

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et
Informatique



Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités et Statistique Appliquées

Thème :

**Modélisation d'une série financière via l'approche
des valeurs extrêmes**

Présenté Par :

1) M^{elle} HABDI khalida

Devant le jury composé de :

Dr. BELATTAR Zokha	M.C.A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Présidente
Dr. MECENE Rahmouna	M.C.B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr. MAMI Tawfiq Fawzi	M.C.A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2023/2024

Remerciements

Je tiens à remercier mon encadrant de mémoire, Monsieur MAMI T.F. de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé et je lui exprime toute ma reconnaissance.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants de ma formation en Licence et Master.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes deux frères pour leurs encouragements.

Finalement, je remercie mes amies qui ont toujours été là pour moi, leur soutien inconditionnel et leurs encouragements qui ont été d'une grande aide.

A tous ces intervenants, je présente mes remerciements encore une fois, mon respect et ma gratitude.

Dédicace

A mes très chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A mes chers frères, source de joie et de bonheur.

A toute ma famille, source d'espoir et de motivation.

A toutes mes amies, tout particulièrement Hadil.

A vous chers lecteurs.

-Khalida

Table des matières

Table des figures	6
Liste des tableaux	6
Liste Des Notations	6
Introduction	8
1 Lois stables	11
1.1 Variable aléatoire Lévy-stable	11
1.2 Définitions	12
1.3 Signification des paramètres	14
1.4 Densité d'une loi stable :	15
1.5 Propriétés algébriques	18
1.6 Queues lourdes	21
1.7 Algorithme de génération	24
2 Estimation de l'indice de stabilité via les valeurs extrêmes	26
2.1 Distribution des extrêmes	27
2.1.1 Représentation de Jenkinson & Von Mises :	29

2.1.2	Max-Domaine d'attraction	30
2.2	Estimateurs de l'indice de stabilité	30
2.2.1	Estimateur de Hill	31
2.2.2	Estimateur de Pickands	33
2.2.3	Estimateur de Dekker-Einmahl-De Haan (des moments)	34
2.2.4	Estimation du reste des paramètres d'une loi stable	38
3	Modélisation de l'indice CAC 40	41
3.1	L'indice financier CAC40	41
3.2	Non conformité du modèle gaussien	44
3.3	Aspect queue lourde	46
3.4	Modèle stable pour les rendements	46
	Conclusion	49
	Bibliographie	50
	Résumé	54

Table des figures

1.1	Densité de la loi de Gauss	15
1.2	Densité de la loi de Lévy $S(0.5, 1, 1, -2)$	16
1.3	Densité de la loi de Cauchy	16
1.4	Densité d'une loi stable $S(1.2, 0.8, 0.6, -1)$	17
1.5	Densités α -stables pour différentes valeurs de α	23
1.6	Les queues de densités α -stables pour différentes valeur de α	24
2.1	Densités de lois extrêmes	28
2.2	Estimateur de Hill d'une loi de Pareto d'indice de queue $\xi = 0.77 = 1/1.3$	35
2.3	Estimateur de Hill d'une loi de Cauchy d'indice $\xi = \alpha = 1$	36
2.4	Estimateur de Pickands d'une loi de Pareto d'indice $\xi = 1.3$	36
2.5	Estimateur de Pickands d'une loi de de Cauchy d'indice $\xi = 1$	37
3.1	Histogramme des rendements	43
3.2	Ajustement gaussien de la série des returns	44
3.3	Le QQ-norm de la série des returns	45
3.4	Fluctuations de la variance échantillonnale	46
3.5	Ajustement stable de la série des returns	47
3.6	Quantiles empiriques vs quantiles estimés de la série des returns	48

Liste des tableaux

1.1	Moyenne et variance théoriques d'une loi α -stable.	18
3.1	Les caractéristiques statistiques de la série des rendements.	43
3.2	Paramètres du modèle stable des returns	47

Liste Des Notations

v.a.r.	Variable aléatoire réelle
i.e	C'est-à-dire
i.i.d.'s	Indépendamment et identiquement distribué(e)s
f.c.	Fonction caractéristique
$S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$	Loi stable de paramètre $\alpha, \sigma, \beta, \mu$
$f(x)$	Fonction de densité de X
$\varphi_X(t)$	Fonction caractéristique de X
$sign(t)$	$ t /t$
$\mathbf{1}_{[a,b[}(x)$	Fonction indicatrice : $\mathbf{1}_{[a,b[}(x) = 1$ si $x \in [a, b[$ et $\mathbf{1}_{[a,b[}(x) = 0$ sinon
$\exp()$	Fonction Exponentielle
\mathbf{R}	Ensemble des nombres réels .
\mathbf{R}^+	Ensemble des nombres réels positives .
$\stackrel{d}{=}$	Suit la même loi que.
\xrightarrow{d}	Converge en distribution
\xrightarrow{P}	Converge en probabilité
$\xrightarrow{p.s.}$	Converge presque sûre

Introduction

Les lois à variance infinie sont des distributions de probabilité pour des variables aléatoires qui n'ont pas de variance finie telle qu'une variable qui suit une loi de Cauchy.

On sait que la variance est la caractéristique qui mesure la dispersion des valeurs de la variable autour de leur moyenne, elle permet donc d'avoir un certain contrôle sur la variabilité de l'ensemble des valeurs.

En statistique, l'espérance et l'écart-type sont des grandeurs dont on ne peut pas se passer car elles indiquent les traits essentiels de la répartition étudiée. En connaissant ces grandeurs numériques, on peut alors penser au modèle probabiliste, donc à la loi qui convient au mieux à ajuster et à expliquer le comportement global d'une telle répartition.

Cependant, il existe des phénomènes, notamment dans le domaine économique ou celui de la Finance qui présentent des aspects assez particuliers tel qu'une dispersion instable ou une variation importante autour d'une valeur centrale empirique (comme la moyenne ou la médiane échantillonnales par ex.) et qui montrent une certaine tendance à l'égard de la taille de leur échantillonnage. Les cours boursiers en sont un exemple frappant où la distribution empirique des rendements d'un actif par exemple, manifeste nettement ce type de comportement qui fait penser à l'existence d'éventuelles valeurs aberrantes au sein de la distribution ; Ce sont des valeurs qui se trouvent aux extrémités de l'échantillon ordonné de la répartition.

Dans les années soixantes, Mandelbrot a été l'un des pionnier, si ce n'est pas le premier,

qui s'est rendu compte de l'inadaptation du modèle gaussien standard pour les données financières et à montrer que les valeurs extrêmes dont les spécialistes de la finance ont pris pour abérantes, sont en réalité des valeurs significatives pour la distribution et font constater la subsistance de l'information aux extrémités d'une telle distribution.

Mandelbrot a suggéré pour ce type de données à chercher le bon modèle dans la liste des lois probabilistes dites "à queues lourdes" ou "à queues épaisses". En effet, ce sont des lois qui ne possèdent pas de variance (variance infinie) et peuvent même perdre parfois, leur premier moment et donc leur moyenne. Une des classes de lois probabilistes candidate pour ce genre de problème est la classe des lois stables de Lévy. Ce sont des lois à variance infinie donc à queues lourdes. Elles possèdent quatre paramètres dont le plus important est le paramètre de stabilité ou exposant caractéristique. Il prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, 2]$. Ce dernier caractérise l'épaisseur de la (les) queue(s) de la fonction de densité d'une telle loi ou même de sa fonction de répartition. Si sa valeur est plus petite ou égale à 1 ni la variance ni l'espérance n'existent. Si sa valeur dépasse 1 mais sans dépasser 2 alors, c'est l'espérance qui doit exister mais non sa variance. C'est le cas pour les séries rencontrées dans les données financières.

Rappelons, par ailleurs, que les lois stables possèdent un comportement similaire à celui des lois de Pareto qui sont à décroissance lente en $x^{-\alpha}$ lorsque l'indice α est plus petit que 2, elles prennent en considération les valeurs extrêmes de leurs distributions. Plus encore, elles appartiennent aussi au Max-domaine de Fréchet, c'est à dire, leurs queues de distribution sont attirées par une des lois bien connues des valeurs extrêmes qui sont en nombre de trois : la loi de Weibull, la loi de Gumbel et celle de Fréchet. Ce sont des lois établies par le théorème fondamentale de Tippet & Fréchet en 1928 appelées lois standards des valeurs extrêmes. Von Mises et Jenkinson ont réussi à rassembler ces lois dans une seule formule dite distribution des extrêmes généralisée où ils ont fait apparaître un paramètre dont la valeur prédit la lourdeur de la queue de distribution appelé "indice de queue" ou "indice des extrêmes". Il joue un rôle similaire à celui de l'indice de stabilité des lois stables, seulement qu'il est égal à l'inverse de ce dernier dans la formulation.

Dans cette optique de la théorie des valeurs extrêmes, on trouve plusieurs estimateurs consistants de ce paramètre (indice des extrêmes). Le plus connu est l'estimateur de Hill et ses variantes, vient ensuite celui de Pickands puis celui de Dekkers-Einmahl-de Hann. Ces

trois estimateurs sont basés essentiellement sur les dernières statistiques d'ordre représentant justement les valeurs extrêmes de la répartition des données en question.

Dans le premier chapitre, on étalera l'essentiel des notions relatives aux lois stables de Lévy après avoir défini ce type de loi avec ses quatre paramètres tout en précisant le rôle de chacun d'eux. On énumérera les propriétés de ces lois en mettant l'accent sur la propriété de queue(s) épaisse(s) de leurs densités et on présentera un des procédés de simulation de ce type de lois.

Dans le deuxième chapitre, on entamera le problème de l'estimation relative aux paramètres d'une loi stable où on présentera les différents estimateurs relatifs à l'indice de stabilité puis du reste de ces paramètres. En passant, on évoquera la problématique relative au choix du k optimal qui représente la taille de la queue de distribution empirique laquelle elle permet d'avoir la bonne estimation de l'indice de stabilité.

Le dernier chapitre portera sur l'ajustement d'un modèle α -stable à une série financière extraite de la trajectoire de l'indice boursier CAC 40 où on fera une analyse, étape par étape, sur les caractéristiques des données qui sont ici les rendements de l'indice, tout en justifiant le choix d'un tel modèle pour cette série.

Chapitre 1

Lois stables

1.1 Variable aléatoire Lévy-stable

Dans cette partie, on rappelle les définitions d'une distribution stable de trois manières équivalentes. La première définition concerne la propriété de stabilité par produit de convolution, c'est-à-dire que la famille des distributions stables est préservée par convolution. La deuxième définition explique le rôle des distributions stables dans le contexte du théorème central limite, c'est-à-dire que les distributions stables peuvent être approchées par une somme normalisée de variables aléatoires indépendantes de même loi de distribution. Cette propriété rend importante l'utilisation des distributions Lévy-stables dans la modélisation. Le théorème spécifie la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Lévy-stable. Cette fonction caractéristique est explicitée d'une manière analytique exacte. On donne l'interprétation pratique de chaque paramètre de cette distribution et on rappelle une propriété très importante qui sera celle des queues lourdes.

1.2 Définitions

Définition 1.2.1. Une v.a.r X est dite *stable* (ou possède une *distribution stable*) au sens large, si et seulement si pour tous réels positifs A et B , il existe un réel positif C et un réel D tels que :

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \quad (1.1)$$

où X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes et de même loi.

Elle est dite *stable au sens strict* ou *étroit* si et seulement si elle est stable avec $D = 0$.

Remarque 1.2.1. La loi de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit de convolution de leurs lois de probabilité, soit :

$$F_{X_1+X_2}(x) = F_{X_1} * F_{X_2}(x) = \int_0^x F_{X_1}(x-t) dF_{X_2}(t).$$

La définition (1.2.1) justifie donc la nomination "stable" car elle fait intervenir la stabilité par le produit de convolution.

Il est démontré dans Feller [12] que pour toute variable aléatoire X stable, il existe un réel $\alpha \in]0,2]$ appelé "indice de stabilité" tel que les coefficients réels positifs A, B et le réel C vérifient la relation :

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha \quad (1.2)$$

le nombre α est unique et ne dépend que de la loi de la variable aléatoire X , d'où l'appellation α -stable.

L'exemple suivant montre que la famille des lois gaussiennes qui sont un cas très particulier de lois stables, vérifie bien la relation (1.2). D'ailleurs cette propriété a été l'un des aspects remarquablement observé sur les lois stables, elle est appelée "propriété scalante" :

Exemple 1.2.1. Si X est une v.a.r. de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors X est stable d'indice de stabilité $\alpha = 2$.

En effet, si X_1 et X_2 sont deux v.a.r.'s indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et pour tous réels positifs A et B on a :

$$AX_1 \sim \mathcal{N}(A\mu, (A\sigma)^2), \quad BX_2 \sim \mathcal{N}(B\mu, (B\sigma)^2),$$

Cherchons C et D de sorte à avoir : $AX_1 + BX_2 = CX + D$.

On sait que la somme de deux gaussiennes est toujours une gaussienne. Ecrivons que les deux membres ont même espérance et même variance, soit :

Explication :

$$E(AX_1 + BX_2) = E(CX + D) \text{ qui donne : } (A + B)\mu = C\mu + D$$

et :

$$\text{Var}(AX_1 + BX_2) = \text{Var}(CX + D) \text{ qui donne : } C^2 = A^2 + B^2.$$

De là, on tire :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ et } D = (A + B - C)\mu.$$

Avec ces deux constantes, on vérifie bien la relation (1.2) avec la propriété scalante :

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

La relation (1.2) se généralise pour un nombre fini de v.a.r.'s indépendantes d'une variable α -stable. La définition suivante explicite cela :

Définition 1.2.2. Une v.a.r. X possède une loi stable si et seulement pour tout entier n et toute suite indépendante X_1, X_2, \dots, X_n de même loi de probabilité que X , il existe $c_n \geq 0$ et d_n deux réels tels que :

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n. \quad (1.3)$$

Dans l'exemple de la loi gaussienne, si Y_1, Y_2, \dots, Y_n sont gaussiennes de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on trouvera en égalant les espérances et les variances des deux membres que :

$$a_n = n^{-1/2} \text{ et } b_n = (n - \sqrt{n})\mu.$$

Le résultat suivant qui est un théorème dont la démonstration se trouve dans [13] donne encore une autre façon de définir une loi stable via sa fonction caractéristique :

Théorème 1.2.1. *Une variable aléatoire X possède une distribution stable si et seulement si sa fonction caractéristique se présente sous la forme :*

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \exp\left(-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp\left(-\sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \frac{t}{|t|} \ln |t|\right) + i\mu t\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

où :

$$\frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0 \text{ (par convention)}. \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

où α , σ , β et μ sont des paramètres réels vérifiant les inégalités suivantes :

$$0 < \alpha \leq 2, \quad \sigma \geq 0, \quad -1 \leq \beta \leq 1 \text{ et } \mu.$$

1.3 Signification des paramètres

Les quatre paramètres α , σ , β et μ caractérisent d'une manière unique les distributions stables. En effet :

1. **Le paramètre α :** Il caractérise les deux queues de distribution stable, on l'appelle indice de stabilité ou l'exposant caractéristique.
2. **Le paramètre σ :** Il mesure le degré de dispersion des valeurs de la loi stable, on l'appelle paramètre d'échelle.
3. **Le paramètre β :** Il caractérise l'asymétrie de la distribution stable, il mesure son degré d'asymétrie par rapport au paramètre de position μ . on l'appelle paramètre de symétrie.

4. **Le paramètre μ** : Il représente le paramètre de localisation. Il positionne la densité de la loi stable sur l'axe des x .

Notation 1.3.1. Une v.a.r. X sera désignée par la notation $S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$.

1.4 Densité d'une loi stable :

En général, une loi stable n'est connue qu'à travers sa fonction caractéristique et on ne peut pas expliciter sa fonction de densité (qui est sa transformée de Fourier inverse) à l'aide des fonctions simples sauf dans trois cas : le cas d'une loi de Gauss ou une loi de Cauchy ou le cas d'une loi de Lévy (dite aussi loi gaussienne inverse), soit :

- La loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2) = S(2, \sigma, 0, \mu)$,
- La loi de Cauchy $C(\mu, \sigma) = S(1, \sigma, 0, \mu)$,
- La loi de Lévy qui est une stable $S(1/2, \sigma, 1, \mu)$.

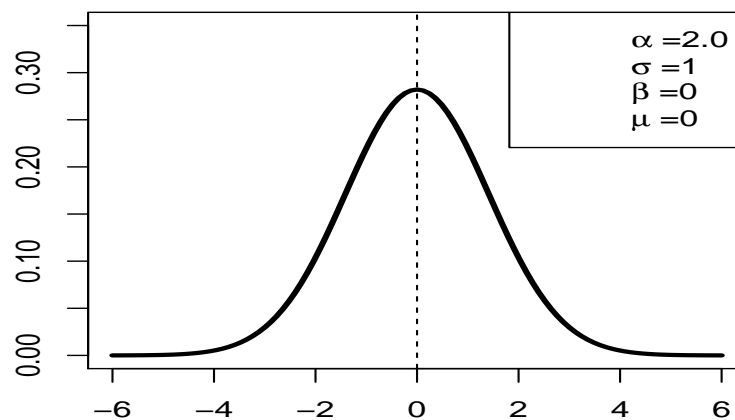


FIGURE 1.1 – Densité de la loi de Gauss

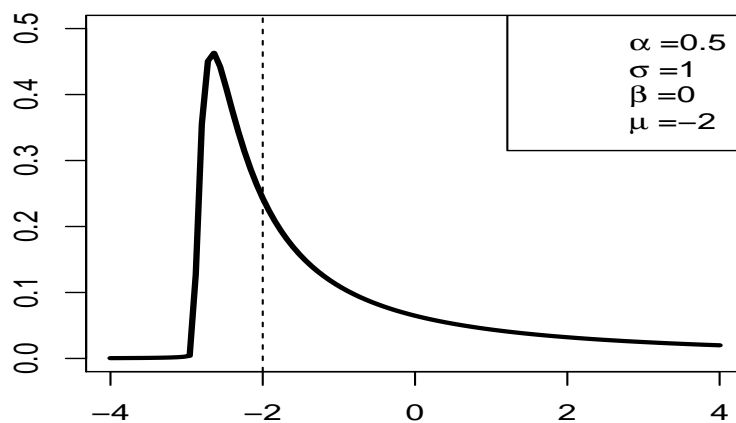
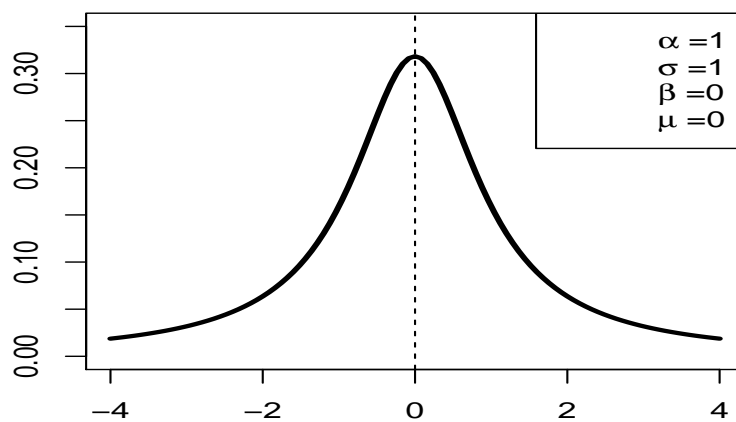
FIGURE 1.2 – Densité de la loi de Lévy $S(0.5, 1, 1, -2)$ 

FIGURE 1.3 – Densité de la loi de Cauchy

Pour les autres cas de lois stables, la densité est exprimée seulement à l'aide de sa transformée de Fourier inverse, soit :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$$

qui donne l'expression intégrale suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\sigma^\alpha t^\alpha) \cos[(x - \mu)t + \beta t^\alpha w(t, \alpha)] dt \quad (1.5)$$

où :

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

il est montré dans [37] que la densité d'une loi stable est continue possédant un seul mode et admet des dérivées de tout ordre.

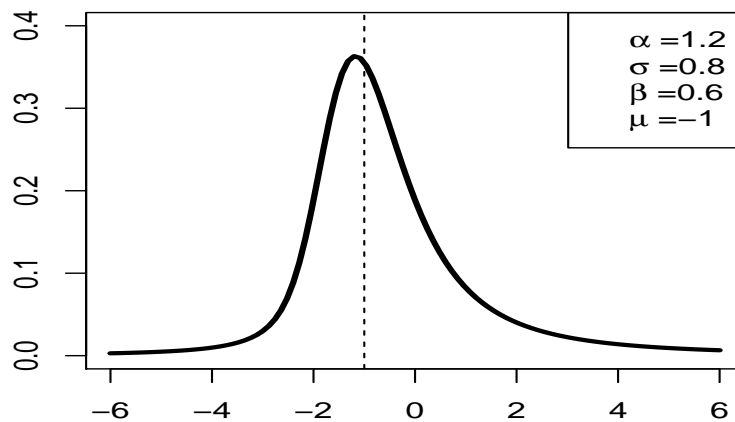


FIGURE 1.4 – Densité d'une loi stable $S(1.2, 0.8, 0.6, -1)$

Moments d'une loi stable :

La variance d'une loi stable n'existe pas alors que son espérance n'existe que si l'indice de stabilité est plus grand que l'unité, soit :

	$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
E(X)	∞	μ	μ
Var(X)	∞	∞	$2\sigma^2$

TABLE 1.1 – Moyenne et variance théoriques d'une loi α -stable.

Les moments fractionnaires d'ordre $p \in \mathbb{R}^{+*}$ d'une v.a.r $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ sont tels que :

- Pour $\alpha = 2$, on a : $E|X|^p < \infty, \quad \forall p \geq 0$,
- pour $0 < \alpha < 2$, on a : $E|X|^p \begin{cases} < \infty, & p < \alpha \\ = \infty, & p \geq \alpha \end{cases}$

1.5 Propriétés algébriques

Voici quelques propriétés relatives aux opérations algébriques qui peuvent avoir lieu entre les variables aléatoires stables.

1. Lorsqu'on ajoute une constante à une loi stable, la densité se trouve translater sur l'axe des abscisses. En effet, Pour $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ et c un nombre réel, on a :

$$X + c \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu + c).$$

2. Si l'on multiplie une loi stable par une constante, les paramètres sont tous affectés sauf l'indice α . En effet, pour $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ et a un constant réel non nul, on a :

$$\begin{cases} aX \sim S\left(\alpha, |a|\sigma, \frac{a}{|a|}\beta, a\mu\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ aX \sim S\left(1, |a|\sigma, \frac{a}{|a|}\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln |a|)\sigma, \beta\right) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

3. La somme de deux ou plusieurs lois stables de même indice de stabilité α donne toujours une loi stable de même indice de stabilité ; Cependant, les autres paramètres se combinent entre eux pour donner d'autres indicateurs s'exprimant comme suit :

Si l'on considère deux variables aléatoires α -stables indépendantes :

$$X_1 \sim S(\alpha, \sigma_1, \beta_1, \mu_1) \quad X_2 \sim S(\alpha, \sigma_2, \beta_2, \mu_2)$$

alors :

$$X_1 + X_2 \sim S\left(\alpha, (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \mu_1 + \mu_2\right).$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \psi_{X_1(t)+X_2(t)} &= \psi_{X_1(t)}\psi_{X_2(t)} \\ &= \exp\left\{i\mu_1 t - \sigma_1^\alpha |t|^\alpha \left(1 + i\beta_1 \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right)\right\} \exp\left\{i\mu_2 t - \sigma_2^\alpha |t|^\alpha \left(1 + i\beta_2 \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{i(\mu_1 + \mu_2)t - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha - i(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha)|t|^\alpha \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right\} \\ &= \exp\left\{i(\mu_1 + \mu_2)t - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha \left[1 + i\left(\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}\right)|t|^\alpha \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right]\right\} \end{aligned}$$

N.B : $w(t, \alpha)$ étant la fonction définie dans la formule (1.6)

4. On peut toujours réduire une v.a.r. stable $S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ par rapport à son paramètre de localisation et son paramètre d'échelle en posant :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

qui suit une loi stable $S(\alpha, 1, \beta, 0)$. Y dite "v.a.r. stable standardisée".

5. Pour $0 < \alpha < 2$, la loi de la v.a.r. stable X ne diffère de la loi de son opposée $-X$ que par son paramètre d'asymétrie qui est égale à l'opposé de celui de X :
En effet, si $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, 0)$ alors $-X \sim S(\alpha, \sigma, -\beta, 0)$.

6. Lorsque $\beta = 0$, la densité de la loi est toujours symétrique par rapport à son paramètre de localisation μ . Si de plus $\mu = 0$, la loi de la v.a.r. est dite symétrique α -stable et on la désigne par $S \alpha S(\sigma)$.
7. Considérons $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha \neq 1$; Alors, X est strictement stable si et seulement si $\mu = 0$.

Par ailleurs, la v.a.r. $X \sim S(1, \sigma, \beta, \mu)$ est strictement stable si et seulement si $\beta = 0$.

Preuve 1.5.1. Pour $\alpha \neq 1$:

Soient X_1, X_2 deux v.a.r.'s indépendantes de même loi que X et A, B deux nombres réels positifs. D'après les propriétés (2) et (3) on a :

$$AX_1 + BX_2 \sim S\left(\alpha, \sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}, \beta, \mu(A + B)\right)$$

X est une distributions stable alors,

$$C = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}$$

Aussi d'après les propriétés (3) et (1) on a

$$CX + D \sim S\left(\alpha, \sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}, \beta, \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha} + D\right)$$

et donc :

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D \text{ avec } D = 0 \text{ si et seulement si } \mu(A + B) = \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}$$

alors : $\mu = 0$.

Pour $\alpha = 1$:

Soient X_1, X_2 de v.a.r.'s indépendantes de même loi que de X et A, B deux nombres réels strictement positifs alors d'après les propriétés (3) et (2) on a

$$AX_1 + BX_2 \sim S\left(1, \sigma(A + B), \beta, \mu(A + B) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A \ln A + B \ln B)\right)$$

Alors,

$$(A + B)X \sim S\left(1, \sigma(A + B), \beta, \mu(A + B) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A + B) \ln(A + B)\right)$$

Donc, $D = 0$ si et seulement si $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} (A + B)X$

c'est-à-dire :

$$\beta(A \ln A + B \ln B) = \beta(A + B) \ln(A + B) \text{ pour tout } A > 0, B > 0.$$

Ainsi on a : $\beta = 0$

8. Si X est une variable aléatoire de loi $S(\alpha, \sigma, \beta, 0)$ avec $\alpha < 2$ alors, il existe deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la même distribution $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ telles que :

$$\begin{cases} X \stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha} Y_2 & \text{si } \alpha \neq 1, \\ X \stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right) Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right) Y_2 + \sigma \left(\frac{1+\beta}{\pi} \ln \frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{\pi} \ln \frac{1-\beta}{2} \right) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

1.6 Queues lourdes

Comme il a été signalé dans une section précédente, une v.a.r. stable n'a pas de variance finie lorsque son indice de stabilité vérifie $\alpha < 2$. Ceci indique que sa fonction de survie $1 - F(x)$ ne converge pas rapidement vers 0. Par contre, une loi de Gauss (qui est une stable avec $\alpha = 2$) décroît de manière exponentielle ; Ceci est d'ailleurs vrai pour toutes les lois qui admettent une variance finie. Le comportement d'une loi stable avec un $0 < \alpha < 2$ au voisinage des valeurs extrêmes de la v.a.r. rappelle celui des distributions de Pareto qui décroissent d'une manière polynômiale en $x^{-\alpha}$. On dit qu'elle possède une queue épaisse (parfois les deux queues) ou une queue lourde. Plus exactement, on a la définition suivante :

Définition 1.6.1. Une variable aléatoire réelle X est dite à "queue lourde" ou "queue épaisse" d'indice α lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} l(x).$$

où l est une fonction telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l(tx)}{l(x)} = 1, \text{ pour tout } t > 0.$$

N.B : La fonction l est dite "à variation lente". Elle se comporte comme une constante pour des x assez grand.

Les lois α -stables sont des distributions de probabilités à queue(s) lourde(s). En effet, le résultat suivant dont la preuve se trouve dans [30] affirme ce comportement :

Théorème 1.6.1. Soit X une v.a.r. $S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$, avec $0 < \alpha < 2$. On a les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X > x) &= K_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha x^{-\alpha}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X < -x) &= K_\alpha \frac{1-\beta}{2} \sigma^\alpha x^{-\alpha}, \end{cases} \quad (1.7)$$

où K_α est une constante qui ne dépend que de α . Elle est calculée par la relation :

$$K_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} t^{-\alpha} \sin t \, dt \right)^{-1} = \begin{cases} 2/\pi & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\pi\alpha/2)} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Ici, $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma définie, pour tout $z > 0$, par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt.$$

Les relations (1.7) entraînent pour des valeurs assez grandes de x :

$$P(|X| > x) \sim C_\alpha x^{-\alpha} \quad \text{où } C_\alpha = K_\alpha \frac{1+\beta}{2} \sigma^\alpha. \quad (1.8)$$

On voit que les lois stables prennent en considération les queues de distribution qui sont souvent porteuses d'information alors que la loi de Gauss néglige ces queues et entraîne ainsi des erreurs d'estimation.

On remarque ainsi l'importance de l'indice de stabilité α qui influe directement sur la queue de la distribution stable ; D'ailleurs c'est lui qui mesure son degré d'épaisseur. En diminuant, il élève la queue vers le haut et en augmentant, il abaisse cette queue vers le bas tout en gardant un certain équilibre entre les deux queues. Cet équilibre est clarifié par

la propriété suivante :

Condition d'équilibre des queues : Toute loi stable d'indice $\alpha < 2$ satisfait la propriété suivante :

Proposition 1.6.1. *Les queues d'une distribution α -stable pour $0 < \alpha < 2$ quand $x \rightarrow \infty$ satisfont les relations suivantes :*

$$\frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} \rightarrow p = \frac{1 + \beta}{2} \quad (1.9)$$

et :

$$\frac{P(X < -x)}{P(|X| > x)} \rightarrow q = \frac{1 - \beta}{2} \quad (1.10)$$

avec :

$$p + q = 1$$

Pour une meilleure illustration du comportement de queue pour des densités α -stables, on a représenté les courbes de trois densités stables dans la première figure ainsi qu'un agrandissement de la partie droite pour voir la distinction entre les différentes queues de ces lois.

On remarque que plus α est petit plus les queues sont lourdes.

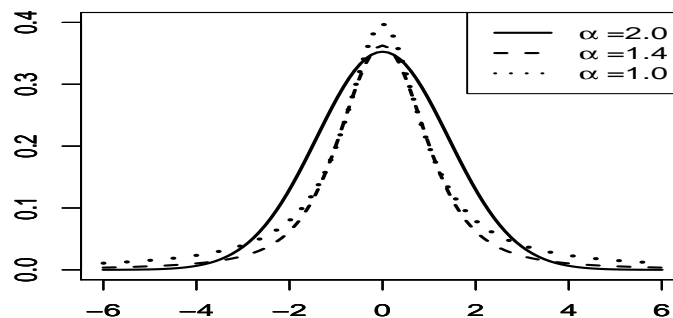


FIGURE 1.5 – Densités α -stables pour différentes valeurs de α

Si on regarde la partie droite agrandie du graphique (figure ci-dessous), on s'aperçoit de la différence entre ces queues selon les valeurs décroissantes de α .

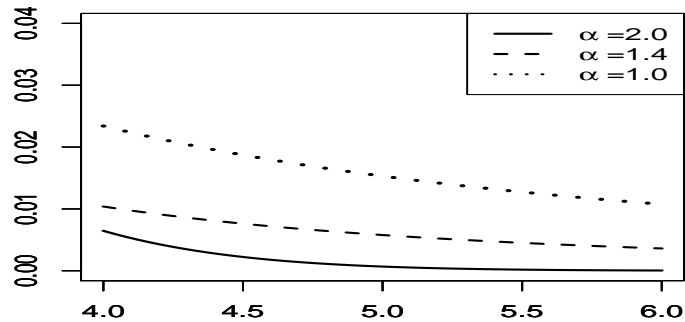


FIGURE 1.6 – Les queues de densités α -stables pour différentes valeur de α

1.7 Algorithme de génération

Les méthodes classiques, comme la méthode de la transformation inverse de Fourier, ne peuvent pas s'appliquer car la complexité du problème de simulation des variables aléatoires est qu'il n'existe pas de fonction de densité explicite, sauf dans trois cas particuliers. La première tentative pour simuler une loi stable a été celle de Kanter (1975) basée sur un changement d'échelle et des inégalités à variations totales (voir [18]) qui lui a permis de simuler une variable stable $S(\alpha, 1, 1, 0)$ pour $\alpha < 1$. La deuxième tentative était celle de Chambers, Mallows et stuck (1976) qui ont retrouvé sa formule (celle de Kanter) en se basant sur la représentation intégrale de la densité.

Weron dans les trois articles [17], [33] et [34] a pu développer progressivement un algorithme de simulation de lois stables pour des valeurs de l'indice de stabilité vérifiant $0 < \alpha < 2$ et pour une asymétrie telle que $-1 \leq \beta \leq 1$. C'est cette technique qu'on va présenter dans l'algorithme suivant :

Algorithme de Weron

1. On pose :

$$A = \frac{1}{\alpha} \arctan \beta \left[\tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \text{ et } B = \left(1 + \beta^2 \left[\tan \frac{\alpha\pi}{2} \right]^2 \right)^{1/2\alpha}.$$

2. on calcule :

$$Z = \begin{cases} B \times \sin(\alpha(U + A)) (\cos U)^{-1/\alpha} \left[\cos(U - \alpha(U + A)) / E \right]^{(1-\alpha)/\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ (2/\pi) \left[(\pi/2 + \beta U) \tan U - (\beta \log(E \cos U) / (\frac{\pi}{2} + \beta U)) \right] & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

où U est une v.a.r uniforme sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = \text{Exp}(\lambda)$ une v.a.r. exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. La v.a.r. Z ainsi obtenue est de distribution $S(\alpha, 1, \beta, 0)$.

3. Le changement de variable :

$$X = \begin{cases} \sigma Z + \mu, & \alpha \neq 1, \\ \sigma Z + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \log \sigma + \mu & \alpha = 1. \end{cases}$$

permet d'obtenir une v.a.r. $X \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$.

On remarque que pour $\alpha = 2$, $\sigma = 1$ et $\mu = \beta = 0$, on retrouve l'algorithme de simulation d'une variable normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Y = 2\sqrt{E} \sin U \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

N.B. En vérité, l'algorithme de Weron est une amélioration de celui de Chambers, Mallows et Stuck.

Chapitre 2

Estimation de l'indice de stabilité via les valeurs extrêmes

Au chapitre I, nous avons vu l'importance de l'indice de queue α pour ce qui concerne les lois de probabilité qui ont un comportement de type Pareto au voisinage de l'infini comme d'ailleurs le sont les lois stables. Cette propriété pour des valeurs comprises entre 0 et 2 de l'indice α provoque "l'explosion" de la variance pour ces lois (i.e. variance infinie) mais, en même temps, ceci indique une subsistance de l'information aux extrémités de la distribution. Ces valeurs extrêmes se montrent ainsi avoir beaucoup d'importance dans l'évaluation du paramètre qui a été à l'origine de leurs existence. Dans ce chapitre, on commencera par présenter quelques concepts relatifs à la théorie des valeurs extrêmes et d'énoncer le théorème fondamental sur les lois de probabilités des extrêmes qui va nous permettre par la suite de trouver des estimateurs consistants pour l'indice de stabilité d'une loi stable.

2.1 Distribution des extrêmes

Commençons d'abord par définir la notion de statistique d'ordre :

Définition 2.1.1. *Pour une suite de n v.a.r.'s indépendantes et de même loi X_1, X_2, \dots, X_n , on appelle **statistique d'ordre**, le réordonnement $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ croissant de cette suite, soit : $X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n}$.*

N.B. C'est un réordonnement aléatoire car pour chaque réalisation :

$$X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_n(\omega) = x_n.$$

on obtient un nouveau réordonnement des valeurs et pour chacun de ces réordonnements nous avons un maximum :

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

et un minimum :

$$m_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Le théorème suivant dû à Tippet et Fréchet en 1928 est d'une extrême importance, il est l'équivalent du théorème central limite mais pour les valeurs extrêmes de distributions (i.e. queues de distribution) :

Théorème 2.1.1. *Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite i.i.d. de v.a.r.'s et soit la v.a.r. :*

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Supposons l'existence d'une suite A_1, A_2, \dots, A_n de réels et d'une autre suite B_1, B_2, \dots, B_n de réels positifs telles que :

$$\frac{M_n - A_n}{B_n} \xrightarrow{d} G(x).$$

Alors, la loi de distribution limite $G(x)$ prend une des trois formes suivantes :

Loi de Fréchet :

$$\Psi_{\gamma}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\gamma}), & \text{si } x > 0. \end{cases} \text{ avec } \gamma > 0$$

Loi de Gumbel :

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbf{R}.$$

Loi de Weibull :

$$\Phi_{\gamma}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ \exp(-e^{(-x)^{\gamma}}), & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \text{ avec } \gamma > 0$$

Démonstration : Pour une démonstration de ce théorème, on pourra se référer au ouvrage : Hann and Frreira [19]

Définition 2.1.2. La loi $G(x)$ porte le nom de *loi des valeurs extrêmes* ; C'est donc la fonction de répartition de la v.a.r. du maximum M_n renormalisé. La suite A_n est dite *suite normalisante* et B_n est dite *suite de centrage*.

Définition 2.1.3. Les lois Ψ , Λ et Φ sont dites *lois standards des valeurs extrêmes* et les v.a.r.'s qui leur correspondent sont dites *variables extrémales standards*.

La figure suivante exhibe les densités des trois formes d'une loi des valeurs extrêmes :

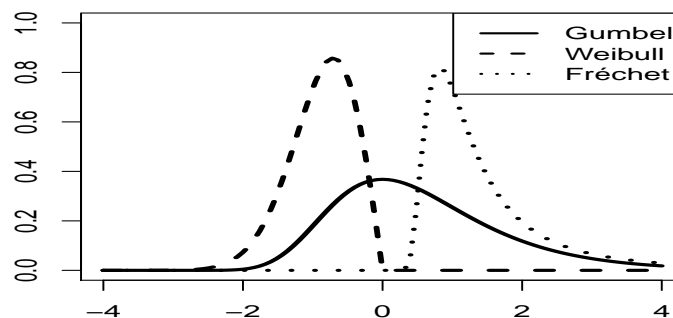


FIGURE 2.1 – Densités de lois extrêmes

Remarque 2.1.1.

- Les trois lois standards des valeurs extrêmes sont continues, leurs densités sont également continues et unimodales donc bornées.
- La loi de Weibull Φ_γ étant continue bornée, tous ses moments sont finis ainsi que la loi de Gumbel Λ qui est à décroissance rapide.
- La loi de Fréchet $\Psi_\gamma(x) = \exp(-x^{-\gamma})\mathbf{1}_{]0, \infty[}(x)$ est à queue de type Pareto. En effet, par un simple développement de Taylor, on a :

$$1 - \Psi_\gamma(x) = 1 - \exp(-x^{-\gamma}) \simeq x^{-\gamma}, \quad x \longrightarrow +\infty$$

Elle est à queue droite lourde si γ vérifie : $0 < \gamma < 2$.

2.1.1 Représentation de Jenkinson & Von Mises :

Dans la représentation de Jenkinson & Von Mises, on peut réunir les trois formes standards en écrivant :

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\} & \text{si } \xi \neq 0 \text{ et } x > -\frac{1}{\xi}, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0 \text{ et } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Plus généralement, si on tient compte des paramètres de localisation μ et d'échelle σ on obtient l'expression suivante :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & \text{si } \xi \neq 0 \text{ et } \frac{x - \mu}{\sigma} > -\frac{1}{\xi}, \\ \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]\right\} & \text{si } \xi = 0 \text{ et } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Cette forme est indiquée par DEG pour " **D**istribution des **E**xtrêmes **G**énéralisée" (ou GEV pour Generalized Extreme Value).

N.B. Pour un $\gamma > 0$, on a :

- $\xi = 1/\gamma$, la DEG correspond à la loi de Fréchet Φ_γ ,
- $\xi = 0$, la DEG correspond à la loi de Gumbel Λ ,
- $\xi = -1/\gamma$, la DEG correspond à la loi de Weibull Ψ_γ .

Définition 2.1.4. L'indice ξ est appelé *indice des valeurs extrêmes* ou tout simplement *indice des extrêmes*.

2.1.2 Max-Domaine d'attraction

Définition 2.1.5. On dit qu'une variable aléatoire X ou que sa loi de répartition F_X appartient au Max-domaine d'attraction de la loi des valeurs extrêmes H_ξ , s'il existe des constantes $C_n > 0$ et $D_n \in \mathbf{R}$ telles que :

$$\frac{M_n - C_n}{D_n} \xrightarrow{d} H_\xi \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty$$

Ce que l'on note par $X \in MDA(H_\xi)$ ou par $F_X \in MDA(H_\xi)$ pour la fonction de répartition.

D'après la remarque précédente, on voit qu'une loi α -stable appartient bien au Max-domaine d'attraction de la loi standard des extrêmes de type Fréchet. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. Une loi de répartition F_X appartient au Max-domaine d'attraction de la loi de Fréchet Φ avec $\gamma > 0$ si et seulement si : $1 - F_X(x) = x^{-\gamma} l(x)$ pour une certaine fonction à variation lente l .

Remarque 2.1.2. D'après ce théorème dans le cas de lois α - stables, l'exposant caractéristique $\alpha > 0$ jouera le rôle de l'inverse de l'indice des valeurs extrêmes, soit : $\alpha = 1/\xi$ et par suite, estimer α revient à estimer ξ .

2.2 Estimateurs de l'indice de stabilité

D'après la remarque (2.1.2), en se concentrant sur les valeurs extrêmes d'une distribution α -stable, on peut trouver des estimateurs pour l'indice de stabilité α via l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes.

Les estimateurs les plus connus dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes sont ceux de Hill, de Pickands et de Dekker-Einmahl-De Haan. On présentera ces estimateurs à travers les résultats qui vont suivre tout en rappelant leur consistance et leur normalité asymptotique qui sont deux caractéristiques précieuses pour tout estimateur.

2.2.1 Estimateur de Hill

C'est le plus simple des estimateurs de queue, il a été introduit par Hill (1975) (voir [15]) pour estimer d'une manière non paramétrique le paramètre de queue.

On considère la statistique d'ordre $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ et $(k_n)_{n>0}$ une suite d'entiers positifs telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 0$.

Définition 2.2.1. *L'estimateur de Hill pour un indice de queue $\xi > 0$ est défini par :*

$$\widehat{\xi}_{n,k}^H = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \log X_{(n,n-i+1)} - \log X_{(n,n-k+1)}.$$

Remarque 2.2.1.

- *Le cas $\xi > 0$ indique qu'on est dans le Max-domaine de Fréchet de la distribution des extrême GEV. C'est le domaine qui nous intéresse le plus puisque la distribution de Fréchet a même comportement qu'une loi de Pareto ou une loi stable au voisinage de l'infini.*
- *Cet estimateur utilise les $k_n := k$ statistiques d'ordre supérieur.*
- *La suite $(k_n)_{n>0}$ est appelée "suite intermédiaire". Elle suggère d'utiliser les plus grandes statistiques d'ordre par la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ et de ne pas utiliser trop de ces valeurs par la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 0$.*
- *Cet estimateur dépend de la taille n de l'échantillon considéré.*
- *On suppose que les dernières statistiques d'ordre supérieur soient positives.*

Consistance faible

La consistance faible de l'estimateur de Hill a été démontrée par plusieurs auteurs voir par exemple Mason dans son article [21] :

Théorème 2.2.1. *Supposons que $F \in MDA(H_\xi)$ avec $\xi > 0$ et k est une suite intermédiaire, alors :*

$$\widehat{\xi}_{n,k}^H \xrightarrow{P} \xi.$$

Consistance forte

La consistance forte de cet estimateur a été obtenue par Deheuvels et al. [9] en ajoutant une condition supplémentaire sur la suite intermédiaire $(k_n)_{n \geq 0}$:

Théorème 2.2.2. *Si $F \in MDA(H_\xi)$ avec $\xi > 0$ et k est une suite intermédiaire vérifiant la condition supplémentaire :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\log \log n} = \infty,$$

alors :

$$\widehat{\xi}_k^H \xrightarrow{p.s} \xi.$$

Normalité asymptotique

Nous avons l'assertion suivante sous certaines conditions voir par exemple Csörgö et Mason [4] :

$$\sqrt{k}(\widehat{\xi}_k^H - \xi) \longrightarrow \mathcal{N}(0, \xi) \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

N.B. La normalité asymptotique permet de construire un intervalle de confiance pour l'estimateur $\widehat{\xi}_k^H$ autour du paramètre inconnu ξ , on obtient à un niveau de confiance $1 - \eta$, l'intervalle :

$$\left[\widehat{\xi}_k^H \left(1 - \frac{t_\eta}{\sqrt{k}} \right), \widehat{\xi}_k^H \left(1 + \frac{t_\eta}{\sqrt{k}} \right) \right],$$

où t_η est le quantile correspondant à la probabilité $1 - \eta$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 2.2.2.

- *On remarque que l'estimateur de Hill répond parfaitement aux propriétés statistiques usuelles ; Cependant, il n'est pas toujours le meilleur.*
- *On montre que l'estimateur de Hill n'est valable que pour le max-domaine d'attraction de Fréchet.*

Commentaire :

La précision de l'estimateur dépend de la sélection de k (taille de la queue de distribution), l'estimateur de Hill a un biais qui tend vers 0 quand k est relativement petit. La variance asymptotique de cet estimateur vaut ξ^2/k qui tend vers 0 quand k est grand. Par conséquent, il faut trouver un compromis entre le biais et la variance asymptotique. Beirlant et al. trouvent un intervalle de confiance pour $\widehat{\xi}_{k_{\text{nopt}}}^H$ où $\widehat{k}_{\text{nopt}}$ est une valeur optimale de k donnée par leur algorithme. Danielson et al. proposent une autre méthode plus précise pour la construction d'un intervalle de confiance basée sur la méthode de bootstrap. Pour la réduction du biais, d'autres estimateurs ont été proposés; Notamment celui de Beirlant et al. qui utilisent un modèle de régression exponentielle. L'estimateur à noyau de Csörgö et al. est une extension de l'estimateur de Hill pour $\xi \in \mathbf{R}$. Une autre variante meilleure que les précédentes est celle de Falk et Morohn.

2.2.2 Estimateur de Pickands

L'estimateur de Pickands est construit en utilisant trois statistiques d'ordre. Cet estimateur à l'avantage d'être valable quel que soit le domaine de définition de l'indice de queue.

Définition 2.2.2. *On considère la statistique d'ordre $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ associée à la suite X_i $i = 1, \dots, n$ de variables aléatoires indépendantes de même loi F appartenant à l'un des domaines d'attraction de la GEV. Soit $k := (k)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers telle que $1 < k \leq n$. L'estimateur de Pickands est défini par :*

$$\xi_k^P = \frac{1}{\log 2} \log \frac{X_{(n,n-k+1)} - X_{(n,n-2k+1)}}{X_{(n,n-2k+1)} - X_{(n,n-4k+1)}}.$$

Théorème 2.2.3. *Soit $(k_n)_{n \geq 0}$ une suite intermédiaire d'entiers positifs telle que $1 < k \leq n$, $k \rightarrow +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$; Alors, on a la convergence en probabilité :*

$$\widehat{\xi}_{n,k}^P \xrightarrow{P} \xi.$$

Si de plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\log \log n} = +\infty$ alors, on a la convergence presque sûre :

$$\widehat{\xi}_{n,k}^P \xrightarrow{p.s.} \xi.$$

Encore, sous des conditions additionnelles sur la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ et la fonction de répartition F , nous avons la convergence en loi :

$$\sqrt{k}(\xi_k^P - \xi) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{4(\log 2)^2(2^\xi - 1)^2}\right).$$

Preuve : Voir démonstration dans [7].

Remarque 2.2.3.

- L'estimateur de Pickands est biaisé : $E(\widehat{\xi}_{n,k}^P)$ ne tend pas vers ξ .
- La normalité asymptotique permet, comme pour celui de Hill, de donner un intervalle de confiance pour l'estimateur de Pickands.
- Il est constaté que si k est petit, on a une estimation avec un intervalle de confiance large et si k est grand, l'intervalle de confiance est plus étroit mais il faut tenir compte du biais.
- l'estimateur de Pickands possède une grande variance, ce qui a amené de nombreux auteurs à proposer des variantes pour cet estimateur avec des variances de plus en plus faibles.

2.2.3 Estimateur de Dekker-Einmahl-De Haan (des moments)

Définition 2.2.3. L'estimateur de Dekker-Einmahl-De Haan (DEdH) du paramètre ξ , noté $\widehat{\xi}_k^D$ est défini par :

$$\widehat{\xi}_k^D = 1 + H_n^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{(H_n^{(1)})^2}{H_n^{(2)}} - 1 \right)^{-1},$$

où :

$$\begin{cases} H_n^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \log X_{(i,n)} - \log X_{(k,n)}, \\ H_n^{(2)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} (\log X_{(i,n)} - \log X_{(k,n)})^2. \end{cases}$$

N.B. On l'appelle aussi l'estimateur des moments car $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ peuvent être considérés comme des moments empiriques.

Théorème 2.2.4. *Supposons que $F \in D(H_\xi)$ avec $\xi \in \mathbf{R}$ et k une suite intermédiaire ; Alors,*

$$\xi_k^D \xrightarrow{P} \xi.$$

Si de plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{(\log n)^\delta} = \infty$ avec $\delta > 0$, alors

$$\xi_k^D \xrightarrow{p.s.} \xi.$$

En outre, sous certaines conditions supplémentaires on a :

$$\sqrt{k}(\xi_k^D - \xi) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sqrt{1 + \xi^2}) \text{ pour } \xi \geq 0.$$

Exemples : Dans les exemples suivants, on a généré aléatoirement des échantillons i.i.d.'s de taille $n = 10000$ d'une distribution appartenant au domaine d'attraction d'une loi à queue lourde (on a choisi une loi de Pareto d'indice de queue $\xi = 0.77$ (i.e. $\alpha = 1/\xi = 1.3$) et une loi de Cauchy $\xi = \alpha = 1$) puis, on a représenté les variations de l'estimateur de l'indice de queue ξ en fonction de la taille k de la queue de l'échantillon considéré une fois par la méthode de Hill et une autre fois par la méthode de Pickands.

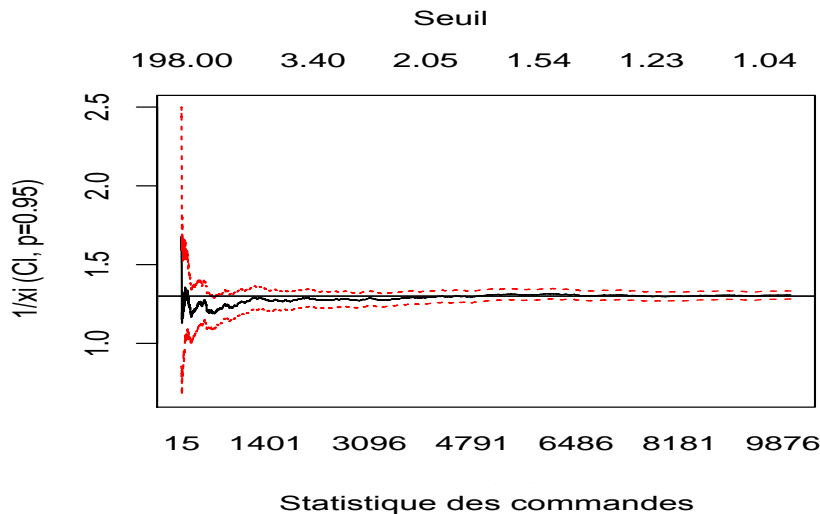
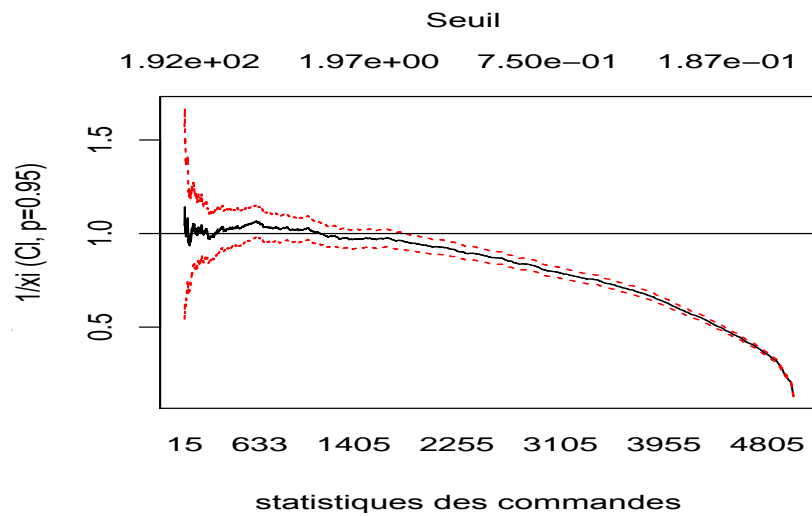
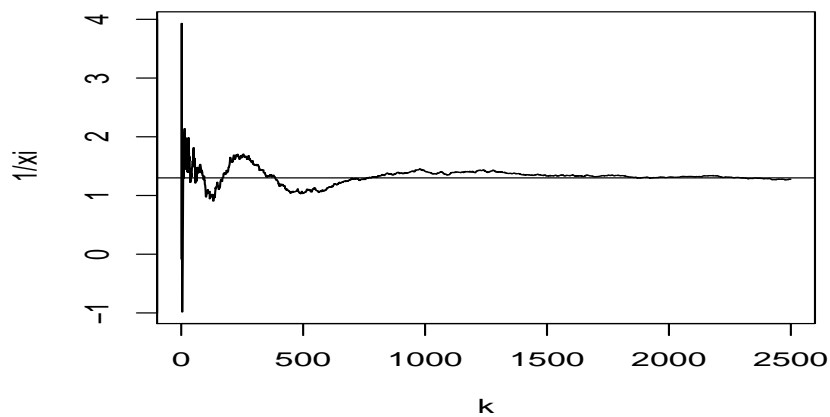


FIGURE 2.2 – Estimateur de Hill d'une loi de Pareto d'indice de queue $\xi = 0.77 = 1/1.3$

FIGURE 2.3 – Estimateur de Hill d'une loi de Cauchy d'indice $\xi = \alpha = 1$ FIGURE 2.4 – Estimateur de Pickands d'une loi de Pareto d'indice $\xi = 1.3$

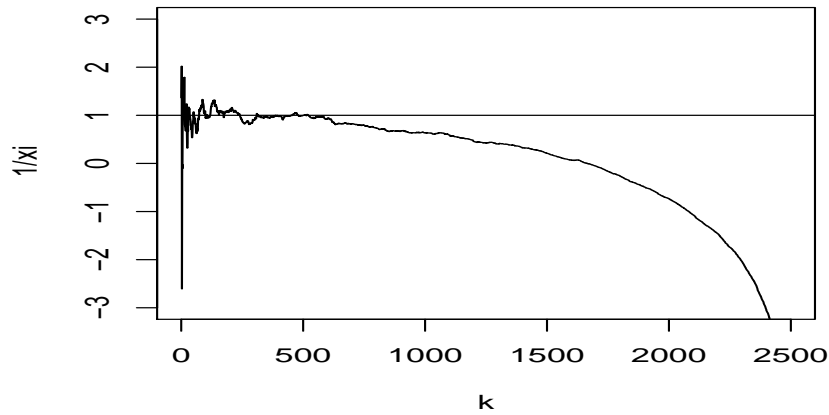


FIGURE 2.5 – Estimateur de Pickands d'une loi de Cauchy d'indice $\xi = 1$

Problématique du k optimal :

La précision des estimateurs de Hill et de Pickands et même celui de DEdH dépendent de la sélection du k qui indique le rang optimal à partir duquel commence la queue de distribution empirique (i.e. l'ensemble des dernières statistiques d'ordre) qui va donner la meilleure estimation possible pour l'indice de queue ξ . D'ailleurs, si on contemple bien les graphiques précédents on arrive à faire les deux remarques importantes suivantes :

- Pour un échantillon aléatoire généré par une loi de Pareto (qui est une véritable queue de par sa définition même), l'estimateur de Hill comme celui de Pickands converge vers la vraie valeur de l'indice de queue.
- Pour un échantillon aléatoire généré par une loi stable, les estimateurs accusent une certaine stabilité au départ mais, après un certain rang, ils commencent à s'écarter de la ligne horizontale qui indique la vraie valeur de ξ .

D'où les deux conclusions suivantes (voir les figures (Fig. 2.3) et (Fig. 2.5)) :

1. Utiliser peu de statistiques d'ordre donne un petit biais mais une grande variance.

2. Utiliser trop de statistiques d'ordre provoque un biais considérable et une variance qui tend vers zéro.

Par conséquent, il faut trouver un compromis entre le biais et la variance asymptotique.

Dans cet objectif, plusieurs tentatives ont été proposées :

- Une approche graphique qui consiste à considérer l'estimateur comme fonction de k puis, de chercher une région de stabilité autour de la ligne qui représente la vraie valeur de l'indice de queue (voir les précédents graphes).
- Une approche qui consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne asymptotique AMSE (asymptotic Mean Square Error). Le point qui réalise le minimum donne un choix optimal de k , celui qui donne la meilleure estimation.
- Une troisième tentative consiste à minimiser la précision de couverture (en valeur absolue) pour des intervalles de confiance recouvrant la valeur théorique.
- La construction d'un intervalle de confiance basée sur la méthode du bootstrap.
- etc.

2.2.4 Estimation du reste des paramètres d'une loi stable

Dans cette sous-section, on va présenter les estimateurs de chacun des paramètres : d'asymétrie, de l'échelle et de localisation d'une loi stable $S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$. Nous allons constater pour l'échelle σ et la position μ , les estimateurs s'expriment en fonction de l'indice de stabilité α ; Mais, en pratique, ce dernier sera remplacé par son estimateur.

— Estimation de l'asymétrie :

En ce qui concerne le paramètre d'asymétrie $\beta = 2p - 1$, nous avons le résultat dû à de Hann et Periera dans [5] :

$$\widehat{\beta}_n = 2\widehat{p}_n - 1,$$

où : $\widehat{p}_n = k^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > |X|_{n,n-k}\}}$ désignant l'estimateur du paramètre d'équilibre p .

Il est montré dans [6] que cet estimateur est consistant i.e. :

$$\widehat{p}_n \xrightarrow{P} p.$$

En plus, sous l'hypothèse $k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) et sous certaines autres conditions (voir [5]) et pour $0 < p < 1$, nous avons encore :

$$\sqrt{k}(\widehat{p}_n - p) \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{p(1-p)}).$$

— Estimation de l'échelle :

Concernant le paramètre d'échelle σ , nous avons l'estimateur suivant, dû à Mezaghi et Necir en 2007 (voir[23]) et valable pour un α quelconque de l'intervalle $]0, 2[$:

$$\widehat{\sigma}_n(k) := Y_{n,n-k} \left(\frac{k\pi}{2n\Gamma(\widehat{\alpha}_n) \sin \frac{\pi\widehat{\alpha}_n}{2}} \right)^{1/\widehat{\alpha}_n},$$

où $\widehat{\alpha}_n = 1/\widehat{\xi}_{n,k}$ est l'estimateur de Hill de l'exposant caractéristique et $Y_{n,n-k}$ désigne la statistique d'ordre $|X|_{n,n-k}$ de la suite des valeurs absolues $Y_1 = |X_1|, Y_2 = |X_2|, \dots, Y_n = |X_n|$.

Il est montré dans [23] que $\widehat{\sigma}_n(k)$ est consistant i.e. :

$$\widehat{\sigma}_n(k) \xrightarrow{P} \sigma,$$

et lorsque la distribution fait partie des modèles de la classe de Hall (voir [14]) telles que les lois stables et, sous une certaine condition, cet estimateur est asymptotiquement normal :

$$\frac{\sqrt{k}}{\log \frac{k}{n}} (\log \widehat{\sigma}_n - \log \sigma) \longrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \frac{1}{\alpha^2}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où la suite des entiers k est de la forme $k \sim dn^\theta$ au voisinage de l'infini, pour un certain $d > 0$ et $0 < \theta < 1$ et $\rho < 0$ le paramètre de variation régulière de second ordre (voir par ex. [8]) et λ réel.

— Estimation de la position :

Sous l'hypothèse $1 < \alpha < 2$ le paramètre de position μ représente l'espérance $E(X)$. Dans ce cas, la moyenne échantillonnale \bar{X} représente l'estimateur naturel de μ . Cependant, un autre estimateur a été proposé par Cheng Peng en 2001 (voir [28]) qui a la qualité d'être asymptotiquement normal, chose que \bar{X} ne possède pas dans le cadre des lois stables.

L'estimateur se présente comme suit :

$$\mu_n^P(k) = \widehat{\mu}_n^-(k) + \widehat{\mu}_n(k) + \widehat{\mu}_n^+(k),$$

où :

$$\widehat{\mu}_n^-(k) := \frac{k}{n} X_{n,k} \frac{\widehat{\alpha}_n^-}{\widehat{\alpha}_n^- - 1},$$

$$\widehat{\mu}_n^+(k) := \frac{k}{n} X_{n,n-k+1} \frac{\widehat{\alpha}_n^+}{\widehat{\alpha}_n^+ - 1},$$

$$\widehat{\mu}_n(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{n,i}.$$

avec :

$$\widehat{\alpha}_n^- := \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(-X_{n,i}) - \log^+(-X_{n,k}) \right\}^{-1} = 1/\xi_{n,k}^-, \quad (2.1)$$

et

$$\widehat{\alpha}_n^+ := \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(X_{n,n-i+1}) - \log^+(X_{n,n-k}) \right\}^{-1} = 1/\xi_{n,k}^+. \quad (2.2)$$

$\xi_{n,k}^-$ and $\xi_{n,k}^+$ sont respectivement les estimateurs de Hill de l'indice de queue correspondant respectivement aux deux extrémités gauche et droite de la distribution $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Ici, $\log^+(x) = \log(\sup\{1, x\})$.

N.B. L'estimateur de Peng est asymptotiquement normal sous certaines conditions voir [28].

Chapitre 3

Modélisation de l'indice CAC 40

3.1 L'indice financier CAC40

Le CAC 40 est le principal indice boursier de la Bourse de Paris. Il a été créé avec 1000 points de base le 31 décembre 1987 par la compagnie des agents de change. C'est un indice flottant pondéré en fonction de la capitalisation boursière qui reflète la performance des 40 actions les plus importantes et les plus activement négociées cotées sur Euronext Paris.

Avant 1988 : Pour mesurer les performances avant 1988, il existe un indice INSEE de la Bourse de Paris. Cet indice a connu un quintuplement dans les années 1920 puis un nouveau quintuplement dans les années 1950, malgré les incertitudes géopolitiques lors de ces deux époques de forte croissance économique. Les années 1960 et 1970 avaient cependant marqué un coup d'arrêt à cette tendance, les petits porteurs se détournant progressivement d'une bourse de Paris orientée durablement à la baisse.

Bulle Internet les années 2000 : L'indice a connu des fluctuations importantes pendant la bulle Internet. Cette période a été marquée par une spéculation intense sur les actions des entreprises liées à Internet, ce qui a conduit à une augmentation rapide et insoutenable des prix des actions.

Évolution depuis 2005 : L'indice a continué à évoluer et à s'adapter aux conditions du marché depuis 2005. Il a connu des hauts et des bas en réponse à divers facteurs, y compris les conditions économiques mondiales, les politiques gouvernementales et les événements géopolitiques.

Krach boursier de 2020 : Déclenché par la pandémie de Covid-19, ce krach a eu un impact significatif sur l'indice. La pandémie a entraîné une forte baisse des marchés boursiers mondiaux y compris le CAC 40.

Le CAC 40 est un indice sans dividendes. Il est mis à jour toutes les 15 secondes et coté tous les jours ouvrés de 9 heures à 17 h 30. Les sociétés représentatives des différentes branches d'activités, reflètent en principe la tendance globale de l'économie des grandes entreprises françaises et leur liste est revue régulièrement pour maintenir cette représentativité.

Les analyses financières d'un actif sont basées essentiellement sur ses rendements (dits "returns" en anglais). Pour un indice financier, les rendements journaliers représentent les accroissements du logarithme de son prix, il est donc défini par l'expression :

$$R_n := \log P_n - \log P_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

où P_n désigne le prix du CAC 40 à l'instant n alors que R_n représente le gain relatif qui peut être positif ou négatif en cas de perte.

Classiquement, les returns ont été modélisés par une distribution normale ceci en vertu du théorème central limite (T.C.L.). Mais, depuis les années 60 avec les travaux de Mandelbrot, le modèle gaussien a été progressivement abandonné puisqu'il ne parvenait pas souvent à expliquer certains comportements constatés sur la distribution empirique des rendements tels que par exemple :

- Présence d'une asymétrie qui se manifeste parfois d'une manière évidente,
- Un coefficient d'aplatissement (dit "kurtosis") qui dépasse souvent la valeur 3 celle d'une distribution normale.
- L'histogramme des returns montre des queues épaisses aux extrémités,
- Une variance instable au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente,
- etc.

Mandelbrot constatant ces phénomènes sur les actifs financiers préférait utiliser les lois stables comme modèles aidant à surpasser les aspects négatifs du modèle gaussien. En effet, un modèle α -stable donne la possibilité de pouvoir décrire à la fois, le comportement de queues lourdes, d'une asymétrie éventuelle et arrive à expliquer l'instabilité de la variance empirique et la valeur excessive du kurtosis etc.

Pour notre série du CAC 40, nous avons prélevé les données brutes à partir du site internet "www.finance.yahoo.com" entre les deux dates du 26 avril 2023 au 26 avril 2024 ; Soit 257 valeurs représentant les prix de clôture quotidiens de cet actif durant les journées ouvrables de l'année (les jours fériés par exemple ne sont pas comptés).

La distribution des rendements qui compte 256 valeurs durant cette période est représentée par l'histogramme suivant :

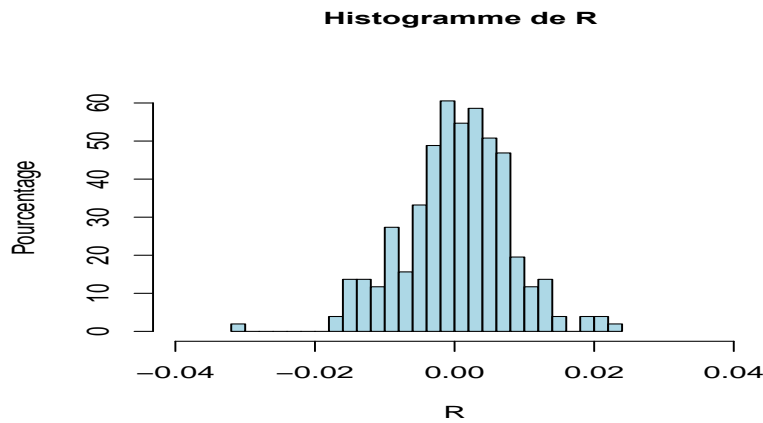


FIGURE 3.1 – Histogramme des rendements

Le tableau suivant donne les caractéristiques statistiques de la série des rendements :

TABLE 3.1 – Les caractéristiques statistiques de la série des rendements.

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
-0.0317600	-0.0038000	0.0006981	0.0003124	0.0051790	0.0225100

On constate de prime abord qu'il y a une légère dissymétrie au centre de cette distribution empirique car il existe un petit écart entre la moyenne et la médiane.

Cependant, le kurtosis empirique qui vaut $4.066542 > 3$ dépasse celui d'une loi normale. Il indique la présence d'une certaine épaisseur aux extrémités de cette distribution.

3.2 Non conformité du modèle gaussien

1. En observant le graphe suivant, on remarque qu'un modèle gaussien, malgré qu'il décrit assez bien les valeurs centrales, n'arrive pas à prendre en considération les valeurs se trouvant aux extrémités :

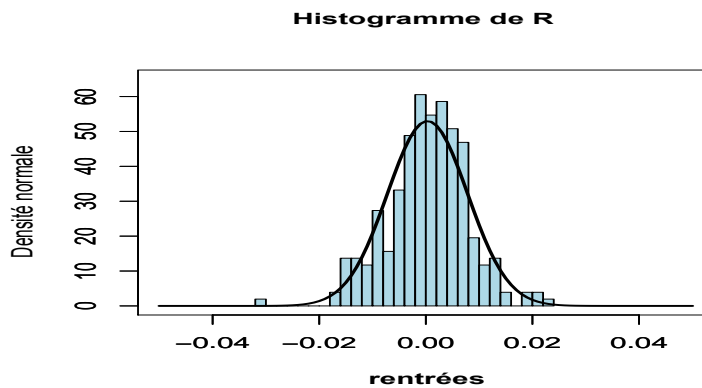
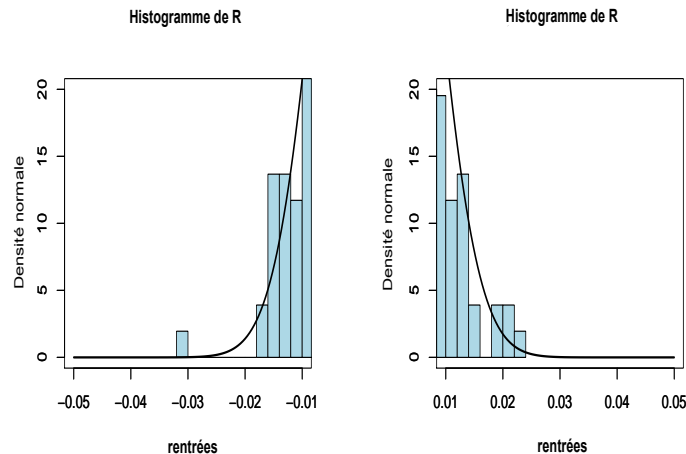


FIGURE 3.2 – Ajustement gaussien de la série des returns



2. Le test de normalité de Shapiro-Wilk appliqué sur une variable statistique utilise le rapport de deux estimateurs de la variance. Dans le cas d'une distribution gaussienne, le rapport de ces deux estimateurs est voisin de 1. Sinon, dans le cas où le rapport est plus petit que 1, le modèle normale est rejeté.

En appliquant le test de Shapiro-Wilk sur les rendements de nos données, on trouve une probabilité de dépassement de la valeur critique égale à $p - value = 0.01151$ qui est très petite devant le risque 0.05 ; Ce qui confirme encore une fois la non adaptation du modèle gaussien à la série des returns.

3. Le QQ-norm est une procédure graphique qui compare les quantiles empiriques aux quantiles d'un modèle gaussien. Si le modèle convient parfaitement à la suite des données alors, il y a superposition des points obtenus avec la droite de Henry ; Sinon, on va remarquer une certaine démarcation vis-à-vis de cette droite et le modèle ne convient pas.

Pour notre série des returns, le QQ-norm montre un alignement au centre de la droite mais un certain écartement aux extrémités, signe de non validité du modèle gaussien.

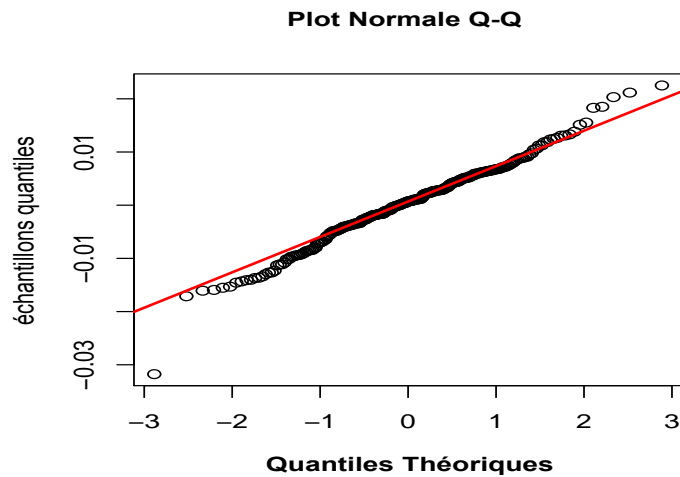


FIGURE 3.3 – Le QQ-norm de la série des returns

3.3 Aspect queue lourde

1. Dans la figure suivante, le tracé de la variance des returns considérée comme fonction de la taille n de l'évolution de l'échantillon des données montre une certaine instabilité causée par des sursauts qui arrivent de temps à autre. Ceci est un signe de non existence d'une réelle variance :

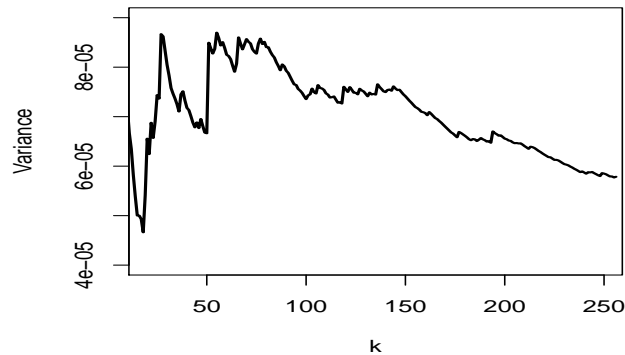


FIGURE 3.4 – Fluctuations de la variance échantillonnale

2. Le kurtosis, comme on l'a déjà signalé mesure le degré d'aplatissement de la courbe de densité d'une loi de probabilité quelconque; S'il dépasse la valeur 3 qui est celle d'une densité normale alors, la densité de cette loi présente une ou deux queues épaisses aux extrémités de la distribution. Pour un échantillon de données réelles, si on trouve un kurtosis plus grand que 3, on peut soupçonner l'existence de la variance puisque la queue ou les deux sont épaisses (ou lourdes). A présent, pour nos données de returns, le kurtosis empirique montre une valeur de 4.066542 supérieure à celle de la loi normale et ceci est un signe de non existence d'une réelle variance pour cet échantillon.

3.4 Modèle stable pour les rendements

En estimant les quatre paramètres d'un modèle stable ajustant nos returns, on trouve les valeurs suivantes :

TABLE 3.2 – Paramètres du modèle stable des returns

$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\sigma}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{\mu}$
1.63	0.00645	-0.279	0.00091

D'après ces valeurs, on remarque ce qui suit :

- La valeur de l'indice de stabilité est comprise entre 1 et 2 ce qui fait que la distribution est à queues lourdes,
- L'échantillon des returns est presque centré à l'origine et cette valeur est une réelle moyenne car $\alpha > 1$,
- Il y a une légère dissymétrie vers la gauche puisque $\widehat{\beta}$ est négatif ,

La figure suivante montre une nette amélioration de l'ajustement de l'histogramme des returns par une distribution stable $S(\widehat{\alpha}, \widehat{\sigma}, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}) = S(1.63, -0.279, 0.00645, 0.00091)$.

En effet, les occurrences centrales comme celles des extrêmes sont bien décrites par cette loi :

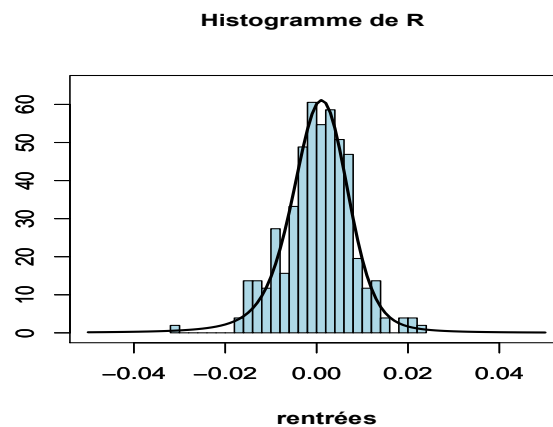
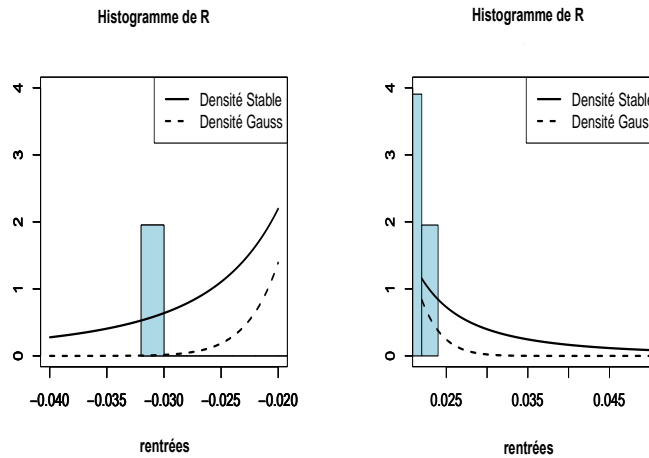


FIGURE 3.5 – Ajustement stable de la série des returns

Un agrandissement des extrémités de l'histogramme montre que le modèle stable est plus adapté aux rendements que le modèle gaussien :



2. Si on regarde le QQ-plot (Figure ci-dessous) qui compare les quantiles empiriques à ceux théoriques de la loi stable estimée, on constate qu'il y a quasiment une superposition parfaite :

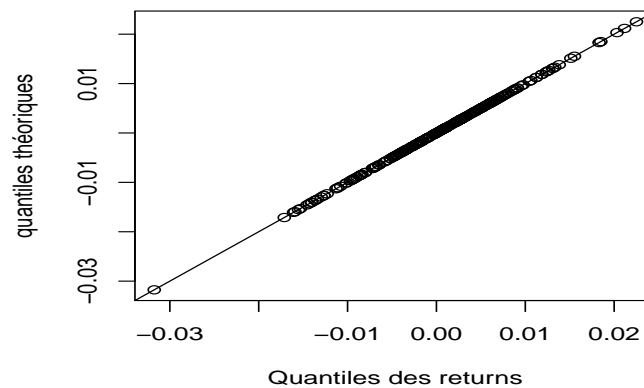


FIGURE 3.6 – Quantiles empiriques vs quantiles estimés de la série des returns

En conséquence, un modèle stable apporte une meilleure amélioration pour les returns de nos données du CAC 40.

Conclusion

Les indices financiers tel que le CAC 40 sont mal décrits par le modèle gaussien ; C'est ce qui a été constaté par Mandelbrot les années soixante sur les données financières. Les rendements présentent souvent des distributions à queues épaisses ; Ceci est justifié par le fait que leurs coefficients d'aplatissement dépassent celui de la loi normale ; En plus, leurs variances présentent une instabilité au fur et à mesure que la taille de leurs échantillons augmente. La théorie des valeurs extrêmes donne un moyen efficace d'expliquer ce type de constatation observé sur les séries financières et les modèles stables arrivent à les ajuster de manière satisfaisable beaucoup mieux que les distributions gaussiennes, ces dernières classiquement prises comme modèles standards.

Bibliographie

- [1] Adler, R., Feldman, R. E., et Taqqu, M. (1998). *A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques and Applications*. Birkhauser, Boston.
- [2] Borak, Sz., Hardle, W. and Weron, R. (2004). *Stable Distributions in Finance*. In P. Cizek, W. Hardle, R. Weron (eds.) *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer.
- [3] Chambers J.M., Mallows C.L. et Stuck B.W. (1976). *A method for simulating stable random variables*. J.the American Stat.Assoc, **(71)**(354), 340-344.
- [4] Csörgö. S, Mason. D.M, (1985). *Central Limit Theorems for Sums of Extreme Values*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **(98)**, 547-558.
- [5] de Haan, L. and Periera, T., (1999) *Estimating the Index of a Stable Distribution*, Statist and Probab Letters **(41)**, 39-55.
- [6] de Haan, L. and Resnick, S. I. (1998) *On Asymptotic Normality of the Hill Estimator*, Stochastic Models **(14)**, 849-867.
- [7] de Haan.L, Peng.L, (1996). *Comparison of Tail Index Estimators*. Econometric Institute. Erasmus University Rotterdam.
- [8] de Haan.L, Stadtmüller.U, (1996). *Generalized Regular Variation of Second Order*. J. Australian Math. Soc. (Series A) **(61)**, 381-395.

- [9] Deheuvels, P., Haeusler, E., Mason, D. (1988). *Almost sure convergence of the Hill estimator*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. (**104**), 371-381.
- [10] DuMouchel W.H. (1973). *On the Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood Estimate when Sampling from a Stable Distribution*. Annals of Statistics, (**1**), 948-957.
- [11] DuMouchel W.H. (1971). *Stable Distributions in Statistical Inference*. PhD. thesis, Dept. of Statistics, Yale University.
- [12] Feller. W, (1966). *An Introduction To Probability Theory and its Applications*, (**2**). 1st edn, Wiley, New York.
- [13] Gnedenko and Kolmogorov (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*.
- [14] Hall, P. and Welsh, A. H. (1984). *Best attainable rates of convergence for estimates of parameters of regular variation*. Annals of Statistics (**12**). 1079-1084.
- [15] Hill, B. (1975). *A simple Approach to Inference About the Tail of a Distribution*, Annals of Statistics (**3**), 1163-1174.
- [16] Holt D. and Crow E. (1973). *Tables and graphs of the stable probability functions*, J. Res. Nat. Bureau Standards, B. Math. Sci., (**77**), 143-198.
- [17] Janicki, A. et Weron, A. (1994). *Simulation and Chaotic Behavior of α -stable Stochastic Processes*. Marcel Dekker, New York.
- [18] Kanter, M. *Stable densities under change of scale and total variations inequalities*. Annals of Probability (**3**), 697-707.
- [19] Laurens de Haan, Ana Ferreira, *Extreme value theory*. An introduction, (2006)
- [20] Loève, M. (1963). *Probability Theory* (third ed. (**1**)). Princeton : D. Van Nostrand Company.
- [21] Mason, D.M., (1982). *Laws of Large Numbers for Sums of Extreme Values*. Ann. Probab. (**10**), 754-764.
- [22] McCulloch J.H. (1986). *Simple consistent estimators of stable distribution parameters*. Communications in Statistics. Simulation and Computation, (**15**), 1109-1136.

- [23] Meraghni, D. and Necir, A. (2007) *Estimating the Scale Parameter of a Levy-stable Distribution via the Extreme Value Approach*. Methodology and Computing in Applied Probability (9), 557-572.
- [24] Mittnik, S., Doganoglu, T. and Chenyao, D. (1999). *Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian Distribution*. Mathematical and Computer Modelling (29), 235-240.
- [25] Nolan, J. P.(1997). *Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions*, Communications in Statistics-Stochastic Models (13), 759-774.
- [26] Nolan, J. P.(2005). *Stable Distribution Models For Heavy Tailed Data*. Math/Stat Department American University.
- [27] Panton D. (1992). *Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions*. Statist. Simula. (21), 458-492.
- [28] Peng, L. (2001) *Estimating the Mean of a Heavy Tailed Distribution*. Statistics and Probability Letters (52), 255-264.
- [29] Petrov.V.(1987) première version. *Limit Theorems of Probability Theory*. Sequences Of Independent Random Variables.
- [30] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S.(1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall.
- [31] Samorodnitsky, G. et Taqqu, M. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Inéite Variance*. Chapman et Hall, New York
- [32] Shorokhod, A. V.(1954). *An asymptotic Formula for Stable Distribution Laws*, Dokl. Akad. Nayk USSR, (98), 731-734.
- [33] Weron R. (1996). *On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables*. Statistics and Probability Letters, (28), 165-171.
- [34] Weron, R. (2001). *Levy-stable distributions revisited : tail index > 2 does not exclude the Lévy-stable regime*. International Journal of Modern Physics C (12(2)), 209-223.
- [35] Worsdale G. (1975). *Tables of cumulative distribution function for symmetric stable distributions*. Appl. Statistics, (24), 123-131.

- [36] Zolotarev, V. M. (1986). *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society.
- [37] Zolotarev, V. M. (1986). *One-dimensional stable distribution* , **(65)** *In Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence.

Résumé

Résumé :

Les distributions de probabilité absolument continues dites à queues lourdes gardent assez d'information dans leurs extrémités. Elles peuvent modéliser le comportement de certaines séries financières. Dans ce mémoire, on se sert d'une loi appartenant à cette classe pour modéliser un certain indice financier.

Abstract :

Absolutely continuous probability distributions known as heavy-tailed distributions retain enough information in their extremities. They can model the behaviour of certain financial series. In this memoir, we use a distribution belonging to this class to model a certain financial index.

المخلص :

تحتفظ التوزيعات الاحتمالية المستمرة ذات الذيل الثقيل بمعلومات كافية في نهاياتها. يمكنهم نمذجة سلوك سلسلة مالية معينة. في هذه المذكرة، نستخدم قانونا ينتمي إلى هذه الفئة لنمذجة مؤشر مالي معين.