

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département de Mathématiques et Informatique



*Projet de Fin d'Etudes*  
*Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques*  
*Domaine : Mathématiques et Informatique*  
*Filière : Mathématiques*  
*Spécialité : Probabilités et Statistique, Appliqués.*

## *Thème*

# *Introduction à l'Application des Modèles ARCH et GARCH*

**Présenté par :**  
Mlle MIMOUNI Chahinez

**Devant le jury composé de :**

M. HAMMOUDI Ahmed Pr. UAT.B.B (Ain Temouchent) Président

M. MAMI Tawfiq Fawzi Pr. UAT.B.B (Ain Temouchent) Examineur

M<sup>me</sup>. BENNAFLA Djamila MCB UAT.B.B (Ain Temouchent) Encadrant

*Année Universitaire 2023/2024*

---

*Dédicace*

---

*Je dédie ce mémoire*

*À ma chère mère et à mon cher père.*

*À ma petite soeur Chaima et mon frère Hichem .*

*Vous m'avez toujours aidé avec vos prières et votre soutien, à poursuivre, et à réussir mes études et à réaliser le rêve que je vie aujourd'hui, car chaque succès dans ma vie est dû à vos sacrifices et à vos efforts et tout ce que je peux vous dire n'est pas suffisant pour exprimer ma gratitude et mon appréciation pour votre dévouement et votre patience.*

**MIMOUNI Chahinez**

---

## *Remerciements*

---

Tout d'abord, je voudrais remercier Dieu tout-puissant pour sa grande générosité. Il m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance tout au long de mes années d'études, ce qui m'a donné la force d'achever ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements Mme **BENNA-FLA Djamila**, mon superviseur sur tout le long de la réalisation de ce travail, pour son temps précieux, son soutien scientifique indispensable, ses connaissances, son attention bienveillante, son dévouement, ses encouragements et sa grande patience.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury, le Professeur **HAMMOUDI Ahmed** qui nous a fait l'honneur de présider le jury, et le Professeur **MAMI Fawzi Tawfiq** d'avoir bien voulu examiner ce travail et pour le travail que cela lui demande.

Je tiens également à remercier mes chers parents pour tous les efforts qu'ils ont déployés pour m'aider à achever ce travail, pour leur tendresse dans les moments difficiles, et pour leurs précieux conseils et leur patience.

À ma soeur **Chaima** pour ses rires et son soutien, et à mon frère **Hichem** et sa femme **Nihal** pour leurs encouragements. À mon ami **Fajr Al-Amel**, qui ne m'a jamais quitté tout au long de la préparation de ce travail, et à mes chers étudiants qui ne m'ont jamais oublié dans leurs prières, en particulier mon étudiant **nour Imane**. A ma grand-mère, ma tante " **Zoubida**", ma tante, ses enfants **Amir et Abdelrahman**, mon oncle et sa femme avec ses deux filles **Sirine et Nihal**, et mon oncle **Bouhajar**.

Merci à tous.

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>7</b>
1.1 Processus Stochastique . . . . .	7
1.1.1 Définitions et Propriétés . . . . .	7
1.1.2 Processus Stationnaire . . . . .	9
1.1.3 Processus Ergodiques . . . . .	15
1.2 Séries Chronologiques . . . . .	16
1.3 Les processus ARMA, ARIMA et SARIMA . . . . .	19
1.3.1 Définitions et Propriétés . . . . .	19
1.3.2 Estimation des paramètres . . . . .	26
1.3.3 Prévision . . . . .	28
1.4 La notion d'espérance et de variance conditionnelles et non conditionnelles . . . . .	30
<b>2 Fondements Théoriques des Modèles ARCH/GARCH</b>	<b>32</b>
2.1 Le modèle ARCH . . . . .	32
2.1.1 Le Modèle ARCH(1) . . . . .	32
2.1.2 Le modèle ARCH(p) . . . . .	37
2.1.3 Le modèle ARCH(p) avec erreur . . . . .	38
2.1.4 Estimation des paramètres du modèle ARCH . . . . .	40
2.2 Le modèle GARCH . . . . .	41
2.2.1 Le Modèle GARCH(1,1) . . . . .	41
2.2.2 Le modèle GARCH(p,q) . . . . .	43
2.2.3 Le modèle GARCH(p,q) avec erreur . . . . .	45
2.2.4 Estimation des paramètres du modèle GARCH . . . . .	45
2.3 Prévision des Modèles ARCH et GARCH . . . . .	46
2.3.1 Prévision ARCH(1) et ARCH(p) . . . . .	46
2.3.2 Prévision GARCH(1,1) . . . . .	46
2.3.3 Prévision GARCH(p,q) . . . . .	47

<b>3</b>	<b>Application des Modèles ARCH et GARCH sur des séries Financières</b>	<b>49</b>
3.1	Application à l'indice CAC40 . . . . .	49
3.1.1	Présentation des Données . . . . .	49
3.1.2	Analyse exploratoire des données . . . . .	50
3.1.3	Modélisation de la Volatilité avec les Modèles ARCH et GARCH . . . . .	54
3.1.4	Prévision de la volatilité . . . . .	57
3.1.5	Performance des Modèles ARCH et GARCH . . . . .	58
3.2	Application à Apple Inc. . . . .	59
3.2.1	Présentation des Données . . . . .	59
3.2.2	Analyse de l'Action Apple . . . . .	59
3.2.3	Modélisation de la Volatilité avec les Modèles ARCH et GARCH . . . . .	64
3.2.4	Prévisions . . . . .	66
3.2.5	Performance des Modèles ARCH et GARCH . . . . .	67
	<b>Conclusion</b>	<b>68</b>
	<b>Annexes</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>

La modélisation, dans un sens général, est le processus de création de représentations mathématiques ou statistiques d'un phénomène ou d'un système réel. Ces modèles visent à capturer et à expliquer les relations entre les différentes variables ou composantes du système étudié. La modélisation peut être appliquée dans divers domaines tels que la science, l'ingénierie, l'économie, la finance, la biologie, la sociologie, etc.

L'objectif principal de la modélisation est de simplifier et de formaliser la complexité du monde réel afin de faciliter la compréhension, la prédiction et la prise de décision. En créant des modèles, les chercheurs et les praticiens peuvent explorer et manipuler les relations entre les variables d'intérêt, simuler des scénarios hypothétiques et évaluer les conséquences de différentes actions ou politiques.

Dans le domaine financier, les modèles ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) et GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) sont largement utilisés pour modéliser la volatilité des prix des actifs financiers. Ces modèles permettent aux analystes financiers de comprendre et de prévoir la volatilité future des marchés, ce qui est essentiel pour la gestion des risques, les décisions d'investissement et la construction de portefeuilles diversifiés.

Développé par Robert Engle en 1982, le modèle ARCH a marqué une avancée significative en permettant de capturer la variance conditionnelle des rendements financiers, reconnaissant ainsi que la volatilité peut être influencée par les chocs passés. En 1986, Tim Bollerslev a étendu ce modèle pour créer le modèle GARCH, qui intègre également la persistance de la volatilité, offrant ainsi une représentation plus complète de la dynamique des séries chronologiques financières.

Ce manuscrit est structuré en trois chapitres principaux pour offrir une compréhension approfondie des processus stochastiques et des modèles ARCH et GARCH, ainsi que leur application pratique.

Le chapitre 1, introduit les concepts fondamentaux des processus stochastiques, essentiels pour comprendre les séries chronologiques. Nous y discutons des processus linéaires et des pro-

priétés des séries temporelles, en mettant un accent particulier sur les notions d'espérance et de variance conditionnelles et non conditionnelles. Ces concepts constituent la base théorique nécessaire pour aborder les modèles ARCH et GARCH.

Dans le chapitre 2, nous explorons en détail les fondements théoriques des modèles ARCH et GARCH. Nous expliquons leur formulation mathématique, leurs hypothèses sous-jacentes et leurs propriétés statistiques. Des exemples pratiques et des études empiriques sont présentés pour illustrer comment ces modèles capturent la volatilité conditionnelle dans les données financières.

Le chapitre 3, est consacré à l'application pratique des modèles ARCH et GARCH sur les rendements de l'indice CAC40 et de l'action Apple Inc. Nous présentons et analysons les données, et mettons en évidence la modélisation de la volatilité par les modèles ARCH et GARCH, avec prévision et performances des modèles. Cette application concrète permet de démontrer l'utilité et la validité des modèles dans des contextes réels.

L'objet de cette modélisation est de fournir aux praticiens des outils robustes pour évaluer et anticiper la volatilité des marchés financiers, afin de prendre des décisions plus éclairées et mieux informées en matière de gestion de portefeuille et de risque financier.

Ce manuscrit vise à fournir une introduction complète et structurée à l'application des modèles ARCH et GARCH, en partant des bases théoriques jusqu'à leur mise en pratique sur des données financières réelles. Les lecteurs pourront ainsi acquérir une compréhension approfondie de ces outils puissants et de leur pertinence pour l'analyse de la volatilité sur les marchés financiers.

Ce chapitre fournit les outils conceptuels indispensables pour analyser et modéliser efficacement les données temporelles. Il se concentre sur les concepts clés pour comprendre et analyser les processus stochastiques et les séries chronologiques, préparant ainsi le terrain pour des applications plus avancées et des techniques de modélisation dans les chapitres suivants.

Les ressources citées, telles que [1],[5],[6],[13],[21], sont des sources précieuses qui ont grandement contribué à notre compréhension des bases, ainsi qu'à l'élaboration de ce chapitre.

## 1.1 Processus Stochastique

### 1.1.1 Définitions et Propriétés

**Définition 1.1.1** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires  $\{Y_t, t \in \Omega\}$  indicées par le temps.*

**Remarque 1.1.1** *Dans un processus stochastique  $\{Y_t, t \in \Omega\}$  :*

- *Si on fixe  $t = t_0$ , alors  $Y(t_0, u)$  sera une variable aléatoire.*
- *Si on fixe  $u = u_0$ , alors pour chaque instant du temps, le processus prendra une seule valeur  $Y(t, u_0)$ .*
- *Si  $t$  prend les valeurs réelles, c-à-d,  $\Omega \in \mathbb{R}^+$  alors  $\{Y_t, t \in \Omega\}$  est un processus stochastique continu. Dans le cas contraire où les valeurs prises par  $t$  sont discrètes,  $\Omega \in \mathbb{N}$  alors,  $\{Y_t, t \in \Omega\}$  est un processus stochastique discret.*

La définition d'un processus stochastique détermine la manière dont les valeurs évoluent dans le temps ou l'espace, tandis que la distribution de probabilité associée à ce processus spécifie comment ces valeurs sont réparties ou distribuées en fonction des paramètres et des propriétés probabilistes du processus. On énonce dans ce qui suit, comment chaque valeur d'un processus stochastique peut être traitée comme une variable aléatoire, avec sa propre distribution de probabilité, et comment ces distributions varient en fonction des valeurs temporelles choisies.



**Proposition 1.1.1 (Distribution de probabilité)** *Lorsque l'on fixe une valeur dans le temps, le processus stochastique devient une variable aléatoire qui aura sa propre distribution de probabilité. Ainsi, pour  $t = t_i$ , la distribution de probabilité sera notée par :*

$$F[Y_{(t_i)}].$$

*Si, au lieu d'une valeur, on fixe deux valeurs du temps, on obtiendra une variable bidimensionnelle avec une fonction de distribution bivariable. Ainsi, pour  $t = t_i$  et  $t = t_j$ , la distribution de probabilité sera :*

$$F[Y_{(t_i)}, Y_{(t_j)}].$$

*En général, pour un ensemble fini des valeurs du temps, on obtiendra une fonction de distribution conjointe. Ainsi, pour  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  la fonction de distribution conjointe sera :*

$$F[Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}].$$

Les moments d'ordre 1 et 2 sont les plus utilisés dans une distribution de probabilité pour caractériser les propriétés centrales (moyenne) et de dispersion (variance) des valeurs du processus stochastique à chaque instant. Ces moments fournissent des informations essentielles sur la distribution de probabilité. Les propriétés suivantes sont donc essentielles pour caractériser la structure et le comportement d'un processus stochastique dans le temps.

**Proposition 1.1.2** *Pour un processus stochastique, que l'on note pour simplifier la notation,  $Y_t$  :*

(i) *La moyenne ou le moment de premier ordre est défini de la forme suivante :*

$$\mu_t = E(Y_t);$$

*L'indice  $t$  indique que la moyenne sera, en général, différente pour chaque période de temps.*

(ii) *Comme moments de second ordre par rapport à la moyenne, on considère en plus de la variance, les covariances entre les variables aux différents instants du temps ou autocovariances qui seront définies par :*

$$\gamma_{t,s} = Cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)].$$

▷ *Lorsque  $s = t$ , on obtient la variance :*

$$\gamma_{t,t} = Cov(Y_t, Y_t) = E[(Y_t - \mu_t)^2].$$

▷ *Comme une manière alternative de caractérisation d'un processus stochastique, on utilise aussi les coefficients d'auto-correlation*

$$R_{t,s} = \frac{Cov(Y_t, Y_s)}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_s)}}.$$

Ayant introduit la notion de processus stochastique et examiné ses principes fondamentaux, nous explorerons désormais en détail les caractéristiques et les propriétés des processus stationnaires. Ces derniers constituent une classe importante de processus stochastiques, caractérisés par des comportements statistiques constants dans le temps.

### 1.1.2 Processus Stationnaire

Pour définir un processus stationnaire, on peut utiliser, comme on l'a fait pour sa caractérisation, soit les fonctions de distribution ou alternativement les moments.

**Définition 1.1.2** *Le processus aléatoire  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dit strictement ou fortement stationnaire si sa distribution de probabilité ne change pas au cours du temps, c'est à dire si  $\forall$  le  $n$ -uplet du temps  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  telle que  $t_n \in \mathbb{Z}$  et pour tout temps  $h \in \mathbb{Z}$  avec  $t_i + h \in \mathbb{Z} \forall i = 1 \dots n$  la suite,  $(Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_n+h})$  possède la même loi de probabilité que la suite  $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$ .*

**Définition 1.1.3** *Considérons la fonction de distribution conjointe,*

$$F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k}).$$

- *Si l'on suppose que tous les éléments de cette distribution sont déplacés de  $m$  périodes, la nouvelle fonction de distribution conjointe sera*

$$F(Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \dots, Y_{t_k+m}).$$

- *Si le processus est stationnaire, au sens strict, on vérifie que :*

$$F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k}) = F(Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \dots, Y_{t_k+m}).$$

**Remarque 1.1.1** *On doit obtenir un résultat analogue pour n'importe quelle autre distribution conjointe finie.*

**Définition 1.1.4** *En utilisant les moments, un processus est dit stationnaire de premier ordre, ou en moyenne, s'il vérifie :*

$$E[Y_t] = \mu, \forall t.$$

Par conséquent, dans un processus stationnaire en moyenne, l'espérance mathématique, ou la moyenne théorique, reste constante dans le temps.

**Définition 1.1.5** *On dit qu'un processus est stationnaire de second ordre (ou au sens large), lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *La variance est finie et reste constante dans le temps, c'est-à-dire :*

$$\forall t, E[Y_t - \mu]^2 < \infty.$$

- (ii) *L'auto-covariance entre deux périodes distinctes de temps dépend uniquement de l'intervalle du temps entre ces deux temps, C'est-à-dire :*

$$\forall t, E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma_k,$$

*est l'auto-covariance d'ordre  $k$ , où  $k$  est la longueur de cet intervalle de temps entre  $Y_t$  et  $Y_{t+k}$ . Sa valeur  $\gamma_k$  est indépendante de l'instant  $t$  du temps.*

**Remarque 1.1.2** *On apporte par la suite, des précisions et des éclaircissements sur les concepts de variance, de stationnarité au sens large et au sens strict, ainsi que sur les conditions dans lesquelles un processus stationnaire au sens large peut également être stationnaire au sens strict.*

- La variance du processus est tout simplement l'auto-covariance d'ordre 0.
- Lors de la définition d'un processus stationnaire au sens large, implicitement, on tient compte que le processus est aussi stationnaire en moyenne, puisque soit dans la variance soit dans les auto-covariances, le symbole  $\mu$  n'est affecté par aucun indice.
- Si un processus est stationnaire au sens strict, il sera aussi stationnaire au sens large, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie, puisque le processus peut ne pas être stationnaire pour les moments d'ordre supérieures au second.
- Aussi, ici, si le processus est stationnaire au sens large, et en plus il est normal, on vérifie que le processus est stationnaire au sens strict.

**Proposition 1.1.3** *Lorsque le processus est stationnaire, en principe, on peut estimer les paramètres  $\mu, \gamma_0, \gamma_1, \dots$  à partir d'une seule réalisation.*

*Considérons un échantillon  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ , on peut utiliser les estimateurs suivants :*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t,$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{\mu})^2,$$

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_{t+k} - \hat{\mu})(Y_t - \hat{\mu}).$$

Évidemment, lorsque  $k$  croît, on dispose de moins d'observations pour calculer  $\hat{\gamma}_k$ . Ainsi, pour  $\hat{\gamma}_{T-1}$  on disposera seulement d'une seule observation.

**Proposition 1.1.4** *Pour un processus stationnaire les auto-correlations sont définies de la forme suivante :*

$$R_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, k \geq 0.$$

Comme,

$$E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma_k, \forall t \geq 0,$$

on vérifie que,

$$\gamma_k = \gamma_{-k}.$$

Par conséquent,

$$R_k = R_{-k}.$$

**Remarque 1.1.3** *La représentation graphique de  $R_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  s'appelle **Corrélogramme**.*

La figure suivante présente un exemple de corrélogramme, offrant une visualisation des auto-corrélations d'un processus pour différents décalages temporels.

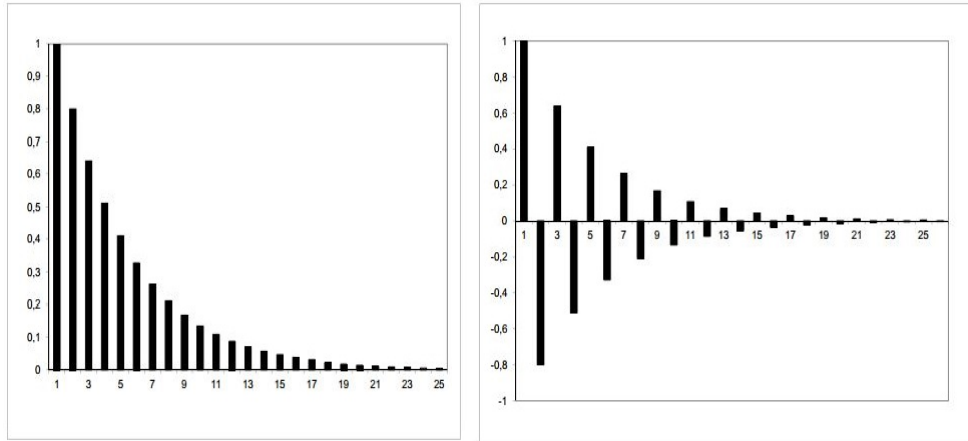


FIGURE 1.1 – Exemple de corrélogramme

**Remarque 1.1.4** *L'examen du Corrélogramme des données observées permettra de repérer l'existence d'autocorrélations éventuelles ainsi que l'ordre d'autocorrélation le plus significatif.*

- ▷ *Si toutes les auto-corrélations sont significativement différentes de zéro et diminuent très lentement, alors ceci indique que le processus est non-stationnaire.*
- ▷ *Il est ensuite nécessaire de vérifier cette intuition en appliquant des tests statistiques de stationnarité et/ou de non stationnarité.*

Pour mieux appréhender les concepts de stationnarité et de non-stationnarité, nous examinons maintenant deux exemples emblématiques de processus : le bruit blanc, qui illustre des comportements stationnaires caractérisés par une constance dans ses propriétés statistiques, tandis que la marche aléatoire met en évidence des caractéristiques de non-stationnarité en démontrant un comportement évolutif au fil du temps.

**Exemples 1.1.1 (Processus stationnaire - Bruit Blanc)** *L'exemple le plus simple de processus stationnaire au second-ordre est celui du bruit blanc. Ce processus est particulièrement important car il permet de construire des processus stationnaires plus complexes.*

*Dans ce processus, chaque observation est indépendante et identiquement distribuée selon une distribution normale, avec une moyenne constante et une variance constante. Cela signifie que, les propriétés statistiques du processus, telles que la moyenne et la variance, restent constantes dans le temps.*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{Z} : E(\epsilon_t) &= 0, \\ E(\epsilon_t^2) &= \sigma^2, \\ \forall (t, t') \in \mathbb{Z}^2 / t \neq t' : Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t'}) &= 0. \end{aligned}$$

*Nous pouvons observer comment ses propriétés statistiques se manifestent visuellement dans sa représentation graphique dans la figure 1.2*

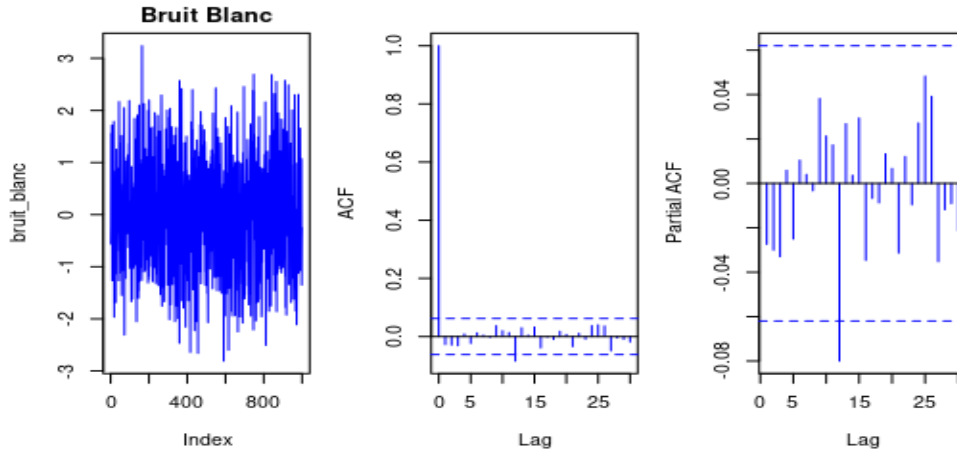


FIGURE 1.2 – Représentation graphique d'un Bruit Blanc

**Exemples 1.1.2 (Processus non stationnaire - Marche aléatoire)** *Les marches aléatoires peuvent être des processus non stationnaires. Un processus est considéré comme non stationnaire s'il présente des propriétés statistiques qui varient dans le temps. Dans le contexte des marches aléatoires, cela signifie que les caractéristiques du processus, telles que la moyenne, la variance ou la covariance, changent au fil du temps.*

*La suite  $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$  est une marche aléatoire (random walk) lorsqu'elle s'écrit sous la forme suivante :*

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t.$$

*où  $Y_t$  est la valeur du processus à l'instant  $t$ ,  $Y_{t-1}$  est la valeur à l'instant précédent, et  $\epsilon_t$  est un terme d'erreur aléatoire à l'instant  $t$ .*

*L'espérance conditionnelle de  $Y_t$  sachant les valeurs passées  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0$  est donnée par :*

$$E[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0] = Y_{t-1}.$$

*Cela signifie que, étant donné toutes les valeurs précédentes, l'espérance conditionnelle de la marche aléatoire à l'instant  $t$  est simplement la valeur précédente  $Y_{t-1}$ . Cela reflète le caractère non prédictible de la marche aléatoire, où chaque nouvelle valeur est simplement la somme de la valeur précédente et d'un terme aléatoire.*

*La variance conditionnelle de  $Y_t$  sachant les valeurs passées  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0$  est donnée par :*

$$\text{Var}[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0] = \text{Var}[\epsilon_t].$$

*Cela est dû au fait que  $Y_t$  est une somme de  $Y_{t-1}$  et de  $\epsilon_t$ , et  $Y_{t-1}$  étant connu, sa variance conditionnelle est simplement celle de  $\epsilon_t$ .*

*Cependant, si nous regardons la variance sans conditionnement, c'est-à-dire la variance de  $Y_t$  sans prendre en compte les valeurs passées, nous avons :*

$$\text{Var}[Y_t] = t \cdot \text{Var}[\epsilon_t].$$

à condition que  $Y_0$  soit une constante (à  $Var[Y_0] = 0$ ) car

$$Var[Y_t] = Var[Y_0] + \sum_{i=0}^t Var\epsilon_i$$

$$Var[Y_t] = Var[Y_0] + t \cdot Var[\epsilon_t].$$

Cette formule reflète le fait que la variance de la marche aléatoire augmente linéairement avec le temps, car chaque nouvelle valeur ajoute une certaine incertitude à la trajectoire du processus.

De plus,

$$\begin{aligned} Cov(Y_{t+h}, Y_t) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{t+h} \epsilon_i, \sum_{j=1}^t \epsilon_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t+h} \sum_{j=1}^t Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^t \sigma_\epsilon^2 = t \cdot \sigma_\epsilon^2. \end{aligned}$$

Donc, on constate que la marche aléatoire n'est pas stationnaire, car la suite des covariances dépend de  $t$ .

L'évolution de  $Y_t$  est aléatoire, ce qui rend impossible toute prévision, faute d'une structure adéquate. La figure 1.3, illustre le comportement de la marche aléatoire :

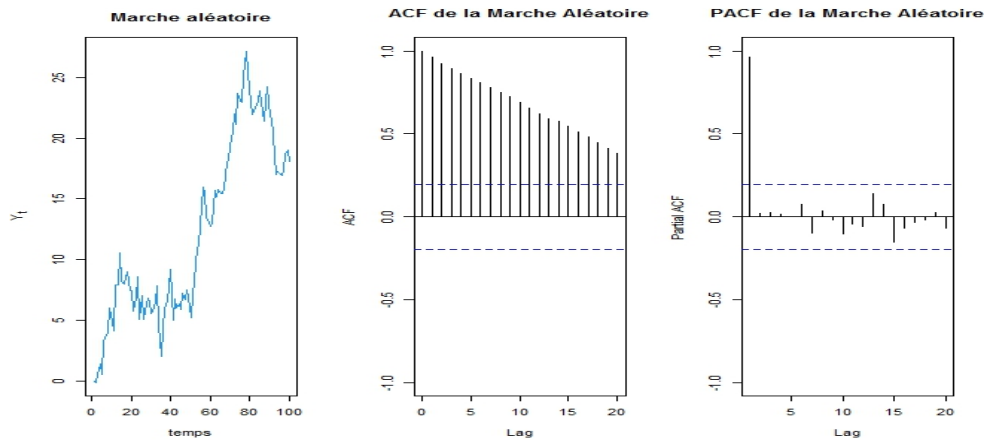


FIGURE 1.3 – Représentation graphique d'une marche aléatoire.

Les processus stationnaires fournissent un cadre théorique solide pour comprendre la structure temporelle des données. En transition naturelle, nous aborderons maintenant les fonctions d'autocovariance, d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, des concepts clés qui permettent de quantifier la dépendance temporelle et d'explorer les relations entre les observations à différents moments temporels.

**Définition 1.1.6** Le processus stationnaire  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est connu sous le nom de fonction d'autocovariance de  $Y_t$ , où la fonction  $\gamma$  définie de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  est définie par :

$$\forall k, t \in \mathbb{Z}, \gamma(k) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}).$$

**Proposition 1.1.5** La fonction d'autocovariance a les propriétés suivantes :

- (i) La fonction  $\gamma(k)$  est symétrique, i.e  $\forall k \in \mathbb{Z}, \gamma(k) = \gamma(-k)$ .
- (ii)  $\gamma(0) \geq 0$ .
- (iii)  $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Définition 1.1.7** soit  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus stationnaire, on appelle fonction d'autocorrélation (ACF) de  $Y_t$  la fonction  $\rho$  définie de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}.$$

**Proposition 1.1.6** La fonction d'autocorrélation a les propriétés suivantes :

- (i)  $\rho(0) = 1$ .
- (ii) La fonction  $\rho(k)$  est symétrique, i.e  $\forall k \in \mathbb{Z}, \rho(k) = \rho(-k)$ .

L'autocorrélation partielle d'un processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  mesure la liaison linéaire entre  $Y_t$  et  $Y_{t-k}$  est noté par  $r(k)$  tel que :

$$r(k) = \text{Corr}(Y_t, Y_{t-k} / Y_t, \dots, Y_{t-k+1}).$$

Le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre  $k$  d'un processus stationnaire et se calcule de la manière suivante :

$$r(k) = \frac{|R(k)^*|}{|R(k)|},$$

avec

$$R(k) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

et  $R(k)^*$  la matrice  $R(k)$  dans laquelle on a remplacé la colonne  $k$  par  $(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k)^t$  sont :

$$R(k)^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_k \end{pmatrix},$$

ainsi,

$$r(1) = \rho(1),$$

$$r(2) = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}, \text{ etc...}$$

**Remarque 1.1.5** *L'autocovariance quantifie la variabilité conjointe entre les observations, l'autocorrélation mesure la corrélation linéaire normalisée entre les observations à différents décalages temporels, et l'autocorrélation partielle identifie les relations directes entre les observations en excluant les effets des décalages intermédiaires. Ces trois fonctions sont essentielles pour caractériser la dépendance temporelle et la structure des processus stochastiques.*

Le théorème suivant, un pilier de la théorie des processus stochastiques, énonce la décomposition d'un processus stochastique stationnaire en termes de ses fréquences constitutives à partir d'un bruit blanc. Cette représentation permet d'analyser la structure de la série temporelle en fonction de ses composantes fréquentielles. Le théorème de Wold fournit ainsi un cadre général pour représenter les processus stochastiques stationnaires.

**Théorème 1.1.1 (Théorème de Wold)** *Considérons un processus stationnaire  $Y_t$ . Il est toujours possible de décomposer  $Y_t$  en une composante déterministe  $v_t$  et une composante stochastique  $w_t$  telle que :*

$$Y_t = v_t + w_t,$$

avec

$$w_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j \epsilon_{t-j},$$

où  $\epsilon_t$  est un bruit blanc, c-à-d un processus de moyenne nulle et variance constante et non autocorrélé.

En plus d'être stationnaire, il est nécessaire que le processus stochastique ait la propriété d'ergodicité, pour que l'inférence puisse se réaliser d'une forme adéquate.

### 1.1.3 Processus Ergodiques

Le concept d'ergodicité sera examiné d'une forme intuitive. Lorsqu'il y a une forte corrélation entre les valeurs d'une série temporelle éloignées dans le temps, c'est-à-dire  $R_k$  garde des valeurs très élevées pour un  $k$  assez grand, il arrive que lorsqu'on augmente la taille de l'échantillon, il y a peu d'information nouvelle qui s'ajoute.

La conséquence de ce fait, est que, l'augmentation de la taille de l'échantillon n'aura pas d'utilité, puisqu'il faudra calculer un nombre élevé d'autocovariances pour bien caractériser le processus.

**Proposition 1.1.7** *Une condition nécessaire, mais pas suffisante de l'ergodicité est :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0.$$

**Remarque 1.1.6** *Lorsque la propriété d'ergodicité est vérifiée, on peut caractériser le processus par ses moments de premier et de second ordre.*

Pour évaluer la performance d'un modèle prédictif, identifier les sources d'erreur et améliorer la précision des prévisions dans divers domaines d'application, La définition de l'innovation d'un processus stochastique  $Y_t$ , dans la section suivante, permet de les quantifier et de les caractériser tout en prenant en compte la variabilité des données. Cette approche est basée sur la manière dont les écarts entre les valeurs observées et les valeurs attendues sont mesurées et caractérisés.



**Définition 1.1.8 (Mesure de Kurtosis)** *Le Kurtosis ou le coefficient d'applatissage pour un échantillon de taille  $T$  s'écrit :*

$$K_\mu = \frac{E[Y - E(Y_t)]^4}{E[(Y - E(Y_t))^2]^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

Pour  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{K_\mu - 3}{\sqrt{\frac{24}{T}}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

**Remarque 1.1.7** *Le Kurtosis mesure le caractère pointu ou plat de la distribution de la série. Le Kurtosis de la distribution normale est 3. Si le Kurtosis est supérieur à 3 (queue épaisse), la distribution est plutôt pointue (distribution leptokurtique); si le Kurtosis est inférieur à 3, la distribution est plutôt plate (distribution dite platikurtique).*

**Définition 1.1.9 (Mesure de Skewness)** *Le skewness ou le coefficient d'asymétrie pour un échantillon de taille  $T$  s'écrit :*

$$S_k = \frac{E[Y - E(Y_t)]^3}{E[(Y - E(Y_t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}.$$

**Remarque 1.1.8** *Le Skewness ou coefficient d'asymétrie  $S_k$  donne une idée du manque de symétrie d'une distribution d'une variable aléatoire.*

- Si  $S_k = 0$ , la distribution est dite symétrique à l'instar de la loi normale.
- Si  $S_k > 0$ , la distribution s'étale vers la droite et on a une asymétrie positive.
- Si  $S_k < 0$ , la distribution s'étale vers la gauche et on est en présence d'une asymétrie négative.

**Définition 1.1.10 (Hétéroscédasticité)** *L'hétéroscédasticité est une caractéristique des séries financières, elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps.*

**Remarque 1.1.9** *La notion d'hétéroscédasticité s'oppose à celle d'homoscédasticité, qui correspond au cas où la variance de l'erreur des variables est constante. Tandis que dans le cas d'homoscédasticité, nous avons  $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2, \forall i$ , nous avons désormais  $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma_i^2$ , où  $\sigma_i^2$  peut être différent de  $\sigma_j^2$ , pour  $i \neq j$ .*

Il est essentiel de se tourner vers les séries chronologiques pour analyser et modéliser les données qui évoluent dans le temps. Les séries chronologiques permettent d'étudier les dynamiques temporelles, les tendances, et les cycles, offrant ainsi des outils puissants pour la prévision et l'analyse des phénomènes qui dépendent du facteur temps.

## 1.2 Séries Chronologiques

**Définition 1.2.1** *Une série chronologique (ou temporelle), est une séquence de données ordonnées dans le temps, où chaque observation est enregistrée à des intervalles réguliers ou irréguliers. Les données dans une série chronologique peuvent être collectées à différentes fréquences, comme chaque minute, chaque jour, chaque mois, chaque année, etc.*

Les séries chronologiques sont caractérisées par :

1. **Ordre temporel** : Les observations dans une série chronologique sont organisées dans un ordre temporel. Cela signifie que l'ordre dans lequel les données sont enregistrées est important, et que chaque observation est associée à un moment spécifique dans le temps.
2. **Intervalles réguliers ou irréguliers** : Les données dans une série chronologique peuvent être collectées à des intervalles réguliers (par exemple, chaque jour, chaque semaine) ou à des intervalles irréguliers (par exemple, des moments spécifiques où des événements se produisent).
3. **Composantes** : Une série chronologique peut être décomposée en différentes composantes telles que la tendance, la saisonnalité, le cycle et le bruit. La tendance représente la direction générale du mouvement des données au fil du temps, la saisonnalité se réfère à des variations cycliques qui se répètent à des intervalles réguliers, le cycle se réfère à des variations à plus long terme, tandis que le bruit représente l'irrégularité ou la variabilité résiduelle dans les données.
4. **Analyse et modélisation** : Les séries chronologiques sont souvent analysées pour identifier les tendances, les modèles saisonniers, les points de retournement et les comportements anormaux. Elles peuvent être modélisées à l'aide de techniques telles que les modèles ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average), les modèles de lissage exponentiel, les réseaux de neurones, etc.
5. **Prévisions** : L'une des principales utilisations des séries chronologiques est la prévision des valeurs futures en se basant sur les tendances et les modèles identifiés dans les données historiques.

Prenons par exemple, les données des ventes mensuelles d'un produit au cours des cinq dernières années :

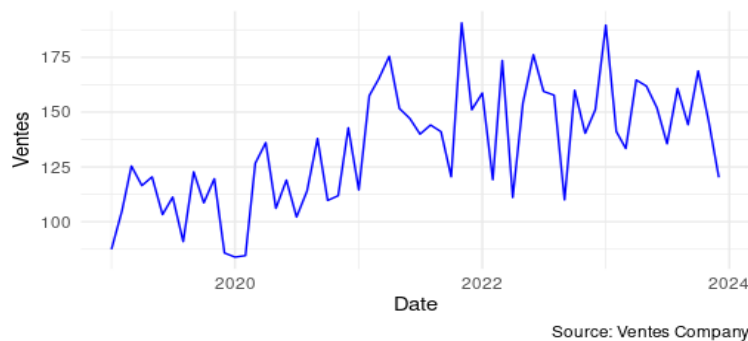


FIGURE 1.4 – Ventes Mensuelles d'un Produit

Le graphique résultant représente les ventes mensuelles au fil du temps, illustrant une série temporelle typique. Cette visualisation peut démontrer des concepts tels que la tendance, la saisonnalité et les fluctuations aléatoires dans les données temporelles. Dans cet exemple, les données sont générées de manière aléatoire pour simuler des ventes mensuelles réparties sur une période de cinq ans à partir de janvier 2019, avec des ventes influencées par une tendance linéaire croissante.

Une fois que nous avons établi une compréhension des séries chronologiques et de leurs dynamiques, il devient essentiel d'introduire les outils nécessaires pour leur modélisation et leur analyse en profondeur. Parmi ces outils, les opérateurs de retard jouent un rôle central, car ils permettent de formaliser et de manipuler les relations temporelles au sein des séries, facilitant ainsi l'identification des dépendances passées et la prévision future des données.

**Définition 1.2.2 (L'opérateur retard)** *L'opérateur retard, noté  $L$ , est tel que :*

$$LY_t = Y_{t-1}.$$

*Plus généralement, on a :*

$$L^n Y_t = Y_{t-n}.$$

On constate ainsi, que l'opérateur retard transforme une variable  $Y_t$  en sa valeur passé.

Si on l'applique à une série  $Y_t$ , alors,

$$\psi(L)Y_t = Y_t - \psi_1 Y_{t-1} - \psi_2 Y_{t-2} - \dots - \psi_p Y_{t-p},$$

Ainsi, on obtient le polynome retard  $\psi(L)$  défini comme suit :

$$\psi(L) = 1 - \psi_1 L - \psi_2 L^2 - \dots - \psi_p L^p,$$

où  $\psi_1, \dots, \psi_p$  sont des coefficients.

**Proposition 1.2.1** *L'opérateur retard est linéaire et inversible. Son inverse  $L^{-1} = E$  appelé opérateur avance et est défini par,*

$$EY_t = Y_{t+1}.$$

**Proposition 1.2.2** *L'opérateur retard vérifie les propriétés suivantes :*

(i)  $(\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j L^j)Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j Y_{t-j}.$

(ii)  $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j L^j Y_t + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_j L^j Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\psi_j + \phi_j) L^j Y_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\psi_j + \phi_j) Y_{t-j}.$

(iii)  $c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j L^j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c \psi_j L^j.$

où  $\psi_j, \phi_j$  et  $c$  sont des coefficients.

La stationnarité est une propriété importante des séries chronologiques, influençant à la fois, leur analyse et leur modélisation.

**Définition 1.2.3** *Une série chronologique est dite stationnaire, lorsque ses propriétés statistiques, telles que la moyenne, la variance et la covariance, restent constantes au fil du temps.*

**Remarque 1.2.1** *La fréquence de la non-stationnarité dans les séries chronologiques complique leur analyse et leur modélisation. La méthode la plus répandue pour stationnariser une série chronologique est celle de Box-Jenkins, qui implique la différenciation de la série observée ( $Y_t$ ).*

**Proposition 1.2.3** *Si  $Y_t$  n'est pas stationnaire, alors  $X_t = \nabla^n Y_t$  est stationnaire, tel que*

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

Nous nous tournons désormais vers des modèles plus avancés pour analyser et prévoir ces séries temporelles. Dans la section suivante, nous aborderons les modèles ARMA, ARIMA et SARIMA, qui constituent des outils puissants pour la modélisation et la prédiction des séries chronologiques.

## 1.3 Les processus ARMA, ARIMA et SARIMA

### 1.3.1 Définitions et Propriétés

Les processus ARMA font partie d'une famille très large des processus stationnaires. Ils ont principalement deux avantages :

1. Ils sont d'excellents outils de prévision.
2. On dispose des méthodes performantes pour estimer leur paramètres.

Ces processus sont composés des processus auto-régressifs  $AR(p)$  et de moyennes mobiles ("moving average")  $MA(q)$ .

Commençons par définir les processus autorégressifs et examinons ensuite certaines de leurs propriétés.

**Définition 1.3.1 (Processus AR)** *Soit  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit blanc centré de variance  $\sigma^2$ . On appelle  $(Y_t)$  un processus autorégressif d'ordre  $p$ , noté  $AR(p)$ , si  $\forall t$  :*

$$Y_t + a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p} = \epsilon_t.$$

**Définition 1.3.2** *On définit son polynôme de retard par,*

$$A(L) = 1 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p.$$

**Définition 1.3.3** *On définit également son polynôme caractéristique par,*

$$A(\lambda) = 1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_p \lambda^p.$$

**Proposition 1.3.1** *Les équations de récurrence linéaire qui régissent la fonction d'auto-covariance et la fonction d'auto-corrélation partielle des processus autorégressifs fournissent des indications essentielles sur la structure et le comportement de ces processus temporels.*

1. *Sa fonction d'auto-covariance satisfait l'équation de récurrence linéaire suivante :*

$$\gamma(k) + a_1 \gamma(k-1) + \dots + a_p \gamma(k-p) = 0, \quad \forall k > 0.$$

2. *Sa fonction d'auto-corrélation partielle satisfait l'équation de récurrence linéaire suivante :*

$$\rho(k) + a_1 \rho(k-1) + \dots + a_p \rho(k-p) = 0, \quad \forall k > 0.$$

**Remarque 1.3.1** *On remarque que*

$$\gamma(k) = 0, \quad \forall |k| > p.$$

Pour mieux comprendre ce modèle, on propose de visualiser la trajectoire, le corrélogramme et le corrélogramme partiel du processus AR(2) :

$$Y_t = -0.8Y_{t-1} - 0.15Y_{t-2} + \epsilon_t$$

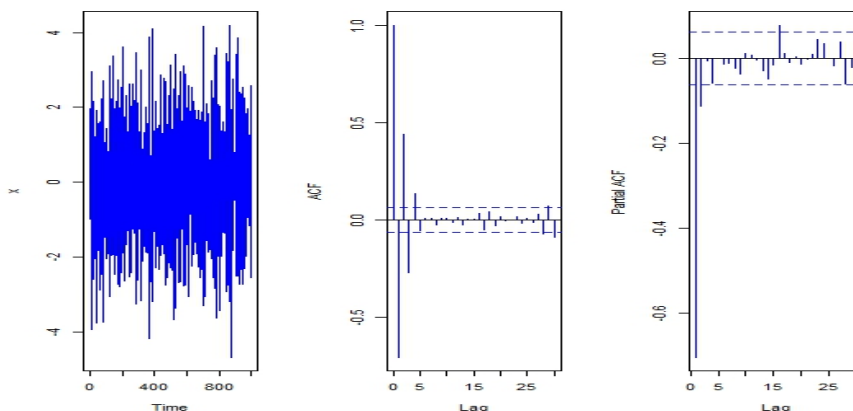


FIGURE 1.5 – AR(2)

Les graphiques fournissent une visualisation claire de ces caractéristiques, confirmant les propriétés attendues d'un processus AR(2).

La trajectoire de la série temporelle montre une dépendance à court terme avec des retours vers la moyenne. On observe des fluctuations aléatoires autour d'une moyenne, avec des variations qui semblent liées aux valeurs passées en raison de la structure AR(2).

L'ACF montre des corrélations significatives pour les premiers lags qui diminuent progressivement vers zéro. Pour un AR(2), on s'attend à voir des corrélations significatives aux lags 1 et 2, avec une décroissance rapide des corrélations pour les lags plus élevés.

Le PACF montre des pics significatifs aux lags 1 et 2, confirmant la nature AR(2) du processus. Au-delà du lag 2, les valeurs de PACF devraient être proches de zéro, ce qui indique que les corrélations directes à l'ordre supérieur sont négligeables.

Abordons désormais la conceptualisation des processus de moyennes mobiles, en mettant en évidence quelques-unes de leurs propriétés essentielles.

**Définition 1.3.4 (Processus MA)** *Soit  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit blanc centré de variance  $\sigma^2$ . On appelle  $(Y_t)$  un processus moyenne mobile d'ordre  $q$ , noté  $MA(q)$ , si  $\forall t$  :*

$$Y_t = \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} + \dots + b_q\epsilon_{t-p}.$$

**Définition 1.3.5** On définit son polynôme de retard par :

$$B(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q.$$

On définit également, son polynôme caractéristique par :

$$B(\lambda) = 1 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_q\lambda^q.$$

**Remarque 1.3.2** On remarque ainsi que

$$\gamma(\lambda) = 0, \quad \forall |\lambda| > q.$$

Pour mieux comprendre le modèle MA(1), nous allons examiner la trajectoire, le corrélogramme (ACF) et le corrélogramme partiel (PACF) du processus suivant :

$$Y_t = \epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1}$$

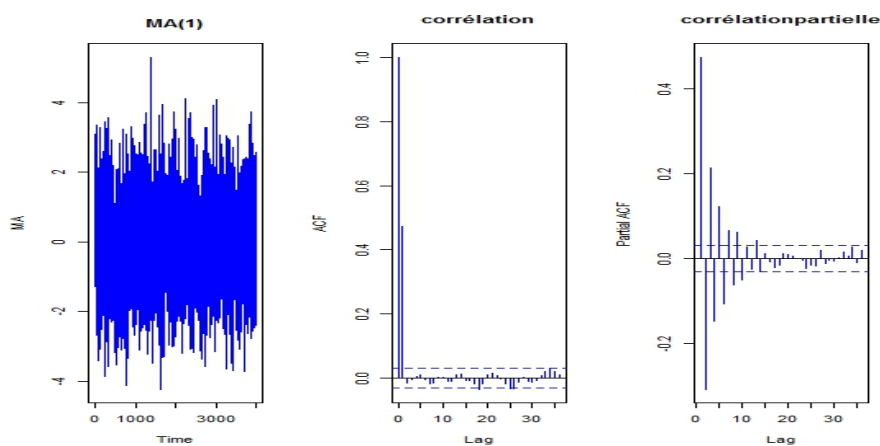


FIGURE 1.6 – MA(1)

Ces observations sont typiques pour un modèle MA(1) et aident à identifier et à comprendre les dépendances dans les séries temporelles modélisées par des processus de moyennes mobiles puisque,

La trajectoire montre des fluctuations aléatoires avec une apparence de bruit mais avec une certaine "lissage" dû à la moyenne pondérée des erreurs passées.

L'ACF montre une forte corrélation au lag 1 (environ 0.8) et des corrélations proches de zéro pour les lags supérieurs.

Le PACF montre une forte corrélation partielle au lag 1 et des corrélations partielles proches de zéro pour les lags supérieurs.

Comme nous l'avons déjà abordé, les processus  $ARMA(p, q)$  se construisent à partir de deux composantes principales : les processus auto-régressifs  $AR(p)$  et les moyennes mobiles  $MA(q)$ . Leur définition est la suivante :

**Définition 1.3.6 (Processus ARMA)** Soit  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un bruit blanc centré de variance  $\sigma^2$ . On appelle  $(Y_t)$  un processus ARMA( $p, q$ ), si  $\forall t$  :

$$Y_t + a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p} = \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q}.$$

**Définition 1.3.7** On définit ses deux polynômes de retards par :

$$A(L) = 1 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p.$$

$$B(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q.$$

**Définition 1.3.8** On définit ses deux polynômes caractéristiques par :

$$A(\lambda) = 1 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_p \lambda^p.$$

$$B(\lambda) = 1 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots + b_q \lambda^q.$$

La trajectoire, Le corrélogramme et corrélogramme partiel d'un processus ARMA (1, 1), nous met en évidence sur son comportement :

$$Y_t = 0.4Y_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

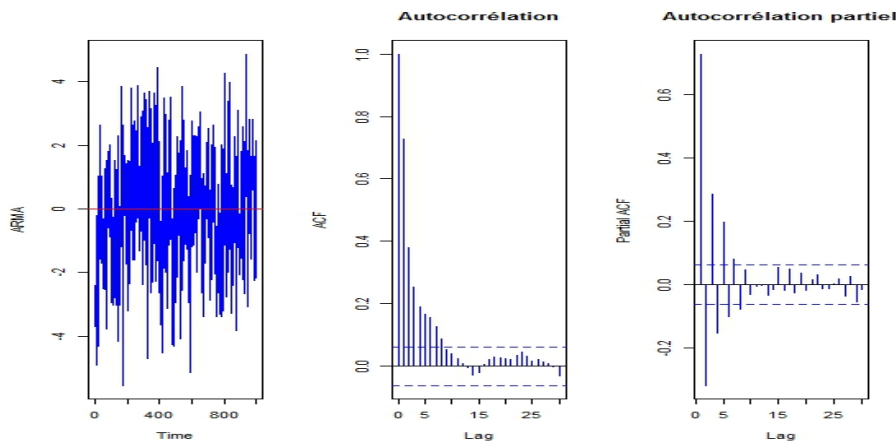


FIGURE 1.7 – ARMA(1,1)

L'ACF montre une corrélation significative à lag 1, influencée par les termes AR et MA. Pour les lags supérieurs, les corrélations devraient diminuer plus rapidement et de manière plus complexe qu'un simple AR(1) ou MA(1).

Le PACF montre une corrélation partielle significative à lag 1 en raison de la composante AR. Les corrélations partielles pour des lags supérieurs devraient rapidement décroître et être proches de zéro.

Examinons à présent brièvement les définitions des processus *ARIMA* (pour "Autoregressive Integrated Moving Average") et *SARIMA* (pour "Seasonal Integrated AutoRegressive Moving Average").

**Définition 1.3.9 (Processus ARIMA)** Soit  $\Delta$  l'opérateur de différenciation, i.e.

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

On appelle  $(Y_t)$  un processus  $ARIMA(p, d, q)$ , si le processus :

$$X_t = \Delta^d Y_t$$

est un processus  $ARMA(p, q)$ .

**Remarque 1.3.3** Ces processus  $ARIMA(p, d, q)$  conviennent particulièrement bien aux séries chronologiques qui ont une tendance polynomiale de degré  $d - 1$ .

Illustrons ces concepts avec un exemple concret en considérant un modèle  $ARIMA(1,3,2)$ .

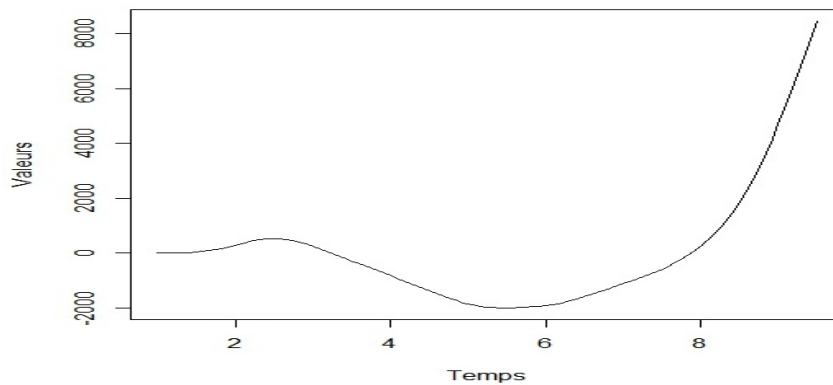


FIGURE 1.8 – Trajectoire du modèle  $ARIMA(1,3,2)$

L'analyse de la trajectoire, de la décomposition et des différenciations d'un processus  $ARIMA(1,3,2)$  révèle la complexité et les composants structurels de ce modèle.

La trajectoire du processus  $ARIMA(1,3,2)$  montre les valeurs de la série temporelle au fil du temps. En raison des trois différenciations, la trajectoire initiale peut apparaître très irrégulière et volatile. Ce comportement est typique des séries qui nécessitent plusieurs différenciations pour devenir stationnaires.

Nous passons à une étape courante pour préparer les données à la modélisation : la différenciation. Cette transformation est essentielle pour rendre la série temporelle stationnaire, éliminant ainsi les tendances et les cycles saisonniers, et la préparant ainsi à être ajustée par un modèle  $ARIMA$ .



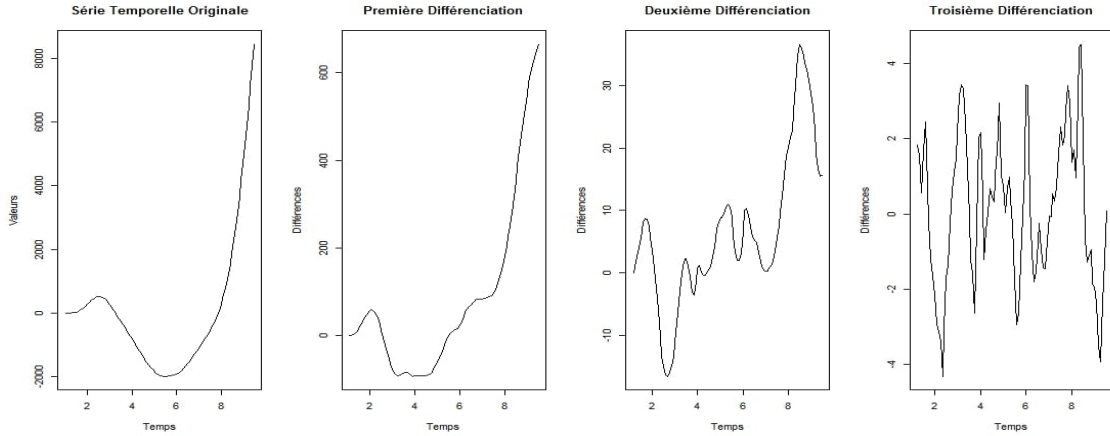


FIGURE 1.9 – La différenciation du modèle ARIMA (1,3,2)

Les graphiques des différenciations montrent la progression vers la stationnarité. Chaque différenciation successive montre une série de plus en plus stationnaire.

Première différenciation : Réduit la tendance, rendant la série plus stationnaire.

Deuxième différenciation : Enlève davantage les effets de tendance et rend la série encore plus stationnaire.

Troisième différenciation : Cette étape finale vise à éliminer toute tendance résiduelle, rendant la série complètement stationnaire.

Une fois la stationnarité atteinte, nous pouvons ajuster un modèle ARIMA sur les données différenciées et utiliser ce modèle pour des prévisions et des analyses plus robustes.

Il est important de noter, que le modèle ARIMA ne prend pas en compte les effets saisonniers potentiels dans les données. Pour intégrer ces effets saisonniers, nous pouvons étendre le modèle ARIMA à un modèle SARIMA (Seasonal ARIMA), qui ajoute des composants saisonniers aux termes autorégressifs, de différenciation et de moyenne mobile.

**Définition 1.3.10 (Processus SARIMA)** Soit  $\Delta_D$  l'opérateur défini de la façon suivante :

$$\Delta_D Y_t = Y_t - Y_{t-D}.$$

On appelle  $(Y_n)$  un processus SARIMA( $p, d, D, q$ ), si le processus :

$$X_t = \Delta_D \circ \Delta^d Y_t$$

est un processus ARMA( $p, q$ ) .

**Remarque 1.3.4** Ces processus SARIMA( $p, d, D, q$ ) conviennent particulièrement bien aux séries chronologiques qui ont une tendance polynômiale de degré  $d$ , et une période de longueur  $D$ .

Pour mieux capturer les patterns périodiques dans les données, il est instructif de considérer un exemple concret. Par exemple, un modèle SARIMA(1, 1, 1, 1)[12] peut être utilisé pour modéliser des données mensuelles avec une saisonnalité annuelle.

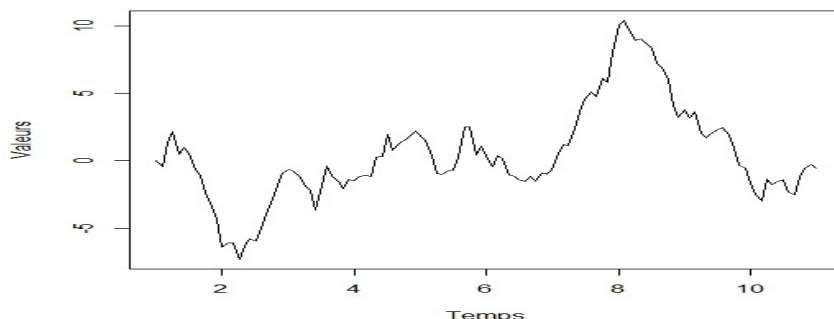


FIGURE 1.10 – Trajectoire du modèle SARIMA(1,1,1,1)

Le graphique de la trajectoire montre une série temporelle avec des fluctuations et une saisonnalité apparente. La trajectoire n'est pas lisse, ce qui est attendu pour une série qui inclut des composantes aléatoires et saisonnières.

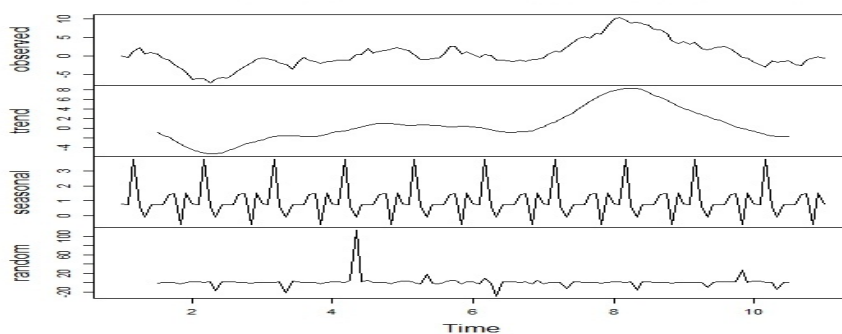


FIGURE 1.11 – Décomposition de la Série Temporelle.

La décomposition révèle trois composants distincts : La composante de tendance montre la direction générale des données, ajustée pour les saisons et les irrégularités. Les motifs saisonniers sont capturés et montrent des répétitions régulières sur la période de 12 mois. Les résidus montrent les variations qui ne sont pas expliquées par la tendance ou la saisonnalité, représentant le bruit dans les données.

On utilise ainsi, la différenciation des séries temporelles, pour rendre les séries stationnaires et supprimer les tendances et les composantes saisonnières.

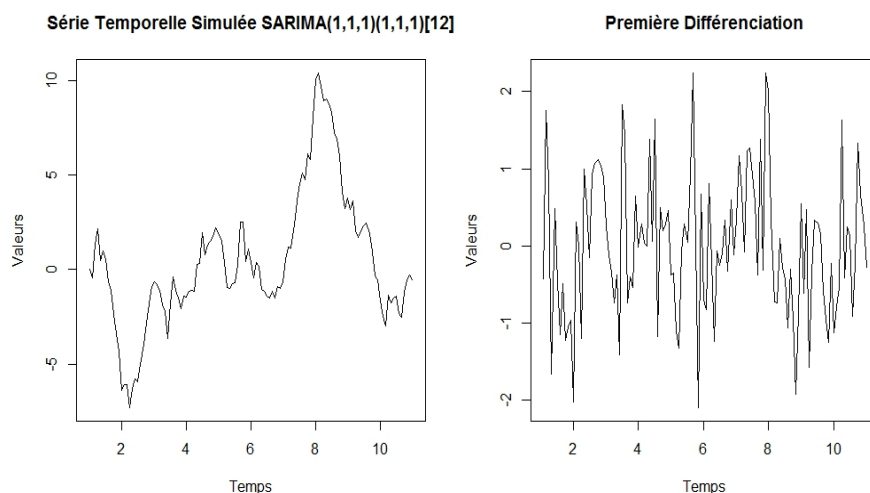


FIGURE 1.12 – Différenciation de la série

Le graphique des données différenciées montre une série plus stationnaire, essentielle pour l'analyse et la modélisation SARIMA. Les variations sont centrées autour de zéro, ce qui est une indication de la stationnarité après différenciation.

Après avoir défini les processus ARMA, ARIMA et SARIMA ainsi que leurs propriétés, nous pouvons maintenant aborder la section suivante consacrée à l'estimation des modèles ARMA.

L'estimation théorique d'un modèle *ARMA* implique l'identification des ordres du modèle, l'estimation des paramètres et l'évaluation de l'adéquation du modèle aux données observées, suivie de sa validation et de son utilisation pour faire des prédictions sur de nouvelles données.

### 1.3.2 Estimation des paramètres

Par conséquent, en se référant à la notation précédente,  $(Y_t)$  est considéré comme un processus *ARMA*( $p, q$ ) si, pour tout  $t$  :

$$Y_t + a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p} = \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q}.$$

On constate que plusieurs paramètres ont été mentionnés sans être définis. Il s'agit spécifiquement des valeurs de :

- ▷  $p$  et  $q$ ,
- ▷  $a_1, a_2, \dots, a_p$  et  $b_1, b_2, \dots, b_q$ ,

L'estimation des paramètres  $p$  et  $q$  se réalise en interprétant les graphes des fonctions d'auto-corrélation et d'auto-corrélation partielle. Plus précisément, le graphe de la fonction d'auto-corrélation révèle la valeur de  $q$ , tandis que le graphe de la fonction d'auto-corrélation partielle détermine la valeur de  $p$ .

Dans les graphiques de l'ACF (Fonction d'Auto-Corrélation) et du PACF (Fonction d'Auto-Corrélation Partielle), les valeurs significatives qui dépassent les limites de l'intervalle de confiance suggèrent la présence de corrélations entre les observations à différents retards. Pour identifier les valeurs de  $p$  et  $q$  :

- Si l'ACF diminue progressivement jusqu'à devenir insignifiante après le retard  $q$ , cela indique un processus de moyenne mobile d'ordre  $q$ . Les retards au-delà de  $q$  sont généralement considérés comme non significatifs.
- Les corrélations significatives dans le PACF jusqu'au retard  $p$  suggèrent un processus autorégressif d'ordre  $p$ . Les corrélations après le retard  $p$  sont généralement considérées comme non significatives.

En examinant ces graphiques, nous pouvons identifier les valeurs de  $p$  et  $q$  en fonction des retards où les corrélations deviennent non significatives.

Pour illustrer ce processus, prenons un jeu de données fictives et examinons les graphes des fonctions d'auto-corrélation et d'auto-corrélation partielle associés :

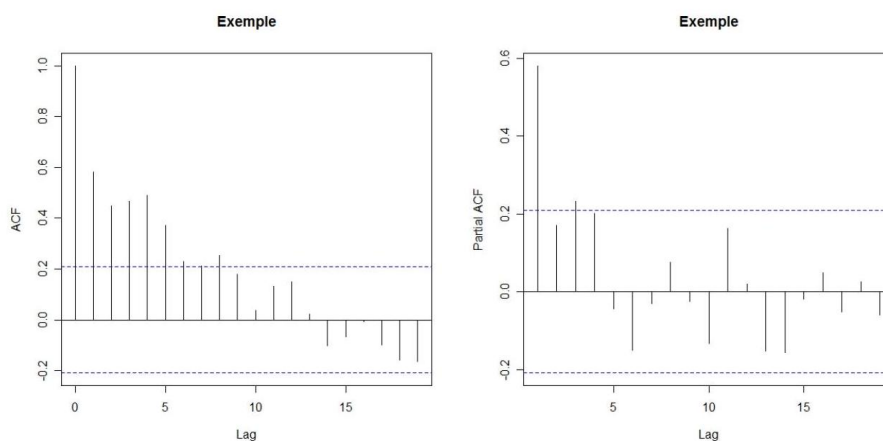


FIGURE 1.13 – ACF et PACF d'un jeu de données fictives.

Dans cet exemple, on remarque que sur le graphe ACF, le retard à partir duquel les corrélations deviennent non significatives est 8, suggérant un ordre  $q$  de 8 pour la moyenne mobile. De même, d'après le graphe PACF, les corrélations significatives sont présentes jusqu'au retard 3, suggérant un ordre  $p$  de 3 pour le processus autorégressif.

Pour optimiser le modèle, il est envisageable de choisir des valeurs de  $p$  et  $q$  inférieures à celles initialement estimées, en utilisant des critères comme l'AIC ou le BIC. Ces critères simplifient la comparaison des modèles obtenus et permettent de sélectionner celui qui présente le meilleur compromis entre ajustement et complexité.

**Définition 1.3.11 (Critère d'Akaike ou AIC)** *Le meilleur des modèles ARMA( $p, q$ ) est le modèle qui minimise la statistique :*

$$AIC(p, q) = T \log(\sigma_\epsilon^2) + 2(p + q).$$

**Définition 1.3.12 (Critère d'information bayésien ou BIC)** *Le meilleur des modèles ARMA( $p, q$ ) est le modèle qui minimise la statistique :*

$$BIC(p, q) = T \log(\sigma_\epsilon^2) - (n - p + q) \log \left[ 1 - \frac{p + q}{T} \right] + (p + q) \log(T) + \log \left[ (p + q)^{-1} \left( \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon^2 - 1} \right) \right].$$

**Définition 1.3.13 (Critère de Schwarz (1978))** *Le meilleur des modèles ARMA( $p, q$ ) est le modèle qui minimise la statistique :*

$$SC(p, q) = T \log(\sigma_\epsilon^2) + (p + q) \log(T).$$

**Définition 1.3.14 (Critère de Hannan-Quin (1979))** *Le meilleur des modèles ARMA( $p, q$ ) est le modèle qui minimise la statistique :*

$$HQ(p, q) = \log(\sigma_\epsilon^2) + (p + q)c \log \left[ \frac{\log(T)}{T} \right].$$

Lorsqu'on a déterminé les ordres  $p$  et  $q$ , l'estimation du modèle ARMA implique aussi, l'utilisation de méthodes statistiques pour estimer les paramètres du modèle, à savoir les coefficients autorégressifs ( $a_i$ ) et les coefficients de la moyenne mobile ( $b_i$ ), ainsi que les termes d'erreur ( $\epsilon_t$ ). Ils sont estimés en ajustant le modèle aux données observées à l'aide de techniques d'estimation telles que,

- Moindres Carrés Ordinaires.
- Maximum de Vraisemblance approché (Box et Jenkins [1970]).
- Maximum de Vraisemblance exacte (Newbold [1974], Harvey et Philips [1979], Harvey [1981]).

En pratique, les logiciels statistiques ou les packages dédiés fournissent des fonctions pour estimer les paramètres du modèle ARMA à partir des données. Une fois les paramètres estimés, le modèle peut être utilisé pour faire des prédictions, analyser les données, ou effectuer des tests statistiques pour évaluer sa pertinence et son adéquation aux données observées.

Une fois que les paramètres ont été estimés avec précision, on peut ensuite utiliser le modèle ARMA pour faire des prévisions futures en appliquant les coefficients estimés aux données récentes ou existantes.

### 1.3.3 Prévision

Lorsque on a identifié le processus étudié à un processus ARMA, on a appliqué différentes transformations, il est nécessaire lors de la phase de prévision de prendre en compte la transformation retenue.

On considère un processus  $ARMA(p, q)$  de la forme suivante :

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q}.$$

En appliquant le théorème de Wold et en considérant la forme  $MA(\infty)$  correspondante :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \epsilon_{t-j}; \quad \varphi_0 = 1.$$

La meilleure prévision que l'on peut faire de  $Y_{t+1}$  compte tenu de toute l'information disponible jusqu'à la date  $Y_t$ , notée  $\hat{Y}_t(1)$ , est donnée par :

$$\hat{Y}_t(1) = E(Y_{t+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0) = E(Y_{t+1} | \epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \epsilon_{t+1-j}.$$

L'erreur de prédiction est alors de :

$$Y_{t+1} - \hat{Y}_t(1) = \epsilon_{t+1}.$$

Le procédé précédent peut être généralisé à une prévision à un horizon  $h$  :

$$\hat{Y}_t(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \epsilon_{t+h-j}; \quad \alpha_0 = 1.$$

d'erreur de prédiction :

$$Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \varphi_j \epsilon_{t+h-j}.$$

Déterminons un intervalle de confiance sur la prévision  $\hat{Y}_t(h)$ , sous l'hypothèse de normalité des résidus  $\epsilon_t$  :

$$\frac{Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h)}{\text{Var}(Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h))^{1/2}} \xrightarrow{L}_{t \rightarrow \infty} N(0, 1).$$

Comme,

$$E \left\{ (Y_{t+h} - \hat{Y}_t(h))^2 \right\} = E \left\{ \left( \sum_{j=0}^{h-1} \varphi_j \epsilon_{t+h-j} \right)^2 \right\} = \sum_{j=0}^{h-1} \varphi_j^2 \sigma_\epsilon^2,$$

on a alors,

$$\frac{Y_{t+k} - \hat{Y}_t(k)}{\sigma_\epsilon \left[ \sum_{j=0}^{h-1} \varphi_j^2 \right]^{1/2}} \xrightarrow{L}_{t \rightarrow \infty} N(0, 1),$$

on obtient l'intervalle de confiance suivant de niveau  $\beta$  :

$$\left[ \hat{Y}_t(h) - z^{\beta/2} \left( \sum_{j=0}^{h-1} \varphi_j^2 \right)^{1/2} \hat{\sigma}_\epsilon; \hat{Y}_t(k) + z^{\beta/2} \left( \sum_{j=0}^{h-1} \varphi_j^2 \right)^{1/2} \hat{\sigma}_\epsilon \right].$$

Prenons un exemple pratique de prévision des ventes mensuelles d'un produit en utilisant un modèle ARMA.

## 1.4 La notion d'espérance et de variance conditionnelles et non conditionnelles

Pour introduire ces concepts, nous considérons un modèle du taux d'intérêt à court terme. Nous adoptons ainsi un processus autorégressif AR(1) qui demeure stationnaire.

$$Y_t = \mu + a_1 Y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2).$$

Dans cette équation,  $Y_t$  représente la valeur du taux d'intérêt à l'instant  $t$ .

- Nous voulons prévoir  $Y_{t+1}$  en utilisant l'espérance non conditionnelle, on procède comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= \mu + a_1 Y_t + \epsilon_{t+1}, \\ E(Y_{t+1}) &= \mu + a_1 E(Y_t) + E(\epsilon_{t+1}), \end{aligned}$$

La moyenne d'une série stationnaire étant constante, l'espérance non conditionnelle permet de calculer des prévisions à long terme d'une variable, correspondant à sa moyenne à long terme. Ainsi, on peut écrire :

$$E(Y_{t+1}) = \mu + a_1 E(Y_t) \text{ puisque } E(\epsilon_t) = E(\epsilon_{t+1}) = 0, \forall t.$$

Il en résulte que,

$$E(Y_{t+1}) = \frac{\mu}{1 - a_1}$$

- Notre attention se porte désormais sur la prévision à court terme de  $Y_{t+1}$ . L'espérance conditionnelle nous fournit alors une estimation supérieure à l'espérance non conditionnelle. En effet, l'espérance conditionnelle intègre toute l'information disponible jusqu'au temps  $t$ , supposant que toutes les variables sont connues et figées jusqu'à cet instant. Ainsi, nous pouvons formuler :

$$E_t(Y_{t+1}) = \mu + a_1 E_t(Y_t) + E_t(\epsilon_{t+1}) = \mu + a_1 Y_t$$

$Y_t$  est en effet connu au temps  $t$  et n'est donc pas aléatoire.

Par ailleurs  $\epsilon_{t+1}$  est inconnu à la période  $t$ . Son espérance conditionnelle est donc nulle. Pour introduire les notions de variances conditionnelle et non conditionnelle, nous au recourons au processus autorégressif suivant :

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2).$$

Nous supposons également que  $Y$  est une série stationnaire.

- En se basant sur les calculs précédents, nous pouvons exprimer la variance conditionnelle de la manière suivante :

$$Var_t(Y_t) = E_t[Y_t - E_t(Y_t)]^2 = \sigma^2.$$

- Pour calculer la variance non conditionnelle, nous recourons à l'équation qui relie  $Y_t$  au décalage de l'innovation. Pour établir cette relation, nous exprimons l'équation de  $Y_t$  comme suit :

$$Y_t(1 - a_1L) = \epsilon_t,$$

où  $L$  désigne l'opérateur de retard.

En multipliant les deux côtés de cette expression par  $(1 - L)^{-1}$ , on obtient :

$$Y_t = (1 - a_1L)^{-1}\epsilon_t;$$

En utilisant une propriété bien connue de l'opérateur de retard, on a :

$$Y_t = \epsilon_t + a_1\epsilon_{t-1} + a_1^2\epsilon_{t-2} + \dots + a_1^p\epsilon_{t-p}, p \rightarrow \infty.$$

La variance non conditionnelle est donc égale à :

$$Var(Y_t) = \sigma^2(1 + a_1^2 + a_1^4 + \dots).$$

L'expression entre parenthèses est une progression géométrique de raison  $a_1^2$ .

La variance non conditionnelle de  $Y_t$  se simplifie donc comme suit :

$$Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}$$

La variance non conditionnelle est donc différente de la variance conditionnelle.

**Remarque 1.4.1** *Dans un modèle ARMA, l'espérance conditionnelle à un temps donné est la moyenne prédite de la série, compte tenu des observations passées. Cela signifie que la prévision de la prochaine valeur dépend des valeurs précédentes de la série. L'espérance non conditionnelle, c'est la moyenne à long terme de la série, indépendante des valeurs spécifiques observées. Pour un processus ARMA stationnaire, cette moyenne est constante.*

*La variance conditionnelle est la variance des erreurs de prévision à un moment donné, basée sur les informations passées. Dans un modèle ARMA, cette variance est constante et indépendante du temps. La variance totale de la série, qui est également constante dans un processus ARMA stationnaire.*

Les concepts d'espérance et de variance conditionnelles et non conditionnelles sont essentiels pour comprendre la dynamique des séries chronologiques modélisées par ARMA, ARCH et GARCH. Les modèles ARMA se concentrent principalement sur l'espérance conditionnelle, tandis que les modèles ARCH et GARCH se spécialisent dans la modélisation de la variance conditionnelle pour capturer la volatilité changeante des séries financières.

Les modèles ARMA sont efficaces pour capturer les dépendances linéaires dans les séries temporelles, mais ils ne prennent pas en compte la volatilité conditionnelle souvent observée dans les données financières. Pour modéliser cette volatilité hétéroscédastique, nous introduisons les modèles ARCH et GARCH, qui permettent de saisir les variations dynamiques de la variance au fil du temps.



Ce chapitre explore les fondements théoriques des modèles ARCH et GARCH, essentiels pour comprendre et modéliser la volatilité des séries temporelles financières. Nous commençons par une introduction aux modèles ARMA, qui traitent des dépendances linéaires sans prendre en compte la variation de la volatilité. Ensuite, nous approfondissons les modèles ARCH, qui introduisent la notion de variance conditionnelle en fonction des erreurs passées. Ce concept est ensuite étendu aux modèles GARCH, qui ajoutent une dimension de persistance à la volatilité, permettant une modélisation plus réaliste des données financières, où la volatilité est non seulement regroupée (clusterisée) mais également persistante.

La volatilité, en tant que notion statistique, mesure la variabilité instantanée d'une série temporelle. Dans le domaine de la finance, elle est considérée comme un indicateur clé du risque. Les modèles ARCH et GARCH sont donc des outils précieux pour les analystes et les gestionnaires de risques, car ils fournissent une compréhension plus nuancée et dynamique des fluctuations du marché.

Diverses sources ont été consultées pour enrichir le contenu de ce chapitre, parmi lesquelles figurent : [3],[4],[9],[11],[14],[16].

## 2.1 Le modèle ARCH

### 2.1.1 Le Modèle ARCH(1)

**Définition 2.1.1** *Un modèle  $Y_t$  est dit autoregressif conditionnellement hétéroscédastique d'ordre 1 qu'on note par ARCH(1), s'il admet l'écriture suivante :*

$$Y_t = \epsilon_t \sigma_t, \quad (2.1)$$

telle que,

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2,$$

et  $\epsilon_t$  est un bruit blanc faible ;  $E(\epsilon_t) = 0$  et  $E(\epsilon_t^2) = \sigma_\epsilon^2$  et  $\pi_0 > 0, \pi_1 > 0$ .

**Remarque 2.1.1** En général, les  $\epsilon_t$  sont des variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites, qui suivent la même distribution. La variable  $\sigma_t^2$  est définie par  $\pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2$  et dépend des informations contenues dans les valeurs passées de  $Y_t$ . Ainsi,

$$\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-j}, \dots\},$$

est un ensemble d'information déterministe et positive.

Le processus  $Y_t$  se caractérise par l'absence d'autocorrélation et par une variance conditionnelle qui évolue au fil du temps en fonction de l'ampleur des innovations précédentes. Cela permet d'obtenir des résultats intéressants, tels que :

**Proposition 2.1.1** Lorsqu'un processus  $Y_t$  est conforme à une représentation ARCH(1), alors  $Y_t^2$  est conforme à une représentation AR(1), telle que ,

$$Y_t^2 = \pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2 + \eta_t, \quad (2.2)$$

où  $\eta_t = Y_t^2 - \sigma_t^2$  vérifiant  $E(\eta_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$  est un processus d'innovation pour  $Y_t^2$ .

**Remarque 2.1.2** Le processus  $Y_t^2$  est reconnu comme étant stationnaire au second ordre, à condition que  $|\pi_1| < 1$ .

En se basant sur ces différentes expressions, il est possible de déduire plusieurs propriétés qui pourront être généralisées aux processus ARCH( $p$ ).

**Proposition 2.1.2** Le processus  $Y_t$  qui correspond à une représentation ARCH(1), tel que défini par l'équation 2.1, est une différence de martingale homoscédastique :

$$E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad Var(Y_t) = \frac{\pi_0}{1 - \pi_1}.$$

**Remarque 2.1.3** On peut noter que pour tout  $n > 1$ ,  $E(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) = 0$ .

La caractéristique suivante est essentielle pour les processus ARCH, qui se caractérisent par une variance conditionnelle du processus  $Y_t$  évoluant dans le temps.

**Proposition 2.1.3** La variance conditionnelle du processus  $Y_t$ , qui suit une représentation ARCH(1) comme définie par l'équation (2.1), varie dans le temps et démontre que,

$$\forall t, \quad Var(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) = \pi_0 \left( \frac{1 - \pi_1^n}{1 - \pi_1} \right) + \pi_1^n Y_{t-n}^2.$$

**Preuve.**

Sachant que  $E(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) = 0$  alors,  $Var(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) = E(Y_t^2/\mathcal{F}_{t-n})$ .

Considérons le processus  $Y_t^2$  défini par l'équation (2.2) où  $\eta_t$  est un bruit blanc faible. Par itération successive, on a :

$$Y_t^2 = \pi_0(1 + \pi_1 + \pi_1^2 + \dots + \pi_1^n) + \eta_t + \pi_1\eta_{t-1} + \pi_1^2\eta_{t-2} + \dots + \pi_1^{n-1}\eta_{t-(n-1)} + \pi_1^n Y_{t-n}^2.$$

En considérant l'espérance conditionnelle de chaque terme, il vient que :

$$E(Y_t^2/\mathcal{F}_{t-n}) = \pi_0 \left( \frac{1 - \pi_1^n}{1 - \pi_1} \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \pi_1^j E(\eta_{t-j}/\mathcal{F}_{t-n}) + \pi_1^n E(Y_{t-n}^2/\mathcal{F}_{t-n}).$$

Compte tenu de la définition du bruit blanc  $\eta_t$ , on a  $E(\eta_{t-j}/\mathcal{F}_{t-n}) = 0 \forall j = 0, \dots, n-1$  et de la définition :  $E(Y_{t-n}^2/\mathcal{F}_{t-n}) = Y_{t-n}^2$ , nous obtenons ainsi la formule :

$$Var(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) = \pi_0 \left( \frac{1 - \pi_1^n}{1 - \pi_1} \right) + \pi_1^n Y_{t-n}^2, \forall t.$$

**Remarque 2.1.4** À mesure que  $n$  tend vers l'infini, les variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle. Par suite,  $\forall \pi_0 > 0$  et  $0 < \pi_1$ ,

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} Var(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \pi_0 \left( \frac{1 - \pi_1^n}{1 - \pi_1} \right) + \pi_1^n Y_{t-n}^2 \right] \\ &= \frac{\pi_0}{1 - \pi_1}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.4** L'équation 2.1 indique que les auto-covariances conditionnelles du processus  $Y_t$  sont nulles ;

$$Cov(Y_t, Y_{t+s}/\mathcal{F}_{t-n}) = 0, \forall n, s \geq 1.$$

Ainsi,  $Y_t$  est un processus qui, conditionnellement à  $\mathcal{F}_{t-n}$ , est un processus sans mémoire.

**Preuve.**

Considérons la covariance conditionnelle entre  $Y_t$  et  $Y_{t+s}$  :

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t+s}/\mathcal{F}_{t-n}) &= E\{[Y_t Y_{t+s} - E(Y_t/\mathcal{F}_{t-n})E(Y_{t+s}/\mathcal{F}_{t-n})]/\mathcal{F}_{t-n}\} \\ &= E(Y_t Y_{t+s}/\mathcal{F}_{t-n}) \\ &= E[E(Y_t Y_{t+s}/\mathcal{F}_{t+s-1})/\mathcal{F}_{t-n}] \\ &= E[Y_t E(Y_{t+s}/\mathcal{F}_{t+s-1})/\mathcal{F}_{t-n}] = E(Y_t \times 0/\mathcal{F}_{t-n}) = 0. \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.5** Dans le cadre du processus  $Y_t$ ,

(i) Le moment conditionnel centré d'ordre 4 vérifie,

$$E(Y_t^4/\mathcal{F}_{t-1}) = 3(\pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2)^2.$$

(ii) Le moment non conditionnel centré d'ordre 4 du processus  $Y_t$ , lorsque  $3\pi_1^2 < 1$ , est,

$$E(Y_t^4) = \frac{3\pi_0^2(1 + \pi_1)}{(1 - 3\pi_1^2)(1 - \pi_1)}.$$

Par conséquent, la Kurtosis non conditionnelle de processus ARCH(1) est :

$$K_m = \frac{E(Y_t^4)}{E(Y_t^2)^2} = \frac{3(1 - \pi_1^2)}{(1 - 3\pi_1^2)} > 3.$$

**Preuve.**

1. On rappelle que, si une variable centrée  $Y$  suit une loi gaussienne,

$$E(Y^4) = 3(Var(Y^2)) = 3(E(Y^2))^2.$$

Ainsi, le moment conditionnel centré d'ordre 4 du processus  $Y_t$  vérifie,

$$E(Y_t^4/\mathcal{F}_{t-1}) = 3E(Y_t^2/\mathcal{F}_{t-1})^2 = 3(\pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2)^2.$$

2. Lorsque,  $3\pi_1^2 < 1$ , le moment non conditionnelle centré d'ordre 4 du processus  $Y_t$  est donné par,

$$\begin{aligned} E(Y_t^4) &= E[E(Y_t^4/\mathcal{F}_{t-1})] \\ &= E[3(\pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2)^2] \\ &= 3[\pi_0^2 + \pi_1^2 E(Y_{t-1}^4) + 2\pi_0\pi_1 E(Y_{t-1}^2)] \\ &= 3 \left[ \pi_0^2 + \pi_1^2 E(Y_{t-1}^4) + 2 \frac{\pi_0^2 \pi_1}{1 - \pi_1} \right] \\ &= \frac{3\pi_0(1 + \pi_1)}{(1 - 3\pi_1^2)(1 - \pi_1)}. \end{aligned}$$

3. Par conséquent, la définition de le kurtosis non conditionnelle du processus ARCH(1) est donnée par :

$$K_m = \frac{E(Y_t^4)}{E(Y_t^2)^2} = 3 \left( \frac{1 - \pi_1^2}{1 - 3\pi_1^2} \right) > 3.$$

**Proposition 2.1.6** *Le moment non conditionnel centré d'ordre 3 de processus ARCH(1) est obtenu par :*

$$\begin{aligned}
 E(Y_t^3) &= E[E(Y_t^3/Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)] \\
 &= E[E(\epsilon_t^3 \sigma_t^3 / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)] \\
 &= E[\sigma_t^3 E(\epsilon_t^3 / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)] \\
 &= E[\sigma_t^3 \times 0] = 0.
 \end{aligned}$$

Alors, le Skewness associée au processus ARCH(1) est égale à :

$$S_k = \frac{E(Y_t^3)}{E(Y_t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Toutes ces propriétés peuvent être généralisées au cas d'un processus ARCH( $p$ ).

Pour comprendre les propriétés du modèle ARCH(1), on simule le modèle en R.

1. En visualisant la trajectoire du processus  $Y_t$ , généré à partir du modèle ARCH(1) avec les paramètres donnés :

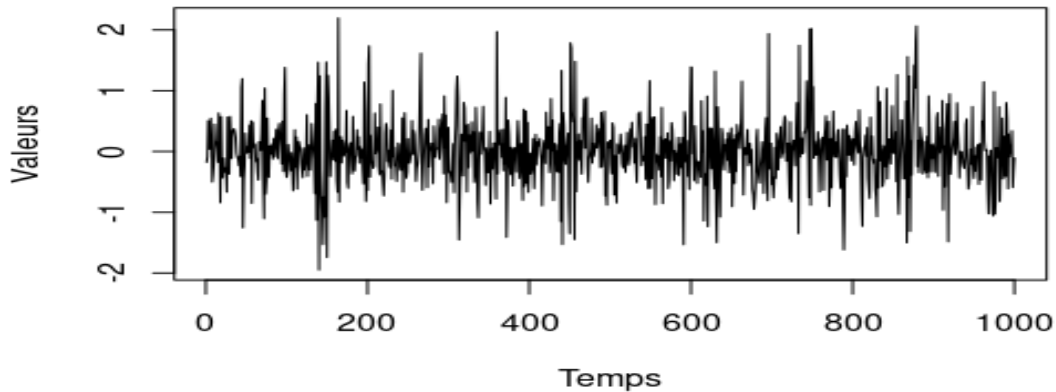


FIGURE 2.1 – Le modèle ARCH(1)

La série temporelle générée par le modèle ARCH(1) montre des périodes de faible et de forte volatilité, ce qui est caractéristique des modèles ARCH. Les valeurs fluctuent autour de la moyenne avec des périodes calmes et turbulentes.

2. La courbe dans la figure 2.2, représente l'évolution de la variance conditionnelle du processus ARCH(1) au fil du temps. Cette variance conditionnelle est calculée à partir des valeurs passées du processus et des paramètres du modèle, selon la formule spécifique de l'ARCH(1).

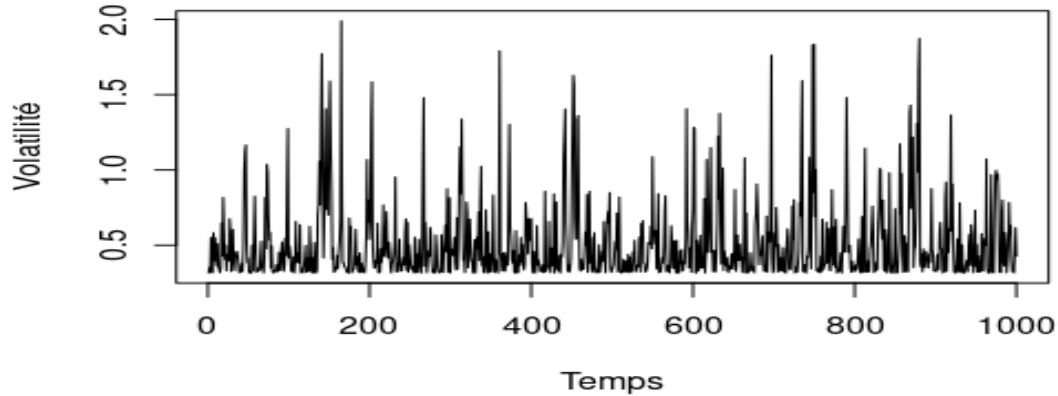


FIGURE 2.2 – La Volatilité conditionnelle du modèle ARCH(1)

La volatilité conditionnelle change au fil du temps, reflétant les changements dans l'incertitude des données. Les pics de volatilité montrent que des niveaux élevés de volatilité peuvent persister pendant plusieurs périodes.

**Remarque 2.1.5** Les paramètres du modèle ARCH(1), tels que  $\pi_0$  et  $\pi_1$ , influencent la forme de la variance conditionnelle. En ajustant ces paramètres, on peut observer comment la volatilité conditionnelle du processus réagit et évolue au fil du temps.

### 2.1.2 Le modèle ARCH(p)

**Définition 2.1.2** Un processus  $Y_t$  satisfait une représentation ARCH(p) si :

$$Y_t = \epsilon_t \sigma_t$$

avec

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2.$$

et  $\epsilon_t$  désigne un bruit blanc faible ;  $E(\epsilon_t) = 0$  et  $\text{var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$ ,  $\pi_0 > 0$  et  $\pi_i > 0$ .

Dans ce type de processus, nous observons deux propriétés fondamentales précédemment évoquées : la propriété de différence de martingale (ou bruit blanc faible), où l'espérance conditionnelle des observations futures, conditionnée à l'information passée, est nulle ( $E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ),

et la propriété de variance conditionnelle variable dans le temps. Cela se manifeste par le fait que :

$$Var(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2.$$

Afin de mieux comprendre ce modèle, on peut essayer de simuler des processus ARCH(p) :

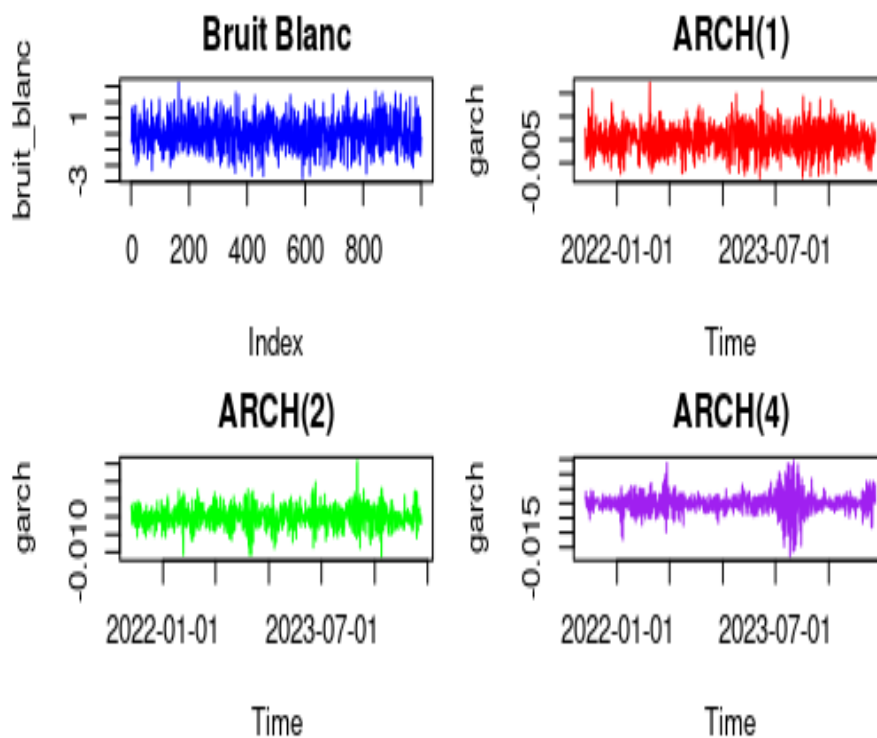


FIGURE 2.3 – Simulation des processus ARCH(p).

On peut constater que plus le nombre de paramètres du modèle est élevé, plus la volatilité est persistante. Plus précisément, l'ordre  $p$  du modèle détermine la durée de la persistance du choc. Ainsi, en augmentant le nombre de paramètres, on accentue le phénomène de "cluster".

### 2.1.3 Le modèle ARCH(p) avec erreur

Désormais, nous ne considérons plus directement un processus ARCH pour modéliser la série financière, mais plutôt le résidu d'un modèle linéaire. Prenons l'exemple d'un modèle linéaire autorégressif avec des résidus de type ARCH(p).

**Définition 2.1.3** *Considérons un modèle linéaire autorégressif de la forme suivante :*

$$Y_t = E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) + Z_t.$$

où  $Z_t$  est un bruit blanc faible, tel que  $E(Z_t) = 0$  et  $E(Z_t Z_n) = 0$  si  $n \neq t$ .

Supposons que ce résidu admet une représentation de type ARCH( $p$ ) :

$$Z_t = \epsilon_t \sigma_t.$$

avec

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Z_{t-i}^2.$$

Ainsi, nous disposons d'un modèle qui capture à la fois l'évolution de l'espérance conditionnelle et de la variance conditionnelle du processus  $Y_t$  au fil du temps. Un exemple courant est celui d'un processus de type AR(1) avec une erreur de type ARCH(1).

$$Y_t = \delta + \pi Y_{t-1} + Z_t, |\pi| < 1.$$

$$Z_t = \epsilon_t (\pi_0 + \pi_1 Z_{t-1}^2).$$

Dans ce contexte, les résidus respecteront les propriétés principales examinées précédemment.

▷ Le processus  $Z_t$  est orthogonale aux valeurs passées :

$$E(Z_t / \mathcal{F}_{t-n}) = 0, \forall n > 1.$$

▷ La variance conditionnelle dépendant du temps, car

$$\text{Var}(Z_t / \mathcal{F}_{t-n}) = \pi_0 \left( \frac{1 - \pi_1^n}{1 - \pi_1} \right) + \pi_1^n Z_{t-n}^2,$$

$$\text{Var}(Z_t) = \frac{\pi_0}{1 - \pi_1}.$$

▷ Les auto-covariances conditionnelles sont nulles :

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t+s} / \mathcal{F}_{t-n}) = 0, \forall n, s \geq 1.$$

▷ Sous l'hypothèse  $3\pi_1^2 < 1$ , la distribution des résidus est leptokurtique, car :

$$K_m = \frac{3(1 - \pi_1^2)}{(1 - 3\pi_1^2)} > 3.$$

De plus, plusieurs conclusions peuvent être déduites concernant le processus  $Y_t$  lui-même.

Premièrement, nous pouvons montrer que l'espérance conditionnelle de  $Y_t$  satisfait :

$$\begin{aligned} E(Y_t / \mathcal{F}_{t-n}) &= \delta + \pi E(Y_{t-1} / \mathcal{F}_{t-n}) \\ &= \delta \left( \frac{1 - \pi^n}{1 - \pi} \right) + \pi^n Y_{t-n}. \end{aligned}$$

De manière similaire, nous pouvons démontrer que la variance conditionnelle de  $Y_t$  dépend du temps. En effet, elle dépend du processus  $Z_{t-n}^2$  comme suit.



**Proposition 2.1.7** *La variance conditionnelle du processus AR(1) avec erreur ARCH(1),  $Y_t$  s'écrit :*

$$\text{Var}(Y_t/\mathcal{F}_{t-n}) = \left( \frac{\delta}{1-\pi_1} \right) \left[ \left( \frac{1-\pi_1^{2n}}{1-\pi_1^2} \right) - \pi_1 \left( \frac{\pi_1^n - \pi_1^{2n}}{\pi_1 - \pi_1^2} \right) \right] + \pi_1 \left( \frac{\pi_1^n - \pi_1^{2n}}{\pi_1 - \pi_1^2} \right) Z_{t-n}^2.$$

*Par conséquent, la variance de l'erreur de prévision à l'horizon 1 peut être exprimée comme suit :*

$$\text{Var}(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \delta + \pi_1 Z_{t-1}^2.$$

**Remarque 2.1.6** *Pour prédire le processus  $Y_t$  avec un modèle ARCH(1), l'erreur de prévision à un horizon d'une période présente une variance*

$$\text{Var}(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) \text{ qui varie dans le temps en fonction de la valeur de } Z_{t-1}^2.$$

Après avoir défini les modèles ARCH(1) et ARCH(p) et abordé les erreurs potentielles dans leur spécification, nous passons maintenant à l'estimation des paramètres du modèle ARCH(p) afin de comprendre et de quantifier la dynamique de la volatilité dans nos données.

#### 2.1.4 Estimation des paramètres du modèle ARCH

L'estimateur des paramètres de modèle ARCH se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Cette méthode est plus complexe mais elle est plus robuste et plus efficace, en particulier pour les modèles non linéaires comme les modèles ARCH. Cette approche repose sur l'hypothèse que  $Y_t$  est conditionnellement gaussien.

Pour commencer, nous nous appuyons sur la présentation de Gouriéroux [15].

Soit un modèle tel que :

$$E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}, Y_t) = m_t(\mathcal{F}_{t-1}, Y_t, \theta) = m_t(\theta).$$

$$\text{Var}(X_t/\mathcal{F}_{t-1}, Y_t) = \sigma_t(\mathcal{F}_{t-1}, Y_t, \theta) = \sigma_t^2(\theta).$$

On note  $\theta$  l'ensemble des paramètres intervenant à la fois dans l'expression de la moyenne conditionnelle et de la variance conditionnelle. La plupart des modèles ARCH que nous verrons peuvent être représentés sous cette forme.

Ensuite, La vraisemblance associée à  $Y_t$  conditionnellement au passé  $\mathcal{F}_{t-1}$  est donc :

$$L(y_n/\mathcal{F}_{n-1}; \theta) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(y_n - m_n(\theta))^2}{2\sigma_n^2} \right),$$

et dépend du vecteur  $\theta = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_p)^n$  à travers  $\sigma_n$ .

La fonction de vraisemblance de  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  conditionnelle est par conséquent,

$$L(y_1, y_2, \dots, y_T, \theta) = \prod_{n=1}^T L(y_n/\mathcal{F}_{n-1}; \theta).$$

L'estimateur est alors défini comme le vecteur  $\hat{\theta}_T = (\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_p)^n$  qui maximise le logarithme de cette fonction vraisemblance,

$$\hat{\theta}_T = \arg \max \log L_T(y_1, y_2, \dots, y_T, \theta).$$

**Remarque 2.1.7** *En pratique, la méthode de maximum de vraisemblance est souvent préférée pour estimer les paramètres du modèle ARCH. Elle est implémentée dans de nombreux logiciels statistiques et financiers, et elle permet d'obtenir des estimations robustes et efficaces des paramètres du modèle.*

Bien que le modèle ARCH permette de modéliser efficacement la volatilité conditionnelle en fonction des chocs passés, il présente des limitations en termes de mémoire des chocs anciens. Pour pallier cette limitation et capturer plus fidèlement la persistance de la volatilité dans les séries temporelles financières, nous introduisons le modèle GARCH, qui intègre non seulement les chocs passés, mais aussi la variance conditionnelle précédente.

## 2.2 Le modèle GARCH

### 2.2.1 Le Modèle GARCH(1,1)

**Définition 2.2.1** *On dit qu'une série chronologique  $Y_t$  suit un modèle GARCH(1,1) si elle vérifie les relations suivantes :*

$$Y_t = \epsilon_t \sigma_t$$

avec

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

et  $\epsilon_t$  désigne un bruit blanc faible ;  $E(\epsilon_t) = 0$  et  $Var(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$  et  $\pi_0 > 0$  ,  $\pi_1 > 0$  ,  $\delta_1 > 0$ .

**Proposition 2.2.1** *Comme  $E(Y_t) = 0$  et  $Cov(Y_t Y_n) = 0$  alors,*

$$\begin{aligned} E(Y_t^3) &= E(\epsilon_t^3 \sigma_t^3) \\ &= E[E(\epsilon_t^3 \sigma_t^3 / \mathcal{F}_t)] \\ &= E[\sigma_t^3 E(\epsilon_t^3 / \mathcal{F}_t)] \\ &= E(\sigma_t^3 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Donc, le Skewness de processus GARCH(1,1) est nulle.*

En outre,

$$\begin{aligned}
E(Y_t^4) &= E[E(Y_t^4/\mathcal{F}_{t-1})] \\
&= 3E \left[ E \left( (\pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2)^2 / \mathcal{F}_{t-1} \right) \right] \\
&= 3E \left[ (\pi_0 + \pi_1 Y_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2)^2 \right] \\
&= 3(\pi_0^2 + 2\pi_0(\pi_1 + \delta_1)E(Y_{t-1}^2) + (\pi_1 + \delta_1)E(Y_{t-1}^4)) \\
&= 3 \left( \pi_0 + \frac{2\pi_0(\pi_1 + \delta_1)}{1 - (\pi_1 + \delta_1)} + (\pi_1 + \delta_1)E(Y_{t-1}^4) \right) \\
&= \frac{3\pi_0^2(1 + \pi_1 + \delta_1)}{(1 - \pi_1 - \delta_1)(1 - 3\pi_1^2 - \delta_1^2 - 2\pi_1\delta_1)},
\end{aligned}$$

Par conséquent, si  $3\pi_1^2 + 2\pi_1\delta_1 + \delta_1^2 < 1$ , la kurtosis existe, conformément à

$$\begin{aligned}
K_m &= \frac{E(Y_t^4)}{E(Y_t^2)^2} \\
&= \frac{3\pi_0^2(1 + \pi_1 + \delta_1)}{(1 - \pi_1 - \delta_1)(1 - 3\pi_1^2 - \delta_1^2 - 2\pi_1\delta_1)} \frac{(1 - \pi_1 - \delta_1)^2}{\pi_0^2} \\
&= 3 \frac{1 - (\pi_1 + \delta_1)^2}{1 - (\pi_1 + \delta_1)^2 - 2\pi_1^2} > 3.
\end{aligned}$$

Afin de bien comprendre ce modèle, on le visualise dans la simulation suivante :

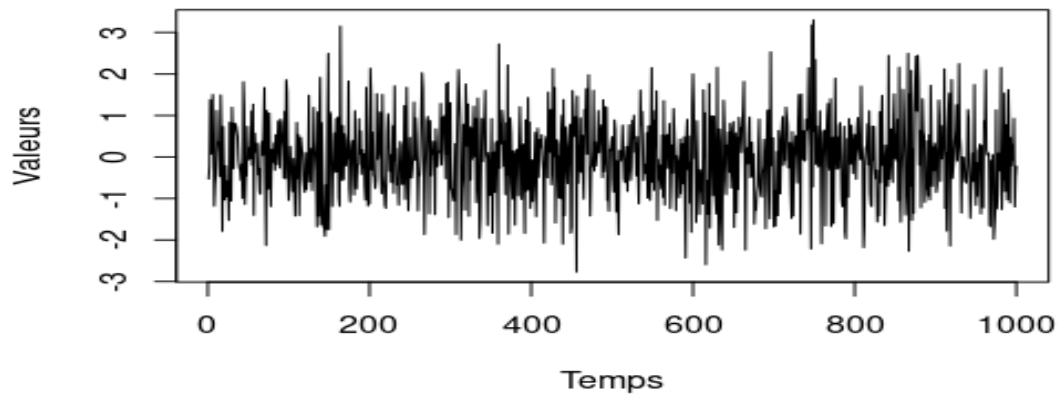


FIGURE 2.4 – La série temporelle générée par GARCH

La série temporelle générée par le modèle GARCH(1,1) montre des périodes de faible et de forte volatilité, ce qui est caractéristique des modèles GARCH. Les valeurs fluctuent autour de la moyenne avec des périodes calmes et turbulentes, reflétant les propriétés observées dans les séries temporelles financières.

Comme le graphique (2.5) , montre l'évolution de la variance conditionnelle  $\sigma_t^2$  sur la période simulée. La volatilité conditionnelle change au fil du temps, reflétant les changements dans l'incertitude des données. Les pics de volatilité montrent que des niveaux élevés de volatilité peuvent persister pendant plusieurs périodes.

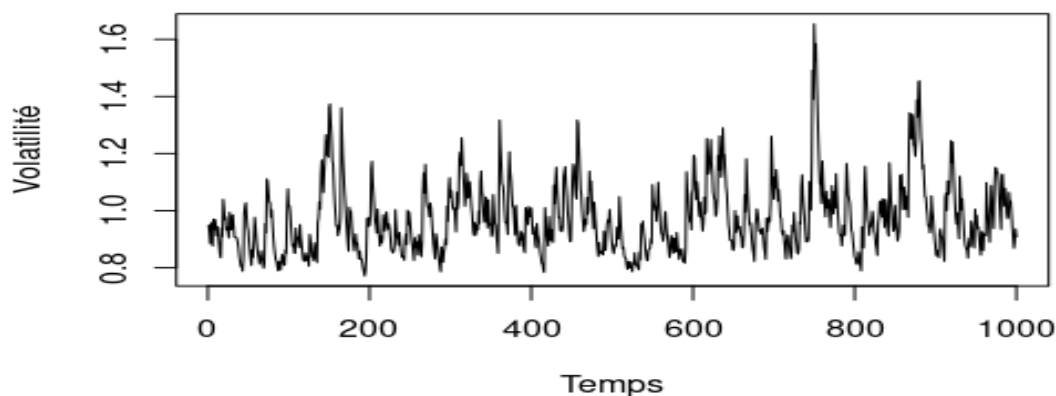


FIGURE 2.5 – la variance conditionnelle(GARCH)

Pour mieux capturer les dynamiques complexes de la volatilité dans les séries temporelles. Il suffit de passer du modèle GARCH(1,1) au modèle GARCH(p,q), qui revient à élargir la structure en intégrant plusieurs termes auto-régressifs et de moyenne mobile.

## 2.2.2 Le modèle GARCH(p,q)

**Définition 2.2.2** *Un processus  $Y_t$  satisfait une représentation GARCH(p,q) si :*

$$Y_t = \epsilon_t \sigma_t$$

avec

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j \sigma_{t-j}^2,$$

et  $\epsilon_t$  désigne un bruit blanc faible ;  $E(\epsilon_t) = 0$  et  $Var(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$  et  $\pi_0 > 0$  ,  $\pi_i > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$  et  $\delta_j > 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, q$ .

**Théorème 2.2.1** *Le modèle GARCH(p,q) est également, stationnaire au second ordre si :*

$$\sum_{i=1}^p \pi_i + \sum_{j=1}^q \delta_j < 1.$$

**Remarque 2.2.1** Dans le cas où l'inégalité est saturée, c'est à dire que :

$$\sum_{i=1}^p \pi_i + \sum_{j=1}^q \delta_j = 1,$$

on dira alors, que le processus GARCH est intégré et on parlera de processus IGARCH.

**Proposition 2.2.2** Si  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus GARCH(p,q), alors  $(Y_t)^2$  est un processus ARMA(M,q) avec  $M = \max(p, q)$ .

**Preuve.**

On peut par inversion, exprimer le processus  $Y_t^2$  sous la forme d'un processus ARMA défini dans une innovation  $\eta_t = Y_t^2 - \sigma_t^2$ . En introduisant cette notation dans l'expression de

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j \sigma_{t-j}^2,$$

il vient que :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 + Y_t^2 &= \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j \sigma_{t-j}^2 + Y_t^2 \\ &= \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j \sigma_{t-j}^2 + Y_t^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j Y_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^q \delta_j Y_{t-j}^2 \\ &= \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j Y_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^q \delta_j (Y_j - \sigma_{t-j}^2) + Y_t^2. \end{aligned}$$

D'où il découle que

$$\begin{aligned} Y_t^2 &= \pi_0 + \sum_{i=1}^p (\pi_i + \delta_i) Y_{t-i}^2 + Y_t^2 - \sigma_t^2 - \sum_{j=1}^q \delta_j \eta_{t-j} \\ \Leftrightarrow Y_t^2 &= \pi_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\pi_i + \delta_i) Y_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^q \delta_j \eta_{t-j}. \end{aligned}$$

Avec la convention  $\pi_i = 0$ , si  $i > p$  et  $\delta_i = 0$  si,  $i > q$ . Les  $\eta_t$  forment un bruit blanc.

Donc,  $(Y_t)$  est un ARMA(M,q).

Après avoir considéré le modèle GARCH(p,q) standard, nous nous tournons maintenant vers une version du modèle GARCH(p,q) qui intègre explicitement les erreurs afin de mieux refléter les variations observées dans les données.

### 2.2.3 Le modèle GARCH(p,q) avec erreur

On considère un modèle autorégressif représenté par l'équation suivante :

$$Y_t = E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) + Z_t,$$

où  $Z_t$  est un bruit blanc faible, vérifiant  $E(Z_t) = 0$  et  $E(Z_t Z_n) = 0$  si  $n \neq t$ , et satisfaisant la condition de différence de martingale  $E(Z_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ , Nous supposons également que le processus  $Z_t$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Z_t = \epsilon_t \sigma_t,$$

où  $\epsilon_t$  est un bruit blanc faible, avec :

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j \sigma_{t-j}^2,$$

et  $\pi_0 > 0$ ,  $\pi_i > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$  et  $\delta_j > 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, q$  afin de garantir la positivité de  $\sigma_t^2$ .

Après avoir défini les modèles GARCH(1,1) et GARCH(p,q) et examiné les erreurs potentielles liées à leur spécification, nous allons maintenant nous concentrer sur l'estimation des paramètres du modèle GARCH(p,q) pour mieux saisir les comportements dynamiques de la volatilité dans nos données.

### 2.2.4 Estimation des paramètres du modèle GARCH

L'estimation du modèle ARMA par maximum de vraisemblance est plus complexe que pour un modèle autorégressif simple, car le processus d'innovations n'est pas observé directement. Un problème similaire se pose lors de l'estimation des modèles GARCH, où la fonction de vraisemblance pour  $Y_t$  conditionnellement au passé  $\mathcal{F}_{t-1}$  est donnée par :

$$L(y_t/\mathcal{F}_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_t - m_t(\theta))^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Cependant, dans ce cas, la variance  $\sigma_t^2$  dépend des variances conditionnelles passées telles que  $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$  qui ne sont pas observables directement. Pour surmonter cela, on procède à une estimation itérative des variances  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{t-1}^2$  avant de calculer la vraisemblance. Avec un vecteur de paramètres fixé  $\theta = (\pi_0^\circ, \dots, \pi_p^\circ, \delta_0^\circ, \dots, \delta_p^\circ)^t$  la variance estimée est calculée récursivement par :

$$\hat{\sigma}_t^2 = \pi_0^\circ + \sum_{i=1}^p \pi_i^\circ y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j^\circ \hat{\sigma}_{t-j}^2,$$

en supposant que  $Y_i = 0$  et  $\sigma_i^2 = 0$  pour  $i \leq 0$ .

La fonction de vraisemblance est alors reformulée comme :

$$L(y_t/\mathcal{F}_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\hat{\sigma}_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_t - m_t(\theta))^2}{2\hat{\sigma}_t^2}\right),$$

et la vraisemblance totale sur tous les temps est :

$$L_T(y_1, y_2, \dots, y_T, \theta) = \prod_{t=1}^T L(y_t/\mathcal{F}_{t-1}; \theta).$$

Cette fonction de vraisemblance est évaluée pour différentes valeurs du vecteur  $\theta$  et sa maximisation fournit l'estimation de maximum de vraisemblance.

## 2.3 Prédiction des Modèles ARCH et GARCH

### 2.3.1 Prédiction ARCH(1) et ARCH(p)

La prédiction théorique des modèles ARCH(1) et ARCH(p) est basée sur la récursion de la variance conditionnelle. Pour ARCH(1), la formule est :

$$\sigma_{t+1}^2 = \pi_0 + \pi_1 \cdot \varepsilon_t^2.$$

Pour ARCH(p), la formule devient :

$$\sigma_{t+1}^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^p \pi_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2,$$

où  $\sigma_{t+1}^2$  est la variance conditionnelle au temps  $t + 1$ ,  $\pi_0$  est le terme constant,  $\pi_i$  sont les coefficients ARCH, et  $\varepsilon_t^2$  est le résidu au temps  $t$ .

### 2.3.2 Prédiction GARCH(1,1)

Pour fournir une prédiction théorique en utilisant un modèle GARCH, notamment un modèle GARCH(1,1), nous devons comprendre comment il utilise les informations sur la volatilité passée pour prédire la volatilité future. Le modèle GARCH(1,1) est fréquemment utilisé en économétrie financière pour modéliser la volatilité des rendements financiers, car il capture à la fois les éclats de volatilité et les regroupements de volatilité (volatility clustering).

Le modèle GARCH(1,1) peut être défini par les équations suivantes :

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t$$

où  $Y_t$  est la valeur de la série temporelle à l'instant  $t$ ,  $\mu$  est la moyenne constante, et  $\varepsilon_t$  est le terme d'erreur.

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \pi_1 \epsilon_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2$$

où  $\sigma_t^2$  est la variance conditionnelle de  $\epsilon_t$ ,  $\pi_0 > 0$ ,  $\pi_1, \delta_1 \geq 0$  sont des paramètres du modèle, et les conditions de stationnarité et de positivité sont remplies si  $\pi_1 + \delta_1 < 1$ .

Prédire la variance conditionnelle pour un horizon futur est cruciale pour la gestion du risque et la prise de décision en finance. Pour ce faire avec le modèle GARCH(1,1), on procède comme suit :

- Prédiction de la variance à un pas de temps( $t + 1$ ) :

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \pi_0 + \pi_1 \epsilon_t^2 + \delta_1 \sigma_t^2$$

Ici,  $\epsilon_t^2$  est l'innovation ou le choc de volatilité observé au temps  $t$ , et  $\sigma_t^2$  est la variance conditionnelle estimée au temps  $t$  basée sur l'information disponible jusqu'au temps  $t$ .

Pour des prévisions à plusieurs pas de temps, les calculs deviennent itératifs en supposant que les valeurs futures des chocs de volatilité (erreurs) sont nulles, ce qui reflète l'hypothèse d'une meilleure estimation en moyenne :

- Prédiction pour  $t + 2$  et au-delà :

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 = \pi_0 + (\pi_1 + \delta_1) \hat{\sigma}_{t+1}^2$$

et ainsi de suite, en utilisant la formule récursive,

$$\hat{\sigma}_{t+k}^2 = \pi_0 + (\pi_1 + \delta_1) \hat{\sigma}_{t+k-1}^2$$

jusqu'à ce que l'effet des chocs précédents se dissipe progressivement, convergent vers une variance à long terme :

$$\sigma^2 = \frac{\pi_0}{1 - (\pi_1 + \delta_1)}$$

pour  $\pi_1 + \delta_1 < 1$ .

**Remarque 2.3.1** *Les prévisions de variance conditionnelle issues du modèle GARCH sont essentielles pour la tarification des options, la gestion du risque, et d'autres applications financières qui nécessitent une estimation précise de la volatilité future. Elles permettent d'ajuster dynamiquement les stratégies en fonction des prévisions de risque.*

### 2.3.3 Prédiction GARCH(p,q)

La généralisation du modèle GARCH(1,1) à un modèle GARCH(p,q) permet d'incorporer plus d'informations historiques à la fois sur les erreurs et les variances conditionnelles passées.

Le modèle GARCH(p,q) est spécifié comme suit :

$$Y_t = \mu + \epsilon_t;$$



où  $Y_t$  est la valeur observée,  $\mu$  est la moyenne constante du processus, et  $\epsilon_t$  est le terme d'erreur qui est supposé être distribué normalement avec une moyenne de zéro et une variance conditionnelle  $\sigma_t^2$ .

$$\sigma_t^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^q \pi_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{t-j}^2,$$

où  $\sigma_t^2$  est la variance conditionnelle du terme d'erreur  $\epsilon_t$ ,  $\pi_0$  est un terme constant positif, et  $\pi_i$  et  $\delta_j$  sont les paramètres du modèle qui mesurent respectivement l'impact des erreurs passées et des variances passées. Les conditions de stationnarité et de positivité sont généralement  $\sum_{i=1}^q \pi_i + \sum_{j=1}^p \delta_j < 1$ .

Pour prévoir la variance conditionnelle à l'aide d'un modèle GARCH(p,q), on suit une approche itérative en estimant les paramètres du modèle et en utilisant les résidus pour mettre à jour la variance conditionnelle à chaque pas de temps.

D'abord, estimer les paramètres  $\pi_0, \pi_i, \delta_j$  à partir de données historiques, souvent en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

- Prédiction à un pas de temps ( $t + 1$ ) :

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \pi_0 + \sum_{i=1}^q \pi_i \epsilon_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{t+1-j}^2,$$

où les valeurs de  $\epsilon_{t+1-i}^2$  et  $\sigma_{t+1-j}^2$  sont celles connues jusqu'au temps  $t$ .

- Prédiction à plusieurs pas de temps : La prédiction de la variance conditionnelle pour des horizons plus lointains se base sur l'approximation que les futurs chocs de volatilité ( $\epsilon^2$ ) sont inconnus et souvent supposés être égaux à la variance conditionnelle la plus récente ou à la moyenne de long terme. Les équations deviennent itératives et dépendent de la capacité du modèle à "oublier" les chocs anciens :

$$\hat{\sigma}_{t+k}^2 = \pi_0 + \left( \sum_{i=1}^{\min(k-1,q)} \pi_{i+1} \epsilon_{t+k-1-i}^2 \right) + \left( \sum_{j=1}^{\min(k-1,p)} \delta_{j+1} \sigma_{t+k-1-j}^2 \right) + \dots$$

Si le processus est stationnaire ( $\sum_{i=1}^q \pi_i + \sum_{j=1}^p \delta_j < 1$ ), la variance conditionnelle converge vers une variance à long terme qui peut être calculée comme :

$$\sigma_{\text{long-term}}^2 = \frac{\pi_0}{1 - \sum_{i=1}^q \pi_i - \sum_{j=1}^p \delta_j}.$$

**Remarque 2.3.2** *Les prévisions issues d'un modèle GARCH(p,q) sont utilisées dans de nombreux domaines financiers tels que la tarification des options, la gestion du risque de marché, et l'allocation d'actifs. Elles permettent aux traders et aux gestionnaires de risque de se préparer et de répondre efficacement aux variations attendues de la volatilité des marchés.*

## CHAPITRE 3

# APPLICATION DES MODÈLES ARCH ET GARCH SUR DES SÉRIES FINANCIÈRES

Dans ce chapitre, nous appliquons les modèles ARCH et GARCH pour analyser la volatilité de deux séries temporelles financières distinctes : l'indice CAC40 et le prix de l'action Apple. Ces modèles sont particulièrement utiles pour modéliser et prévoir la volatilité des séries temporelles financières, souvent marquées par des périodes de volatilité variable. Pour réaliser ce travail, nous avons utilisé la version 4.2.1 du logiciel R.

Des sources précieuses ont grandement contribué à l'élaboration de ce chapitre, parmi lesquelles on cite [12], [15], [17], [19], [20], [22], [26].

### 3.1 Application à l'indice CAC40

#### 3.1.1 Présentation des Données

L'indice CAC 40 est l'indice boursier principal de la Bourse de Paris, composé des 40 plus importantes sociétés cotées sur Euronext Paris. Créé en 1987 avec une base de 1 000 points, il est utilisé comme baromètre de la performance économique française et comme référence pour les investisseurs nationaux et internationaux. Sa composition est régulièrement révisée pour refléter les changements dans les sociétés cotées, assurant ainsi sa pertinence en tant qu'indicateur du marché boursier français.

Pour obtenir des données sur l'indice CAC 40, plusieurs sources sont disponibles : sites web financiers comme Bloomberg ou Yahoo Finance, courtiers en ligne, API financières telles qu'Alpha Vantage, bases de données financières comme Thomson Reuters Eikon, et sources d'actualités financières comme CNBC. Il est important de vérifier la fiabilité et la qualité des données avant de les utiliser.

### 3.1.2 Analyse exploratoire des données

La présentation des données du CAC 40 est essentielle pour comprendre les dynamiques du marché boursier français. Pour cela, on récupère l'historique du cours boursier du CAC 40 depuis Yahoo Finance, qui consiste en un historique mensuel des cours à l'ouverture, entre janvier 2014 et janvier 2024.

Les graphiques sont des outils puissants pour la visualisation des données du CAC 40. Ils permettent une compréhension rapide et intuitive des tendances du marché, des performances des entreprises et des dynamiques sectorielles. Ces visualisations sont cruciales pour les investisseurs, les analystes et les décideurs économiques.



FIGURE 3.1 – Évolution du CAC 40 (2014-2024).

Ce graphique montre l'évolution du prix de clôture ajusté du CAC 40 de 2014 à 2024. On peut observer les tendances à long terme, ainsi que les périodes de volatilité accrue, telles que les crises économiques ou les événements majeurs du marché.

Pour évaluer la stationnarité des données de l'indice CAC 40, nous pouvons commencer par tracer le graphe de sa fonction d'autocovariance. La fonction d'autocovariance mesure la covariance entre les observations à différents retards.

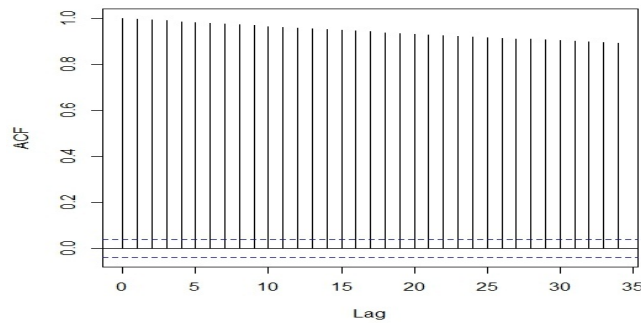


FIGURE 3.2 – Fonction d’Auto-Corrélation (ACF) des prix de clôture du CAC 40.

Des pics significatifs indiquent une corrélation temporelle importante, ce qui est crucial pour modéliser les séries temporelles. On constate que les variables sont liées entre elles, i.e. les données ne semblent pas être stationnaires.

On confirme cette hypothèse à l’aide d’un test de Dickey-Fuller. Voici les résultats :

```
> print(adf_test_prices)

Augmented Dickey-Fuller Test

data: adjusted_close
Dickey-Fuller = -3.176, Lag order = 13, p-value = 0.09203
alternative hypothesis: stationary
```

FIGURE 3.3 – Test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF)

Dans ce cas, avec une valeur p de 0.09203, qui est supérieure à 0.05, on ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle de non-stationnarité au niveau de signification de 5%. Cela suggère que la série temporelle des prix ajustés du CAC 40 n’est probablement pas stationnaire.

Pour mieux analyser la dynamique de la série temporelle et potentiellement obtenir une série stationnaire, nous pouvons calculer les rendements logistiques des prix. Ces rendements, souvent utilisés en finance, peuvent offrir des insights supplémentaires et sont généralement plus susceptibles de présenter une stationnarité.

$$r_t = \frac{Prix_t - Prix_{t-1}}{Prix_{t-1}}$$

Nous pouvons désormais examiner leur comportement à travers une représentation graphique.

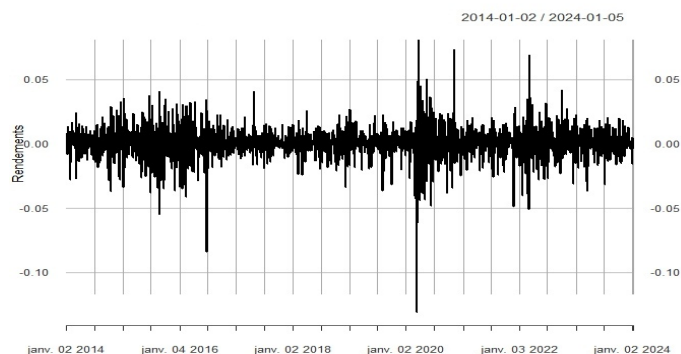


FIGURE 3.4 – Les rendements du CAC 40.

Le graphique des rendements logistiques des prix ajustés du CAC 40 révèle des caractéristiques de stationnarité et de volatilité typiques des données financières, fournissant une base solide pour des analyses financières plus avancées et la modélisation des séries temporelles.

Il est pertinent de procéder à un test statistique pour confirmer la stationnarité des rendements. Le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) est particulièrement adapté pour cette tâche, car il permet de tester l'hypothèse nulle de stationnarité contre l'alternative de non-stationnarité.

Voyons maintenant les résultats du test KPSS pour une évaluation plus rigoureuse de la stationnarité des rendements logistiques.

```
> summary(kpss_test)

#####
# KPSS Unit Root Test #
#####

Test is of type: mu with 8 lags.

Value of test-statistic is: 0.0225

Critical value for a significance level of:
      10pct  5pct  2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

FIGURE 3.5 – Test "KPSS".

La valeur  $p$  de 0.1 indique que nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle de stationnarité au niveau de signification de 5% (ou 1%), ce qui suggère que les rendements logarithmiques semblent être stationnaires au niveau de signification de 10%. Cette stationnarité est essentielle pour appliquer des modèles ARIMA ou GARCH, qui requièrent une série temporelle stationnaire pour des prévisions précises et fiables.

```

> cat("Test de Shapiro-Wilk pour la normalité:\n")
Test de Shapiro-Wilk pour la normalité:
> print(shapiro_test)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  as.numeric(returns)
W = 0.93141, p-value < 2.2e-16

```

FIGURE 3.6 – Test de normalité avec le test de Shapiro-Wilk

Puisque la p-value est beaucoup plus petite que 0,05, nous rejetons l'hypothèse nulle. Cela signifie que, malgré une valeur  $W$  de 0.931, les données ne suivent pas une distribution normale. L'extrême petitesse de la p-value indique une forte déviation par rapport à la normalité, malgré une statistique  $W$  relativement élevée.

Maintenant que nous avons confirmé la stationnarité des rendements logistiques du CAC 40, nous pouvons procéder à l'étape suivante de notre analyse en traçant les rendements centrés. Cette étape est essentielle pour modéliser les rendements à l'aide de modèles ARCH et GARCH, qui sont couramment utilisés pour modéliser la volatilité hétéroscédastique dans les séries temporelles financières.

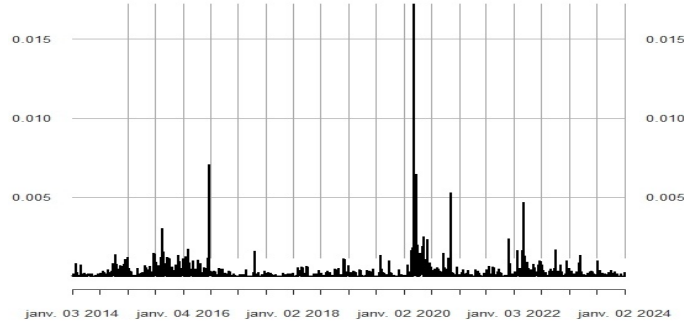


FIGURE 3.7 – Les Rendements Centrés du CAC 40

Le graphique des rendements centrés du CAC 40 confirme visuellement la stationnarité de la série temporelle et met en évidence les variations de volatilité au fil du temps, fournissant ainsi une base solide pour l'application de modèles de prévision tels que ARIMA ou GARCH.

```

> cat("Test d'indépendance (Box-Pierce):\n")
Test d'indépendance (Box-Pierce):
> print(box_test)

Box-Ljung test

data: returns_centered
X-squared = 17.677, df = 10, p-value = 0.06067

```

FIGURE 3.8 – Test d'indépendance avec "Box.test".

Le test de Box-Pierce appliqué aux résidus des rendements centrés du CAC 40 donne un p-value de 0.06067, ce qui indique une légère indication de dépendance dans les résidus, mais cette conclusion n'est pas statistiquement significative à un niveau de confiance de 95%.

### 3.1.3 Modélisation de la Volatilité avec les Modèles ARCH et GARCH

Utilisons à nouveau le jeu de données des carrés des rendements centrés du CAC 40.

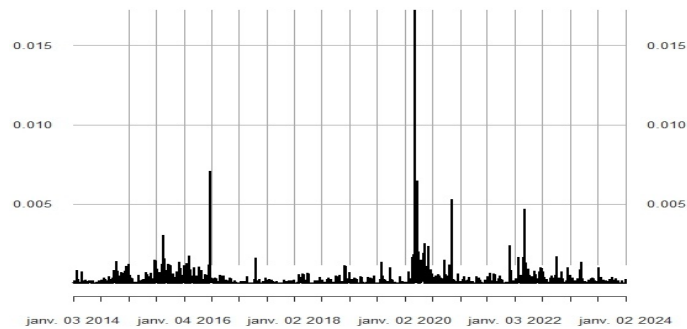


FIGURE 3.9 – Les Carrés des Rendements Centrés du CAC 40.

#### Modélisation avec ARCH

Pour déterminer l'ordre  $p$  du modèle ARCH, on utilise le critère AIC du modèle AR appliqué au carré des rendements centrés du CAC 40.

```
> print(aic_table)
      p      AIC
1      0 -31504.61
2      1 -31532.43
3      2 -31611.75
4      3 -31853.51
5      4 -31940.65
6      5 -31939.18
7      6 -31939.47
8      7 -31937.93
9      8 -32004.12
10     9 -32031.06
11    10 -32029.21
```

FIGURE 3.10 – Le tableau des valeurs "AIC".

L'AIC est un critère de sélection de modèle qui mesure la qualité d'un modèle par rapport à un autre, prenant en compte le compromis entre la précision du modèle et sa complexité. Un AIC plus petit indique un meilleur ajustement du modèle.

Par conséquent,

```
> cat("La valeur optimale de p qui minimise l'AIC est :", optimal_p, "\n")
La valeur optimale de p qui minimise l'AIC est : 9
```

FIGURE 3.11 – La valeur optimale de p

L'ordre  $p$  qui minimise le critère "AIC" est obtenu pour  $p = 9$ . On utilise donc le modèle ARCH(9) pour nos rendements centrés.

Pour modéliser la volatilité conditionnelle des rendements du CAC 40, nous procédons à la spécification d'un modèle ARCH(9), qui permet de capturer la dynamique des variations de la volatilité au fil du temps.

```
> fit
-----
*          GARCH Model Fit          *
-----
Conditional Variance Dynamics
GARCH Model      : eGARCH(9,0)
Mean Model       : ARFIMA(0,0,0)
Distribution      : norm

Optimal Parameters
-----
mu          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
alpha7 0.000011 0.034264 0.000316 0.99975
alpha8 0.067857 0.122074 0.558863 0.57830
alpha9 0.089009 0.549398 0.162012 0.87130

Loglikelihood : 15139.4

Information Criteria
-----
Akaike      -12.011
Bayes      -11.986
Shikata    -12.011
Hannan-Quinn -12.002

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
-----
Lag[1]          statistic p-value
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]  22.62 1.969e-06
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]  42.13 1.142e-11
d.o.f=9
HO : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
Lag[1]          statistic p-value
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][26]  1.204731 1.0000
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][44]  5.399462 1.0000
d.o.f=9

Nyblom stability test
-----
Joint Statistic: 2.5808
Individual Statistics:
mu          0.34998
omega       0.10011
alpha1      0.33964
alpha2      0.18868
alpha3      0.16374
alpha4      0.17801
alpha5      0.05052
alpha6      0.16461
alpha7      0.03823
alpha8      0.10721
alpha9      0.20296

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
Joint Statistic: 2.49 2.75 3.27
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test
-----
t-value      prob sig
Sign Bias    0.9548 0.34004
Negative Sign Bias 1.7707 0.07673 *
Positive Sign Bias 0.7133 0.47575
Joint Effect  5.1348 0.16219

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
-----
group statistic p-value(g-1)
1 20 4623 0
2 30 5233 0
3 40 6971 0
4 50 6548 0

Elapsed time : 1.589344

Robust Standard Errors:
-----
mu          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega       0.000206 0.000365 0.563288 0.57324
alpha1      0.000007 0.000002 0.115133 0.90834
alpha2      0.000007 0.365053 0.000020 0.99998
alpha3      0.245851 0.528738 0.464977 0.64195
alpha4      0.077039 0.080081 0.962015 0.33604
alpha5      0.000953 0.006381 0.149327 0.88130
alpha6      0.151116 0.213416 0.708084 0.47889
alpha7      0.367019 1.005384 0.365054 0.71507
alpha8      0.067857 0.018513 3.665320 0.000247
alpha9      0.089009 0.014339 6.207651 0.000000

Statistic Shape Scale P-Value
ARCE Lag[10] 0.1504 0.500 2.000 0.6981
ARCE Lag[12] 0.2363 1.492 1.843 0.9673
ARCE Lag[14] 0.2604 2.466 1.736 0.9374
```

FIGURE 3.12 – La spécification d'un modèle ARCH(9)



On procède à l'ajustement d'un modèle ARCH(9) afin de capturer les dynamiques de volatilité conditionnelle présentes dans les séries temporelles financières.

```

> fit
-----*-----
*          GARCH Model Fit          *
-----*-----

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : sGARCH(1,0)
Mean Model       : ARFIMA(0,0,0)
Distribution      : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      0.000000  0.000008    0.00      1
omega   0.005009  0.000040  124.71    0
alpha1  0.140555  0.001120  125.51    0

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      0.000000  7.2481  0.000000  1.00000
omega   0.005009  36.4252  0.000138  0.99989
alpha1  0.140555  1015.5199  0.000138  0.99989

LogLikelihood : -40454.06

Information Criteria
-----
Akaïke      31.592
Bayes      31.599
Shibata    31.592
Hannan-Quinn 31.595

-----*-----
statistic p-value
Lag[1]      5.719e-05  0.9940
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2] 9.650e-01  0.5097
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5] 1.826e+00  0.6600
d.o.f=0
HO : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
statistic p-value
Lag[1]      8.964  0.002753
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2] 9.003  0.003509
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5] 11.769  0.003203
d.o.f=1

Weighted ARCH LM Tests
-----
Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[2]  0.07679  0.500  2.000  0.7817
ARCH Lag[4]  1.59521  1.397  1.611  0.5368
ARCH Lag[6]  5.70781  2.222  1.500  0.1366

Nyblom stability test
-----
Joint Statistic: 5.6941
Individual Statistics:
mu      0.3872
omega   0.3864
alpha1  0.3865

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
Joint Statistic: 0.846 1.01 1.35
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

-----*-----
t-value prob sig
Sign Bias      1.429 1.532e-01
Negative Sign Bias 5.866 5.055e-09 ***
Positive Sign Bias 5.328 1.079e-07 ***
Joint Effect    66.681 2.191e-14 ***

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
-----
group statistic p-value(g-1)
1 20 7570 0
2 30 10811 0
3 40 13954 0
4 50 16804 0

Elapsed time : 3.542971

```

FIGURE 3.13 – l'Ajustement du Modèle ARCH(9) pour les Rendements du CAC 40

Le modèle ajusté pour les rendements du CAC 40 montre que :

- Les paramètres omega et alpha1 sont très significatifs.
- Les tests Ljung-Box sur les résidus standardisés ne montrent pas de corrélation sérielle significative.
- Les tests sur les résidus au carré montrent une hétéroscedasticité résiduelle significative.
- Les tests ARCH LM ne montrent pas d'effet ARCH résiduel significatif.
- Le modèle présente des biais de signe significatifs, indiquant des asymétries dans les résidus.
- Le test de Goodness-of-Fit de Pearson indique un bon ajustement du modèle.

Par conséquent, le modèle est bien ajusté aux données des rendements du CAC 40, bien que des asymétries et des hétéroscedasticités résiduelles soient présentes.

Pour capturer la dynamique de la volatilité conditionnelle des rendements du CAC 40 de manière plus flexible, nous procédons à la spécification d'un modèle GARCH, qui permet de modéliser à la fois les effets ARCH et les effets GARCH dans les variations de la volatilité au fil du temps.

## Modélisation avec GARCH

Commençons par les valeurs de maximum de vraisemblance du carré des rendements centrés du cac40 afin de déterminer la valeur de  $p$  et de  $q$ .

```
> cat("Log maximum de vraisemblance des carrés des rendements centrés:", log_likelihood, "\n")
Log maximum de vraisemblance des carrés des rendements centrés: -3054.83
```

FIGURE 3.14 – Log maximum de vraisemblance des carrés des rendements centrés

Le logarithme du maximum de vraisemblance des carrés des rendements centrés du CAC 40 est de -3054.83, indiquant un ajustement du modèle aux données observées.

Ensuite, on a la spécification d'un modèle GARCH.

```
> garch_spec

*-----*
*          GARCH Model Spec          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model           : sGARCH(1,1)
Variance Targeting    : FALSE

Conditional Mean Dynamics
-----
Mean Model            : ARFIMA(0,0,0)
Include Mean          : TRUE
GARCH-in-Mean         : FALSE

Conditional Distribution
-----
Distribution          : std
Includes Skew         : FALSE
Includes Shape        : TRUE
Includes Lambda       : FALSE
```

FIGURE 3.15 – Spécification du modèle GARCH

Le modèle GARCH(1,1) avec une moyenne constante et une distribution t-Student est efficace pour modéliser les rendements du CAC 40, capturant la forte volatilité et les queues épaisses tout en restant simple.

### 3.1.4 Prédiction de la volatilité

Le graphique 3.16 montre l'évolution de la volatilité estimée du CAC 40 sur une période spécifique de janvier 2014.

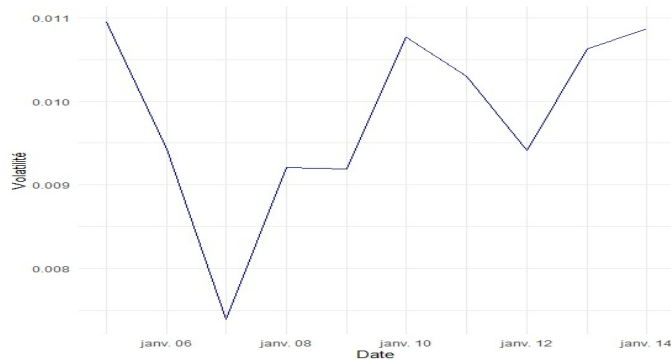


FIGURE 3.16 – Prévisions de la Volatilité du CAC 40

La volatilité semble suivre un comportement erratique avec des cycles de hausse et de baisse sur une courte période. Ceci est typique des séries temporelles financières, où des périodes de haute et de basse volatilité se succèdent fréquemment.

Le modèle GARCH(1,1) appliqué aux rendements normalisés du CAC 40 permet de capturer les dynamiques de volatilité observées. La volatilité estimée montre des variations importantes sur une courte période, illustrant la nature changeante et imprévisible des marchés financiers. Ces estimations de volatilité sont essentiels pour l'analyse du risque et la prise de décision en finance.

### 3.1.5 Performance des Modèles ARCH et GARCH

Les modèles ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) et GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) appliqués aux rendements du CAC40 fournissent des informations essentielles sur la volatilité conditionnelle des marchés financiers. Ces modèles permettent de capturer la dépendance temporelle de la volatilité, offrant des implications importantes pour les investisseurs et les gestionnaires de portefeuille.

Le modèle ARCH met en évidence la sensibilité de la volatilité actuelle aux chocs passés, en modélisant la variance conditionnelle en fonction des carrés des résidus passés. En revanche, le modèle GARCH étend ce concept en ajoutant la notion de persistance de la volatilité, en incorporant également les variances passées dans la modélisation. Les coefficients estimés, tels que  $\alpha_1$  (qui mesure l'impact des chocs passés) et  $\beta_1$  (qui mesure la persistance de la volatilité), fournissent des informations précieuses sur la dynamique des marchés.

Par exemple, une estimation élevée de  $\alpha_1$  indiquerait que les chocs passés ont un impact significatif sur la volatilité future, tandis qu'une estimation élevée de  $\beta_1$  suggérerait une forte persistance de la volatilité. Ces résultats sont cruciaux pour la gestion du risque et la prise de décisions d'investissement. Les investisseurs peuvent utiliser ces modèles pour évaluer et prévoir la volatilité future, ajustant ainsi leurs stratégies de trading et leurs allocations d'actifs pour atténuer les risques de perte.

Cependant, il est important de reconnaître les limitations des modèles ARCH et GARCH. Par exemple, leur supposition de distribution normale des résidus peut ne pas capturer adéquatement les queues épaisses observées dans les rendements financiers. Pour améliorer la modélisation de la volatilité et mieux capturer la dynamique des marchés financiers, des extensions plus complexes, telles que les modèles GARCH avec distributions asymétriques ou les modèles FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH), peuvent être explorées.

## **3.2 Application à Apple Inc.**

### **3.2.1 Présentation des Données**

Apple Inc. est une entreprise emblématique de la technologie, fondée en 1976 par Steve Jobs, Steve Wozniak et Ronald Wayne. Basée à Cupertino, en Californie, elle est connue pour ses produits électroniques grand public comme l'iPhone, l'iPad et le Mac, ainsi que pour ses logiciels et services tels que iOS, macOS et Apple Music. L'entreprise se distingue par son design élégant, son innovation technologique et son écosystème intégré. Apple a également un impact social et environnemental significatif, avec des engagements en matière de responsabilité sociale et d'environnement.

Les informations sur Apple Inc. proviennent de diverses sources telles que les rapports financiers annuels et trimestriels publiés par l'entreprise, les sites d'actualités financières et technologiques, les agences de notation et les analyses des analystes financiers. Ces sources fournissent des détails sur les performances économiques, les revenus, les bénéfices, les parts de marché, ainsi que sur les développements et les événements liés à Apple. Les données disponibles couvrent généralement plusieurs années, permettant une analyse à long terme de l'entreprise.

### **3.2.2 Analyse de l'Action Apple**

Dans cette analyse, nous allons récupérer les données historiques de l'action Apple (AAPL) de janvier 2014 à janvier 2024 à partir de Yahoo Finance, puis nous allons les visualiser à l'aide d'un graphique pour mieux comprendre l'évolution de cette action au fil du temps.

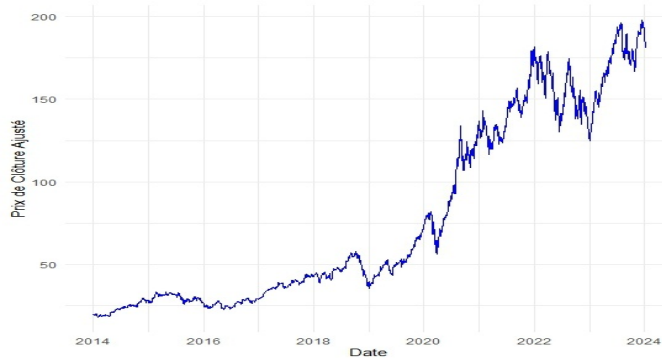


FIGURE 3.17 – Evolution de l'action Apple (2014-2024).

Le graphique offre un aperçu visuel de la performance historique de l'action d'Apple. La tendance générale du prix est observable, ainsi que les périodes de volatilité ou de stabilité. Cela permet aux investisseurs et aux analystes de mieux comprendre le comportement du marché et d'identifier des opportunités d'investissement potentielles en fonction des tendances et des modèles observés dans les données historiques des prix de l'action d'Apple.

Maintenant, pour analyser plus en détail la structure temporelle des prix historiques de l'action d'Apple, nous examinons la fonction d'autocorrélation (ACF).

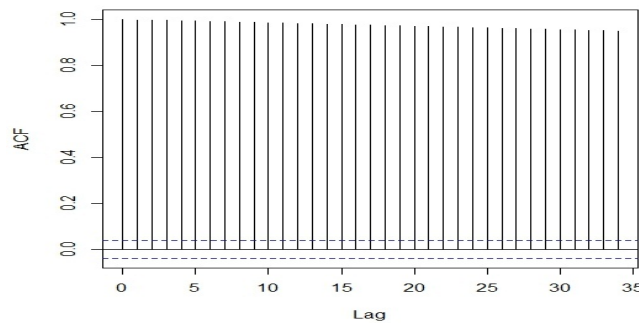


FIGURE 3.18 – L'ACF des prix de clôture de l'action APPLE

L'analyse de l'ACF suggère qu'il existe une certaine dépendance temporelle dans les prix historiques de l'action d'Apple, mais aucune structure saisonnière claire n'est observée, ce qui peut être utile pour la modélisation et les prévisions futures de la série temporelle. Par ailleurs, l'observation de la corrélation entre les variables suggère que les données ne semblent pas être stationnaires, une hypothèse confirmée à l'aide du test de Dickey-Fuller.

```

> print(adf_test_prices)

Augmented Dickey-Fuller Test

data: apple_data
Dickey-Fuller = -2.1938, Lag order = 13, p-value = 0.4963
alternative hypothesis: stationary

```

FIGURE 3.19 – Le test de Dickey-Fuller augmenté sur les prix de clôture

Le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) appliqué aux données d'Apple indique une statistique de test de  $-2.1938$ , un ordre de retard de  $13$  et une valeur  $p$  de  $0.4963$ . Ces résultats suggèrent une non-rejet de l'hypothèse nulle de non-stationnarité des données d'Apple au niveau de signification de  $5\%$ . Cela signifie qu'il existe des indications de non-stationnarité dans les données, ce qui peut nécessiter des techniques supplémentaires pour les rendre stationnaires avant l'analyse ou la modélisation.

Puisque le test de Dickey-Fuller n'a pas pu rejeter l'hypothèse nulle de non-stationnarité des données d'Apple, nous allons maintenant nous concentrer sur les rendements de ces données. Les rendements, calculés à partir des prix historiques de l'action d'Apple, nous permettront d'analyser les variations relatives des prix au fil du temps, ce qui est essentiel pour étudier les performances de l'action.

Nous allons procéder au calcul des rendements et ensuite les visualiser pour mieux comprendre leur comportement.

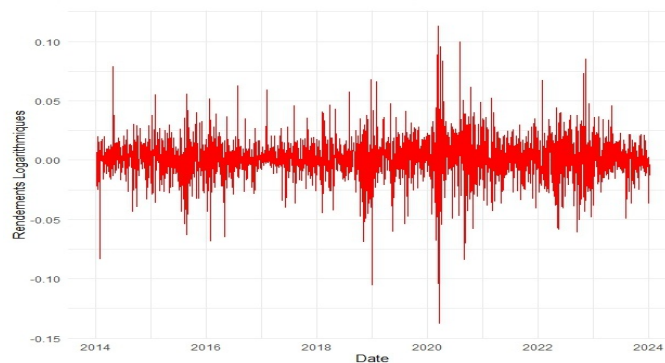


FIGURE 3.20 – Rendements de l'action Apple (2014-2024).

La visualisation des rendements de l'action d'Apple, met en évidence, qu'il n'y a aucune tendance visible, ce qui laisse supposer qu'il n'y a pas de tendance. Les fluctuations des rendements montrent une volatilité notable des prix de l'action (Variabilité significative). Les événements clés, tels que les annonces de résultats trimestriels, influent de manière notable sur les rendements (Impact des événements majeurs). Des périodes de corrélations temporaires entre les rendements

indiquent des cycles sur le marché (Corrélations temporaires)

Il est important de déterminer si les rendements de l'action d'Apple sont stationnaires. Pour ce faire, nous pouvons utiliser le test de KPSS.

```
> print(kpss_result)

      KPSS Test for Level Stationarity

data: log_returns
KPSS Level = 0.059935, Truncation lag parameter = 8, p-value = 0.1
```

FIGURE 3.21 – Le test "KPSS" sur les rendements

Le résultat du test "KPSS" pour la stationnarité des rendements de l'action d'Apple montre une statistique de test KPSS de 0.059935 et une valeur p de 0.1. Avec une valeur p supérieure à 0.05 (ou à tout autre niveau de significativité choisi), nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les rendements sont stationnaires. Cela suggère que les rendements de l'action d'Apple sont stationnaires au niveau de signification de 10%.

Par le Test de Box.test on confirme l'indépendance des résidus,

```
> cat("Résultats du test Box.test pour l'indépendance des résidus :\n")
Résultats du test Box.test pour l'indépendance des résidus :
> print(box_test)

      Box-Ljung test

data: residuals
X-squared = 76.56, df = 10, p-value = 2.363e-12
```

FIGURE 3.22 – Test Box.test pour l'indépendance des résidus

Vérifie l'indépendance des résidus du modèle. Si la p-value est élevée (généralement  $> 0.05$ ), on ne rejette pas l'hypothèse nulle d'indépendance des résidus. Par conséquent, les résidus sont indépendants.

Le Test de Shapiro-Wilk vérifie la normalité des résidus,

```

> cat("Résultats du test Shapiro-Wilk pour la normalité des résidus :\n")
Résultats du test Shapiro-Wilk pour la normalité des résidus :
> print(shapiro_test)

Shapiro-Wilk normality test

data: residuals
W = 0.93844, p-value < 2.2e-16

```

FIGURE 3.23 – Test Shapiro-Wilk pour la normalité des résidus

Si la p-value est élevée (généralement  $> 0.05$ ), on ne rejette pas l'hypothèse nulle de normalité des résidus. Ainsi, le résultat confirme la non normalité des résidus .

Maintenant que nous avons confirmé que les rendements de l'action d'Apple sont stationnaires, nous pouvons procéder au calcul des rendements centrés. Les rendements centrés sont obtenus en soustrayant la moyenne des rendements de chaque période, ce qui permet de mettre en évidence les variations par rapport à la tendance moyenne. Ces rendements centrés offrent une base plus solide pour modéliser et analyser les données financières, car ils éliminent la tendance à long terme et mettent en évidence les fluctuations à court terme.

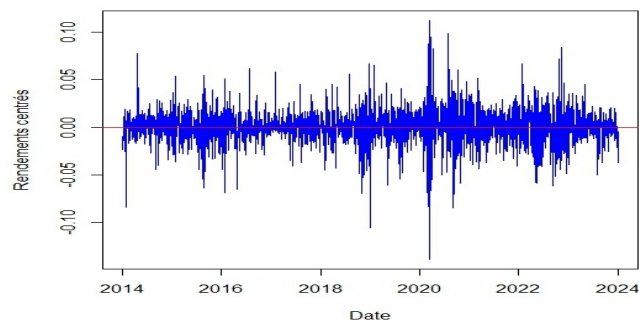


FIGURE 3.24 – Les Rendements centrés de l'action Apple

La visualisation des rendements centrés de l'action d'Apple offre un aperçu clair des variations par rapport à la tendance moyenne :

- Les rendements centrés éliminent la tendance à long terme des données, mettant en évidence les variations à court terme par rapport à la moyenne.
- Les rendements centrés oscillent autour de zéro, ce qui indique qu'ils sont bien centrés par rapport à leur moyenne.
- Les variations positives et négatives des rendements centrés reflètent la volatilité relative de l'action d'Apple sur la période considérée.



- Des événements significatifs dans l’histoire de l’entreprise peuvent être associés à des pics ou des creux dans les rendements centrés, soulignant leur impact sur la performance de l’action.

### 3.2.3 Modélisation de la Volatilité avec les Modèles ARCH et GARCH

Prenons à nouveau du jeu de données sur l’Action Apple.

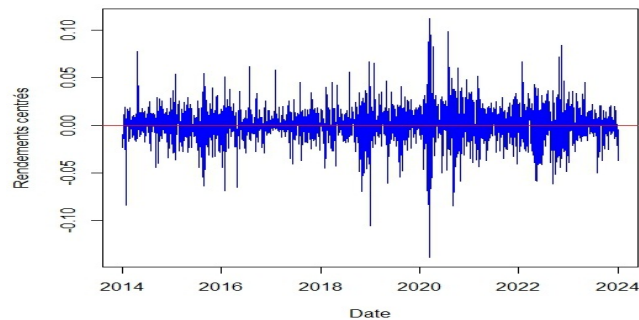


FIGURE 3.25 – Les carrés des rendements centrés de l’action Apple

Ce graphique montre les rendements centrés après soustraction de la moyenne. Il permet d’observer si la série est centrée autour de zéro, ce qui est souvent une étape avant l’application de modèles de séries temporelles.

#### Modélisation avec ARCH

On utilise le critère AIC du modèle AR pour calculer l’ordre  $p$  du modèle ARCH, en appliquant le carré des rendements centrés de l’Action Apple.

```
> print(aic_table)
      p      AIC
1      0 -28255.54
2      1 -28447.69
3      2 -28537.35
4      3 -28541.39
5      4 -28570.07
6      5 -28609.92
7      6 -28630.01
8      7 -28628.05
9      8 -28652.76
10     9 -28663.82
11    10 -28664.06
```

FIGURE 3.26 – le tableau des valeurs AIC

Ce tableau montre les valeurs AIC (Akaike Information Criterion) pour différents ordres ( $p$ ) de modèles AR ajustés aux carrés des rendements centrés. Il aide à sélectionner le meilleur mo-

dèle en fonction de l'AIC le plus bas.

```
> cat("La valeur optimale de p qui minimise l'AIC est :", optimal_p, "\n")
La valeur optimale de p qui minimise l'AIC est : 10
```

FIGURE 3.27 – la valeur optimale de  $p$

Donc, la valeur optimale est  $p = 10$ .

Pour modéliser la volatilité conditionnelle des rendements de l'action Apple, nous procédons à la spécification d'un modèle ARCH(10), qui permet de capturer la dynamique des variations de la volatilité au fil du temps.

```
> summary(arch_model)

Title:
  GARCH Modelling

Call:
  garchFit(formula = ~garch(1, 0), data = returns_ts, trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
  data ~ garch(1, 0)
<environment: 0x000000b80147e3b0>
 [data = returns_ts]

Conditional Distribution:
  norm

Coefficient(s):
      mu      omega      alpha1
-2.7529e-19  1.0327e-04  3.2258e-01

Std. Errors:
  based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -2.753e-19  2.184e-04    0.000      1
omega    1.033e-04  3.957e-06   26.101 < 2e-16 ***
alpha1   3.226e-01  3.952e-02    8.163 2.22e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
  7802.64      normalized:  3.045527
```

FIGURE 3.28 – Ajustement du modèle ARCH(10)

## Modélisation avec GARCH

Commençons par les valeurs de maximum de vraisemblance du carré des rendements centrés du l'action Apple afin de déterminer la valeur de  $p$  et de  $q$ .

```
> cat("Log de la vraisemblance maximale:", log_likelihood, "\n")
Log de la vraisemblance maximale: 16699.41
```

FIGURE 3.29 – Log maximum de vraisemblance des carrés des rendements centrés

Le logarithme du maximum de vraisemblance des carrés des rendements centrés du l'action Apple est de 16699.41, indiquant un ajustement du modèle aux données observées.

Ensuite, on a la spécification d'un modèle GARCH.

```
> garch_spec

*-----*
*           GARCH Model Spec           *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model           : sGARCH(1,1)
Variance Targeting    : FALSE

Conditional Mean Dynamics
-----
Mean Model            : ARFIMA(0,0,0)
Include Mean          : TRUE
GARCH-in-Mean         : FALSE

Conditional Distribution
-----
Distribution          : std
Includes Skew         : FALSE
Includes Shape        : TRUE
Includes Lambda       : FALSE
```

FIGURE 3.30 – Spécification du modèle GARCH

Le modèle GARCH(1,1) avec une moyenne constante et une distribution t-Student modélise efficacement les rendements des actions Apple, capturant la forte volatilité et les queues épaisses, tout en restant simple grâce à l'absence d'asymétrie et de transformations supplémentaires.

### 3.2.4 Prévisions

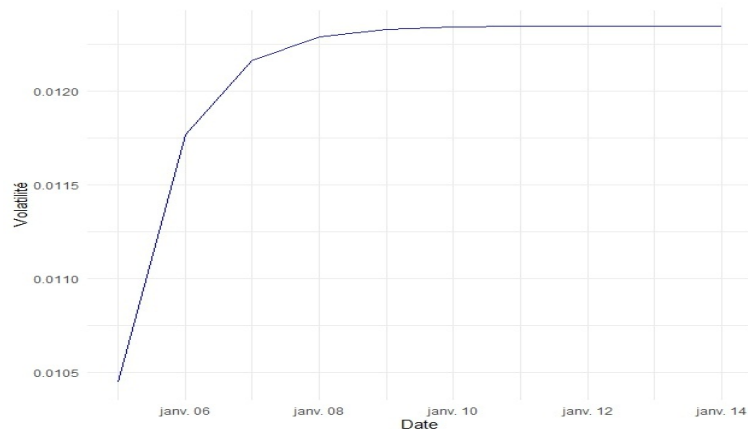


FIGURE 3.31 – Prévisions de la Volatilité

Ici, on affiche la prévision de la volatilité future anticipée par le modèle sur une période de 10 jours. Utile pour comprendre la dynamique future de la volatilité.

### 3.2.5 Performance des Modèles ARCH et GARCH

Les résultats de l'estimation des modèles ARCH et GARCH sur les rendements de l'action Apple ont plusieurs implications importantes pour la gestion des risques, les décisions d'investissement et la compréhension de la dynamique du marché financier.

Premièrement, la réactivité modérée et la forte persistance de la volatilité, telles que révélées par les paramètres du modèle GARCH, indiquent que les rendements de l'action Apple sont influencés par les chocs passés et que les périodes de haute volatilité ont tendance à persister. Cette information est cruciale pour la gestion des risques, car elle suggère que les périodes de volatilité accrue peuvent nécessiter une réévaluation des stratégies de couverture et des allocations d'actifs.

Deuxièmement, les diagnostics des résidus ont montré l'absence d'autocorrélation significative et d'hétéroscédasticité résiduelle dans les résidus standardisés du modèle, confirmant ainsi que le modèle ajusté est robuste et adéquat pour capturer la structure de la volatilité conditionnelle des rendements d'Apple. Cela renforce la confiance dans les prévisions de volatilité futures et les analyses de risque basées sur ce modèle.

Troisièmement, l'analyse de la volatilité conditionnelle estimée par le modèle permet d'identifier les périodes de risque accru sur le marché, ce qui est essentiel pour la prise de décision en matière d'investissement. Les investisseurs peuvent ajuster leurs positions en fonction de ces fluctuations de volatilité pour optimiser leurs rendements et minimiser les pertes potentielles.

En résumé, les résultats de l'estimation des modèles ARCH et GARCH offrent des perspectives précieuses sur la dynamique de la volatilité des rendements de l'action Apple, permettant ainsi aux investisseurs, gestionnaires de portefeuilles et responsables de la gestion des risques de prendre des décisions plus éclairées et mieux informées.

Ce mémoire a fourni une introduction complète et structurée à l'application des modèles ARCH et GARCH, en partant des bases théoriques jusqu'à leur mise en pratique sur des données financières réelles. En explorant les processus stochastiques et les propriétés des séries chronologiques, nous avons établi les fondements nécessaires pour comprendre l'importance et le fonctionnement des modèles ARCH et GARCH dans la modélisation de la volatilité des marchés financiers.

Les modèles ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) et GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) se sont révélés être des outils puissants et efficaces pour analyser et prévoir la volatilité des rendements financiers, mais ils présentent des différences notables. Le modèle ARCH, développé par Robert Engle en 1982, a marqué une avancée significative en permettant de capturer la variance conditionnelle des rendements financiers, reconnaissant ainsi que la volatilité peut être influencée par les chocs passés. Cependant, il se limite à la réactivité aux chocs passés sans intégrer la persistance de la volatilité.

En 1986, Tim Bollerslev a étendu le modèle ARCH pour créer le modèle GARCH, qui ajoute la notion de persistance de la volatilité en intégrant non seulement les chocs passés mais aussi les variances passées dans la modélisation. Cette caractéristique rend le modèle GARCH plus flexible et capable de fournir une représentation plus complète de la dynamique des séries chronologiques financières.

L'application pratique de ces modèles aux rendements de l'indice CAC40 et de l'action Apple Inc. a démontré que le modèle GARCH, grâce à sa capacité à intégrer la persistance de la volatilité, offre généralement des prévisions plus robustes et précises que le modèle ARCH. En capturant la dynamique de la volatilité conditionnelle de manière plus détaillée, le modèle GARCH permet aux investisseurs et gestionnaires de portefeuilles de mieux comprendre les fluctuations des marchés et d'ajuster leurs stratégies en conséquence.

L'objectif principal de cette modélisation était de fournir aux praticiens des outils robustes pour évaluer et anticiper la volatilité des marchés financiers, afin de prendre des décisions plus éclairées et mieux informées en matière de gestion de portefeuille et de risque financier.

Cependant, il est important de reconnaître les limites de ces modèles, notamment leur dépendance à certaines hypothèses comme la distribution normale des résidus. Des extensions et des modèles plus complexes, tels que les modèles GARCH multivariés ou les modèles avec distributions non normales, peuvent être explorés pour améliorer la précision et la pertinence des prévisions.

En résumé, ce modeste travail, a mis en lumière l'importance des modèles ARCH et GARCH dans l'analyse de la volatilité financière. Les lecteurs disposent maintenant des connaissances nécessaires pour appliquer ces modèles de manière efficace et pertinente dans leurs propres analyses financières, contribuant ainsi à une meilleure gestion des risques et à des décisions d'investissement plus informées. La compréhension approfondie et l'application pratique de ces outils permettent de mieux appréhender les fluctuations des marchés financiers et de naviguer dans un environnement économique complexe avec plus de confiance et de précision.

# Annexe A

## Les tests

### A.1 Test de Box-Pierce ou Ljung-Box (Box)

La statistique  $Q$  de Ljung-Box permet de tester l'hypothèse d'indépendance sérielle d'une série (ou que la série est bruit blanc). Plus spécifiquement cette statistique teste l'hypothèse que les  $n$  coefficients d'auto-corrélation sont nuls. Elle est basée sur la somme des auto-corrélations de la série et elle est distribuée selon une loi Chi-carrée avec  $n$  degrés de liberté.

L'hypothèse nulle est alors donnée par :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_n = 0$$

La statistique du test est alors :

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}$$

où  $n$  est la taille de l'échantillon,  $\hat{\rho}_j^2$  est l'auto-corrélation de retard  $j$ , et  $h$  nombre de retards à tester. Pour un niveau de signification  $\alpha$ , l'hypothèse  $H_0$  est rejetée si

$$Q > \chi_{1-\alpha, h}^2$$

### A.2 Test Dickey-Fuller Augmenté (adf)

Le test de Dickey Fuller simple (1979) est un test de racine unitaire (ou de non stationnarité) dont l'hypothèse nulle est la non stationnarité d'un processus autorégressif d'ordre un.

Considérons un processus  $(Y_n)$  satisfaisant la représentation  $AR(1)$  suivante :

$$Y_n = \rho Y_{n-1} + u_n$$

où  $u_n$  est un bruit blanc,  $\rho \in \mathbb{R}$ .

Le principe général du test de Dickey Fuller consiste à tester l'hypothèse nulle de la présence d'une racine unitaire :

$$H_0 : \rho = 1$$

$$H_1 : |\rho| < 1$$

si  $\rho = 1$ , alors la variable  $Y_n$  est une variable intégrée d'ordre 1. C'est le cas *du* modèle de marche aléatoire sans dérive. Si  $\rho < 1$ , alors la variable  $Y_n$  est stationnaire.

Si  $\rho = 1$ , la variance de  $Y_n$  est dépendante de  $n$ , ce qui va à l'encontre de la condition de stationnarité ; par contre si  $\rho < 1$ , la variance de  $Y_n$  est indépendante de  $n$  (constante). La statistique de ce test est la statistique  $n$  usuelle avec des valeurs critiques calculées par Dickey et Fuller.

Le test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté est utilisé quand les variables sont autocorrélées. Le test consiste à tester l'hypothèse  $\alpha = 1$  du modèle :

$$Y_n = \alpha Y_n + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta Y_{n-i} + v_n$$

Le deuxième terme à droite de l'équation a pour but de corriger le problème d'autocorrélation. Dans le cas d'indépendance sérielle,  $\gamma_i = 0 \forall i$ , et par conséquent le test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté est identique au test Dickey-Fuller. Les valeurs critiques sont identiques à celles du test antérieur.

### A.3 Test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

Le test de KPSS est un test de stationnarité. Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, n$  réalisations de  $Y$ . Supposons que l'on puisse décomposer cette série sous la forme suivante :

$$Y_n = r_n + \beta n + \epsilon_n$$

où  $r_n$  est un marche aléatoire, i.e.  $r_n = r_{n-1} + u_n$  avec  $u_n \sim N(0, \sigma_u^2)$ ,  $\beta n$  une tendance déterministe et  $\epsilon_n$  l'erreur stationnaire. Dans ce modèle, pour tester si  $(Y_n)$  est une tendance stationnaire,



i.e. la série est stationnaire au tour d'une tendance déterministe, l'hypothèse  $H_0$  serait  $\sigma_u^2 = 0$ , contre l'hypothèse  $H_1 : \sigma_u^2 > 0$ . Dans un autre cas de stationnarité, à savoir le cas où la série est stationnaire au tour d'une constante, l'hypothèse  $H_0$  serait  $\beta = 0$ .

Dans le cas de stationnarité au tour d'une tendance, sous l'hypothèse  $H_0$ , les résidus obtenus lors d'une régression linéaire de  $Y$  sont les suivantes :  $e_n = \epsilon_n$ . Dans le cas de stationnarité au tour d'une constante, sous l'hypothèse  $H_0$ , les résidus sont données par :  $e_n = Y_n - \bar{Y}$  Posons

$$S_n = \sum_{j=1}^n e_j$$

et

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[S_N^2]$$

Un estimateur empirique de  $\sigma^2$  peut être construit à l'aide des résidus  $e_n$  (Newey et West, 1987) :

$$\hat{\sigma}^2(p) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_n^2 + \frac{2}{N} \sum_{j=1}^p w_j(p) \sum_{n=j+1}^N e_n e_{n-j}$$

où  $p$  est le retard de troncature, et  $w_j(p)$  est un poids, défini par  $w_j(p) = 1 - \frac{j}{p+1}$ . Le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin est alors donné par :

$$KPSS = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \frac{S_n^2}{\hat{\sigma}^2(p)}$$

Sous l'hypothèse de stationnarité  $H_0$  au tour d'un point, on a à la limite :

$$KPSS \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_1(r)^2 dr$$

où  $V_1(r)$  est un pont brownien standard, i.e.  $V_1(r) = L(r) - r * L(1)$  où  $L(r)$  est un mouvement brownien standard pour tout  $r$  dans  $[0; 1]$ . Sous l'hypothèse de stationnarité  $H_0$  au tour d'une tendance, on a à la limite :

$$KPSS \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_2(r)^2 dr$$

où  $V_2(r)$  est un pont brownien standard de seconde ordre, i.e.

$$V_2(r) = L(r) + (2r - 3r^2)L(1) + 6r(r - 1) \int_0^1 L(s) ds$$

Les valeurs maximales critiques sont données dans le tableau suivant :

TABLE A.1 – Upper tail critical values for the KPSS test statistic asymptotic distribution

Distribution	0.1	0.05	0.025	0.01
$\int_0^1 (V_1(r))^2 dr$	0.347	0.463	0.574	0.739
$\int_0^1 (V_2(r))^2 dr$	0.119	0.146	0.176	0.216

## A.4 Test de Shapiro

Le test de Shapiro, aussi appelé test de Shapiro et Wilk, est un test de normalité d'une série d'observations d'une variable quantitative. Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $n$  réalisations de  $Y$ . On range alors ces observations par ordre croissant :

$$Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \dots \leq Y_n$$

Le test de Shapiro se réalise alors en 6 étapes :

1. On calcule la moyenne de cette série de mesures :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

2. On calcule le nombre  $T_n$  défini par :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

3. On calcule les différences suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= Y_n - Y_1 \\ d_2 &= Y_{n-1} - Y_1 \\ &\vdots \\ d_i &= Y_{n-i+1} - Y_i \end{aligned}$$

4. On calcule alors le nombre défini par :

$$W = \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^p (a_j d_j)^2$$

où les coefficients  $a_j$  sont données par la table des coefficients, comme cidessous par exemple.

n =	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
a1	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015
a2	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774
a3	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487	0.2475	0.2463	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391
a4	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110
a5	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881
a6	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686
a7	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513
a8	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356
a9	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211
a10	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075
a11	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947
a12	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824
a13	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706
a14	0.0000	0.0084	0.0159	0.0227	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0523	0.0559	0.0592
a15			0.0000	0.0076	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481
a16					0.0000	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372
a17							0.0000	0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264
a18									0.0000	0.0057	0.0110	0.0158
a19											0.0000	0.0053

FIGURE A.1 – Table des coefficients  $a_i$  pour le test de Shapiro et Wilk

5. On choisit un risque ( 5% ou 1% ) et on compare la valeur de  $W$  à une valeur  $W_{crit}$ , dite valeur critique, lue dans la table de Shapiro et Wilk.
6. La règle du test est alors la suivante :
  - si  $W > W_{crit}$  on accepte, au risque choisi, l'hypothèse de normalité de la série de mesure.
  - si  $W < W_{crit}$  on rejette l'hypothèse de normalité de la série de mesure.

Table 4b : table des valeurs limites  $W_\alpha$  de  $W = \frac{b^2}{Z^2}$   
 pour les risques  $\alpha = 5 \%$  et  $1 \%$   
 (Biometrika 1965)

n	Risque 5 %	Risque 1 %
	$W_{0,05}$	$W_{0,01}$
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,730
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,850	0,792
12	0,859	0,805
13	0,866	0,814
14	0,874	0,825
15	0,881	0,835
16	0,887	0,844
17	0,892	0,851
18	0,897	0,858
19	0,901	0,863
20	0,905	0,868
21	0,908	0,873
22	0,911	0,878
23	0,914	0,881
24	0,916	0,884
25	0,918	0,888
26	0,920	0,891
27	0,923	0,894
28	0,924	0,896
29	0,926	0,898
30	0,927	0,900
31	0,929	0,902
32	0,930	0,904
33	0,931	0,906
34	0,933	0,908
35	0,934	0,910
36	0,935	0,912
37	0,936	0,914
38	0,938	0,916
39	0,939	0,917
40	0,940	0,919
41	0,941	0,920
42	0,942	0,922
43	0,943	0,923
44	0,944	0,924
45	0,945	0,926
46	0,945	0,927
47	0,946	0,928
48	0,947	0,929
49	0,947	0,929
50	0,947	0,930

FIGURE A.2 – Table de Shapiro et Wilk

## Annexe B

# Les codes des programmes avec R

### B.1 Séries chronologiques

```
1 install.packages("ggplot2")
2 library(ggplot2)
3
4 # Creation des donnees (ventes mensuelles fictives)
5 dates <- seq(as.Date("2019-01-01"), by = "month", length.out = 60)
6 ventes <- rnorm(60, mean = 100, sd = 20) + seq(1, 60)
7
8 # Creation du dataframe
9 data <- data.frame(Date = dates, Ventas = ventes)
10
11 # Tracer la serie temporelle
12 ggplot(data, aes(x = Date, y = Ventas)) +
13   geom_line(color = "blue") +
14   labs(title = "Ventas Mensuelles d'un Produit",
15        x = "Date",
16        y = "Ventas",
17        caption = "Source: Ventas Company") +
18   theme_minimal()
```

### B.2 Bruit Blanc

```
1 # Installation des packages necessaires (a executer une seule fois)
2 install.packages("tseries")
3
4 # Chargement des packages
5 library(tseries)
```

```

6
7 # Fixer la graine pour la reproductibilite
8 set.seed(123)
9
10 # Taille de l'échantillon
11 n <- 1000
12
13 # Generation de bruit blanc
14 bruit_blanc <- rnorm(n)
15
16 # Affichage des graphiques dans une fenetre graphique de R
17 par(mfrow = c(1, 3), mar = c(4, 4, 2, 1))
18
19 plot(bruit_blanc, type = "l", main = "Bruit Blanc", col = "blue")
20 acf(bruit_blanc, main = "ACF du Bruit Blanc", col = "blue")
21 pacf(bruit_blanc, main = "PACF du Bruit Blanc", col = "blue")

```

### B.3 Marche Aléatoire

```

1 >y=rep(0,n)
2 >for(i in 2:n){y[i]=y[(i-1)]+bruit[i]}
3 >par(mfrow=c(3,1))
4 >plot.ts(y, main="Marche aleatoire", xlab="temps", ylab=expression(Y[t])
, col="4")
5 > acf_values <- acf(y,plot=FALSE)
6 >pacf_values <- pacf(y, plot = FALSE)
7 >plot(acf_values, main="ACF de la Marche Aleatoire", ylim=c(-1, 1))
8 >plot( pacf_values, main=" PACF de la Marche Aleatoire ",
9 ylim= c(-1, 1))

```

### B.4 Processus AR

```

1 >Ar2<-arima.sim(list(order=c(2,0,0),ar=c(-0.8,-0.15)),n=1000)
2 >par(mfrow=c(1,3))
3 >plot(Ar2,ylab="x",col="blue",main="")
4 >acf(Ar2,col="blue",main="" )
5 >pacf(Ar2,col="blue",main="")

```

## B.5 Processus MA

```
1 > MA<-arima.sim(list(ma=0.8),n=4000)
2 >par(mfrow=c(1,3))
3 >plot(MA,col="blue",main="MA(1)")
4 >acf(MA,col="blue",main="correlation")
5 >pacf(MA,col="blue",main="correlationpartielle")
6 On peut calculer ces coefficients a l'aide du logiciel R,
7 tout en utilisant la commande ARMAacf avec l'option (pacf=TRUE)
8
9 >ARMAacf(ma=0.8,lag.ma=6,pacf=T)
```

## B.6 Processus ARMA

```
1 ARMA<-arima.sim(list(order=c(1,0,1), ma=0.8,ar=0.4), n=1000)
2 par(mfrow=c(1,3))
3 plot(ARMA,col="blue",main="")
4 abline(h=0,col="red")
5 acf(ARMA,col="blue",main="Autocorrelation")
6 pacf(ARMA,col="blue",main="Autocorrelation partiel")
```

## B.7 Processus ARIMA(1, 3, 2)

```
1 # Installer les packages necessaires si ce n'est pas deja fait
2 install.packages("forecast")
3 install.packages("ggplot2")
4
5 # Charger les packages
6 library(forecast)
7 library(ggplot2)
8
9 # Parametres du processus ARIMA
10 order <- c(1, 3, 2) # Ordre ARIMA : ARIMA(1, 3, 2)
11 ar_parameter <- 0.5 # Parametre AR
12 ma_parameters <- c(0.8, 0.6) # Parametres MA
13
14 # Nombre d'echantillons
15 n_samples <- 100
16
17 # Simulation du processus ARIMA
```

```

18 set.seed(123) # Fixer la graine pour la reproductibilite
19 arima_sim <- arima.sim(model = list(order = order, ar = ar_parameter, ma
    = ma_parameters), n = n_samples)
20
21 # Convertir en serie temporelle avec une frequence appropriee (par
    exemple, mensuelle)
22 ts_data <- ts(arima_sim, frequency = 12)
23
24 # Visualisation de la trajectoire originale
25 plot(ts_data, type = "l", main = "Trajectoire du processus ARIMA simule"
    , xlab = "Temps", ylab = "Valeurs")
26
27 par(mfrow = c(1, 1))
28
29 # Decomposition de la serie temporelle
30 decomp <- decompose(ts_data)
31 plot(decomp)
32
33 # Differentiations successives
34 diff_1 <- diff(ts_data, differences = 1)
35 diff_2 <- diff(diff_1, differences = 1)
36 diff_3 <- diff(diff_2, differences = 1)
37
38 # Tracer la serie temporelle et les differentiations
39 par(mfrow = c(1, 5)) # Disposer les graphiques en 1 ligne et 5 colonnes
40
41 plot(ts_data, type = "l", main = "Serie Temporelle Originale", xlab = "
    Temps", ylab = "Valeurs")
42 plot(diff_1, type = "l", main = "Premiere Differentiation", xlab = "
    Temps", ylab = "Differences")
43 plot(diff_2, type = "l", main = "Deuxieme Differentiation", xlab = "
    Temps", ylab = "Differences")
44 plot(diff_3, type = "l", main = "Troisieme Differentiation", xlab = "
    Temps", ylab = "Differences")
45
46 # Ajuster un modele ARIMA sur la serie temporelle simulee
47 fitted_model <- auto.arima(ts_data)
48
49 # Generer des previsions
50 forecast_horizon <- 24 # Prevoir les 24 prochains mois
51 forecasts <- forecast(fitted_model, h = forecast_horizon)
52
53 # Visualisation des previsions

```



```
54 plot(forecasts, main = "Previsions du modele ARIMA", xlab = "Temps",  
      ylab = "Valeurs")
```

## B.8 Processus SARIMA(1,1,1,1)

```
1 # Installer et charger les packages necessaires  
2 if (!require("forecast")) {  
3   install.packages("forecast")  
4 }  
5 library(forecast)  
6  
7 # Parametres du processus SARIMA  
8 order <- c(1, 1, 1) # Ordre ARIMA : (p, d, q)  
9 seasonal_order <- c(1, 1, 1) # Ordre saisonnier : (P, D, Q)  
10 frequency <- 12 # Frequence saisonniere (par exemple, mensuelle)  
11  
12 # Parametres spcifiques AR et MA  
13 ar_param <- 0.6 # Parametre AR  
14 ma_param <- -0.4 # Parametre MA  
15 seasonal_ar_param <- 0.5 # Parametre saisonnier AR  
16 seasonal_ma_param <- -0.3 # Parametre saisonnier MA  
17  
18 # Nombre d'echantillons  
19 n_samples <- 120  
20  
21 # Simulation du processus SARIMA  
22 set.seed(123)  
23 sarima_sim <- arima.sim(model= list(order= order, ar=ar_param, ma = ma_  
   param,  
24 seasonal = list(order = seasonal_order, ar = seasonal_ar_param, ma =  
   seasonal_ma_param, period = frequency)), n = n_samples)  
25  
26 # Convertir en serie temporelle avec une frequence appropriee  
27 ts_data <- ts(sarima_sim, frequency = frequency)  
28  
29 # Ajuster un modele SARIMA(1,1,1,1)[12] sur les donnees simulees  
30 fit <- Arima(ts_data, order = order, seasonal = list(order = seasonal_  
   order, period = frequency), include.constant = FALSE)  
31  
32 # Faire une prevision pour les 12 prochaines periodes  
33 forecast_result <- forecast(fit, h = 12)  
34
```

```

35 # Visualisation de la trajectoire originale
36 plot(ts_data, type = "l", main = "Serie Temporelle Simulee SARIMA
    (1,1,1,1)[12]", xlab = "Temps", ylab = "Valeurs")
37
38 # Visualisation de la dcomposition
39 decomp <- decompose(ts_data, type = "multiplicative")
40 plot(decomp)
41
42 # Visualisation de la premiere difference saisonniere
43 diff_1 <- diff(ts_data, differences = 1)
44 plot(diff_1, type = "l", main = "Premiere Differenciation", xlab = "
    Temps", ylab = "Valeurs")
45
46 # Visualisation des previsions
47 plot(forecast_result, main = "Previsions SARIMA(1,1,1)(1,1,1)[12]", xlab
    = "Temps", ylab = "Valeurs")

```

## B.9 Processus ARCH(1)

```

1 >set.seed(123) # Pour rendre les resultats reproductibles
2
3 # Parametres
4 >n = 1000 # Nombre d'observations
5 >omega = 0.1 # Intercept
6 >alpha = 0.8 # Coefficient ARCH
7
8 # Generation des innovations et initialisation des vecteurs
9 >e <- rnorm(n) # Innovations (bruits blancs)
10 >sigma2 <- numeric(n) # Variance conditionnelle
11 >y <- numeric(n) # Serie temporelle
12
13 # Initialisation
14 >sigma2[1] <- omega / (1 - alpha)
15 >y[1] <- e[1] * sqrt(sigma2[1])
16
17 # Simulation de la serie ARCH(1)
18 >for (t in 2:n) {
19   sigma2[t] <- omega + alpha * y[t-1]^2
20   y[t] <- e[t] * sqrt(sigma2[t])
21 }
22
23 # Tracer la serie temporelle generee

```

```

24 >plot(y, type = "l", main = "Serie Temporelle Simulee avec un Modele
      ARCH(1)", ylab = "Valeurs", xlab = "Temps")
25
26 # Tracer la variance conditionnelle
27 >plot(sigma2, type = "l", main = "Variance Conditionnelle Simulee (ARCH
      (1))", ylab = expression(sigma[t]^2), xlab = "Temps")
28
29 # Tracer l'ACF des valeurs au carre
30 >acf(y^2, main = "ACF des Valeurs au Carre de la Serie ARCH(1)")

```

## B.10 Processus ARCH(p)

```

1 # Installation des packages necessaires (a executer une seule fois)
2 install.packages("fGarch")
3
4 # Chargement des packages
5 library(fGarch)
6
7 # Fixer la graine pour la reproductibilite
8 set.seed(123)
9
10 # Taille de l'echantillon
11 n <- 1000
12
13 # Generation de bruit blanc
14 bruit_blanc <- rnorm(n)
15
16 # Simuler ARCH(1)
17 arch1_spec <- garchSpec(model = list(alpha = 0.1, beta = 0.8))
18 arch1_data <- garchSim(spec = arch1_spec, n = n)
19
20 # Simuler ARCH(2)
21 arch2_spec <- garchSpec(model = list(alpha = c(0.1, 0.1), beta = 0.7))
22 arch2_data <- garchSim(spec = arch2_spec, n = n)
23
24 # Simuler ARCH(4)
25 arch4_spec <- garchSpec(model = list(alpha = c(0.1, 0.1, 0.1, 0.1), beta
      = 0.5))
26 arch4_data <- garchSim(spec = arch4_spec, n = n)
27
28 # Affichage des graphiques dans une fenetre graphique de R
29 par(mfrow = c(2, 2), mar = c(4, 4, 2, 1))

```

```

30
31 plot(bruit_blanc, type = "l", main = "Bruit Blanc", col = "blue")
32 plot(arch1_data, type = "l", main = "ARCH(1)", col = "red")
33 plot(arch2_data, type = "l", main = "ARCH(2)", col = "green")
34 plot(arch4_data, type = "l", main = "ARCH(4)", col = "purple")

```

## B.11 Processus GARCH(1,1)

```

1 >set.seed(123) # Pour rendre les resultats reproductibles
2 # Parametres
3 >n <- 1000 # Nombre d'observations
4 >omega <- 0.1 # Intercept
5 >alpha <- 0.1 # Coefficient ARCH
6 >beta <- 0.8 # Coefficient GARCH
7
8 # Generation des innovations et initialisation des vecteurs
9 >e <- rnorm(n) # Innovations (bruits blancs)
10 >sigma2 <- numeric(n) # Variance conditionnelle
11 >y <- numeric(n) # Serie temporelle
12
13 # Initialisation
14 >sigma2[1] <- omega / (1 - alpha - beta)
15 >y[1] <- e[1] * sqrt(sigma2[1])
16
17 # Simulation de la serie GARCH(1,1)
18 <for (t in 2:n) {
19   sigma2[t] <- omega + alpha * y[t-1]^2 + beta * sigma2[t-1]
20   y[t] <- e[t] * sqrt(sigma2[t])
21 }
22
23 # Tracer la serie temporelle generee
24 >plot(y, type = "l", main = "Serie Temporelle Simulee avec un Modele
   GARCH(1,1)", ylab = "Valeurs", xlab = "Temps")
25 # Tracer la variance conditionnelle
26 >plot(sigma2, type = "l", main = "Variance Conditionnelle Simulee (GARCH
   (1,1))", ylab = expression(sigma[t]^2), xlab = "Temps")
27
28 # Tracer l'ACF des valeurs au carre
29 >acf(y^2, main = "ACF des Valeurs au Carre de la Serie GARCH(1,1)")

```

## Annexe C

# Application des Modèles ARCH et GARCH

### C.1 Indice CAC40

```
1 library(quantmod)
2 library(ggplot2)
3 library(rugarch)
4 library(forecast)
5 library(tseries)
6
7 # Telecharger les donnees du CAC 40 de 2014-01-01 a 2024-01-06
8 getSymbols("^FCHI", from="2011-01-01", to="2024-01-06")
9
10 # Afficher les premieres lignes des donnees pour verifier le
    telechargement
11 head(FCHI)
12 # Extraire les donnees de cloture ajustee pour la visualisation
13 cac40_data <- data.frame(Date = index(FCHI), Adj_Close = as.numeric(Cl(
    FCHI)))
14
15 # Creer un graphique de l'evolution du CAC 40
16 ggplot(cac40_data, aes(x = Date, y = Adj_Close)) +
17   geom_line(color = "blue") +
18   ggtitle("\`Evolution du CAC 40 (2014-2024)") +
19   xlab("Date") +
20   ylab("Prix de Cloture Ajuste") +
21   theme_minimal()
22 # Calculer l'ACF des donnees de cloture ajustee
```

```

23 acf(na.omit(Cl(FCHI)), main = "ACF des Prix de Cloture Ajustes du CAC 40
    ")
24
25
26 # Effectuer le test de Dickey-Fuller augmente
27 adf_test_prices <- adf.test(cac40_data)
28 print(adf_test_prices)
29
30 # Supprimer les valeurs manquantes des prix de cloture ajustes
31 adjusted_close <- na.omit(Cl(FCHI))
32
33 # Effectuer le test de Dickey-Fuller augmente sur les prix de cloture
    ajustes
34 adf_test_prices <- adf.test(adjusted_close)
35 print(adf_test_prices)
36 # Calculer les rendements logarithmiques
37 log_returns <- diff(log(Cl(FCHI)))
38
39 # Supprimer les valeurs manquantes
40 log_returns <- na.omit(log_returns)
41 library(ggplot2)
42
43 # Creer un graphique des rendements logarithmiques
44 log_returns_data <- data.frame(Date = index(log_returns), Log>Returns =
    as.numeric(log_returns))
45
46 ggplot(log_returns_data, aes(x = Date, y = Log>Returns)) +
47   geom_line(color = "blue") +
48   ggtitle("Rendements Logarithmiques du CAC 40 (2014-2024)") +
49   xlab("Date") +
50   ylab("Rendements Logarithmiques") +
51   theme_minimal()
52 # Estimer la densite spectrale de puissance (periodogramme)
53 periodogram <- spec.pgram(log_returns)
54
55 # Afficher le periodogramme
56 plot(periodogram, main = "Periodogramme des Rendements Logarithmiques du
    CAC 40")
57 # Effectuer le test KPSS sur les rendements logarithmiques
58 kpss_result <- kpss.test(log_returns)
59 print(kpss_result)
60 # Calculer les rendements centres
61 centered_returns <- log_returns - mean(log_returns)

```

```

62
63 # Créer un graphique des rendements centres
64 plot(index(centered_returns), centered_returns, type = "l", col = "blue"
65       ,
66       xlab = "Date", ylab = "Rendements centres",
        main = "Rendements centres du CAC 40")

```

### C.1.1 Modélisation CAC40 avec ARCH

```

1 # Charger les bibliotheques necessaires
2 library(quantmod)
3 library(forecast)
4 library(ggplot2)
5 library(rugarch)
6
7 # Telecharger les donnees du CAC 40
8 getSymbols("^FCHI", from = "2014-01-01", to = "2024-01-06")
9 cac40_data <- na.omit(Cl(FCHI))
10 plot(cac40_data, main = "Prix de Cloture Ajustes du CAC 40")
11
12 # Calculer les rendements logarithmiques
13 log_returns <- diff(log(cac40_data))[-1]
14 plot(log_returns, main = "Rendements Logarithmiques du CAC 40")
15 # Supprimer les valeurs NA
16 log_returns <- na.omit(log_returns)
17
18 # Centrer les rendements
19 centered_returns <- log_returns - mean(log_returns)
20 plot(centered_returns, main = "Rendements Centres du CAC 40")
21
22 # Calculer les carres des rendements centres
23 squared_centered_returns <- centered_returns^2
24 plot(squared_centered_returns, main = "Carres des Rendements Centres du
25       CAC 40")
26
27 # Initialiser une liste pour stocker les valeurs AIC
28 aic_values <- numeric()
29
30 # Ajuster les modeles AR sur les carres des rendements centres pour
31   differentes valeurs de p
32 max_p <- 10 # Vous pouvez augmenter cette valeur si necessaire

```

```

32 for (p in 0:max_p) {
33   model <- arima(squared_centered_returns, order = c(p, 0, 0))
34   aic_values[p + 1] <- AIC(model)
35 }
36
37 # Creer un tableau des valeurs AIC
38 aic_table <- data.frame(p = 0:max_p, AIC = aic_values)
39
40 # Afficher le tableau des valeurs AIC
41 print(aic_table)
42
43 # Trouver la valeur de p qui minimise l'AIC
44 optimal_p <- which.min(aic_values) - 1
45
46 # Afficher la valeur optimale de p
47 cat("La valeur optimale de p qui minimise l'AIC est :", optimal_p, "\n")
48
49 # Ajuster le modele AR optimal sur les carres des rendements centres
50 optimal_model <- arima(squared_centered_returns, order = c(optimal_p, 0,
51   0))
52 optimal_model
53 # Faire des previsions sur les carres des rendements centres
54 forecast_horizon <- 10 # Vous pouvez ajuster l'horizon de prevision
55 squared_forecasts <- forecast(optimal_model, h = forecast_horizon)$mean
56 # Convertir les previsions des carres des rendements en previsions de
57   volatilitite
58 volatility_forecasts <- sqrt(squared_forecasts)
59 # Afficher les previsions de volatilitite
60 print(volatility_forecasts)
61
62 # Visualiser les previsions de volatilitite
63 forecast_dates <- seq(from = as.Date(index(cac40_data)[nrow(cac40_data)
64   ]), by = "days", length.out = forecast_horizon)
65 forecast_data <- data.frame(Date = forecast_dates, Volatility = as.
66   numeric(volatility_forecasts))
67
68 ggplot(forecast_data, aes(x = Date, y = Volatility)) +
69   geom_line(color = "blue") +
70   labs(title = "Previsions de la Volatilitite du CAC 40",
71     x = "Date",
72     y = "Volatilitite") +

```



```

71 theme_minimal()
72
73
74 # Specification du modele ARCH(1)
75 spec <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder =
      c(9, 0)),
76                   mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean =
      TRUE),
77                   distribution.model = "norm")
78 spec
79 # Ajustement du modele
80 fit <- ugarchfit(spec = spec, data = squared_centered_returns)
81 fit
82 # Normaliser les rendements centres
83 normalized_returns <- (centered_returns - mean(centered_returns)) / sd(
      centered_returns)
84 normalized_returns
85
86 # Ajuster le modele ARCH(9) aux donnees historiques
87 arch_fit <- ugarchfit(spec = spec, data = log_returns)
88 arch_fit
89 # Effectuer des previsions avec le modele ARCH(9) ajuste
90 forecasted_returns <- ugarchforecast(arch_fit, n.ahead = 1)
91
92 # Afficher les previsions des rendements centres
93 print(forecasted_returns)
94 plot(forecasted_returns)
95 # Ajuster le modele GARCH avec differentes specifications
96 fit <- try(ugarchfit(spec = spec, data = normalized_returns), silent =
      TRUE)
97 # Generer des previsions des rendements centres pour les periodes
      futures
98 forecast <- ugarchforecast(fit, n.ahead = 10) # Previsions pour les 10
      prochaines periodes
99
100 # Effectuer des previsions en tenant compte des donnees observees
101 forecasted_returns <- ugarchforecast(fit, n.ahead = 1, data = normalized
      _returns)
102
103 # Afficher les previsions des rendements centres
104 print(forecasted_returns)
105
106 plot(forecasted_returns)

```

## C.1.2 Modélisation CAC40 avec GARCH

```
1 # Installer et charger les packages necessaires
2 install.packages(c("rugarch", "forecast"))
3 library(rugarch)
4 library(forecast)
5
6 # Charger les donnees
7 # (Assurez-vous d'avoir deja charge les donnees des prix du CAC 40 et
8   calcule les rendements centres)
9
10 # Supprimer les valeurs manquantes
11 returns_centered <- na.omit(returns_centered)
12
13 # Carres des rendements centres
14 residuals_squared <- returns_centered^2
15
16 # Specification du modele GARCH(1,1)
17 garch_spec <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH",
18   garchOrder = c(1, 1)),
19   mean.model = list(armaOrder=c(0,0)), distribution.model = "std")
20
21 # Estimation du modele GARCH(1,1)
22 garch_fit <- ugarchfit(spec = garch_spec, data = residuals_squared)
23
24 # Log de la vraisemblance maximale
25 log_likelihoood <- logLik(garch_fit)
26 cat("Log de la vraisemblance maximale:", log_likelihoood, "\n")
27
28 # Test d'indépendance des residus
29 Box.test(garch_fit@residuals, lag = 20, type = "Ljung-Box")
30
31 # Test de normalite des residus
32 shapiro.test(garch_fit@residuals)
33
34 # Previsions pour les 12 prochains mois
35 forecast_12 <- ugarchforecast(garch_fit, n.ahead = 12)
36
37 # Calculer les bornes superieures et inferieures des intervalles de
38   confiance
39 borne_sup <- forecast_12@forecast$sigmaFor
```

```
37 borne_inf <- - borne_sup
38
39 # Calculer la largeur de l'intervalle de confiance
40 ecart_intervalle <- borne_sup - borne_inf
```

## C.2 Action Apple

```
1 # Installer et charger les bibliotheques necessaires
2 if (!require(quantmod)) {
3   install.packages("quantmod")
4   library(quantmod)
5 }
6 if (!require(forecast)) {
7   install.packages("forecast")
8   library(forecast)
9 }
10 if (!require(ggplot2)) {
11   install.packages("ggplot2")
12   library(ggplot2)
13 }
14 if (!require(tseries)) {
15   install.packages("tseries")
16   library(tseries)
17 }
18
19 # Telecharger les donnees de l'action AAPL
20 getSymbols("AAPL", from = "2014-01-01", to = "2024-01-06")
21 apple_data <- na.omit(Cl(AAPL))
22
23 # Afficher les premieres lignes des donnees pour verifier le
   telechargement
24 head(apple_data)
25
26 # Creer un graphique de l'evolution de l'action AAPL
27 apple_plot_data <- data.frame(Date = index(apple_data), Adj_Close = as.
   numeric(apple_data))
28
29 ggplot(apple_plot_data, aes(x = Date, y = Adj_Close)) +
30   geom_line(color = "blue") +
31   ggtitle("Evolution de l'action Apple (2014-2024)") +
```

```

32 xlab("Date") +
33 ylab("Prix de Cloture Ajuste") +
34 theme_minimal()
35
36 # Calculer les rendements logarithmiques
37 log_returns <- diff(log(apple_data))[-1]
38
39 # Supprimer les valeurs manquantes
40 log_returns <- na.omit(log_returns)
41
42 # Creer un graphique des rendements logarithmiques
43 log_returns_data <- data.frame(Date = index(log_returns), Log>Returns =
    as.numeric(log_returns))
44
45 ggplot(log_returns_data, aes(x = Date, y = Log>Returns)) +
46   geom_line(color = "red") +
47   ggtitle("Rendements Logarithmiques de l'action Apple (2014-2024)") +
48   xlab("Date") +
49   ylab("Rendements Logarithmiques") +
50   theme_minimal()
51
52 # Calculer l'ACF des rendements logarithmiques
53 acf(log_returns, main = "ACF des Rendements Logarithmiques de l'action
    Apple")
54
55 # Effectuer le test de Dickey-Fuller augmente sur les prix de cloture
    ajustes
56 adf_test_prices <- adf.test(apple_data)
57 print(adf_test_prices)
58
59 # Effectuer le test KPSS sur les rendements logarithmiques
60 kpss_result <- kpss.test(log_returns)
61 print(kpss_result)
62
63 # Centrer les rendements
64 centered_returns <- log_returns - mean(log_returns)
65
66 # Creer un graphique des rendements centres
67 plot(index(centered_returns), centered_returns, type = "l", col = "blue"
    ,
68   xlab = "Date", ylab = "Rendements centres",
69   main = "Rendements centres de l'action Apple")

```

## C.2.1 Modélisation Action AAPL avec ARCH

```
1
2 # Telecharger les donnees de l'action AAPL
3 getSymbols("AAPL", from = "2014-01-01", to = "2024-01-06")
4 apple_data <- na.omit(Cl(AAPL))
5
6 # Calculer les rendements logarithmiques
7 log_returns <- diff(log(apple_data))[-1]
8
9 # Supprimer les valeurs manquantes
10 log_returns <- na.omit(log_returns)
11
12 # Centrer les rendements
13 centered_returns <- log_returns - mean(log_returns)
14
15 # Normaliser les rendements centres
16 normalized_returns <- centered_returns / sd(centered_returns)
17 normalized_returns
18 # Convertir en serie temporelle
19 returns_ts <- ts(normalized_returns, frequency = 1)
20
21 # Ajuster un modele ARCH(1)
22 arch_model <- garchFit(formula = ~ garch(1, 0), data = returns_ts, trace
23   = FALSE)
24
25 # Afficher un resume du modele
26 summary(arch_model)
27
28 # Faire des previsions avec le modele ARCH(1)
29 forecast_horizon <- 10 # Vous pouvez ajuster l'horizon de prevision
30 arch_forecasts <- predict(arch_model, n.ahead = forecast_horizon)
31
32 # Extraire les previsions de volatilité
33 volatility_forecasts <- arch_forecasts$standardDeviation
34
35 # Afficher les previsions de volatilité
36 print(volatility_forecasts)
37
38 # Creer des dates pour les previsions
39 forecast_dates <- seq(from = as.Date(index(apple_data)[nrow(apple_data)
40   ]), by = "days", length.out = forecast_horizon)
```

```

39 forecast_data <- data.frame(Date = forecast_dates, Volatility = as.
    numeric(volatility_forecasts))
40
41 # Visualiser les previsions de volatilité
42 ggplot(forecast_data, aes(x = Date, y = Volatility)) +
43   geom_line(color = "blue") +
44   labs(title = "Previsions de la Volatilité de l'action Apple avec le
    modele ARCH(1)",
45         x = "Date",
46         y = "Volatilité") +
47   theme_minimal()
48 # Calculer les carrés des rendements centrés
49 squared_centered_returns <- centered_returns^2
50
51 # Initialiser une liste pour stocker les valeurs AIC
52 aic_values <- numeric()
53
54 # Ajuster les modèles AR sur les carrés des rendements centrés pour
    différentes valeurs de p
55 max_p <- 10 # Vous pouvez augmenter cette valeur si nécessaire
56
57 for (p in 0:max_p) {
58   model <- arima(squared_centered_returns, order = c(p, 0, 0))
59   aic_values[p + 1] <- AIC(model)
60 }
61
62 # Créer un tableau des valeurs AIC
63 aic_table <- data.frame(p = 0:max_p, AIC = aic_values)
64
65 # Afficher le tableau des valeurs AIC
66 print(aic_table)
67
68 # Trouver la valeur de p qui minimise l'AIC
69 optimal_p <- which.min(aic_values) - 1
70
71 # Afficher la valeur optimale de p
72 cat("La valeur optimale de p qui minimise l'AIC est :", optimal_p, "\n")
73
74 # Ajuster le modèle AR optimal sur les carrés des rendements centrés
75 optimal_model <- arima(squared_centered_returns, order = c(optimal_p, 0,
    0))

```

## C.2.2 Modélisation Action AAPL avec GARCH

```
1 # Charger les packages necessaires
2 library(quantmod)
3 library(rugarch)
4 library(ggplot2)
5
6 # Telecharger les donnees de l'action AAPL depuis Yahoo Finance
7 getSymbols("AAPL", src = "yahoo", from = "2014-01-01", to = "2024-01-06"
8 )
9
10 # Selectionner et nettoyer les donnees de cloture ajuste
11 apple_data <- na.omit(Cl(AAPL))
12
13 # Calculer les rendements (logarithmiques)
14 returns <- diff(log(apple_data$AAPL.Close))
15
16 # Nettoyer les donnees de rendements en supprimant les valeurs
17   manquantes
18 returns <- na.omit(returns)
19
20 # Verifier a nouveau s'il y a des valeurs manquantes dans les rendements
21 if (any(is.na(returns))) {
22   stop("Les donnees de rendements contiennent encore des valeurs
23     manquantes apres nettoyage.")
24 }
25
26 # 1. Estimation du modele GARCH (1, 1)
27
28 # Specification du modele GARCH (1, 1)
29 spec <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0,0)),
30   variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1,1)))
31 spec
32 # Estimation du modele GARCH
33 fit <- ugarchfit(spec, data = returns)
34
35 # Resume du modele
36 print(summary(fit))
37
38 # Plot des residus du modele GARCH (1, 1)
39 plot(fit)
40
41 # 2. Test de Box.test pour l'indépendance des residus
```

```

39
40 # Recuperer les residus du modele GARCH
41 residuals <- fit@fit$residuals
42
43 # Effectuer le test Box.test
44 box_test <- Box.test(residuals, lag = 10, type = "Ljung-Box")
45 cat("Resultats du test Box.test pour l'independance des residus :\n")
46 print(box_test)
47 cat("\n")
48
49 # 3. Test de Shapiro-Wilk pour la normalite des residus
50
51 # Effectuer le test Shapiro-Wilk
52 shapiro_test <- shapiro.test(residuals)
53 cat("Resultats du test Shapiro-Wilk pour la normalite des residus :\n")
54 print(shapiro_test)
55 cat("\n")
56
57 # 4. Prevision du modele avec visualisation des resultats
58 # Prevision de la volatilité et des rendements futurs
59 forecast_volatility <- ugarchforecast(fit, n.ahead = 10)
60 forecast_returns <- ugarchforecast(fit, n.ahead = 10, plot = FALSE) #
    Sans plot pour l'instant
61 # Plot de la volatilité prevue
62 plot(forecast_volatility)
63 # Extraction des rendements prevus
64 forecast_returns_series <- as.data.frame(forecast_returns@forecast$
    seriesFor)
65 colnames(forecast_returns_series) <- "Forecast"
66 # Creer une serie temporelle pour les dates de prevision
67 forecast_dates <- seq(end(apple_data), by = "days", length.out = 10)
68 forecast_returns_df <- data.frame(Date = forecast_dates, Forecast =
    forecast_returns_series$Forecast)
69 # Plot des rendements prevus avec ggplot2
70 ggplot(data = forecast_returns_df, aes(x = Date, y = Forecast)) +
71   geom_line(color = "blue") +
72   labs(title = "Forecasted Returns of Apple Stock", x = "Date", y = "
    Forecasted Returns") +
73   theme_minimal()

```



# Bibliographie

- [1] Aragon, Y. (2011), *Séries temporelles avec R, Méthodes et cas*. Springer-Verlag France.
- [2] Béchou, T., Bertrand, É., & Nebenzahl, J. (2008), *L'Analyse Technique* (6e édition). Economica.
- [3] Bera, A. K., & Higgins, M. L. (1993), *ARCH Models : Properties, Estimation and Testing*. Journal of Economic Surveys.
- [4] Bollerslev, T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 31(3), 307-327.
- [5] Bourbonnais, R., & Terraza, M. (2004), *Analyse des Séries temporelles : application à l'économie et à la gestion*. Dunod, Paris.
- [6] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2009), *Time Series : Theory and Methods* (2e édition). Springer.
- [7] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2002), *Introduction to Time Series and Forecasting* (2e édition). Springer.
- [8] Charpentier, A. (1997), *Séries Temporelles : Théorie et Applications*. Polycopié de Cours, Université Paris IX Dauphine.
- [9] Charpentier, A. (2012), *Modèles de prévision-Séries temporelles*. Université Paris IX Dauphine.
- [10] Deschamps, V. M. (2008), *Cours des séries temporelles*. Institut de Science Financière et d'Assurances, Paris.
- [11] Engle, R. F. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica, 50(4), 987-1007.
- [12] Engle, R. F. (2001), *The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics*. Journal of Economic Perspectives, 15(4), 157-168.
- [13] Fortier, S. (2013), *Les modèles MA, AR et ARMA multidimensionnels : estimation et causalité*. CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke), 4, 112-136.
- [14] Francq, C. (2007), *Modèles GARCH et à volatilité stochastique*. GREMARS-EQUIPPE, Université Lille 3.
- [15] Gouriéroux, C. (1992), *Modèles ARCH et Applications Financières*. Collection ENSAE, Economica.

- [16] Harvey, A. C. (1990), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.
- [17] Harvey, A. C. (1990), *The Econometric Analysis of Time Series* (2e édition). MIT Press.
- [18] Hurlin, C. (2004), *Econométrie Appliquée Séries Temporelles*. Cours de Tronc Commun, Université d'Orléans.
- [19] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992), *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root*. Journal of Econometrics, 54, 159-178.
- [20] Lardic, S., & Mignon, V. (2002), *Économétrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières*. Economica.
- [21] Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes* (2e édition). Wiley.
- [22] Roustant, O. (2007), *Modèle GARCH : Application à la prévision de la volatilité*. École Nationale Supérieure des Mines, 8-22.
- [23] Tsasa, J. P. (2013), *Statistique appliquée*. Centre Congolais-Allemand de Microfinance, DAAD.
- [24] Tsay, R. S. (2010), *Analysis of Financial Time Series* (3e édition). Wiley.
- [25] Von Sachs, R., & Van Bellegem, S. (2005), *Séries chronologiques (4e Édition)*. Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, 73-95 et 107-122.
- [26] Zucchini, W., & Nenadic, O. (2003), *Time Series Analysis with R*. Institut für Statistik und Ökonometrie, 8-23.

## Résumé

Ce mémoire de master explore l'utilisation des modèles ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) et GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) pour modéliser la volatilité des marchés financiers, notamment à travers les rendements de l'indice CAC40 et de l'action Apple Inc. Ces modèles permettent de capturer la variance conditionnelle et de prévoir la volatilité, ce qui est crucial pour la gestion des risques et les décisions d'investissement. Le document est structuré en trois chapitres : le premier introduit les concepts fondamentaux des processus stochastiques ; le second détaille les fondements théoriques et la formulation mathématique des modèles ARCH et GARCH ; et le troisième présente une application pratique de ces modèles, démontrant leur utilité et validité à travers l'analyse empirique des données financières réelles. Cette étude met en avant l'importance de ces outils pour anticiper la volatilité des marchés et prendre des décisions financières éclairées.

### ملخص

يتناول بحث الماجستير استخدام نماذج التغيرات الذاتي المشروط و التغيرات الذاتي المعمم المشروط، لنمذجة تقلبات الأسواق المالية، خاصة من خلال عوائد مؤشر كاك ٤٠ وسهم شركة ابل ان.س. . تتيح هذه النماذج إمكانية التقاط التباين الشرطي والتنبؤ بالتقلبات، مما يعد أمراً حيوياً لإدارة المخاطر واتخاذ قرارات الاستثمار. يقسم البحث إلى ثلاثة فصول: يقدم الأول المفاهيم الأساسية للعمليات العشوائية؛ يوضح الثاني الأسس النظرية والصياغة الرياضية لنماذج التغيرات الذاتي المشروط و التغيرات الذاتي المعمم المشروط ويعرض الثالث تطبيقاً عملياً لهذه النماذج، مما يبرز فائدتها وصحتها من خلال التحليل التجريبي للبيانات المالية الحقيقية. تسلط هذه الدراسة الضوء على أهمية هذه الأدوات في توقع تقلبات السوق واتخاذ قرارات مالية مستنيرة.

### Abstract

This master's thesis explores the use of ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) and GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) models to model the volatility of financial markets, particularly through the returns of the CAC40 index and Apple Inc. stock. These models capture conditional variance and predict volatility, which is crucial for risk management and investment decisions. The document is structured into three chapters: the first introduces the fundamental concepts of stochastic processes; the second details the theoretical foundations and mathematical formulation of ARCH and GARCH models; and the third presents a practical application of these models, demonstrating their usefulness and validity through empirical analysis of real financial data. This study highlights the importance of these tools for anticipating market volatility and making informed financial decisions.