta_2) \\ N_1(\xi_3, \eta_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Donc les inconnues  $a_1$ ,  $b_1$ , et  $c_1$  de  $N_1$  sont :

$$\Rightarrow N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (\text{IV.14})$$

De la même manière, on peut déterminer les deux autres fonctions de formes  $N_2$  et  $N_3$ .

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (\text{IV.15})$$

Au final, les fonctions de forme sont résumées dans la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

### II.3.2 Détermination de la matrice [B] :

D'après la loi de comportement,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

On sait bien que  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$ , on peut avoir donc la formulation suivante :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{u_n\} \quad (\text{IV.18})$$

De (IV.17) et (IV.18) on aura :

$$\{\varepsilon\} = \partial[\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{B}] = \partial[\mathbf{N}] \quad (\text{IV.19})$$

Nous avons deux systèmes de coordonnées pour l'élément: les coordonnées globales  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et les coordonnées naturelles  $(\xi, \eta)$ . La relation entre les deux est donnée par :

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \\ x &= x_{13} \xi + x_{23} \eta + x_3 \\ y &= y_{13} \xi + y_{23} \eta + y_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Avec :  $x_{ij} = x_i - x_j$  et  $y_{ij} = y_i - y_j$

Le déplacement  $\mathbf{u}$  ou  $\mathbf{v}$  sur l'élément peut être vu comme des fonctions de  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ou  $(\xi, \eta)$ , nous aurons donc :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Où  $\mathbf{J}$  est appelé la matrice jacobienne de la transformation.

A partir de (IV.20), on calcul,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

où  $\det \mathbf{J} = x_{13} y_{23} - x_{23} y_{13} = 2A$  (A est la surface de l'élément triangulaire).

Au final, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_3 \\ u_2 - u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

Similairement :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 - v_3 \\ v_2 - v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

En utilisant les résultats de (IV.23) et (IV.24), et la relation (IV.19), on obtient la matrice déformation-déplacement:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{32} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

Avec :  $x_{ij} = x_i - x_j$  et  $y_{ij} = y_i - y_j$ , A est la surface du triangle.

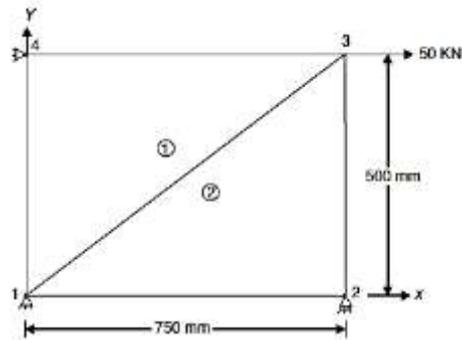
La matrice de rigidité pour l'élément triangulaire sera donnée par:

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot h \cdot A \quad (\text{IV.26})$$

### Exemple 1:

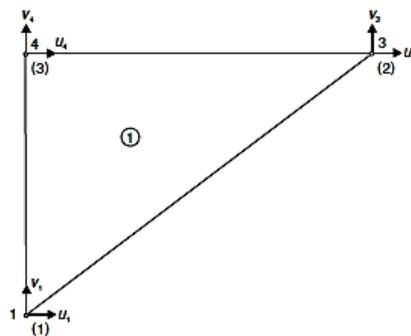
Trouvez les déplacements nodaux et les contraintes des éléments de la structure suivante, en supposant des contraintes planes.

$$\nu = 0,25; E = 2,10^5 \text{ MPa}; h = 15 \text{ mm}$$



**Solution :**

Elément 1 :



1(0, 0), 2(750, 500) and 3(0, 500)

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 750 & 500 \\ 1 & 0 & 500 \end{vmatrix} = 750 \times 500 - 0 = 750 \times 500$$

$$\therefore [B] = \frac{1}{750 \times 750} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & -750 & 0 & 0 & 0 & 750 \\ -750 & 0 & 0 & 500 & 750 & -500 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{750} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ -1.5 & 0 & 0 & 1 & 1.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2 \times 10^5}{1.25 \times 0.5} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} = 0.2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D][B] = \frac{1}{750} \times 0.2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0.2 \times 10^5}{750} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 3 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & -4.5 & 1 & 0 & -1 & 4.5 \\ -15 & 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}$$

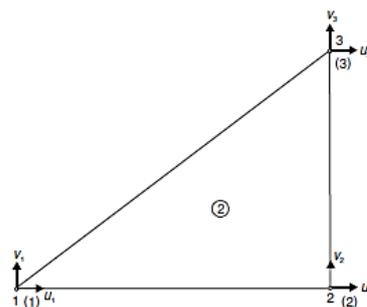
$$[k]_1 = t A [B]^T [D][B]$$

$$= \frac{15 \times 750 \times 500}{2} \times \frac{1}{750} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 0 & -15 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & -1 \end{bmatrix} \frac{0.2 \times 10^5}{750} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 3 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & -4.5 & 1 & 0 & -1 & 4.5 \\ -15 & 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 100000 \begin{bmatrix} 2.25 & 0 & 0 & -15 & -2.25 & 150 \\ 0 & 6.75 & -15 & 0 & 15 & 6.75 \\ 0 & -15 & 3.0 & 0 & -3.0 & 15 \\ -15 & 0 & 0 & 1 & 15 & -10 \\ -2.25 & 15 & -3 & 15 & 5.25 & -3.0 \\ 15 & 6.75 & 15 & -1 & -3.0 & 7.75 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & \text{Global} \\ \downarrow & & & & & & \\ \bar{u}_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & \end{matrix}$$

### Elément 2 :

Les nœuds Locaux et globaux sont montrés comme suit



Les coordonnées des nœuds sont :

1(0, 0), 2(750, 0), 3(750, 500)

$$b_1 = y_2 - y_3 = -500$$

$$b_2 = y_3 - y_1 = -500$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = -0$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = 0$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = -750$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = 750$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 750 & 0 \\ 1 & 750 & 500 \end{vmatrix} = 1(750 \times 500) = 750 \times 500$$

$$\begin{aligned} [B] &= \frac{1}{750 \times 500} \begin{bmatrix} -500 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -750 & 0 & 750 \\ 0 & -500 & -750 & 500 & 750 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{750} \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1.0 & -1.5 & 1.0 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[D] = 0.2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ La même chose que l'élément 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore [D][B] &= \frac{1}{750} \times 0.2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1.0 & -1.5 & 1.0 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.2 \times 10^5}{750} \begin{bmatrix} -3.0 & 0 & 3.0 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & -4.5 & 0 & 4.5 \\ 0 & -1.0 & -1.5 & 1.0 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[k]_2 = t A [B]^T [D][B]$$

$$[k]_2 = 15 \times \frac{750 \times 500}{2} \times \frac{1}{750} \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 \\ 1.0 & 0 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \frac{0.2 \times 10^5}{750} \begin{bmatrix} -3.0 & 0 & 3.0 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & -4.5 & 0 & 4.5 \\ 0 & -1.0 & -1.5 & 1.0 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 10000 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 3.0 & 0 & -3.0 & 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.0 & 1.5 & -1.0 & -1.5 & 0 \\ -3.0 & 1.5 & 5.25 & -3.0 & -2.25 & 1.5 \\ 1.5 & -1.0 & -3.0 & 7.75 & 1.5 & -6.75 \\ 0 & -1.5 & -2.25 & 1.1 & 2.25 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1.5 & -6.75 & 0 & 6.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

$[k] = 100000$

$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$	
2.25	0			0	-1.5	-2.25	1.50	$u_1$
3.0	0	-3.0	1.5	0	-1.5			
0	6.75			-1.5	0	1.5	6.75	$v_1$
0	1.0	1.5	-1.0	-1.5	0			
-3.0	1.5	5.25	-3.0	-2.25	1.5			$u_2$
1.5	-1.0	-3.0	7.75	1.5	-6.75			$v_2$
0	-1.5			3.0	0	-3.0	1.5	$u_3$
0	-1.5	-2.25	1.5	2.25	0			
-1.5	0			0	1.0	1.5	-1.0	$v_3$
-1.5	0	1.5	-6.75	0	6.75			
-2.25	1.5			-3.0	1.5	5.25	-3.0	$u_4$
1.5	6.75			1.5	-1.0	-3.0	7.75	$v_4$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 50000 \ 0 \ 0 \ 0]$$

L'équation est :

$$[k][\delta] = \{F\}.$$

$$100000 \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & -3.0 & 1.5 & 0 & -3.0 & -2.25 & 1.50 \\ 0 & 7.25 & 1.5 & -1.0 & -3.0 & 0 & 1.5 & 6.25 \\ -3.0 & 1.5 & 5.25 & -3.0 & -2.25 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1.0 & -3.0 & 7.25 & 1.5 & -6.75 & 0 & 0 \\ 0 & -3.0 & -2.25 & 1.5 & 5.25 & 0 & -3.0 & 1.5 \\ -3.0 & 0 & 1.5 & -6.75 & 0 & 7.75 & 1.5 & -1.0 \\ -2.25 & 1.5 & 0 & 0 & -3.0 & 1.5 & 5.25 & -3.0 \\ 1.5 & 6.75 & 0 & 0 & 1.5 & -1.0 & -3.0 & 7.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_4 = \delta_7 = \delta_8 = 0$$

La matrice réduite :

$$100000 \begin{bmatrix} 5.25 & -2.25 & 1.5 \\ -2.25 & 5.25 & 0 \\ 1.5 & 0 & 7.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 5.25 & -2.25 & 1.5 \\ -2.25 & 5.25 & 0 \\ 1.5 & 0 & 7.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 5.25 & -2.25 & 1.5 \\ 0 & 4.2857 & 0.6429 \\ 0 & 0.6429 & 7.3214 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 5.25 & -2.25 & 1.5 \\ 0 & 4.2857 & 0.6429 \\ 0 & 0 & 7.17139 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.075 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_6 = -0.010459 \text{ mm}$$

$$4.2857 \delta_5 + 0.6429 (-0.010459) = 0.5$$

$$\delta_5 = 0.118236 \text{ mm}$$

$$5.25 \delta_3 - 2.25 (0.118236) + 1.5 (-0.010459) = 0$$

$$\delta_3 = 0.053661 \text{ mm}$$

$$\{\delta\}^T = [0 \ 0 \ 0.053661 \ 0 \ 0.118236 \ -0.010459 \ 0 \ 0]$$

$$\{\sigma_1\} = [D][B]\{\delta\}$$

$$= \frac{0.2 \times 10^5}{750} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 3 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & -4.5 & 1 & 0 & -1 & 4.5 \\ -15 & 0 & 0 & 1 & -15 & -1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.053661 \\ 0 \\ 0.118236 \\ -0.010459 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.584 \\ -2.977 \\ 5.000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma_2\} = \frac{0.2 \times 10^5}{750} \begin{bmatrix} -3.0 & 0 & 3.0 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ -1.0 & 0 & 1.0 & -4.5 & 0 & 4.5 \\ 0 & -1.0 & -1.5 & 1.0 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.118236 \\ -0.010459 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.877 \\ 4.408 \\ 5.008 \end{Bmatrix}$$

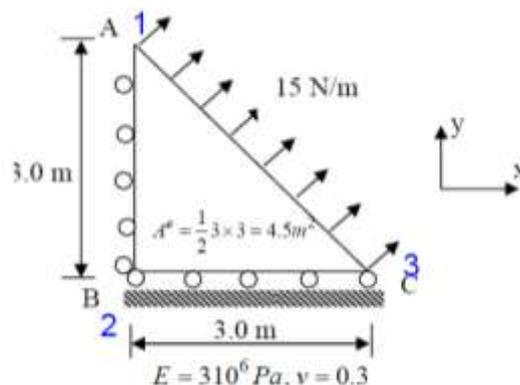
### Exemple 2 :

Considérons une plaque triangulaire comme indiqué dans la figure ci-dessus. Considérons un seul élément triangulaire de maillage.

Les conditions aux limites sont comme suit :

- La ligne BC est contrainte suivant y est libre suivant x.
- La ligne AB est contrainte suivant x est libre suivant y
- La ligne AC est soumise à une charge comme le montre la figure.

1. Déterminer la matrice de rigidité
2. Calculer le vecteur force nodal
3. Déterminer les déplacements inconnus.
4. Calculer la contrainte au point (1,5 ; 1,5)



**Solution :**

- Le vecteur de déplacement :

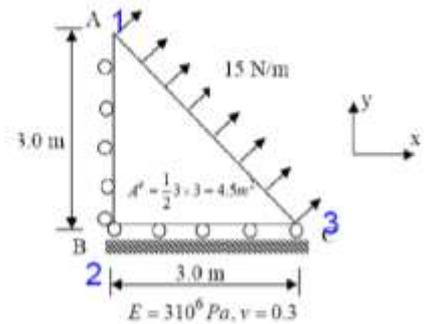
$$d^e = [u_{Ax}^e \quad u_{Ay}^e \quad u_{Bx}^e \quad u_{By}^e \quad u_{Cx}^e \quad u_{Cy}^e]^T$$

- Les fonctions de forme sont :

$$N_1^e = \frac{1}{2A^e} (x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y) = \frac{1}{9} (0 - 0 + 0 + 3y) = \frac{y}{3}$$

$$N_2^e = \frac{1}{2A^e} (x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y) = \frac{1}{9} (9 - 0 - 3x - 3y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}$$

$$N_3^e = \frac{1}{2A^e} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y) = \frac{1}{9} (0 - 0 + 3x + 0) = \frac{x}{3}$$

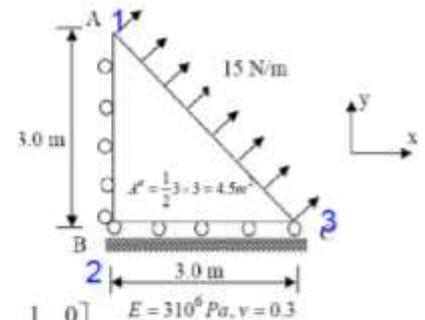


- Les dérivées des fonctions de forme sont :

$$\frac{\partial N_1^e}{\partial y} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial N_2^e}{\partial x} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial N_2^e}{\partial y} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial N_3^e}{\partial x} = \frac{1}{3}$$

- La matrice [B] est calculée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x}^e & 0 & N_{2,x}^e & 0 & N_{3,x}^e & 0 \\ 0 & N_{1,y}^e & 0 & N_{2,y}^e & 0 & N_{3,y}^e \\ N_{1,y}^e & N_{1,x}^e & N_{2,y}^e & N_{2,x}^e & N_{3,y}^e & N_{3,x}^e \end{bmatrix} d^e = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B d^e$$



- Les propriétés de la matrice élastique :

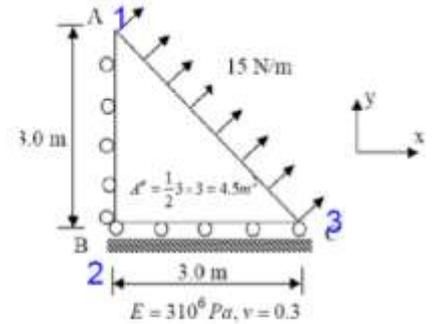
$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 32.967 & 9.89 & 0 \\ 9.89 & 32.967 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5385 \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}; \quad N_{i,y} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

- La matrice [K] de chaque élément est donnée comme suit:

$$K^e = A^e B^e D^e B^e$$



- Par substitution nous aurons :

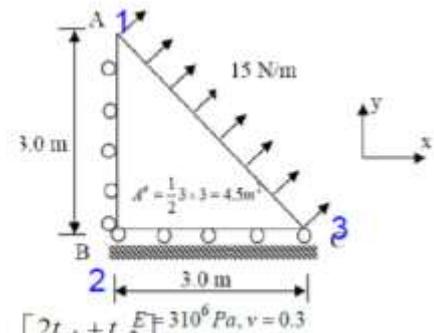
$$K^e = 4.5 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 32.967 & 9.89 & 0 \\ 9.89 & 32.967 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5385 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finalement

$$K^e = 10^6 \begin{bmatrix} 5.769 & 0 & -5.769 & -5.769 & 0 & 5.769 \\ 0 & 16.48 & -4.945 & -16.48 & 4.945 & 0 \\ -5.769 & -4.945 & 22.25 & 10.71 & -16.48 & -5.769 \\ -5.769 & -16.48 & 10.71 & 22.25 & -4.945 & -5.769 \\ 0 & 4.945 & -16.48 & -4.945 & 16.48 & 0 \\ 5.769 & 0 & -5.769 & -5.769 & 0 & 5.769 \end{bmatrix}$$

- Le chargement est donné comme suit :

$$f_{\Gamma}^e = \int_{\Gamma_i} N^e t d\Gamma$$



- Par substitution nous aurons :

$$f_{\Gamma}^e = \frac{1}{-1} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{x1} \frac{1}{2}(1-\xi) + t_{x3} \frac{1}{2}(1+\xi) \\ t_{y1} \frac{1}{2}(1-\xi) + t_{y3} \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2t_{x1} + t_{x3} \\ 2t_{y1} + t_{y3} \\ 0 \\ 0 \\ t_{x1} + 2t_{x3} \\ t_{y1} + 2t_{y3} \end{bmatrix}$$

$$L = 3\sqrt{2}m$$

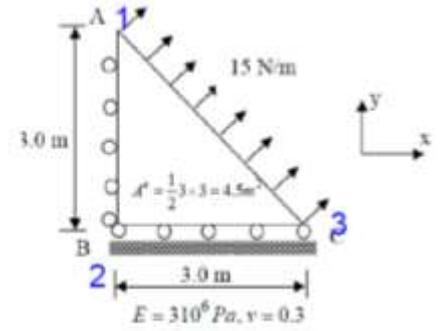
$$t_{x1} = t_{x3} = 15 \cos 45^\circ = 15 \frac{\sqrt{2}}{2} N/m$$

$$t_{y1} = t_{y3} = 15 \sin 45^\circ = 15 \frac{\sqrt{2}}{2} N/m$$

Où

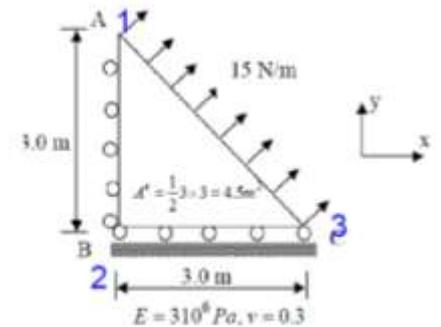
- Par substitution :

$$f_I^e = \frac{3\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 2t_{x1} + t_{x3} \\ 2t_{y1} + t_{y3} \\ 0 \\ 0 \\ t_{x1} + 2t_{x3} \\ t_{y1} + t_{y3} \end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{6} 3 \begin{bmatrix} 15\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 15\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 15\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 15\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \\ 22.5 \\ 22.5 \end{bmatrix}$$



- Les forces ponctuelles sont nulles :  $f_{\Omega}^e = 0$ .

$$r^e = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{2x} & r_{2y} & r_{3x} & r_{3y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r_{1x} & 0 & r_{2x} & r_{2y} & 0 & r_{3y} \end{bmatrix}^T$$

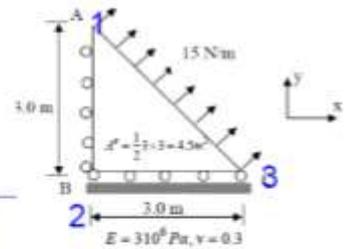


- Le vecteur de déplacements et des forces nodales sont résumés comme suit :

$$f^e = \begin{bmatrix} 22.5 + r_{1x} \\ 22.5 \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 22.5 \\ 22.5 + r_{3y} \end{bmatrix}, \quad d^e = \begin{bmatrix} u_{1x} = 0 \\ u_{1y} \\ u_{2x} = 0 \\ u_{2y} = 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} = 0 \end{bmatrix}$$

- Nous sommes prêts à résoudre les déplacements une fois que nous avons partitionné les équations de charges.

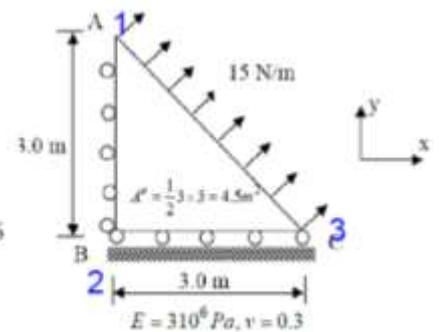
$$10^6 \begin{bmatrix} -5.769 & 0 & -5.769 & -5.769 & 0 & 5.769 \\ 0 & 16.48 & -4.945 & -16.48 & 4.945 & 0 \\ -5.769 & -4.945 & 22.25 & 10.71 & -16.48 & -5.769 \\ -5.769 & -16.48 & 10.71 & 22.25 & -4.945 & -5.769 \\ 0 & 4.945 & -16.48 & -4.945 & 16.48 & 0 \\ -5.769 & 0 & 5.769 & 5.769 & 0 & -5.769 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x}=0 \\ u_{1y} \\ u_{2x}=0 \\ u_{2y}=0 \\ u_{3x} \\ u_{3y}=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.5+r_{1x} \\ 22.5 \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 22.5 \\ 22.5+r_{3y} \end{bmatrix}$$



$$10^6 \begin{bmatrix} 16.48 & 4.945 \\ 4.945 & 16.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1y} \\ u_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.5 \\ 22.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{1y} \\ u_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.05 \end{bmatrix} 10^{-6} m$$

- La déformation constante dans ce triangle est donnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} 1.05 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 1.05 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-6}$$



- En utilisant le module élastique, nous pouvons calculer la contrainte de l'élément :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \sigma_{xy}^e \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^e \\ \epsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 32.967 & 9.89 & 0 \\ 9.89 & 32.967 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5385 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-6} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} Pa$$

## Table des matières

Chapitre V : PROBLÈMES PLANS- Elément Quadilatère.....	74
I. Introduction : .....	74
II. Détermination de la matrice de rigidité.....	74
II.1 Détermination des fonctions de forme .....	74
II.2 Détermination de la matrice [B] et [K] .....	78
Exemple 1: .....	80

# CHAPITRE V : PROBLÈMES PLANS - ELEMENT QUADRILATERE

## I. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons développer la matrice de rigidité de l'élément plan rectangulaire à quatre nœuds. Nous nous référerons dans le chapitre suivant à cet élément dans la formulation isoparamétrique d'un élément quadrilatéral général. Cet élément est également appelé rectangle bilinéaire en raison des termes linéaires en  $x$  et  $y$ . Le symbole «Q4» représente l'élément comme un quadrilatère à quatre nœuds d'angle.

L'élément rectangulaire à deux avantages par rapport à l'élément triangulaire qui sont la facilité de saisie des données et l'interprétation plus simple des contraintes. L'inconvénient de l'élément rectangulaire est que le rectangle à déplacement linéaire simple avec ses côtés droits se rapproche mal aux bords des conditions aux limites réelles.

Les étapes habituelles décrites au chapitre 2,3 et 4 seront suivies pour obtenir la matrice de rigidité de l'élément.

## II. DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

### II.1 DETERMINATION DES FONCTIONS DE FORME

La figure V.1 montre un domaine 2D avec la forme d'une aile d'avion. Comme vous pouvez l'imaginer, la division d'un tel domaine en éléments rectangulaires de bords parallèles est impossible. Le travail peut être facilement réalisé en utilisant des éléments quadrilatéraux avec quatre bords droits, comme le montre la figure V.1. Considérons maintenant un élément quadrilatère avec quatre nœuds numérotés 1, 2, 3 et 4 dans le sens antihoraire, comme le montre la figure V.2. Les coordonnées des quatre nœuds sont indiquées sur la figure V.2 (a) dans le système de coordonnées physiques (réel). Le système de coordonnées physiques peut être le même que le système de coordonnées global pour la structure entière. Comme il y a deux déplacements pour un seul nœud, un élément quadrilatère linéaire a un total de huit déplacements. Un système de coordonnées naturelles locales  $(\xi, \eta)$  avec son origine au centre de l'élément carré à partir du système de coordonnées global est utilisé pour construire les fonctions de forme, et le déplacement est interpolé à l'aide de l'équation :

L'interpolation est exprimée mathématiquement comme :

$$\mathbf{X}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta)\mathbf{x}_e \quad (\text{V.1})$$

Où  $\mathbf{x}_e$  est le vecteur des coordonnées physiques,

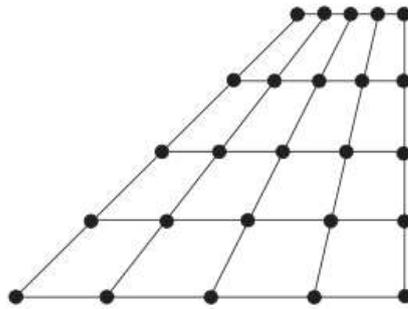
$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$N$  est la matrice des fonctions de forme,  $\mathbf{x}_e$  est donné par :

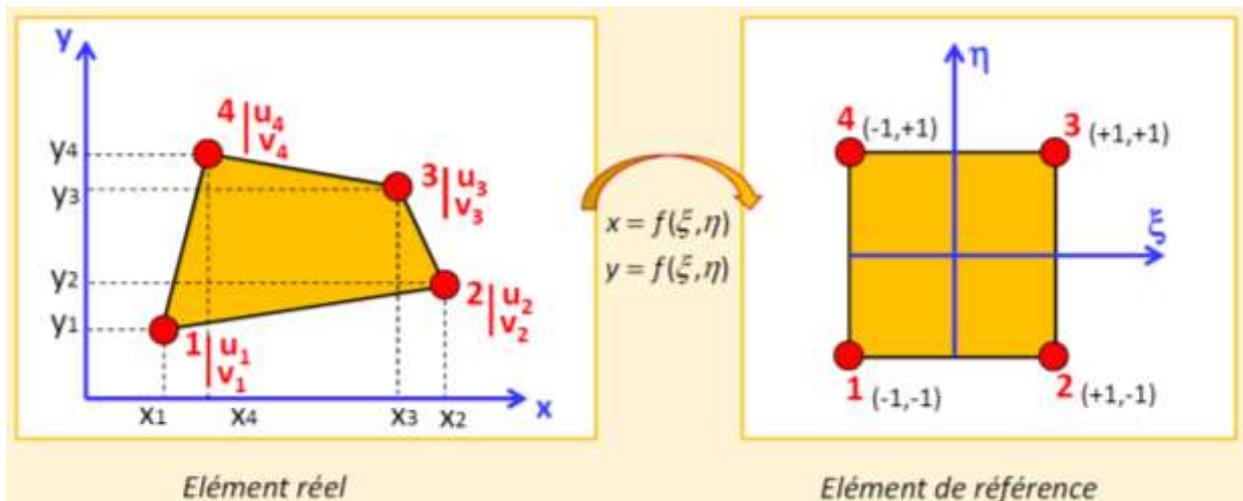
$$\mathbf{x}_e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

L'équation (V.1) peut être réécrite comme suit :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (\text{V.2})$$



**Figure V.1** : Domaine 2D maillé par des éléments quadrilatéraux.



**Figure V.2** : Transformation géométrique de l'élément de réel à l'élément référence.

$N_i$  est la fonction de forme pour l'élément rectangulaire, notez qu'en raison de la propriété unique de la fonction de forme, l'interpolation à ces nœuds sera exacte. Par exemple,

en remplaçant  $\xi = 1$  et  $\eta = -1$  dans Eq. (V.2) donne  $x = x_2$  et  $y = y_2$ , comme le montre la figure V.2. Physiquement, cela signifie que le point 2 du système de coordonnées de référence est lié au point 2 du système de coordonnées physiques (réel), et vice versa, ce qui peut être facilement observé également pour les points 1, 3 et 4. Analysons maintenant ce processus de plus près. En remplaçant  $\xi = 1$  dans Eq. (V.2) donne :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(1 - \eta)x_2 + \frac{1}{2}(1 + \eta)x_3 \\ y &= \frac{1}{2}(1 - \eta)y_2 + \frac{1}{2}(1 + \eta)y_3 \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Où :

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}\eta(x_3 - x_2) \quad (\text{V.4})$$

$$y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}\eta(y_3 - y_2)$$

$$y = \frac{(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)} \left\{ x - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \right\} + \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \quad (\text{V.5})$$

L'élimination de  $\eta$  des deux équations ci-dessus donne :

$$y = \frac{(x_3 - x_2)}{(y_3 - y_2)} \left\{ x - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \right\} + \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \quad (\text{V.6})$$

L'équation (V.6) représente une ligne droite reliant les points  $(x_2, y_2)$  et  $(x_3, y_3)$ . Cela signifie que l'arête 2-3 du système de coordonnées physiques est lié sur l'arête 2-3 du système de coordonnées de référence. La même chose peut être observée pour les trois autres bords. Par conséquent, nous pouvons voir que les quatre bords droits du quadrilatère dans le système de coordonnées physiques correspondent aux quatre bords droits du carré dans le système de coordonnées de référence.

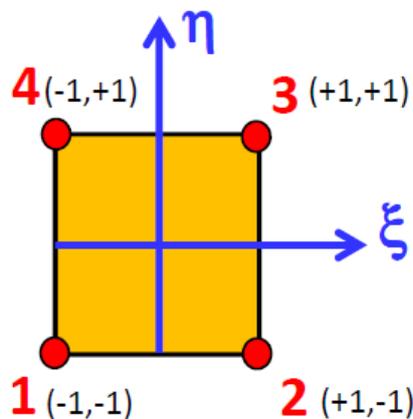


Figure V.3 : repère de référence

Puisque nous avons quatre nœuds, chaque nœud a deux déplacements. Donc au total nous avons huit déplacements. Ce qui veut dire que chaque fonction de forme est un polynôme de quatre inconnues. Le premier polynôme de la première forme peut être écrit comme suit :

$$N_1(\xi, \eta) = a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.7})$$

Les conditions aux limites de la première fonction de forme sont présentées par le système d'équation suivant représentées sur la figure V.4. Pour respecter les conditions des fonctions de formes, il faut que  $\sum N_i = \mathbf{I}$ , est si un nœud a un déplacement de 1, il faut que le reste des nœuds auront un déplacement nul.

$$\begin{Bmatrix} N_1(\xi_1, \eta_1) \\ N_1(\xi_2, \eta_2) \\ N_1(\xi_3, \eta_3) \\ N_1(\xi_4, \eta_4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Figure V.4** : déplacement de 1 du premier nœud

$$\Rightarrow N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta + \xi\eta \quad (\text{V.8})$$

De la même manière, on peut trouver les autres fonctions de formes.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (\text{V.9})$$

## II.2 DETERMINATION DE LA MATRICE [B] ET [K]

Une fois les fonctions de forme sont obtenues, nous pouvons maintenant évaluer la matrice de déformation  $\mathbf{B}$ . Pour ce faire, il est nécessaire d'exprimer les différentiels en termes de coordonnées de références, car la relation entre les coordonnées  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  et les coordonnées de références ne sont plus aussi simples que dans le cas des éléments rectangulaires.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (\text{V.10})$$

Les équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix}\quad (\text{V.11})$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice Jacobéenne définie par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}\quad (\text{V.12})$$

On substitue maintenant l'interpolation des coordonnées définies par l'équation (V.2) dans l'équation ci-dessus, et obtenir :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \xi & \partial N_2 / \partial \xi & \partial N_3 / \partial \xi & \partial N_4 / \partial \xi \\ \partial N_1 / \partial \eta & \partial N_2 / \partial \eta & \partial N_3 / \partial \eta & \partial N_4 / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}\quad (\text{V.13})$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix}\quad (\text{V.14})$$

Ce qui donne la relation entre les différentielles des fonctions de forme par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  avec celles par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ . Nous pouvons maintenant utiliser l'équation  $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ , pour calculer la matrice de déformation  $\mathbf{B}$ , en remplaçant tous les différentiels des fonctions de forme par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  par ceux par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ , en utilisant du Jacobéen inverse. Ce processus doit être effectué numériquement par un ordinateur.

Le vecteur de déplacement peut être écrit par le système d'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{u_n\}\quad (\text{V.15})$$

Où, on peut déterminer les coordonnées  $x,y$  comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

La relation déformation-déplacement peut être résumée par le système suivant :

$$\{\varepsilon\} = \partial[N] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{Où : } [B] = \partial[N] \quad (\text{V.17})$$

Une fois la matrice de déformation  $B$  est obtenue, nous pouvons procéder à l'évaluation des matrices d'éléments. Pour évaluer l'intégration on utilise la relation suivante:

$$dA = \det |J| d\xi d\eta \quad (\text{V.18})$$

où le  $\det |J|$  est la valeur déterminée de la matrice jacobéenne. Par conséquent, la matrice de rigidité de l'élément peut s'écrire

$$\mathbf{k}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} \det |J| d\xi d\eta \quad (\text{V.19})$$

Les intégrales ci-dessus peuvent ensuite être évaluées en utilisant le schéma d'intégration de Gauss ou autre.

La fonction de forme est une fonction bilinéaire de  $\xi$  et  $\eta$ . Les éléments de la matrice de déformation  $B$  sont obtenus en différenciant ces fonctions bilinéaires par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ , et en les divisant par la matrice jacobéenne dont les éléments sont également des fonctions bilinéaires.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_e &= \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \int_A \int_0^h dx \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA = \int_A h \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

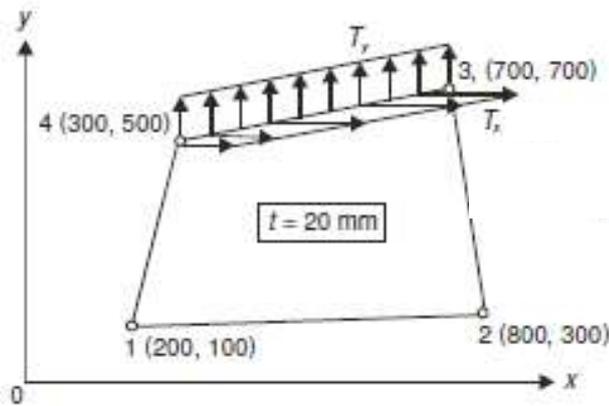
Dans ces conditions, la matrice de rigidité sera écrite sous la forme:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot t \cdot |J| d\xi d\eta \quad (V.21)$$

### Exemple 1:

L'élément quadrilatère montré dans la figure suivante, a 20 mm d'épaisseur et il est sous une charge surfacique  $T_x$  et  $T_y$ .

- Déterminer les charges nodales équivalentes, si  $T_x = 10 \text{ N/mm}^2$  et  $T_y = 15 \text{ N/mm}^2$ ,
- Déterminer les valeurs numériques des charges nodales.



### Solution :

L'élément est soumis à une charge répartie le bord (3,4), nous savons que sur le bord (3,4)  $\eta = 1$ .

$$\therefore N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) = 0$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) = 0$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

Les forces nodales sont obtenues par

$$\{F_x\} = \int [N]^T \{T_x\} ds$$

Nous savons

$$= t \int [N]^T \{T_x\} dl$$

We know,

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{and} \quad \frac{\Delta l}{\Delta \xi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi}\right)^2}$$

Dans un concept iso-paramétrique nous

$$x = \sum N_i x_i \text{ and } y = \sum N_i y_i$$

Dans ce cas le long de la

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_3 + \frac{1}{2}(1 - \xi)x_4$$

Dans le cas limite:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\Delta x}{\Delta \xi} = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)$$

Similaire

$$y = 0 + 0 + \frac{1}{2}(1 + \xi)y_3 + \frac{1}{2}(1 - \xi)y_4$$

Dans le cas

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{2}(y_3 - y_4)$$

$$\therefore \frac{dl}{d\xi} = \frac{\Delta l}{\Delta \xi} = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}(x_3 - x_4)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(y_3 - y_4)\right\}^2} = \frac{1}{2}l_{34}$$

$$\therefore \{F_x\} = t \int [N]^T \{T_x\} dl$$

$$= t \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi) \end{bmatrix} \{T_x\} \frac{1}{2}l_{34} d\xi = t \frac{l_{34}}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 + \xi)T_x \\ (1 - \xi)T_x \end{bmatrix} d\xi$$

Pour une charge uniformément distribuée constante

$$\therefore \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \\ F_{x4} \end{Bmatrix} = \frac{t l_{34}}{4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2T_x \\ 2T_y \end{Bmatrix} \text{ since } \int_{-1}^1 (1 + \xi) d\xi = \int_{-1}^1 (1 - \xi) d\xi = 2$$

Similairement  $= \frac{t l_{34}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ F_{y2} \\ F_{y3} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \int [N]^T \{T_y\} ds = \frac{t l_{34}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$$

Au final

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ F_{y2} \\ F_{y3} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 67082.04 \\ 67082.04 \end{Bmatrix}$$

L'unité des forces est le Newton

## Table des matières

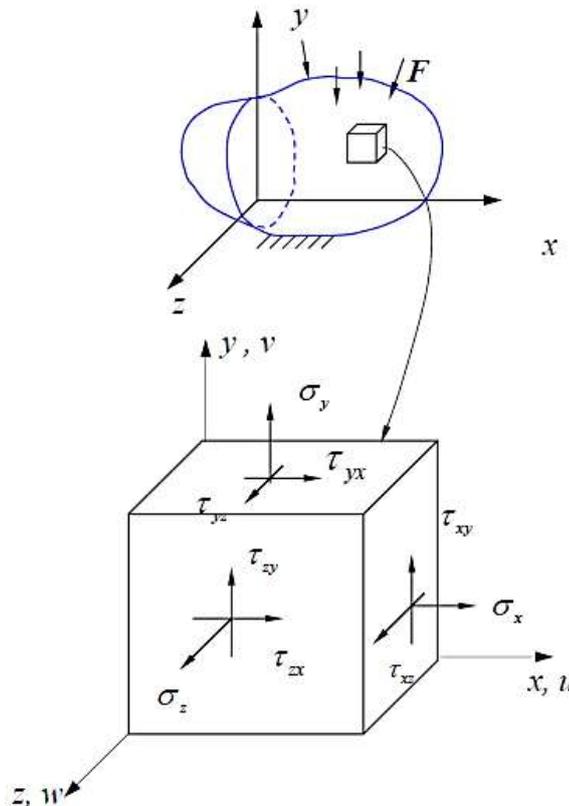
Chapitre 6.....	84
SOLIDES 3D ET SOLIDES DE RÉVOLUTION.....	84
I. Introduction .....	84
Figure VI.1: Exemple d'un solide 3D sous chargement avec la présentation d'un l'élément hexaédrique.....	84
II. Élément hexaédrique .....	85
Figure VI.2 : Solide block divisé en éléments hexaédrique à 8 nœuds. ....	85
Figure VI.3 : Un élément hexaèdre à huit nœuds et les systèmes de coordonnées. ....	85
Figure VI.4 : Un élément hexaèdre à huit nœuds et les systèmes de coordonnées. ....	86
II.1 Relations déformations – déplacements.....	86
II.2 Fonctions d'interpolation (forme) .....	87
III. Élément tetraedrique .....	91
Figure VI.5 : Élément tétraédrique .....	91
III.1 Élément de la matrice de rigidité .....	94

# CHAPITRE 6

## SOLIDES 3D ET SOLIDES DE RÉVOLUTION

### I. INTRODUCTION

Un élément solide tridimensionnel (3D) peut être considéré comme le plus général de tous les éléments finis solides car toutes les variables de champ dépendent de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Un exemple de structure solide 3D sous chargement est illustré à la figure VI.1. Comme on peut le voir, les vecteurs de force peuvent ici être dans n'importe quelle direction arbitraire dans l'espace. Un solide 3D peut également avoir n'importe quelle forme arbitraire, propriétés de matériau et conditions aux limites dans l'espace. Il existe au total six composantes de contrainte possibles, trois normales et trois de cisaillement (trois normales -  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  et trois de cisaillement -  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ). En même temps, le champ de déplacements est défini par ses trois possibles composantes :  $u$ ,  $v$  et  $w$ . dans le solide 3D, chaque nœud de l'élément aura trois degrés de liberté.

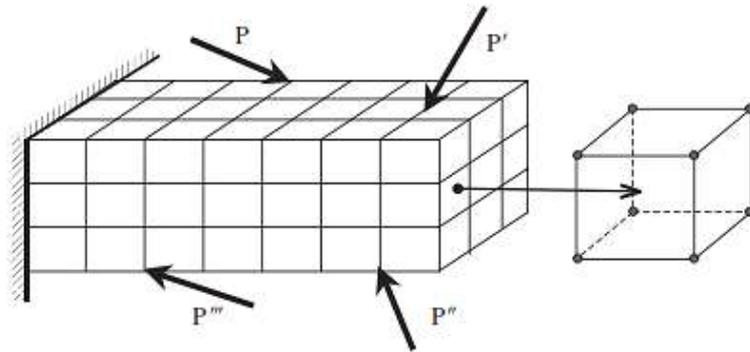


**Figure VI.1:** Exemple d'un solide 3D sous chargement avec la présentation d'un l'élément hexaédrique.

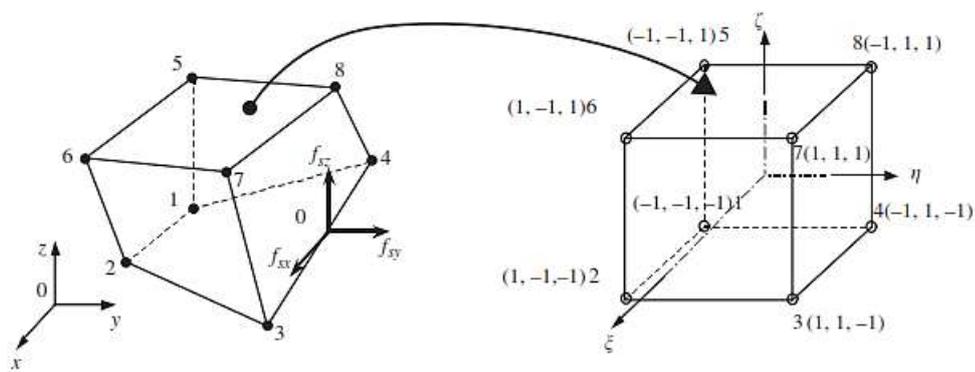
Les éléments finis typiques pour modéliser les solides 3D sont l'élément tétraédrique et l'élément hexaédrique, avec trois degrés de liberté de translation pour chaque nœud.

## II. ELEMENT HEXAEDRIQUE

Considérons maintenant un solide 3D, qui est divisé de manière appropriée en un certain nombre d'éléments hexaédres à huit nœuds et six surfaces, comme le montre la figure VI.2. Chaque élément hexaèdre a des nœuds numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, comme le montre la figure VI.3. Comme il y a trois degrés de liberté (ddl) pour chaque nœud, il y a un total de 24 ddl dans un élément hexaèdre. Il est à nouveau utile de définir un système de coordonnées de référence  $(\zeta, \eta, \zeta)$  avec son origine au centre du cube transformé, car cela facilite la construction des fonctions de forme et d'évaluer l'intégration matricielle. Comme l'élément quadrilatère (chapitre précédent), les fonctions de forme sont également utilisées pour interpoler les coordonnées à partir des coordonnées nodales.



**Figure VI.2 :** Solide block divisé en éléments hexaédrique à 8 nœuds.

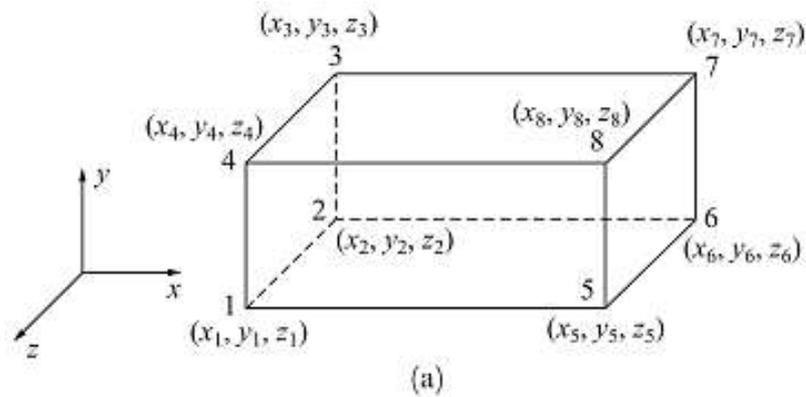


**Figure VI.3 :** Un élément hexaèdre à huit nœuds et les systèmes de coordonnées.

Les coordonnées nodales du repère global en fonction des coordonnées de références peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\
y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\
z &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i
\end{aligned}
\tag{VI.1}$$

Pour bien noter la représentation des coordonnées globales d'un élément hexaédrique, figure VI.4 présente un élément 3 D prismatique de forme parallélépipédique.



**Figure VI.4 :** Un élément hexaèdre à huit nœuds et les systèmes de coordonnées.

## II.1 RELATIONS DEFORMATIONS – DEPLACEMENTS

Soient  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  et  $w = w(x, y, z)$  les composantes des déplacements d'un point arbitraire suivant les directions  $x, y, z$  d'un élément 3D. Si les déformations et les rotations sont petites, les déformations et les gradients des déplacements, dans le système de coordonnées cartésiennes sont liés par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} ; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{VI.2}$$

Les contraintes d'un élément 3D quelconques sont données comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \boldsymbol{\sigma} \} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \text{or} \quad [\sigma_{ij}] \quad (\text{VI.3})$$

Ainsi, le vecteur de déformation correspond :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \boldsymbol{\varepsilon} \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \text{or} \quad [\varepsilon_{ij}] \quad (\text{VI.4})$$

Donc, la relation contrainte-déformation  $[\boldsymbol{\sigma}] = [D][\boldsymbol{\varepsilon}]$  d'un élément 3D peut être présenté par le système d'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.5})$$

## II.2 FONCTIONS D'INTERPOLATION (FORME)

Les fonctions de déplacement  $u$ ,  $v$  et  $w$  en termes de degrés de liberté généralisés sont de la même forme que celle utilisée pour décrire la géométrie de l'élément donnée.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N N_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^N N_i v_i \\ w &= \sum_{i=1}^N N_i w_i \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

Avec des expressions similaires utilisées pour les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Il y a maintenant un total de 24 ddl dans l'élément hexaédrique linéaire. Par conséquent, nous utilisons les mêmes fonctions de forme que celles utilisées pour décrire la géométrie, tel que :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \left( \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{VI.7})$$

Les fonctions de forme sont données dans le système de coordonnées locales comme suit :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

On peut écrire ces fonctions sous une forme concise,

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (\text{VI.9})$$

où  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  désigne les coordonnées de référence du nœud  $(i)$ . On peut constater que les fonctions de forme varient linéairement dans les directions  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ . Par conséquent, ces fonctions de forme sont parfois appelées fonctions tri-linéaires. La fonction de forme  $N_i$  est une analogie tridimensionnelle. Il est très facile d'observer directement que les éléments tri-linéaires possèdent la propriété de fonction delta. En outre, étant donné que toutes ces fonctions de forme peuvent être formées à l'aide de l'ensemble commun de huit fonctions de base de :

$$1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi\eta\zeta \quad (\text{VI.10})$$

Ces fonctions contiennent à la fois des fonctions de base constantes et linéaires.

Dans un élément hexaèdre, le vecteur de déplacement  $U$  est fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et comme précédemment, il est interpolé à l'aide des fonctions de forme :

$$U = N d_e \quad (\text{VI.11})$$

Où le vecteur de déplacement nodal,  $d_e$  est donné par :

$$\mathbf{d}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{e1} \\ \mathbf{d}_{e2} \\ \mathbf{d}_{e3} \\ \mathbf{d}_{e4} \\ \mathbf{d}_{e5} \\ \mathbf{d}_{e6} \\ \mathbf{d}_{e7} \\ \mathbf{d}_{e8} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{déplacement du nœud 1} \\ \text{déplacement du nœud 2} \\ \text{déplacement du nœud 3} \\ \text{déplacement du nœud 4} \\ \text{déplacement du nœud 5} \\ \text{déplacement du nœud 6} \\ \text{déplacement du nœud 7} \\ \text{déplacement du nœud 8} \end{array} \quad (\text{VI.12})$$

Ainsi, la matrice des fonctions de forme est donnée par :

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3 \ \mathbf{N}_4 \ \mathbf{N}_5 \ \mathbf{N}_6 \ \mathbf{N}_7 \ \mathbf{N}_8] \quad (\text{VI.13})$$

On peut voir d'en que la fonction de forme est une fonction linéaire de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Il a été mentionné qu'il y a un total six contraintes dans un élément 3D. La relation entre la déformation  $\varepsilon$  est les déplacements nodaux est donnée par la relation suivante:

$$\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{d}_e = \mathbf{B}\mathbf{d}_e \quad (\text{VI.14})$$

Dans ce cas, la matrice de déformation  $\mathbf{B}$  peut être exprimée comme:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4 \ \mathbf{B}_5 \ \mathbf{B}_6 \ \mathbf{B}_7 \ \mathbf{B}_8] \quad (\text{VI.15})$$

par laquelle :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{L}\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.16})$$

Comme les fonctions de forme sont définies en termes de coordonnées naturelles,  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ , pour obtenir les dérivées par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la matrice de déformation, la règle de différenciation partielle doit être utilisée:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (\text{VI.17})$$

Le système précédent peut être exprimé sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.18})$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice jacobienne définie par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix} \quad (\text{VI.19})$$

Rappelons que les coordonnées,  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont interpolées par les fonctions de forme à partir des coordonnées nodales, ce qui donne :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.20})$$

Or,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 x_i \partial N_i / \partial \xi & \sum_{i=1}^8 y_i \partial N_i / \partial \xi & \sum_{i=1}^8 z_i \partial N_i / \partial \xi \\ \sum_{i=1}^8 x_i \partial N_i / \partial \eta & \sum_{i=1}^8 y_i \partial N_i / \partial \eta & \sum_{i=1}^8 z_i \partial N_i / \partial \eta \\ \sum_{i=1}^8 x_i \partial N_i / \partial \zeta & \sum_{i=1}^8 y_i \partial N_i / \partial \zeta & \sum_{i=1}^8 z_i \partial N_i / \partial \zeta \end{bmatrix} \quad (\text{VI.21})$$

Les dérivées des fonctions de forme peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.22})$$

Ce vecteur est ensuite utilisé pour calculer la matrice de déformation,  $\mathbf{B}$ , en remplaçant toutes les dérivées des fonctions de forme par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  par celles par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ .

Une fois que la matrice de déformation,  $\mathbf{B}$ , est calculée, la matrice de rigidité,  $\mathbf{K}_e$ , pour les éléments solides 3D peut être obtenue en remplaçant  $\mathbf{B}$ . On sait que l'énergie a la formule suivante :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int (D\varepsilon)^T \varepsilon dV \\ &= \frac{1}{2} \int (\varepsilon)^T D \varepsilon dV \\ &= \frac{1}{2} d^T [\mathbf{B}^T D \mathbf{B} dV] d \end{aligned} \quad (\text{VI.23})$$

Avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}$$

$$(6 \times 1) \quad (6 \times 24) \times (24 \times 1)$$

$\mathbf{d}$  : est le vecteur de déplacement

Donc la matrice  $\mathbf{k}$  est donnée par l'équation suivante

$$90 \quad (\text{VI.24})$$

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

$$(24 \times 24) \quad (24 \times 6) \times (6 \times 6) \times (6 \times 24)$$

Le volume  $dV$  en fonction des paramètres du repère de référence  $(\xi, \eta, \zeta)$  est donné par la forme suivante :

$$dV = (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{VI.25})$$

Au final la matrice  $\mathbf{k}$  devient :

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{B} (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{VI.26})$$

### III. ELEMENT TETRAEDRIQUE

Considérons la même structure solide 3D que la figure VI.2, dont le domaine est divisé de manière appropriée en un certain nombre d'éléments hexaèdres. La figure VI.5 montre un élément tétraèdre à quatre nœuds, chacun ayant trois ddl.

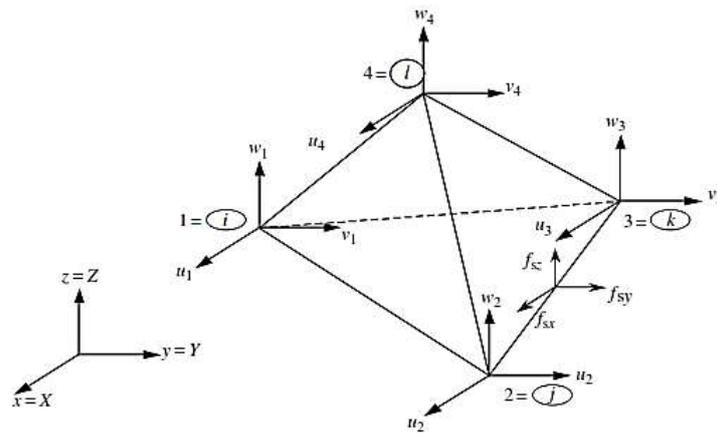


Figure VI.5 : Élément tétraédrique

Le système de coordonnées cartésiennes local pour un élément tétraèdre peut généralement être le même que le système de coordonnées global, car il n'y a aucun avantage à avoir un système de coordonnées cartésiennes local distinct. Dans un élément, le vecteur de déplacement  $\mathbf{U}$  est fonction des coordonnées  $x, y$  et  $z$ , et est interpolé par des fonctions de forme sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}^h(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{d}_e \quad (\text{VI.26})$$

Où le vecteur de déplacement nodal,  $\mathbf{d}_e$ , est donné comme suit :



$$L_1 = \frac{d_{P-234}}{d_{1-234}}, \quad L_2 = \frac{d_{P-134}}{d_{1-234}}, \quad L_3 = \frac{d_{P-124}}{d_{1-234}}, \quad L_4 = \frac{d_{P-123}}{d_{1-234}} \quad (\text{VI.30})$$

On peut facilement confirmer que :

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (\text{VI.31})$$

$$V_{P234} + V_{P134} + V_{P124} + V_{P123} = V_{1234}$$

On peut également facilement confirmer que

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{at the home node } i \\ 0 & \text{at the remote nodes } jkl \end{cases} \quad (\text{VI.32})$$

En utilisant l'équation précédente, la relation entre les coordonnées de volume et les coordonnées cartésiennes peut être facilement dérivée :

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \end{aligned} \quad (\text{VI.33})$$

Les équations précédentes peuvent alors être exprimées comme une seule équation matricielle comme suit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.34})$$

L'inversion de la matrice donnera :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{VI.35})$$

Où :

$$\begin{aligned} a_i &= \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix}, & b_i &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix} \\ c_i &= -\det \begin{bmatrix} y_j & 1 & z_j \\ y_k & 1 & z_k \\ y_l & 1 & z_l \end{bmatrix}, & d_i &= -\det \begin{bmatrix} y_j & z_j & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_l & z_l & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Dans laquelle l'indice  $i$  varie de  $1$  à  $4$ , et  $j, k$  et  $l$  sont déterminés par une permutation cyclique de l'ordre de  $i, j, k, l$ . Par exemple, si  $i = 1$ , alors  $j = 2, k = 3, l = 4$ . Lorsque  $i = 2$ , alors  $j = 3, k = 4, l = 1$ . Le volume de l'élément tétraèdre  $V$  peut être obtenu par

$$V = \frac{1}{6} \times \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad (\text{VI.37})$$

Les propriétés de  $L_i$ , telles que décrites dans les équations (VI.30) à (VI.32), montrent que  $L_i$  peut être utilisé comme fonction de forme d'un élément tétraèdre à quatre nœuds:

$$N_i = L_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (\text{VI.38})$$

D'après l'équation (VI.37), la matrice des moments des fonctions de base linéaires ne sera jamais singulière, à moins que le volume de l'élément ne soit nul. Il a été mentionné qu'il y a au total six contraintes dans un élément 3D. Les composantes de la contrainte sont  $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}$ . Pour obtenir les déformations correspondantes,  $\{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{xy}\}$ :

$$\epsilon = LU = LNd_e = Bd_e \quad (\text{VI.39})$$

Où la matrice de déformation  $B$  est donnée par

$$\mathbf{B} = \mathbf{LN} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N} \quad (\text{VI.40})$$

Donc, la matrice de déformation  $B$ , peut être obtenue comme :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.41})$$

On peut voir que la matrice de déformation pour un élément tétraèdre linéaire est une matrice constante. Cela implique que la déformation à l'intérieur d'un élément de tétraèdre linéaire est constante.

### III.1 ELEMENT DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Une fois la matrice de déformation obtenue, la matrice de rigidité  $k_e$  pour les éléments solides 3D. Comme la déformation est constante, la matrice de déformation de l'élément est obtenue comme suit :

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (\text{VI.42})$$

Notez que la matrice de constante de matériau  $c$  est donnée généralement par l'équation (VI.28).

La matrice de masse peut également être obtenue en utilisant l'équation comme suit :

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \int_{V_e} \rho \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{13} & \mathbf{N}_{14} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} & \mathbf{N}_{23} & \mathbf{N}_{24} \\ \mathbf{N}_{31} & \mathbf{N}_{32} & \mathbf{N}_{33} & \mathbf{N}_{34} \\ \mathbf{N}_{41} & \mathbf{N}_{42} & \mathbf{N}_{43} & \mathbf{N}_{44} \end{bmatrix} dV \quad (\text{VI.43})$$

Où :

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} \quad (\text{VI.44})$$

Utilisation de la formule suivante [Eisenberg et Malvern, 1973] :

$$\int_{V_e} L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q dV = \frac{m!n!p!q!}{(m+n+p+q+3)!} 6V_e \quad (\text{VI.45})$$

Nous pouvons facilement évaluer l'intégrale dans l'équation. (9.20) pour donner

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.46})$$

Pour avoir le vecteur de force nodale, un exemple d'un élément qui soit chargé par une force distribuée  $f_s$  sur le bord 2-3 de l'élément, comme illustré à la figure VI.6; le vecteur de force nodale devient :

$$\mathbf{f}_e = \int_l [\mathbf{N}]^T \Big|_{3-4} \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sz} \end{Bmatrix} dl \quad (\text{VI.47})$$

Si la charge est uniformément répartie,  $f_{sx}$ ,  $f_{sy}$  et  $f_{sz}$  sont des constantes et l'équation ci-dessus devient :

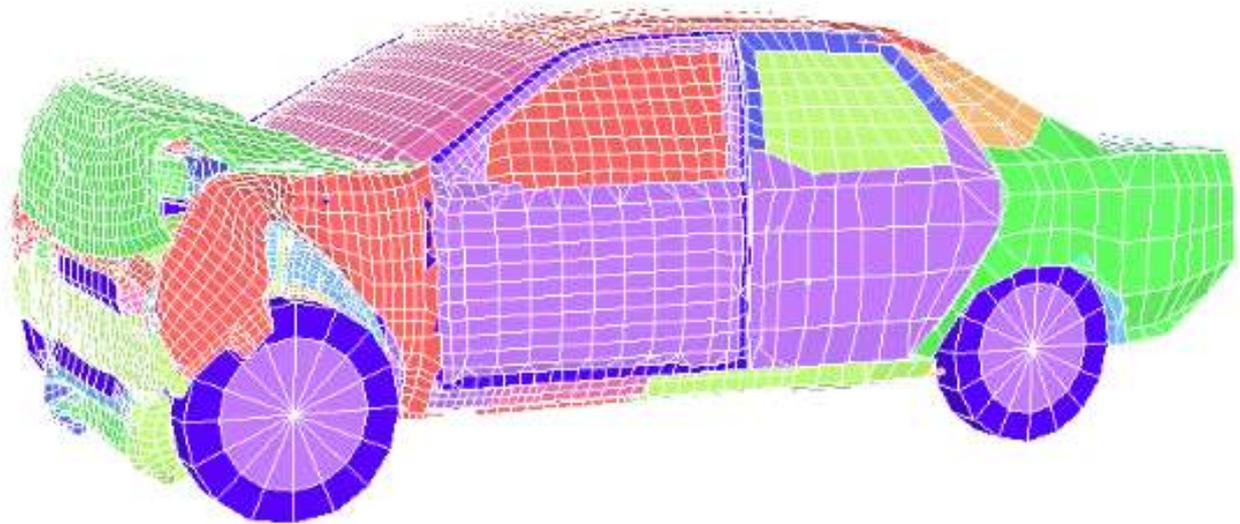
$$\mathbf{f}_e = \frac{1}{2} l_{3-4} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\}_{3 \times 1} \\ \{\mathbf{0}\}_{3 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sz} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sz} \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{0}\}_{3 \times 1} \\ \{\mathbf{0}\}_{3 \times 1} \\ \{\mathbf{0}\}_{3 \times 1} \\ \{\mathbf{0}\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.48})$$

Où  $l_{3-4}$  est la longueur du bord 3-4. Le vecteur de force  $f_e$  implique que les forces réparties sont également divisées et appliquées aux deux nœuds. Cette conclusion s'applique également aux forces de surface uniformément réparties appliquées sur n'importe quelle face de l'élément, et aux forces corporelles uniformément réparties appliquées sur tout le corps de l'élément. Enfin, la matrice de rigidité,  $k_e$ , la matrice de masse,  $m_e$ , et le vecteur de force nodale,  $f_e$ , peuvent être utilisés directement pour assembler l'équation globale, sans passer par une transformation de coordonnées.

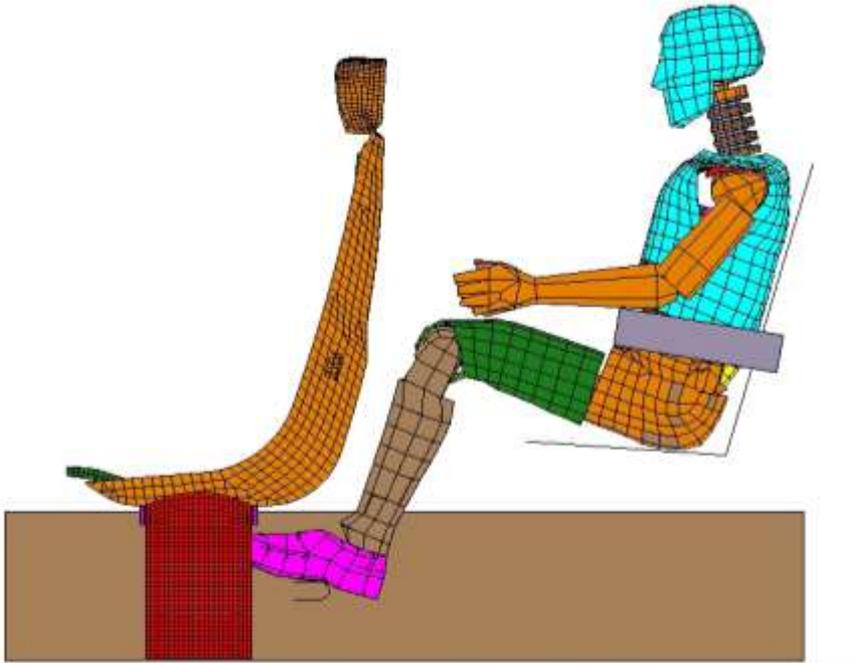
### Exemple :

Dans cet exemple, on va donner plusieurs modèles de système modélisés à l'aide d'un logiciel numérique.

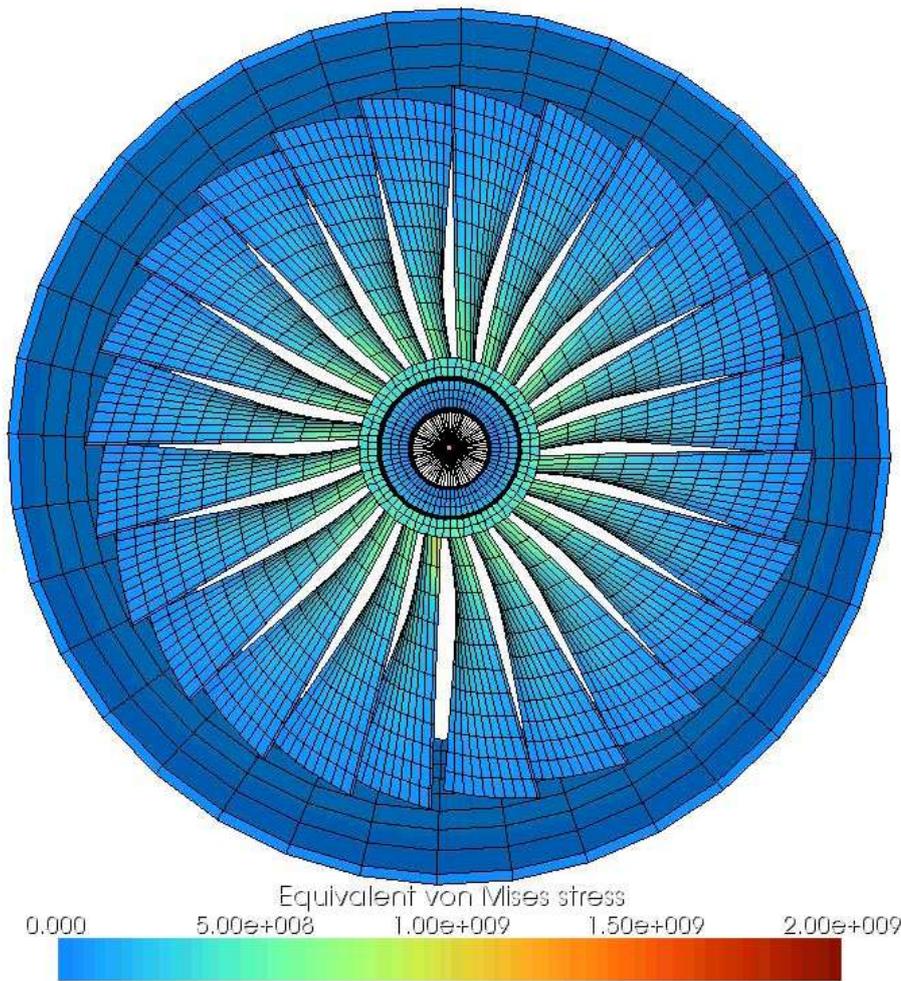
#### 1- Analyse d'un Crash d'une voiture



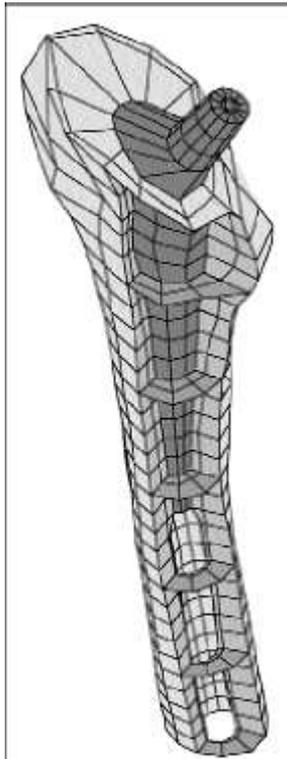
2- Modélisation d'un siège de train



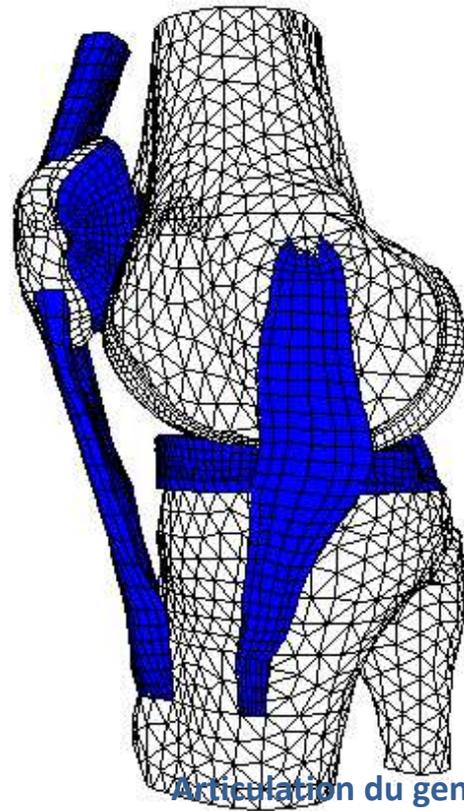
3- modélisation de la perte d'une aube dans un réacteur



4-



Interface os - prothèse



Articulation du genou  
ligaments, tendons,  
cartilages, ménisques

### 5- Voiles : Mat 45 m, 30 Tonnes Carbone-Nomex



## **CONCLUSION :**

La méthode des éléments finis est une méthode numérique, elle est conçue au processus de formulation, à la théorie et à la substance de la pratique informatique.

La théorie de cette méthode est totalement analytique, donc elle est absolument indépendante du choix de l'implémentation discrète. Pour implémenter la théorie à l'aide des fonctions de base, ces fonctions reflètent la précision du calcul. La théorie des champs vectoriels, utilisées sans exception génèrent la forme matricielle du problème traité.

Au final, l'utilisateur de la méthode des éléments finis commence par la discrétisation du système traité. Par la suite, il utilise les formes matricielles et vectorielles des éléments choisis. Enfin, il combine développe le calcul matriciel adapté selon les cas que nous avons traité (barre, poutre, triangle,...) afin de trouver la solution du problème.

## REFERENCES :

1. Mohamed AMIRAT, Méthode des éléments finis, Note de cours, ECAM de Rennes, 2012.
2. S. S. Quek, G. R. Liu, The Finite Element Method: A Practical Course, Butterworth-Heinemann, Elsevier Science, 2003.
3. Liu, G. R. and Quek, S. S. Jerry, A finite element study of the stress and strain fields of InAs quantum dots embedded in GaAs. Semiconductor Science and Technology, Vol. 17, 630–643, 2002.
4. J. N. Reddy, An Introduction To The Finite Element Method, Second Edition ed (McGraw-Hill, New York, 1993).
5. K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
6. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method, (McGraw-Hill, New York, 2000).
7. J.N., Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, New York , 2015.
8. Hakim NACEUR, Modélisation des structures par Eléments Finis, te de cours, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2012.
9. Hervé Oudin, Méthode des éléments finis, Centrale Nantes, 2008.
10. Nicholas Zabaras, Finite Element Analysis for Mechanical and Aerospace, Notes de cours, Cornell University, 2014.
11. Daryl L. Logan, A First Course in the Finite Element Method, Sixth Edition, Cengage Learning, 2017.
12. Bofang Zhu, The Finite Element Method, Fundamentals and Applications in Civil, Hydraulic, Mechanical and Aeronautical Engineering, Wiley, Tsinghua University Press, 2018.

13. Eisenberg, Malvern M. and Lawrence E., Finite element integration in natural coordinates, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 7, 574-575, 1973.