الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالــي والبحــث العلمـــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique Appliquées
Thème

Stabilité exponentielle des équations différentielles stochastiques linéaires

Présenté Par :
1) Melle : Khaoula Elmeguenni

Devant le jury composé de :

Dr: Abderrahmane BENIANI	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr: Djamila BENNAFLA	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr: Mohammed HARIRI	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2023/2024

Remerciements

A l'echeance de ce projet de fin d'étude. Je doit en premier lieu l'enorme remerciement à notre dieu mesicorde, aussi qu'a nos très chers parents pour leurs patience et le grand sacrifice pour l'aboutissement de nos études.

Aussi nos remerciement les plus sincères à notre encadreur Mr **M HARIRI** qui a été toujours fidèle , qui nous a aidé du debut à la fin pour finir ce travail. Aussi au jury à leur tète le president et les examinateurs pour avoir honorer de leurs presences notre soutenance.

E. Khaoula.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents, ma famille
et à toute la promotion du Master Probabilités et statistique Appliquées .

E. Khaoula.

Résumé

Stabilité exponentielle des équations différentielles stochastiques (EDS) est de comprendre et de garantir que les solutions de ces équations restent proches d'un point d'équilibre ou convergent vers ce point à un taux exponentiel, malgré la présence de perturbations aléatoires.

Cela est crucial pour de nombreuses applications pratiques, où la robustesse et la fiabilité du système sous incertitude doivent être assurées.

Principales notations utilisées

1. $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ désigne l'espace de Hilbert de tous les opérateurs linéaires bornés.
2. I ou id : opérateur d'identité.
3. $\mathbb{C}$: nombres complexes.
4. $(\Omega, \mathrm{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité
5. W_t ou $W(t)$, $t > 0$, est appelé un processus
6. $Q - Wiener$ dans $\mathcal{H}$
7. $\mathbb{C}^-$: demi-plan ouvert dans $\mathbb{C}$, $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$
8. A^* : transposée du conjugué complexe de A ; lorsque A est dans un opérateur, A^* dénote l'adjoint de A.
9. $\sigma(A)$: spectre de opérateur A.
10. $\sigma(I, A)$ spectre de opérateur $\lambda I - A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ and $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.
11. $\sigma_p(I, A)$ spectre de points de l'opérateur $\lambda I - A$, i.e., l'ensemble des valeurs propres de $\lambda I - A$.
12. $\langle ., . \rangle$ produit scalaire de $\mathcal{H}$.
13. $||x|| = \sqrt{\langle ., . \rangle}$ norme de $x \in \mathcal{H}$.

Table des matières

Introduction

Pour les systèmes dynamiques qui décrivent divers processus mécaniques, technologiques, économiques ou autres. La stabilité [4] constitue une propriété qualitative fondamentale. L'étude de cette proprité depuis Lyapunov a connu des développement considérables [7].

Le système dynamique est stable (au sens de Lyapunov) si le comportement de ce système varie peu étant soumis á de petites perturbations. Si de plus ces variations s'estompent avec le temps, on parle alors de stabilité asymptotique, quand il s'agit de processus contrôles stochastic donc soumis á des commandes on parle dans ce cas de stabilisation [6].

Nous consacrons le présent travail á la stabilité exponentielle des équations différentielles stochastiques linéaires dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Rappelons que pour un système linéaire dont le comportement est décrit par l'équation :

$$y'(t) = Ay(t), \;\; t \geq 0, \quad y \in \mathcal{H}$$

où A est générateur infinitésimal d'un semigroupe de classe C_0 sur $\mathcal{H}$ cette système est asymptotiquement (exponentiellement) stable si est seulement si le spectre de opérateur A

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \;\; Re\lambda < 0\}.$$

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des équations qui décrivent l'évolution de systèmes dynamiques en présence de bruit aléatoire. Elles sont largement utilisées dans divers domaines tels que la finance, la physique, la biologie et l'ingénierie. Les EDS ajoutent un terme de bruit stochastique à des équations différentielles ordinaires (EDO) pour modéliser l'incertitude et les fluctuations aléatoires.

Une EDS peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + BdW(t),\ t \geq 0 \\ \\ y(0) = y_0,\ y_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{H}) \end{cases}$$

• $y(t)$ est la variable d'état à temps t.

• $y'(t)$ est la dérivée déterministe de $y(t)$.

• W_t est un processus de Wiener (ou mouvement brownien), représentant le bruit stochastique.

Les EDS sont appliquées dans de nombreux domaines pour modéliser des systèmes où l'incertitude et la variabilité jouent un rôle crucial. Par exemple :

• Finance : Modélisation des prix des actifs financiers, taux d'intérêt, et risques de crédit.

• Physique : Modélisation des systèmes thermodynamiques et des processus de diffusion.

• Biologie : Modélisation de la dynamique des populations et des réactions biochimiques.

Les équations différentielles stochastiques fournissent un cadre puissant pour comprendre et prévoir les comportements des systèmes complexes soumis à des influences aléatoires.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres

Le premier chapitre intitulé *"Notions préliminaires*", contient un ensemble de définitions et révision des concepts fondamentaux [1].

Le deuxième chapitre intitulé " *Equations différentielles stochastiques* "
Dans cette chapitre, les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des équations différentielles dans lesquelles des termes aléatoires interviennent, rendant leur étude et leur résolution plus complexes que celles des équations différentielles déterministes. Ces termes aléatoires sont généralement modélisés par des processus stochastiques, tels que les processus de Wiener ou de Brownien.

Le troisième chapitre intitulé “ *Stabilité exponentielle des équations différentielles stochastiques*“.

Pour étudier la stabilité exponentielle des EDS, diverses méthodes et critères sont utilisés, notamment [5] :

• **Méthode de Lyapunov** : Utilisation de fonctions de Lyapunov pour prouver la stabilité exponentielle. Une fonction de Lyapunov est une fonction qui diminue au fil du temps et peut démontrer que les solutions d'une EDS convergent exponentiellement vers un point d'équilibre [3].

• **Critères de Stabilité** : Développement de critères spécifiques, tels que les critères de stabilité, les critères basés sur les exposants de Lyapunov, pour évaluer la stabilité des systèmes stochastiques.

• **Analyse Spectrale** : Utilisation de techniques spectrales pour analyser les propriétés des opérateurs associés aux EDS et déterminer la stabilité exponentielle.

Chapitre Premier

Préliminaires

1.1 Espace de Hilbert et ses propriétés

Produit scalaire

Définition 1.1.1. *[9]. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme* ***sesquilinéaire*** *sur $\mathcal{H}$, toute application $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$*

1. $A(\alpha x + \beta y, z) = \alpha A(x, z) + \beta A(y, z)$.
2. $A(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} A(x, y) + \overline{\beta} A(x, z)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la forme sesquilinéaire A devient une forme bilinéaire.

Définition 1.1.2. *[2]. On appelle* ***produit scalaire*** *sur $\mathcal{H}$ toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive u. Dans ce cas on écrit $A(x, y) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$.*

La théorie des opérateurs joue un rôle important en analyse et surtout en équation différentielle et équation aux dérivées partielles. Dans ce travail, toute application linéaire d'un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $\mathcal{F}$ est dite **opérateur** [2].

- L'espace vectoriel des opérateurs linéaires est noté $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.
- L'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus est noté par $\mathcal{L}_c(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Proposition 1.1.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour tout $A, B \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$

2. $(\lambda B)^* = \overline{\lambda} B^*$
3. $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
4. *Si A est inversible, alors A^* l'est aussi, et son inverse est* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
5. $(A^*)^* = A$
6. $\|A^*\| = \|A\|$.

1.2 Théorie spectrale élémentaire

Définition 1.2.1. *[9] Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A un opérateur de $\mathcal{L}_c(\mathcal{E})$, un nombre complexe λ est dit* ***valeur propre*** *de u si l'équation*

$$Ax = \lambda x$$

admet des solutions non nulles, et on note l'ensemble des valeurs propres de u par :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;\; : \;\; \exists x \in \mathcal{E} - \{0\} : Ax = \lambda x\}.$$

On note aussi par S_λ l'ensemble de ses solutions et on a :

$$S_\lambda = \{x \in \mathcal{E} - \{0\} : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I),$$

S_λ est appelé le ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre λ. Ses éléments s'appellent* ***vecteurs propres****. L'inverse de $A - \lambda I$, quand il existe, est appelé* ***opérateur résolvant*** *ou* ***la résolvante de A****. On le note par*

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Définition 1.2.2. *Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est dit valeur* ***régulière*** *de $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{E})$ si l'équation $Ax = \lambda x$ n'admet pas de solutions non nulles. Autrement dit, une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est régulière si l'opérateur $A - \lambda I$ est inversible. Notons par $\rho(A)$ l'ensemble des valeurs régulières.*

Remarque 1.2.1. *Dans le cas où $\mathcal{E}$ est de dimension finie on a seulement deux possibilités :*

1) *Si l'opérateur $A - \lambda I$ est inversible, alors la résolvante de A existe et est définie sur $\mathcal{E}$ tout entier, i.e $\lambda \in \rho(A)$.*

2) *Si l'opérateur $A - \lambda I$ n'est pas inversible alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

La résolvonte $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ existe mais n'est pas définie sur l'espace $\mathcal{E}$ tout entier.

Le spectre de A contient les valeurs propres puisque si $Ax = \lambda x$ pour un élément x non nul, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ n'existe pas.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre ponctuel de** A et noté par $\sigma_p(A)$. La partie restante du spectre (c'est-à-dire la partie constituée des éléments λ pour lesquels l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ existe mais n'est pas défini sur $\mathcal{E}$ tout entier) est appelé **spectre continu de** A, noté par $\sigma_c(A)$.

Ainsi toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est soit propre, soit régulière ou soit un point du spectre continu, et on a

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \quad , \quad \rho(A) = \mathbb{C} \backslash \sigma(A).$$

1.3 Résolutions des systèmes linéaires en dimension finie

Les systèmes différentiels linéaires ont une grande importance pratique, car de nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser par des tels systèmes. On sait d'autre part résoudre complétement les systèmes à coefficients constants, le calcul des solutions se fait par la méthode de la matrice exponentielle

Tout système linéaire de **n** équations différentielles du premier ordre à coefficients constants est de la forme vectorielle suivante

$$y'(t) = Ty(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

où $y(t)$ est un vecteur colonne avec les composantes $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$, T est une matrice carrée constante et $f(t)$ est un vecteur colonne avec les composantes $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ est appelé système de la forme normale. La solution du système (1.1) est la somme de la solution générale du système homogène correspondant

$$y'(t) = Ty(t), \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

et une solution particulière du système (1.1).

Si le système linéaire est donné sous la forme

$$A_0 y'(t) = By(t) + \varphi(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

où A_0 est une matrice inversible ($\det A_0 \neq 0$), alors il suffit de multiplier par A_0^{-1} le système (1.3) pour obtenir le système de la forme (1.1) avec $T = A_0^{-1}B$ et $f(t) = A_0^{-1}\varphi(t)$.

Méthode de la matrice exponentielle

• Étude du système homogène de la forme (1.2)

Définition 1.3.1. *Une matrice fondamentale de solutions est une matrice M dont les colonnes sont $\boldsymbol{n}$ solutions linéairement indépendantes de* (1.2).

Théorème 1.3.2. *La matrice $M(t) = e^{tT}$ est une matrice fondamentale de solutions du système* (1.2).

Remarque 1.3.1. *Si $M(t)$ est une matrice fondamentale de solutions du système* (1.2)*, alors la solution générale est donnée par $y(t) = M(t)v$, $v \in \mathbb{K}^n$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$.*

Proposition 1.3.3. *Soint T une matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors, l'application*

$$\varphi \ : \ I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$t \mapsto e^{tT}$$

est de classe C^1 sur I. De plus, $\forall t \in I$: $\quad \varphi'(t) = T\varphi(t) = \varphi(t)T$.

Exemple 1.3.4. *Par la méthode de la matrice exponentielle $M(t) = e^{tT}$ résolvons le système non homogène* (1.1)*, où*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de T est $P_T(\lambda) = det(T - \lambda id) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ admet deux racines simples (qui sont les valeurs propres de T) $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. Les vecteurs propres correspondants sont respectivement $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$ car $det(P) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Par conséquent, T est diagonalisable. D'où $T = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, la matrice fondamentale de solutions est

$$\begin{aligned} M(t) &= e^{tT} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \cdots = \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, la solution du système (1.1) sera par la méthode de la variation de la constante :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = M(t)v + \int_0^t M(t-s)f(s)ds = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{2t-2s} - e^{3t-3s} & 2e^{2t-2s} - 2e^{3t-3s} \\ -e^{2t-2s} + e^{3t-3s} & -e^{2t-2s} + 2e^{3t-3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds = \cdots = \\ &= \begin{pmatrix} 2(c_1+c_2)e^{2t} - (c_1+2c_2)e^{3t} + 2(t+2)e^{2t} - \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^t \\ -(c_1+c_2)e^{2t} + (c_1+2c_2)e^{3t} - (t+3)e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.3.5. *Résolvons le système homogène (1.2), où* $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution. On peut vérifier aisément que la matrice T n'est pas diagonalisable. Dans ce cas on va calculer l'exponentielle de la matrice T par la définition en remarquant que

$$T = 2I + N, \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotente ; car $N^3 = N^4 = \cdots = 0$. Il est clair que les matrices I et N commutent, on en déduit que $e^{tT} = e^{2tI}e^{tN}$; mais

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k N^k}{k!} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$e^{tT} = e^{2t}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t+\frac{t^2}{2})e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution générale du système homogène (1.2) est

$$y(t) = e^{tT}v = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t+\frac{t^2}{2})e^{2t} \\ 0 & 1 & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3(3t+\frac{t^2}{2})e^{2t} \\ c_2te^{2t} - c_3te^{2t} \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix},$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes réelles arbitraires.

1.4 Approche Semi-group

Définition 1.4.1. *(semigroupe)[1].*

On appelera semigroupe linéaire d'opérateurs bornés toute fonction de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ noté S, telque $S : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$

(i) S(0)=I;

(ii) $S(t+s) = S(t) \cdot S(s)$.

Théorème 1.4.2. *(Théorème de Hille-Yosida)[2]. Une condition néccessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire fermé A à domaine dense dans $\mathcal{H} \in \mathcal{X}$ soit le générateur infitésimal d'un C_0 semigroupe est : il existe N, μ telque pour tout λ , $Re\lambda > \mu, \lambda \notin \sigma(A)$*

$$\|R_\lambda(A)^n\| \leq \frac{N}{(Re\lambda - \mu)^n}, n \in \mathbb{N}^\star,$$

où $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est la résolvante de A. De plus on a

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}.$$

Définition 1.4.3. *(Solution généralisé). Soit y est dite solution généralisée (faible) du problème (3.1) ssi*

$$\frac{d}{dt}\langle y(t), x^* \rangle = \langle Ay(t), y^* \rangle + \langle f(t), y^* \rangle$$

pour tout $y^* \in \mathcal{H}$.

1.5 Types les plus simples de points de repos

.

Soit donné un système de deux équations différentielles homogènes à coefficients constants (stationnaire)

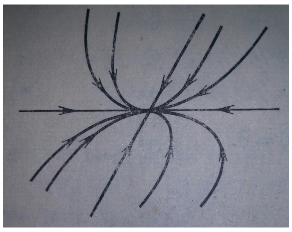
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.4}$$

Pour étudier la stabilité du point de repos du système (1.4) il faut établir l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.5}$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2.

1. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes :
   (a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable).

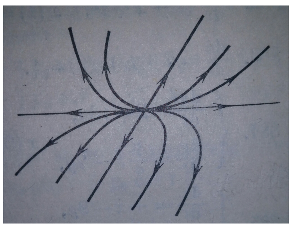


Exemple 1.5.1. *Le point de repos* $(0, 0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

est un noeud stable, car $\lambda = -\frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{21}}{2} < 0$.

   (b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable).

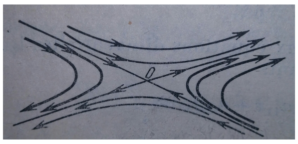


Exemple 1.5.2. *Le point de repos* $(0, 0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

est un noeud instable, car $\lambda = 3 \mp \sqrt{2} > 0$.

(c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point de repos est instable (col instable).



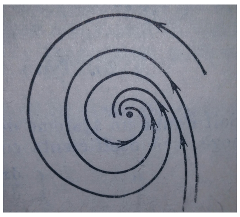
Exemple 1.5.3. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$$

est un col instable, car $\lambda_1 = -\sqrt{3} < 0$ *et* $\lambda_2 = \sqrt{3} > 0$.

2. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes : $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$

(a) $p < 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable).

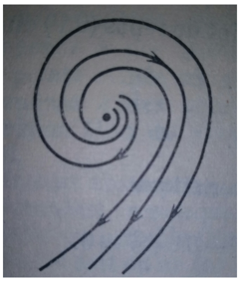


Exemple 1.5.4. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

est un foyer instable, car $\lambda = -1 \mp i\sqrt{2}$.

(b) $p > 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est instable (foyer instable).

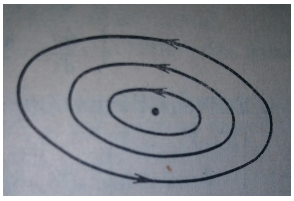


Exemple 1.5.5. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y, \end{cases}$$

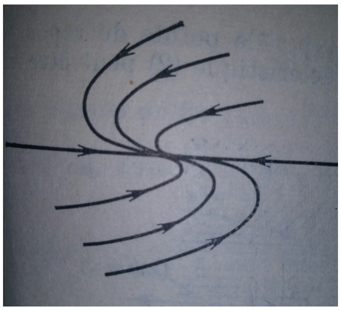
est un foyer instable, car $\lambda = 2 \mp i$.

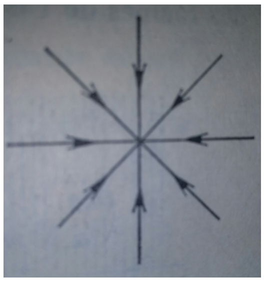
(c) $p = 0$, $q \neq 0$. Le point de repos est stable (centre).



Exemple 1.5.6. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système de l'exemple 1.5.5 ci-dessus est un centre stable, car* $\lambda = \mp i$.

3. Les racines sont multiples :
   (a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable).



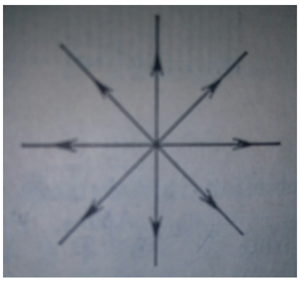


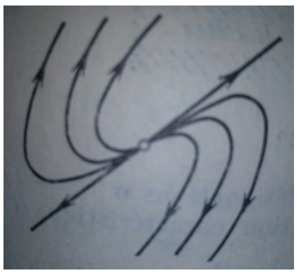
Exemple 1.5.7. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

est un noeud stable, car $\lambda = -1$ *est une racine double.*

   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Le point de repos est instable (nœud instable).





Exemple 1.5.8. *Le point de repos* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x, \end{cases}$$

est un nœud instable, car $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 > 0$.

Chapitre Deux

Équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des équations différentielles ordinaires ou partielles modifiées pour inclure des termes stochastiques, permettant ainsi de modéliser des phénomènes influencés par des incertitudes ou des bruits aléatoires. Voici une introduction détaillée aux EDS, leurs types, leurs solutions et leurs applications [3].

2.1 Formulation Générale

Une équation différentielle stochastique peut être écrite sous la forme :

$$dy(t) = f(y(t), t)dt + g(y(t), t)dW(t)dy(t), \in y \in \mathcal{H}$$

où :

1. $y(t)$ est le processus stochastique (la solution recherchée).
2. $f(y(t), t)$ est le terme de dérivée déterministe.
3. $g(y(t), t)$ est le terme de diffusion.
4. $W(t)$ est un processus de Wiener (ou processus de Brown), représentant le bruit blanc.

2.2 Définition

La théorie des équations différentielles stochastiques dans les espaces de Hilbert est généralisation des équations différentielles stochastiques finies introduites par Ito et sous une forme légèrement différente par Gihman dans les années 1940. Le Le lecteur est référé [8].

Pour une déclaration systématique à ce sujet. A cette occasion, nous contentons d'une présentation de comment il est possible de formuler une équation aux dérivées partielles stochastiques standard comme une équation différentielle stochastique dans les espaces de Hilbert.

Soit Ω un domaine borné en $\mathbb{R}^n$, avec des limites lisses. Par example considérez le problème suivant de valeur initiale limite pour l'équation de chaleur perturbée

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial t} W(t,x) & , \ t \geq 0 \ x \in \Omega \\ \\ y(0,x) = y_0(x) & , \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $W(t,x)$ est un champ aléatoire standard de Wiener (voir, par exemple, [3]).

Par analogie avec les équations aux dérivées partielles, ce différentiel partiel stochastique l'équation (2.1) peut être vue de deux façons différentes. Une façon naturelle est considérer sa solution comme un champ aléatoire à valeur réelle indexé par le temps et variables spatiales t et x. En général, cette approche utilise la probabilité compliquée. D'autre part, l'un peut considérer une solution de cette équation comme un processus stochastique indexé par t avec des valeurs dans un espace approprié de fonctions de x [4].

2.3 Types d'equations différentielles stochastiques

1. **Équations de Langevin** : Utilisées pour modéliser le mouvement des particules en suspension dans un fluide, ces équations prennent la forme

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\gamma\frac{dy(t)}{dt} + \eta(t)$$

   où γ est le coefficient de friction et $\eta(t)$ est un terme de bruit aléatoire.

2. **Processus d'Ornstein-Uhlenbeck** : Un modèle simple de processus stochastique gaussien stationnaire souvent utilisé en finance

$$dy(t) - \theta(\mu - y(t))dt + \sigma dW(t)$$

   où θ, μ et σ sont des constantes.

3. **Équations de Black-Scholes** : Utilisées pour approcher les solutions des EDS numériquement. Ces méthodes impliquent la discrétisation du temps et l'utilisation de simulations aléatoires pour estimer les trajectoires des solutions.

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

où $S(t)$ est le prix de l'actif sous-jacent, μ est le taux de croissance attendu, et σ est la volatilité.

2.4 Méthodes de Solution

1. **Méthode d'Intégration d'Itô** : Cette méthode est utilisée pour intégrer les EDS où l'intégrale stochastique est définie par :

$$y(t) - y(0) = \int_0^t f(y(t), t)ds + \int_0^t g(y(t), t)dW(s)$$

   L'intégrale stochastique $\int_0^t g(y(t), t)dW(s)$ est une intégrale d'It.

2. **Méthode d'Intégration de Stratonovich** : Alternative à l'intégrale d'Itô, cette méthode est plus adaptée pour certaines applications physiques. L'intégrale de Stratonovich est définie de manière à satisfaire la règle de chaîne ordinaire.
3. **Méthode des Différences Finies et Méthode de Monte Carlo** : Utilisées pour approcher les solutions des EDS numériquement. Ces méthodes impliquent la discrétisation du temps et l'utilisation de simulations aléatoires pour estimer les trajectoires des solutions.

Applications

1. **Finance** : Les EDS sont fondamentales dans la modélisation des prix des options, la gestion des risques et la prévision des marchés financiers.
2. **Physique** : Modélisation des mouvements browniens, diffusion de particules, et phénomènes de transport.
3. **Biologie** : Dynamique des populations, épidémiologie et modélisation des systèmes biologiques sous l'influence de fluctuations aléatoires.
4. **Ingénierie** : Contrôle stochastique, analyse de la fiabilité et modélisation des systèmes soumis à des perturbations aléatoires.

Exemples

1. **Equation de Langevin** :

$$dy(t) = -\gamma y(t)dt + \sqrt{2\gamma k_B T}dW(t)$$

   où k_B est la constante de Boltzmann et T la température.

2. **Processus de Black-Scholes** :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

   utilisé pour modéliser l'évolution des prix des actifs financiers.

3. **Modèle de Population** :

$$dy(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{k})dt + \sigma y(t)dW(t)$$

où r est le taux de croissance intrinsèque, k la capacité de charge, et σ l'intensité du bruit.

2.5 Processus stochastiques

Les processus stochastiques jouent un rôle crucial dans divers domaines tels que la finance, l'économie, l'ingénierie, et bien d'autres. Ils permettent de modéliser des phénomènes qui évoluent de manière aléatoire au fil du temps.

Pour un opérateur auto-adjoint et non négatif, Q nous supposons, sans perte de généralité, qu'il existe une base orthonormale $\{e_i\}$ en $\mathcal{H}$, et une suite bornée de nombres positifs $\lambda_i$telle que

$$(\lambda_i I - Q)e_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., .$$

Un processus stochastique W_t ou $W(t)$, $t > 0$, est appelé un processus $Q-Wiener$ dans $\mathcal{H}$ si

1. $W(0) = 0$;
2. $W(t)$ a des trajectoires continues ;
3. $W(t)$ a des incréments indépendants
4. $\mathbb{D}_{W(t)-W(s)} = N(0, (t-s)Q)$ pour tous les $t \geq s \geq 0$.

Si $Tr(Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < 0$, alors W est un véritable procédé Wiener qui a chemins continus en $\mathcal{H}$. Il est possible que $Tr(Q) = \infty$ i.e., $Q = I$. par exemple, $Q = I$, et dans ce cas, nous appelons W un processus de Wiener cylindrique en $\mathbb{K}$, qui, en général, a chemins continus seulement dans un autre espace de Hilbert plus grand que H. Il est immédiat que la variation quadratique d'un processus Q-Wiener avec

$Tr(Q) < 0$ est donnée par

$$W_t = tQ, \quad t \geq 0.$$

Supposons que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathrm{F}, \mathbb{P})$ est équipé d'une filtration normale $\{\mathrm{F}_t\}_{t\geq 0}$. Soit être un processus Q-Wiener en $\mathcal{H}$ qui est supposé être adapté à $\{\mathrm{F}_t\}_{t\geq 0}$, et pour chaque $t \geq 0$, les incréments $W(t)-W(s)$ sont indépendant de F_s. Puis $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, est continue, en plus la représentation suivante de W_t

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} W(t) e_i \qquad , t \geq 0$$

où $(\lambda_i, i \in \mathbb{N}^+)$ sont les valeurs propres de Q avec leurs correspondantes eigenvectors $(e_i, i \in \mathbb{N}^+)$ est un groupe d'indépendants mouvements browniens normaux à valeur réelle.

Les équations différentielles stochastiques sont des outils puissants pour modéliser et analyser des systèmes dynamiques influencés par des incertitudes et des perturbations aléatoires. Leur étude et leur application nécessitent une compréhension approfondie des concepts de probabilité et de calcul stochastique.

Chapitre Trois

Stabilité exponentielle des équations différentielles stochastiques

L'objectif de ce chapitre est d'établir les résultats de stabilité des systèmes définis par des équations différentielles linéaires stochastiques. Nous explorerons la stabilité abstraite, qui est une généralisation aléatoire du travail classique de Lyapunov en dimension finie.

3.1 Systèmes linéaires stationnaires

Considéron le système linéaire stationnaire (homogène)

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) & , \ t \geq 0 \\ \\ y(0) = y_0 & , \ y_0 \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{3.1}$$

1) fonctions de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons le systéme

$$x'(t) = f(t) \quad ; \quad t \geq 0, \ x \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Tel que $f(0) = 0$, admetttant $x_0 = 0$ comme équilibre .Soit $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine et des dérivées partielles continues. On note

$$\dot{F}(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) f_i(x).$$

Définition 3.1.1. *On dit que F est une fonction de Lyapunov pour le systeme (3.2) en $x_0 = 0$ dans $\mathcal{H}$, si pour tout $x \in \Omega$on a :*

1. *$F(x) > 0$ sauf en $x = 0$ ou $F(0) = 0$.*
2. *$F'(x) \leq 0$*

Théorème 3.1.2.

1. *S'il existe une fonction de Lyapunov pour (3.2) en $x = 0$ dans un voisinage Ω de 0, alors $x = 0$ est stable .*
2. *Si de plus $x \neq 0 \Rightarrow F'(x) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable .*
3. *Si de plus $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $F(x) \longrightarrow \infty$ quand $||x|| \longrightarrow \infty$ alors $x = 0$ est globalement asymptotique stable.*

2) Stabilité et théorie de Lyapunov dans le cas linéaire :

cas continu

Dans cette partie ,nous étudions d'abord les proprietés de stabilité de l'équilibre $x_0 = 0$ des systemes homogénes linéaires autonomes :

$$y'(t) = Ay(t) \quad ; \quad t \geq 0, \ x \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Remarque 3.1.1. *Le système (3.3) peut avoir :*

1. *Un point d'équilibre unique $y_0 = 0$ si A est inversible.*
2. *Une infinité des points d'équilibre si A n'est pas inversible.*

Théorème 3.1.3. *L'origine x_0 de système (3.3) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice définie positive $Q \gg 0$ il existe une matrice définie positive $W \gg 0$ telle que*

$$Re(WA) \ll 0 \Longleftrightarrow A^T W + WA = -Q \tag{3.4}$$

Démonstration.

Condition suffisante

Il suffit d'observer que $F(x) = x^T W x$ est une fonction de Lyapunov pour (3.3) en $x_0 = 0$ En effet ;

$$\begin{aligned}\dot{F}(x) &= F'(x) \\ &= x'^T W x + x^T W x' \\ &= x^T (A^T W + W A) x \\ &= -x^T Q x.\end{aligned}$$

Donc le théoreme de Lyapunov s'applique et montre que $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable .

Condition nécessaire

Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice $\lambda I - A$ vérifiant $Re(\lambda_i) < 0$, et considérons la matrice W définie par :

$$W = \int_0^\infty e^{A^T s} Q e^{As} ds.$$

Cette intégrale est bien définie .La matrice W est clairement symétrique. En remplacant l'équation de W dans (3.4) , on obtient :

$$\begin{aligned}A^T W + W A &= \int_0^\infty [A^T e^{A^T s} Q e^{As} + e^{A^T s} Q e^{As} A] ds \\ &= \int_0^\infty \frac{d(e^{A^T s} Q e^{As})}{ds} ds \\ &= e^{sA^T} Q e^{sA}|_0^\infty \\ &= -Q\end{aligned}$$

Il reste maintenant de montrer qu'elle est définie positive . supposons le contraire,il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $x^T W x = 0$ .Comme la matrice e^{As} est inversible pour tout $t \geq 0$,il vient que :

$$\begin{aligned} x^T W x &= 0 \Rightarrow \int_0^\infty x^T e^{A^T s} Q e^{As} x ds = 0 \\ &\Rightarrow e^{As} x = 0, \forall s \geq 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que W est définie positive. Ce qui montre que W est bien une solution de léquation(3.4), appelée l'équation matricielle de Lyapunov.

Remarque 3.1.2. *Pour construire une fonction de Lyapunov pour le systeme ,il faut procéder de la matrice suivante :*

1. *Choisir une matrice définie positive Q (par exemple* $Q = I_n$
2. *Résoudre léquation de Lyapunov .Si on choisi Q symétrique , alors W sera symétrique aussi.*
3. *Vérifier que W est définie positive*

Exemple 3.1.4. *Soients*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix},$$

on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} -2W_1 & 3W_1 - W_2 - 2W_4 \\ 3W_1 - 3W_3 & 3W_2 + 3W_3 - 4W_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution

$$W = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.1.5. *Soit* $dim\mathcal{H} < \infty$*, l'origine est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives .*

$$Sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(I, A)\} < 0.$$

Si et seulement s'il existe une matrice $W \gg 0$ *et* $Q \gg 0$ *tel que :*

$$A^* W + W A = -Q.$$

3.2 Équations de Lyapunov et stabilité stochastique

Dans cette section, nous effectuerons un type de fonction de Lyapunov pour généraliser certains résultats de stabilité des espaces finis à infinis.

À ce stade, nous sommes particulièrement intéressés par la stabilité exponentielle, car elle montre explicitement la désintégration des systèmes considérés.

En ce qui concerne le système (3.1), si l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension finie, il existe quelques conditions équivalentes pour que la solution nulle soit exponentiellement stable, comme mentionné au début de cette section. Quelques conditions similaires peut également être formulé en fonction des propriétés du spectre d'une matrice ou de l'existence d'une fonction de Lyapunov appropriée. Précisément, rappelons le résultats suivants [4].

Proposition 3.2.1. *Soit $\mathcal{H}$ en dimension finie, par exemple, $\mathcal{H} < \infty$. La solution nulle de (3.1) est exponentiellement stable si et seulement si l'une des conditions suivantes est remplie :*

1. *toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives*

$$\sup \{Re\lambda : det(\lambda I - A) = 0\} < 0; \tag{3.5}$$

2. *il existe une matrice définie positive $W \gg 0$, telle que l'équation de Lyapunov*

$$WA + A^*W = -I$$

ou est la transposition de A et I est la matrice d'identité. Dans ce dernier cas, la function est une fonction de Lyapunov de (3.1) dans le sens que pour la solution $y(t); t \geq 0$.

La dérivée du long de la trajectoire $y(t)$ satisfait

$$\begin{aligned} \frac{dF(y(t))}{dt} &= \langle F'(y(t), Ay(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= -\|y(t)\|^2_{\mathcal{H}}, t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

tel que $F : \mathcal{H} \longrightarrow [0; +\infty)$ application Continue.

Remarque 3.2.1. *Si l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, alors la proposition 3.2.1 n'est que partiellement vraie. Dans ce cas, la condition (3.5), en général, n'implique pas exponentielle stabilité de ce problème de Cauchy (3.1) à moins que des conditions supplémentaires ne soient imposées à A. Notez qu'à cette occasion (3.5) est, bien sûr, remplacé par*

$$\sup \{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0; \tag{3.7}$$

où $\sigma(A)$ est le spectre de l'opérateur A.

Théorème 3.2.2. *Soit $S(t)$ être un C_0-semigroupe exponentiellement stable sur l'espace $\mathcal{H}$ de Hilbert. Il existe alors une fonction continue unique $F : \mathcal{H} \longrightarrow [0; +\infty)$ tel que*

(i) Pour chaque $y \in \mathcal{H}$, la fonction $t \to F(S(t)y) : [0; +\infty) \longrightarrow [0; +\infty)$ présente la propriété de

$$\lim_{t\to\infty} F(S(t)y) = 0 \qquad et \quad \frac{dF(S(t)y)}{dt} = -\left\|S(t)y\right\|^2_{\mathcal{H}} \quad t \geq 0. \tag{3.8}$$

(ii) il existe une constant $C > 0$ telle que

$$F(y) \leq C||y||^2_{\mathcal{H}}; \quad \forall y \in \mathcal{H}. \tag{3.9}$$

Inversement, s'il existe un fonction $F : \mathcal{H} \longrightarrow [0; +\infty)$. satisfaisant (i) et (ii), alors le C_0-semigroupe $S(t)$ est exponentiellement stable.

Démonstration.

Supposons que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable

$$\| S(t) \| \leq Me^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \quad \forall M \geq 1 \quad \mu > 0.$$

Donc la fonction F donnée par

$$F(t) = \int_0^\infty \| S(t) \|^2_{\mathcal{H}} \, dt \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

est bien définie pour $y \in \mathcal{H}$. Il est facile de voir que satisfait une inégalité de la forme (3.9). De plus, puisque $S(t)$ est exponentiellement stable et satisfait (3.9), il s'ensuit que

$$F(S(t)y) \leq C \| S(t)y \|^2_{\mathcal{H}} \leq CM^2 e^{-2\mu t}||y||^2_{\mathcal{H}}, \quad y \in \mathcal{H}.$$

ou $t > 0, M \geq 1$ et $\mu > 0$.

Par conséquent $F(S(t)y) \to 0$ comme $t \to 0$. D'autre part, à partir du (3.8), nous avons cela pour $t > 0$ et $y \in \mathcal{H}$. Et donc

$$\frac{dF(S(t)y)}{dt} = -\left\|S(t)y\right\|^2_{\mathcal{H}}, \quad t \geq 0.$$

qui est exactement la deuxième égalité de (3.8). L'unicité est une conséquence de l'égalité

$$F(S(t)y) = F(y) + \int_0^\infty \frac{dF(S(s)y)}{ds} ds = F(y) - \int_0^\infty \|S(s)y\|^2_{\mathcal{H}} \, ds \quad t \geq 0 \tag{3.11}$$

et le fait que $F(S(t)y) \to 0$ comme $t \to \infty$.

Pour la déclaration inverse, notez que nous avons (3.11) immédiatement dû à (3.8). De plus, nous avons, en laissant entrer $t \to \infty$ et en utilisant (3.9), que

$$\int_0^\infty \|S(t)y\|_{\mathcal{H}}^2 \, dt = F(y) \leq C \, \|y\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty \quad ; \quad y \in \mathcal{H}.$$

La démonstration est donc complète.

Remarque 3.2.2. *La fonction $F : \mathcal{H} \longrightarrow [0; +\infty)$ dans le théorème 3.2.2 est appelé une fonction de Lyapunov du système (3.8). Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, on peut obtenir une version en dimension infinie de la proposition 3.2.1 .*

3.3 Solutions stationnaires exponentiellement stables

Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire suivante avec bruit additif sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + BdW(t), \; t \geq 0 \\ \\ y(0) = y_0, \; y_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{H}) \end{cases} \tag{3.12}$$

où A génère un C_0-semigroupe $e^{At}, t \geq 0$, $B \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ et W le processus de Wiener sur l'espace Hilbert. Il est clair que zéro n'est généralement pas une solution pour cette équation. Cependant, nous montrerons l'existence d'une solution stationnaire non triviale qui est exponentiellement stable.

Définition 3.3.1. 1. *La solution trivial de système (3.12) est dite stochastiquement stable ou stable en probabilité, si pour $\epsilon \in (0; 1)$ et $r > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon, t, t_0)$ lel que*

$$\mathbb{P}\{|y(t, t_0, y_0)| < r, t \geq t_0\} \geq 1 - \epsilon, |y_0| < \delta.$$

2. *La solution trivial est dite asymptotiquement stable, si elle est stochastiquement stable. De plus chaque ϵ, il existe $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, t_0) > 0$*

$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} y(t, t_0, y_0 = 0)\} \geq 1 - \epsilon, \quad |y_0| < \delta.$$

Définition 3.3.2. *La solution de système (3.12) est dite stable exponentiellement presque sûre si*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} |y(t, t_0, y_0)| < 0 \quad p.s$$

pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.3.3. *La solution trivial de système (3.12) est dite exponentiellement stable en moment, si il exisit une paire des constantes positives M et μ tel que*

$$\mathbb{E}|y(t,t_0,y_0)| \leq M|y_0|^p e^{-\mu(t-t_0)} \quad t \geq t_0 \tag{3.13}$$

pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Quand $p = 2$, il est généralement dit *être* exponentiellement stable en moyenne quadratique.

La stabilité exponentielle de moment d'ordre p sinifie que ce moment d'ordre p de la solution tend vers 0 exponentiellement rapide. Il résulte également de (3.13) que

$$\limsup_{t\to\infty} \log(\mathbb{E}|y(t,t_0,y_0)|^p) < 0. \tag{3.14}$$

Le côté gauche de (3.14) est appelé le moment d'ordre p exposant de Lyapunov, donc dans ce cas, le moment d'ordre p exposant de Lyapunov est négatif.

Théorème 3.3.4. *La solution trivial de système (3.12) est dite exponentiellement stable en moment il existe des constantes positives $M \geq 1$, $\mu > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}||y(t,y_0)||^2 \leq M||y_0||^2 e^{-\mu t} \quad t \geq 0. \tag{3.15}$$

pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 3.3.1. *Si $B \in L^2(\mathcal{V},\mathcal{H})$, nous avons clairement la relation*

$$2\langle x, Ax\rangle_{\mathcal{V},\mathcal{V}^*} \leq -\alpha||x||^2_{\mathcal{V}} + \lambda||x||^2_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}. \tag{3.16}$$

où $A\ : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ est un opérateur linéaire borné, il existe des constantes $\alpha > 0$, $\lambda \geq 0$ telles que pour tout $x \in \mathcal{V}$

Définition 3.3.5. *La solution $y = \{y(t); t \geq 0\}$ de (3.12) est appelé (fortement) stationnaire si la distribution de dimension finie de la solution est invariante sous le décalage de temps, c'est-à-dire,*

$$\mathbb{P}\{y(s+t_k) \in \Gamma_k, k = 1,2,...,n\} = \mathbb{P}\{y(t_k) \in \Gamma_k, k = 1,2,...,n\}$$

$\forall s \geq 0, t_k \geq 0$ et des ensembles $\Gamma_k \in \mathcal{H}, k = 1,2,...,n$ ou de manière équivalente, le cas $h_1,...h_n \in \mathcal{H}$,

$$\mathbb{E}\left[exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\langle y(s+t_k),h_k\rangle_{\mathcal{H}}\right)\right]=\mathbb{E}\left[exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\langle y(t_k),h_k\rangle_{\mathcal{H}}\right)\right]. \tag{3.17}$$

Système (3.12) *a une solution stationnaire y s'il existe un certain initial $y_0 \in L_2(\mathcal{H},\mathcal{H})$ tel que $y(t,y0)$, $t \geq 0$, est une solution stationnaire de* (3.12) *avec $y(0) = y_0 \in L_2(\mathcal{H},\mathcal{H})$.*

Définition 3.3.6. *Une solution stationnaire est dite unique si deux solutions stationnaires de* (3.12) *ont la même distribution de dimension finie.*

Le théorème suivant établit les conditions dans lesquelles il existe une solution stationnaire unique au système stochastique (3.12).

Théorème 3.3.7. *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe et $e^{tA}, t \geq 0$, qui est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $M \geq 1$ et $\mu > 0$ telles que*

$$\| e^{tA} \| \leq Me^{-\mu t}, \forall t \geq 0, \tag{3.18}$$

il existe alors une solution stationnaire unique de (3.12). *De plus, cette solution stationnaire est un processus gaussien moyen de zéro avec son opérateur de covariance K donné par*

$$k(t,s) = \int_0^\infty e^{(t-s+u)A}BQ^{1/2}(e^{uA}BQ^{1/2})^* du. \tag{3.19}$$

Démonstration.

Soit $\{\tilde{W}(t)\}_{t\geq 0}$ être une copie indépendante $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ définie sur $(\Omega, \mathrm{F}, \mathbb{P})$. Nous étendons d'abord W pour obtenir un Q-Wiener $\overline{W}$ sur l'ensemble de l'axe réel $\mathbb{R}$ par

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} W(t) & : \ t \geq 0 \\ \tilde{W}(-t) & : \ t < 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

par la filtration $\overline{\mathrm{F}}_t := \cap_{s>t}\tilde{\mathrm{F}}_s^0$, où

$$\tilde{\mathrm{F}}_s^0 := \sigma\left(\{\overline{W}(r_2) - \overline{W}(r_1) : -\infty < r_1 < r_2 \leq s\}\right)$$

et $N = \{E \in \mathfrak{F} : \mathbb{P}(E) = 0\}$. Il n'est pas difficile de voir que $\overline{W}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, un processus Q-Wiener concernant $\{\mathrm{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. En vertu de la condition (3.18). il est logique de définir un processus

$$U(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}Bd\overline{W}(s), \quad t\geq 0. \tag{3.21}$$

Il est immédiat que $\mathbb{E}U(t)=0$ pour toute $t\geq 0$. De plus, il $0\leq t<\cdots<t_n$; nous avons pour tout $h,h,\cdots\in\mathcal{H}$ que

$$\mathbb{E}exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\langle h_k,U(t_k)\rangle_{\mathcal{H}}\right)$$

$$= \quad exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty\sum_{j\geq i=1}^{n}\langle e^{(t_j-t_i+s)A}BQ^{1/2}(e^{sA}BQ^{1/2})^*h_i,h_j\rangle_{\mathcal{H}}ds\right]\right\} \tag{3.22}$$

a partir de que (3.22) $\mathbb{E}exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\langle h_k,U(t_k)\rangle_{\mathcal{H}}\right)$ est invariant lorsque t_k est remplacé par t_k+s, $k=1,...,n$ pour tout $s\geq 0$. Ainsi, le processus U est stationnaire. De plus, c'est un processus gaussien, un fait qui découle directement de la définition de l'intégrale stochastique, avec l'opérateur de covariance $k(t_j,t_i)$, $j\geq i$, donnée par

$$k(t_j,t_i)=\int_0^\infty e^{(t_j-t_i+s)A}BQ^{1/2}(e^{uA}BQ^{1/2})^*du.$$

Ainsi, l'opérateur de covariance $k(t_j,t_i)$ est une application de t_j-t_i seulement.

Ensuite, nous montrons que $U(t),t\geq 0$ dans (3.21) est une solution de (3.12).

En effet, en utilisant le théorème de Fubini [2] stochastique bien connu que nous avons pour tout $t\geq 0$ et $h\in\mathcal{H}$ tel que

$$\int_0^t\langle A^*h,U(s)\rangle_{\mathcal{H}}ds+\langle h,U(0)\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \left\langle A^*h, \int_{-\infty}^s e^{(t-u)A} B d\overline{W}(u) \right\rangle_{\mathcal{H}} ds + \left\langle h, \int_{-\infty}^0 e^{(-u)A} B d\overline{W}(u) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \int_{-\infty}^0 \left\langle \int_0^t \frac{d}{ds} B^* e^{s-u} A^* h ds, d\overline{W}(u) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&+ \int_0^t \left\langle \int_u^t \frac{d}{ds} B^* e^{s-u} A^* h ds, d\overline{W}(u) \right\rangle + \left\langle h, \int_{-\infty}^0 e^{-u} AB d\overline{W}(u) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \int_{-\infty}^t \langle B^* e^{(t-u)} A^* h, d\overline{W}(u) \rangle_{\mathcal{H}} - \int_{-\infty}^0 \langle B^* e^{(-u)} A^* h, d\overline{W}(u) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= -\int_{-\infty}^t \langle B^* h, d\overline{W}(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle h, \int_{-\infty}^0 e^{-u} AB d\overline{W}(u) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle h, U(t) \rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle h, \int_0^t B d\overline{W}(s) \right\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent U est une solution faible qui [6], est également une solution de (3.12). Enfin, nous montrons l'unicité des solutions stationnaires. Supposons qu'il y ait deux solutions stationnaires $y(t, y_0)$ et $z(t, z_0)$ à (3.12). Notez que pour toute $y_0 \in L^2(\Omega, H)$, la solution douce $y(t, y_0)$ à (3.12) est représentée par

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B dW(s) \quad t \geq 0.$$

Ainsi nous avons

$$\mathbb{E}||y(t, y_0) - z(t, z_0)||^2_{\mathcal{H}} \leq ||e^{tA}||^2 \mathbb{E}||y_0 - z_0||^2_{\mathcal{H}} \to 0 \quad \text{comme} \quad t \to \infty,$$

puisque, par hypothèse, et $||e^{tA}|| \to 0$ comme $t \to \infty$. Comme $y(t, y_0) - z(t, z_0)$ est stationnaire, $y(t, y_0)$ et $z(t, z_0)$ doivent avoir la même distribution, et la démonstration est donc complète.

Remarque 3.3.2. *Soit $y_0^* \in L^2(\Omega, H)$ soit une donnée initiale telle que la solution douce correspondante $y(t, y_0)$ de (3.12) est stationnaire. Le corollaire suivant montre que cette solution stationnaire unique de l'équation (3.12) est exponentiellement stable .*

Corollaire 3.3.8. *Supposons que (3.18) ademet, l'unique stationnaire la solution $y(\cdot, y_0^*)$ de (3.12) a une stabilité exponentielle carrée moyenne au sens que pour toute solution $y(\cdot, y_0)$ de (3.12), il existe des constantes $M > 0$, $\mu > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}||y(t, y_0) - y(t, y_0^*)||^2_{\mathcal{H}} \leq M^2 e^{-2\mu t} E||y_0 - y_0^*||^2_{\mathcal{H}} \quad t \geq 0.$$

Démonstration.

Nous savons d'après (3.12) que

$$y(t, y_0^*) = \int_{-\infty}^{0} e^{t-s} ABd\overline{W}(s) \quad t \geq 0.$$

est la solution initial stationnaire unique avec $y_0^* \in L^2(\Omega, H)$. Soit $y(t, y_0)$ une solution arbitraire de (3.12) avec y_0 initial $L^2(\Omega, H)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} y(t, y_0) - y(t, y_0^*) &= e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Bd\overline{W}(s) - \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} Bd\overline{W}(s) \\ &= e^{tA} y_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} Bd\overline{W}(s) \\ &= e^{tA}(y_0 - y_0^*), \end{aligned} \tag{3.23}$$

qui implique immédiatement l'existence d'une constants $M > 0$, $\mu > 0$ telle que

$$\mathbb{E}||y(t, y_0) - y(t, y_0^*)||^2_{\mathcal{H}} \leq M^2 e^{-2\mu t} E||y_0 - y_0^*||^2_{\mathcal{H}} \quad t \geq 0.$$

La démonstration est maintenant complète.

Corollaire 3.3.9. *[8]. La solution forte $y(t)$, de (3.12) est exponentiellement stable , c.-à-d., il existe des constantes $C > 1$, $M > 0$ et $\mu > 0$ telles que*

$$\mathbb{E}||y(t, y_0)||^2_{\mathcal{H}} \leq C||y_0||^2_{\mathcal{H}} e^{-\mu t} \quad t \geq 0. \tag{3.24}$$

et

$$\mathbb{E}\left(||\sup_{0 \leq t < \infty} y(t, y_0)||^2_{\mathcal{H}}\right) \leq ME||y_0||^2_{\mathcal{H}} \quad t \geq 0. \tag{3.25}$$

Finalement , cette exemple pour illustrer la théorie établis dans les sections précédentes.

Exemple 3.3.10. *Considérons une tige unidimensionnelle de longueur p dont les extrémités sont maintenus à $0°$ et dont les côtés sont isolés. Supposons qu' il y a une réaction exothermique se déroulant à l'intérieur de la tige avec la chaleur étant produite proportionnellement à la température. La température, indiquée par $y(t, x)$ au temps t et à l'emplacement x, dans la tige peut être modélisée comme une solution de l'équation suivante*

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + ry(t,x) & : \ t > 0, 0 < x < \pi, \\ y(t,0) = y(t,\pi) = 0 & : \ t \geq 0 \\ y(0,x) = y_0(x) & : \ 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \tag{3.26}$$

où $r \in \mathbb{R}$ dépend du taux de réaction. Si nous supposons $r^2 = r_0 > 0$, a constante, puis nous pouvons résoudre par la théorie des équations aux dérivées partielles standard l'équation sous une forme explicite :

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n^2 - r_0)t} \sin nx, \quad t \geq 0.$$

Par conséquent, nous obtenons une stabilité exponentielle si $n^2 > r_0$ pour tous les $n \in N^+$, ou équivalent, $r_0 < 1$. C'est exactement la condition (3.18).

Supposons maintenant que r est aléatoire, et supposons qu'il est modélisé de manière informelle comme $r = r0 + r1W(t)$, de sorte que (3.26) devient

$$y(t,x) = y_0(x) + \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r_0 \right) y(s,x) ds + r_1 \int_0^t y(s,x) dW(s) \quad t \geq 0. \tag{3.27}$$

où $w(t)$ est un mouvement brownien unidimensionnel standard. Nous pouvons formuler ceci sous une forme de (3.12) dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = L^2(0,\pi)$ et

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r_0.$$

Par conséquent, si le système non perturbé (3.26) est stable, c.-à-d., r_0 est suffisamment inférieur à un, alors les perturbations (c.-à-d., r_1) peuvent être raisonnablement grandes, et selon le Théorème (3.3.4), nous avons

$$\mathbb{E}||y(t,y_0)||^2 \leq M||y_0||^2 e^{-\mu t} \quad t \geq 0. \tag{3.28}$$

pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Nous pouvons utiliser la théorie des solutions fortes à cette occasion. Précisément, pour $y, z \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$,

$$\langle y, Az \rangle_{\mathcal{V}} = \int_0^{\pi} \left(-\frac{\partial y(x)}{\partial x} \frac{\partial z(x)}{\partial x} + r_0 y(x) z(x) \right) dx.$$

Ensuite, par inégalité de Poincaré [2], nous avons

$$\langle y, Az\rangle_{\mathcal{V}} \leq -||y||^2_{\mathcal{V}} + r_0||y||^2_{\mathcal{H}},$$

donc $\alpha = 2$ *et* $\lambda = 2r_0$ *dans la relation* (3.3.1) *puis par Corollaire 3.3.9 il s'ensuit qu'il existe une constante* $\nu > 0$

$$||y(t, y_0)||_{\mathcal{H}} \leq ||y_0||_{\mathcal{H}} e^{-\nu t} \quad t \geq 0.$$

La solution nulle de (3.27) *est stable exponentiellement dans les deux sens en moment et presque sûrs*

Conclusion et Perspectives

Conclusion

La stabilité exponentielle des équations différentielles stochastiques est une composante essentielle pour garantir que les systèmes sous incertitude restent performants et fiables. En assurant que les solutions de ces équations convergent de manière exponentielle vers un point d'équilibre, on peut concevoir des systèmes plus robustes, développer des stratégies de contrôle efficaces et mieux gérer les risques dans divers domaines d'application.

Perspectives

Ensuite, étudions la stabilité exponentielle de certaines équations aux dérivées partielles de second ordre stochastiques apparaissant dans des modèles de vibrations aléatoires de systèmes mécaniquement flexibles.

Bibliographie

[1] Ahmed, N. U. Semigroups Theory with Applications to Systems and Control.Longman Scientific and Technical, London, (1991).

[2] H.Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod, Paris, (1999).

[3] Chow, P.Stability of nonlinear stochastic evolution equations. J. Math. Anal. Appl. 89 (1982), 400-419

[4] Krasovskii, N. N. Stability of Motions. Stanford University Press, Stanford,(1963).

[5] Kushner, H. Introduction to Stochastic Control Theory. Holt, Rinehart and Winston, New York, (1971).

[6] Kushner, H. Stochastic Stability and Control. Academic Press, New York, (1967).

[7] Mandrekar, V. On Lyapounov stability theorems for stochastic (deterministic) evolution equations. In Proc. of the NATO-ASI School on : Stochastic Analysis and Applications in Physics, L. Streit, Ed., Springer-Verlag, New York (1994), 219-237.

[8] Mao, X. R. Stochastic Differential Equations and Applications. Second Edition, Woodhead Publishing, Oxford, (2007).

[9] M.Hazi. Topologie au delà des travaux dirigés. Visite guidée dans les espaces normés. OPU. Tome 3, (2009).