

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil et Travaux Publics



Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Travaux Publics  
Domaine : Génie civil  
Filière : Travaux Public  
Spécialité : Voies et Ouvrages D'art  
Thème

**Une Nouvelle théorie pour l'analyse vibratoire en flexion des poutres épaisses.**

**Présenté Par :**

- 1) Mr. KOUAKI Mohammed Yacine
- 2) Mr. OTSMANI Sidahmed

**Devant le jury composé de :**

Mme BELLABACI Z  
Mr GUELLIL M  
Mme ABDELBARI S

UAT.B. B (Ain Temouchent)  
UAT.B.B (Ain Temouchent )  
UAT.B.B (Ain Temouchent )

Présidente  
Examineur  
Encadrant

*Année Universitaire 2023/2024*

## Remerciement

---

### Remerciement

Tout d'abord, nous tenons à remercier ALLAH, le Tout puissant et Miséricordieux, de nous avoir donné la santé, la volonté et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Tout le respect à notre honorable directeur de mémoire **S. Abdelbari** pour nous avoir encouragées et poussées par ses précieux conseils. Nous le remercions infiniment pour sa disponibilité et sa patience.

Nous tenons à remercier vivement les membres de Jury d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail.

Nous remercions chaleureusement tous les enseignants du département de Génie Civil.

Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont Apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

## Dédicace

---

### Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A **Ma Très Chère Mère**, qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureux.

A **Mon Très Cher Père**, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect.

A **Mon Défunt Grand Père**, qui m'a tout donnée dans mon parcours scolaire jusqu'à mon baccalauréat, J'espère qu'il sera fier de moi maintenant comme il m'a toujours dit. ALLAH YARAHMOU.

A **Ma Chère Grande Mère**, pour son soutien moral, je lui souhaite également une bonne santé.

A **Ma Chère Sœur**, pour son soutien et ses conseils précieuses tout au long de mes études, qu'ALLAH la bénisse.

A **Mes Chers Tantes, Oncles et leurs Femmes**, pour leur soutien et leurs prières pour moi et surtout **Ma Seule Tante paternelle** qui m'a toujours soutenu et m'a aidé infiniment à terminer ce travail.

A **Mes Chers Cousins et Cousines**, spécialement **BELLABES Yacer** pour son aide et ses précieux conseils qui m'ont aidée dans mon parcours universitaire.

A **Mon Cher Ami BELKADI Amine** qui m'a supporté dans les moments difficiles et tous mes amis pour leurs aides et supports.

A **Mes Collègues et Mes Amis** qui m'ont aidé : **Kebdani Mohammed, Serine, Sarah, Rania.**

A **Mon Encadreur Mme S. ABDELBARI** qui a été toujours présente pour la réussite de ce travail.

Et sans oublier **Mon Binôme OTSMANI Sidahmed** pour sa patience et sa compréhension durant ce projet.

**KOUAKI MOHAMMED YACINE**

## Dédicace

---

### Dédicace

Je tiens en tout premier lieu à remercier Dieu qui m'a donné la Force et volonté pour arriver à cette dernière étape de fin d'étude.

Je dédie ce mémoire :

**\*A Ma mère**, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de

Mon éternelle gratitude.

**\*A Mon père**, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

**\* A mes frères et ma sœur.**

**\*A Mon encadreur**

**Mme S. ABDELBARI**

**\*A Mon binôme Yacine** qui a donné beaucoup de soutien pendant cette période.

**\*A toute mes amies** pour leur soutien tout au long de mon parcours Universitaire

**OTSMANI SIDAHMED**

## ملخص

تقدم هذه الورقة نظرية محسنة لتحليل سلوك الانحناء الاهتزازي لعوارض سميكة مرتبة وظيفياً (FG) مسؤولة عن تثبيت السُمكي. عدد المجهولين في هذه النظرية هو أربعة، مقابل خمسة في الطرق الأخرى. ويمكن الفصل بين الاراحة العرضية في تكسير السماكة، والانحناء، والتكسير، والمكونات المقصية باستخدام دالة فوقية كتعبير. وهناك انخفاض في عدد معادلات الحكم نتيجة للانخفاض في المجهولات. ودون الحاجة إلى عامل تصحيح مقص، تُستوفى شروط الحدود في أعلى وأسفل وجوه شعاع. وتتفاوت الخواص الفعالة لمواد بصورة مستمرة في اتجاه السُمك استناداً إلى النسبة المئوية لحجم المكون، وفقاً لقانون التوزيع. معادلات حركة شعاع FG المدعم تحت الحمولة المتقاطعة مشتقة من مبدأ هاملتون ويتم حلها عن طريق افتراض نوع حل نافيير. ويتم الكشف عن النتائج الرقمية التي يتم الحصول عليها وتحليلها تحليلاً دقيقاً لتأكيد صحة النظرية الحالية وإثبات تأثير التشوه الطبيعي، الذي يتم تجاهله إلى حد كبير في نظريات الأشعة، على الاستجابات الحيوية. كما يثبت تأثير التركيبة المادية، والهندسة، والتشوه المقصي على هذه الردود. نحن نقارن النتائج المبلغ عنها مع مختلف توقعات نظريات. نجد أن النظرية الحالية للتنبؤ بالإنحناء والاستجابات الحرّة للاهتزازات من شعاعات FG هي مباشرة ودقيقة.

**الكلمات الرئيسية:** نظرية محسنة؛ شعاع وظيفي؛ سمك التمدد؛ اهتزاز؛ رد فعل ترددي

### Abstract

This paper presents an improved beam-theory for the bending vibratory behavior analysis of thick functionally graded (FG) beams those accounts for thickness-stretching. The number of unknowns in this theory is four, as opposed to five in the other methods. The transverse displacement can be separated into thickness-stretching, bending, and shear components using a hyperbolic function as an expression. There is a decrease in the number of governing equations as a result of the reduction in unknowns. Without the need for a shear correction factor, the boundary conditions at the top and bottom of the FG beam faces are satisfied. Effective properties of FG beam material vary constantly in the thickness direction based on the volume percentage of the constituent, as per a distribution law. The equations of motion for a supported FG beam under transverse load are derived from Hamilton's principle and are solved by assuming the Navier's solution type. The obtained numerical results are exposed and thoroughly analyzed to confirm the validity of the current theory and demonstrate the impact of normal deformation, which is largely ignored in beam theories, on the vibratory responses of FG beams. It also proves the influence of material composition, geometry, and shear deformation on these responses. We compare the reported results with various beam theories' predictions. We find that the current theory for predicting the bending and free vibration responses of FG beams is straightforward and accurate.

**Keywords:** improved beam-theory; functionally graded beam; thickness stretching; vibration; frequency response

### Résumé

Une théorie raffinée de la poutre qui tient compte de l'étirement d'épaisseur est présentée dans cette étude pour l'analyse du comportement vibratoire de flexion des poutres épaisses fonctionnellement graduées (FG). Dans cette théorie, le nombre d'inconnus est réduit à quatre au lieu de cinq dans les autres approches. Le déplacement transversal s'exprime par une fonction hyperbolique et est subdivisé en éléments d'inclinaison, de coupe et d'étirement de l'épaisseur. Le nombre d'inconnus est réduit, ce qui entraîne une diminution du nombre de l'équation régnante. Les conditions limites sur les faces supérieures et inférieures de la poutre FG sont satisfaites sans aucun facteur de correction de coupe. Selon une loi de distribution, les caractéristiques effectives du matériau de poutre de FG changent continuellement dans la direction de l'épaisseur en fonction de la proportion de volume du constituant. Les équations de mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton et sont résolues en supposant le type de solution de Navier, pour le cas d'une poutre FG soutenu qui est chargé transversalement. Les résultats numériques obtenus sont exposés et analysés en détail pour vérifier la validité de la théorie actuelle et prouver l'influence de la composition du matériau, de la géométrie et de la déformation de la coupe sur les réponses vibratoires des poutres FG, montrant l'impact de la déformation normale sur ces réactions qui est négligée dans la plupart des théories de la poutre. Les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par d'autres théories de la poutre. On peut conclure que la théorie actuelle est non seulement précise mais aussi simple pour prédire les réponses à la flexion et à la vibration libre des poutres FG.

**Mots-clés :** Une théorie raffinée de la poutre ; poutre fonctionnellement classée ; étirement de l'épaisseur ; vibration ; réponse de fréquence.

## Tables des matières

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1: Généralité sur les FGMs</b>	
1. Définition des Matériaux FGM :.....	5
2. L'histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) : .....	5
2.1 Points clés de l'histoire des FGM : .....	6
2.2 L'avenir des FGM : .....	6
3. Application des matériaux FGM :.....	6
3.1 Aérospatiale :.....	6
3.1.1 Turbines à gaz : .....	6
3.1.2 Tuyaux d'échappement : .....	6
3.1.3 Boucliers thermiques : .....	6
3.2 Automobile :.....	6
3.2.1 Pistons : .....	6
3.2.2 Freins : .....	7
3.2.3 Systèmes d'échappement :.....	7
3.3 Biomédical :.....	7
3.3.1 Prothèses de hanche et de genou :.....	7
3.3.2 Implants dentaires :.....	7
4. Applications des FGM dans le domaine des Travaux Publics :.....	7
4.1 Revêtements de ponts et de routes :.....	7
4.2 Réparation des structures en béton : .....	8
4.3 Tuyaux et canalisations : .....	8
4.4 Digue et murs de soutènement : .....	8
4.5 Tunnels et infrastructures souterraines : .....	9
4.6 Avantages des FGM pour les travaux publics : .....	9
4.6.1 Durabilité accrue :.....	9
4.6.2 Performance améliorée :.....	9
4.6.3 Sécurité accrue :.....	9
4.6.4 Innovation :.....	9
4.7 Défis et perspectives :.....	9
5. Conclusion :.....	9



# Tables des matières

---

## **Chapitre 2:Analyse vibratoire des poutres et théories**

1. Définition des poutres : .....	11
2. Analyse vibratoire des poutres : .....	11
3. Flexion des poutres : .....	11
4. La vibration de flexion : .....	12
5. Les lois de mélange des poutres : .....	13
5.1 La loi exceptionnelle E-FGM : .....	14
5.2 La loi de puissance P-FGM : .....	14
5.3 La fonction sigmoïde S-FGM : .....	15
6. Les différentes théories des poutres : .....	16
6.1 La théorie Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) : .....	16
6.2 La théorie de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDT) : .....	17
6.3 La Théorie d'Ordre Élevé (HSDT) : .....	18
7. Conclusion : .....	19

## **Chapitre 3 : Déveleppement d'une nouvelle théorie**

1. Introduction : .....	21
2. Formulation théorique : .....	21
5.4 Définition du modèle : .....	21
5.5 Champs de déplacement et de contrainte : .....	22
5.6 Le champ de déformations : .....	23
5.7 Les équations gouvernantes : .....	23
5.8 La solution analytique pour une poutre FGM simplement appuyée : (poutre S-S FG) : .....	26
3. Conclusion : .....	28

## **Chapitre 4 : Resultats et discussion**

1. Introduction : .....	30
2. Résultats numériques et discussion : .....	30
2.1 Analyse statique : .....	31
2.2 Analyse des vibrations : .....	37
3. Conclusion : .....	41

<b>Conclusion et perspectives .....</b>	<b>43</b>
---	-----------

<b>Référence Bibliographique .....</b>	<b>45</b>
--	-----------

### LISTE DES FIGURES

Figure 1:Variation du module de Young de la poutre E-FGM.....	14
Figure 2:Variation du module de Young dans une plaque P-FGM .....	15
Figure 3:Variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	16
Figure 4:Cinématique d'Euler Bernoulli.....	17
Figure 5:Cinématique de Timoshenko.....	18
Figure 6:Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	19
Figure 7:La géométrie de la poutre FG .....	21
Figure 8:Profil de la proportion de volume en céramique à travers l'épaisseur de la poutre FG, pour différents matériaux.....	22
Figure 9:poutre fonctionnellement classifié (poutre S-S FG) facilement pris en charge sous une charge uniforme. ....	26
Figure 10:Effet d'étirement de l'épaisseur sur les déplacements transversaux non- dimensionnels (a) et axiaux (b). ....	33
Figure 11:Effet de coupe sur le déplacement axial le long de la FGB sur : (a) la face inférieure de la poutre et (b) la surface supérieure.....	33
Figure 12:Effets de coupe et d'étirement sur le déplacement transversal. ....	34
Figure 13:Non-dimensionnel : (a) déplacement axial, U et (b) déviation du milieu de la gamme W à travers l'épaisseur de la poutre FG. ....	34
Figure 14:Non-dimensionnel : (a) tension de coupe, (b) tension due à l'étirement d'épaisseur par rapport au paramètre du matériau.....	35
Figure 15:Distributions : (a) au-dessus de l'épaisseur de la poutre FG, (b) par rapport à la longueur non-dimensionnelle du façade FG. ....	36
Figure 16:Distributions : (a) au-dessus de l'épaisseur de la poutre FG, (b) par rapport à la longueur non-dimensionnelle du façade FG. ....	36
Figure 17:Distributions : (a) au-dessus de l'épaisseur de la poutre FG ; (b) par rapport à la longueur non-dimensionnelle des poutres FG. ....	37
Figure 18: Effet de (a) le paramètre du matériau et (b) le rapport de lenteur (L/h) sur la fréquence fondamentale sans dimension de la poutre FG S-S.....	39

### Liste des Tableaux

<b>Tableau 1:</b> Caractéristiques du matériau et Al [38].....	30
<b>Tableau 2:</b> Comparaison des déplacements transversaux et axiaux non-dimensionnels, des tensions axiales et de coupe du poutre S-S FG pour divers indices de matériaux et le rapport de maigreur ( $L/h$ ).....	31
<b>Tableau 3:</b> Effet du rapport d'élanement ( $L/h$ ) et de l'indice de matériau ( $p$ ) sur les déplacements transversaux et axiaux non-dimensionnels, les tensions axiales et de coupe de la poutre FG S-S.....	32
<b>Tableau 4:</b> Comparaison des fréquences du faisceau S-S FG pour certaines valeurs de ( $L/h$ ) et ( $p$ ).....	38
<b>Tableau 5:</b> Effet du rapport de maigreur ( $L/h$ ) sur la fréquence fondamentale $t$ non-dimensionnelle de la poutre S-S FG pour divers indices de matériaux.....	40

### LISTE DES NOTATIONS

$E$  : module de Young ;

$P$  : la densité de la masse ;

$\nu$  : le coefficient de Poisson ;

$\mathcal{G}_c$  : Proportions de volume ;

$\mathcal{G}_m$  : Proportions de volume en métal ;

$u_0$  : Déplacement axial ;

$w_b$  : Déplacement transversal due à la flexion ;

$w_s$  : Déplacement transversal due au cisaillement ;

$w_{st}$  : Déplacement d'étirement de l'épaisseur ;

$u_0, w_b, w_s$  Et  $\phi$  sont quatre inconnus à déterminer ;

$f(z)$  Et  $g(z)$  sont les fonctions de forme ;

$A, B, D, B_s, D_s, H_s, X, Y, Y_s, Z, A_s$  : la rigidité de la poutre FG exprimé ;

$(I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2, K_0, K_2)$  : Les inerties massiques ;

$\omega_n$  : La fréquence propre associée au nth mode propre ;

$\lambda = n\pi/L$ , et  $U_n, W_{bn}, W_{sn}$  et  $\phi_n$  : le coefficient inconnu ;

$E(z), E_c, E_m$  : les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal ;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  : les déformations de cisaillement ;

$\epsilon_x, \epsilon_y$  : les déformations normales ;

$\sigma_x, \sigma_y$  : les contraintes normales ;

$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  : les contraintes de cisaillement ;

## Liste des Notations

---

$\bar{Q}_{ij}$  : sont les constantes de rigidités ;

$\delta U$  : La variation de l'énergie de déformation ;

$\delta V$  : la variation de l'énergie potentielle ;

$\delta K$  : la variation de l'énergie cinétique ;

$\partial$  Dérivée partielle ;

$i$  et  $j$  Sont des nombres naturels ;

$\{\Delta\}$  Le vecteur des déplacements généralisés ;

$\{p\}$  Le vecteur des efforts généralisés

$\bar{U}$  : Déplacement axial

$\bar{W}$  : Déplacement transversal

$\bar{\sigma}_x$  : contrainte axiale

$\bar{\sigma}_{xz}$  : contrainte tangentielle

$\bar{\omega}$  : vibration

# INTRODUCTION GENERALE

Les matières classifiées fonctionnellement (FGM) sont de nouveaux types de composites obtenus en mélangeant des constituants céramiques et métalliques [1–4]. Les propriétés du matériau varient continuellement selon l'épaisseur de la poutre en fonction du rapport de mélange. Cela évite la concentration de contraintes observée dans les composites laminés. Les FGM sont réservés à des usages spécifiques, par exemple, les revêtements de barrières thermiques pour les lames de turbine, les boucliers pour les applications militaires, les industries automobile, spatiale et aérospatiale, les matériaux biomédicaux. Au cours des dernières décennies, des études sur les poutres de matériau fonctionnellement classé (FGM) [5–10], les plaques [11–19] et les coquilles [20–22] ont reçu une attention substantielle, et un large éventail de théories de la poutre et de la plaque a été introduit, basé sur les théories classiques et la déformation du cisaillement des façades et des plaques. Les FGM sont actuellement très demandés par les industries, nécessitant des modèles très spécifiques pour analyser leur comportement et prévoir leurs réponses. De nombreux chercheurs s'intéressent aux différentes analyses de structures génétiquement modifiées en raison de leurs vastes domaines d'application. Les deux principaux modèles de poutre, le modèle Euler-Bernoulli (CBT) pour les poutres fines et le modèle Timoshenko (SDT) pour ceux épaisses, ont été introduits. Le modèle CBT ignore l'effet de déformation de cisaillement transversale. Il a été modifié pour tenir compte de la déformation de cisaillement, ce qui a entraîné le modèle SDT. Néanmoins, ce deuxième modèle nécessite une correction de cisaillement pour satisfaire les conditions limites des façades des barres supérieures et inférieures, ce qui influence les résultats. Le SDT d'ordre élevé vise à éliminer la défaillance du CBT et du SDT de premier ordre en supposant une variation de rang supérieur grâce à l'épaisseur de la poutre FG pour le déplacement transversal sans fournir de correction de cisaillement. Plusieurs modèles avec différentes formes de contraintes de cisaillement ont été proposés, par exemple, le modèle Reddy [23]. Thai et Vo [24] ont présenté plusieurs théories raffinées des poutres HSDT. Ils ont montré que ces modèles sont très efficaces dans les études statiques et dynamiques des poutres FG et laminés. Récemment, Ebrahimi et coll. [25] ont analysé la vibration thermomécanique de feux de GFG température-dépendants avec des porosités en

## Introduction Générale

---

utilisant un TDH. Aydogdu et al. [26] ont utilisé le modèle Euler-Bernoulli et les fonctions de cisaillement parabolique et exponentiel pour examiner les réponses à la vibration de flexion d'une poutre de FG simplement appuyé. Ben Oumrane et al. [7] ont utilisé différentes théories de poutres pour étudier le comportement statique d'une poutre de Timoshenko épaisses. Une solution numérique pour (TBT) et (HSDT) est présentée par Simsek [27] en utilisant la méthode Ritz. La méthode des éléments finis et la méthode HSDT sont utilisées par Rakesh et al. [28] pour analyser les réponses à la vibration en flexion des poutres épaisses de FG. Zhong et Yu [29] fournissent une solution analytique pour la poutre en porte-à-faux épaisse pour différents types de charges mécaniques. Sur la base du concept de surface neutre, Ould Larbi et al. [30,31] ont présenté une théorie efficace pour étudier la vibration libre de flexion des poutres FG épaisses. De même, une nouvelle théorie de premier ordre de la TSD est développée par Bouremana et al. [32], basée sur la position de la surface neutre pour les poutres FG épaisses. L'impact d'étirement de l'épaisseur a été introduit pour la première fois dans l'analyse du comportement vibratoire des plaques FG épaisses [33]. Osofero et al. [34] ont fourni une méthode d'analyse de la courbure dans la flexion des poutres sandwiches FG, en tenant compte des effets d'étirement et de coupe. Meradjah et al. [35] ont également intégré les effets d'étirement de l'épaisseur dans une nouvelle théorie de contrainte de cisaillement pour analyser la vibration de flexion des poutres FG.

D'après la littérature mentionnée ci-dessus, il est évident qu'il n'y a pas d'ouvrage publié qui considère l'impact de l'étirement d'épaisseur sur la vibration mécanique des poutres de FG épaisses. Ce problème n'est pas bien étudié et d'autres études sont nécessaires. Dans ce travail, une théorie raffinée est présentée pour analyser la vibration de flexion de la poutre épaisse FG, avec des extrémités soutenues et sous charge transversale. Cette théorie fournit un déplacement transversal constant et une variation d'ordre supérieur du déplacement axial à travers la profondeur de la poutre de sorte qu'il n'y ait pas besoin de facteurs de correction de cisaillement. En superposant la déviation sur les parties de flexion, de cisaillement et d'étirement à l'épaisseur, les équations régissant sont dérivées du principe de Hamilton. Le système d'équations obtenu est résolu en utilisant les solutions de Navier. Les caractéristiques du matériau sont supposées changer à travers l'épaisseur de poutre suivant la loi de dosage. Des formulations mathématiques détaillées sont fournies, et des résultats d'exemple sont proposés pour montrer la pertinence de la théorie actuelle et pour vérifier cette exactitude. Notre approche présente l'avantage d'utiliser moins de variables par rapport à d'autres théories et elle prouve également les effets de l'épaisseur-étirement et les influences de nombreux paramètres tels que

## Introduction Générale

---

l'indice de matériau et le rapport de maigreur sur la réponse de fréquence et les contraintes. La théorie proposée de la déformation normale et de cisaillement d'ordre supérieur n'est pas seulement précise, mais offre également une approche élégante et facile à mettre en œuvre pour simuler les comportements de flexion et de vibration des poutres FG épaisses.

Ce travail est divisé sur quatre chapitres :

**Dans le premier chapitre :** On a donné une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs), leur évolution dans l'histoire, leurs domaines d'utilisation ainsi que l'application de les FGM dans le domaine de Travaux public.

**Le deuxième chapitre :** Dans ce chapitre, nous avons étudié un point de vue global sur les poutres et l'évolution des théories concernant ces dernières. Les lois de mélange des poutres ont été exposées, puis les théories des poutres ont été démontrées, telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDT) et les théories d'ordre élevé (HSDT). Toutes ces théories sont extrêmement intéressantes pour évaluer le cisaillement transversal.

**Le troisième chapitre :** Une théorie de déformation de cisaillement est exposée dans ce chapitre afin d'analyser les vibrations des poutres FGM. Pour dériver les équations de mouvement, cette théorie utilise le principe de Hamilton. La solution de ces équations est déterminée à partir de la solution de Navier et des conditions des limites de la poutre FGM utilisée.

**Le quatrième chapitre :** Il est dédié aux résultats et à la représentation des courbes des études comparatives effectuées, ainsi qu'aux commentaires sur ces résultats.



# **CHAPITRE I :**

## **Généralités sur les matériaux FGMs**

**1. Définition des Matériaux FGM :**

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont des matériaux composites qui présentent une variation continue de leur composition, de leur microstructure ou de leurs propriétés dans l'espace. Ils sont constitués de deux ou plusieurs ingrédients de matières, généralement un métal et une céramique, dont les fractions de volume relatif changent graduellement d'une phase à l'autre. Cette transition progressive permet d'obtenir des propriétés optimisées localement, comme la résistance mécanique, la tenue en température ou la résistance à la corrosion, en évitant les problèmes d'interface abrupte entre les matériaux discrets qui peuvent entraîner des fissures ou des déformations.[50]

**2. L'histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :**

L'histoire des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) débute au Japon au milieu des années 1980. Le concept est généralement attribué à un scientifique japonais qui, à l'époque, cherchait à développer un matériau innovant pour les applications spatiales. Ce matériau devait pouvoir résister aux températures extrêmes rencontrées lors de la rentrée atmosphérique.

L'idée novatrice était de créer un matériau dont les propriétés variaient progressivement d'un point à l'autre. Cela permettait de combiner les avantages de deux matériaux distincts au sein d'un composant unique. Par exemple, un FGM pourrait avoir un côté en céramique résistant à la chaleur pour supporter la rentrée atmosphérique, et se fondre progressivement en un métal plus ductile de l'autre côté pour résister aux contraintes structurelles.

Le concept de FGM a rapidement suscité l'intérêt de la communauté scientifique et le premier congrès international consacré à ces matériaux s'est tenu au Japon en 1991. Depuis lors, la recherche et le développement dans le domaine des FGM se sont poursuivis activement dans le monde entier.

Aujourd'hui, les FGM présentent un intérêt pour de nombreuses applications, notamment les implants médicaux, les turbines à gaz, les outils de coupe et les réacteurs nucléaires. La recherche se poursuit pour améliorer les techniques de fabrication et identifier de nouvelles applications exploitant les propriétés uniques des FGM.

Le domaine des FGM est toujours en développement, avec de nouvelles découvertes et innovations régulières. Les scientifiques explorent également la création de matériaux multifonctionnels avec des gradients de plusieurs propriétés.[50]

## 2.1 Points clés de l'histoire des FGM :

Années 1980 : Origine du concept au Japon pour les applications spatiales.

1991 : Premier congrès international sur les FGM.

Années 1990 et suivantes : Développement accru des techniques de fabrication et exploration d'applications.

Aujourd'hui : Applications variées et domaine en constante évolution.

## 2.2 L'avenir des FGM :

Les FGM offrent un potentiel considérable pour de nombreuses applications et le domaine est en pleine expansion. Les progrès de la recherche et de la technologie permettront de créer des FGM encore plus performants et d'étendre leur utilisation dans de nouveaux domaines.

## 3. Application des matériaux FGM :

### 3.1 Aérospatiale :

#### 3.1.1 Turbines à gaz :

Les FGM sont utilisés dans les aubes de turbine pour résister aux températures extrêmes et aux contraintes mécaniques élevées rencontrées dans les moteurs d'avion. La variation de composition permet d'avoir une partie céramique résistante à la chaleur à l'extrémité chaude et une partie métallique plus ductile à la base pour supporter les charges.

#### 3.1.2 Tuyaux d'échappement :

Les FGM peuvent être utilisés dans les tuyaux d'échappement pour réduire le poids et améliorer la résistance à la corrosion et aux températures élevées.

#### 3.1.3 Boucliers thermiques :

Les FGM peuvent être utilisés dans les boucliers thermiques des véhicules spatiaux pour les protéger de la chaleur intense lors de la rentrée atmosphérique.

### 3.2 Automobile :

#### 3.2.1 Pistons :

Les FGM peuvent être utilisés dans les pistons pour réduire le poids, améliorer la résistance à l'usure et à la chaleur.

### **3.2.2 Freins :**

Les FGM peuvent être utilisés dans les disques de frein pour améliorer la performance de freinage et la résistance à la chaleur.

### **3.2.3 Systèmes d'échappement :**

Similaire à l'aérospatiale, les FGM peuvent alléger les systèmes d'échappement automobiles tout en améliorant leur résistance.

## **3.3 Biomédical :**

### **3.3.1 Prothèses de hanche et de genou :**

Les FGM peuvent être utilisés dans les prothèses pour mieux imiter les propriétés mécaniques des os naturels, améliorant la longévité et la mobilité.

### **3.3.2 Implants dentaires :**

Les FGM peuvent être utilisés dans les implants dentaires pour offrir une meilleure osseointégration et une meilleure résistance à la charge.

### **Autres domaines potentiels :**

- **Électronique :** Les FGM peuvent être utilisés pour créer des circuits électroniques avec des propriétés graduelles, permettant d'obtenir de nouvelles fonctionnalités et d'améliorer les performances.
- **Energie :** Les FGM peuvent être utilisés dans les systèmes de production d'énergie, comme les piles à combustible et les réacteurs nucléaires, pour améliorer l'efficacité et la sécurité.[51]

## **4. Applications des FGM dans le domaine des Travaux Publics :**

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) présentent un grand potentiel pour révolutionner le domaine des travaux publics grâce à leurs propriétés uniques. Ils peuvent offrir des solutions innovantes pour améliorer la durabilité, la performance et la sécurité des infrastructures.

### **4.1 Revêtements de ponts et de routes :**

Les FGM peuvent être utilisés comme revêtements pour les ponts et les routes, offrant une meilleure résistance à l'usure, à la corrosion et aux produits chimiques.

Cela peut prolonger la durée de vie des infrastructures et réduire les coûts de maintenance.

De plus, les FGM peuvent être conçus pour réduire le bruit de la circulation et améliorer la sécurité des piétons.

### **4.2 Réparation des structures en béton :**

Les FGM peuvent être utilisés pour réparer les structures en béton endommagées, comme les ponts, les bâtiments et les barrages.

Ils peuvent s'adapter à la forme de la structure existante et fournir une meilleure résistance à la compression et à la traction.

Cela permet de prolonger la durée de vie des structures et d'éviter des reconstructions coûteuses.

### **4.3 Tuyaux et canalisations :**

Les FGM peuvent être utilisés pour fabriquer des tuyaux et des canalisations plus résistants à la corrosion et à l'abrasion.

Cela peut réduire les fuites et les dommages, et améliorer la qualité de l'eau potable.

De plus, les FGM peuvent être utilisés pour créer des canalisations intelligentes qui peuvent détecter les fuites et autres problèmes en temps réel.

### **4.4 Dignes et murs de soutènement :**

Les FGM peuvent être utilisés pour construire des digues et des murs de soutènement plus résistants aux vagues et aux intempéries.

Cela peut protéger les côtes et les infrastructures contre l'érosion et les inondations.

De plus, les FGM peuvent être conçus pour absorber l'énergie des vagues et réduire l'impact sur l'environnement.

### **4.5 Tunnels et infrastructures souterraines :**

Les FGM peuvent être utilisés pour construire des tunnels et des infrastructures souterraines plus résistants aux charges et aux vibrations.

Cela peut réduire les risques d'effondrement et améliorer la sécurité des personnes.

De plus, les FGM peuvent être utilisés pour créer des tunnels intelligents qui peuvent surveiller leur propre état et s'adapter aux changements de conditions.

### **4.6 Avantages des FGM pour les travaux publics :**

#### **4.6.1 Durabilité accrue :**

Les FGM peuvent prolonger la durée de vie des infrastructures et réduire les coûts de maintenance.

#### **4.6.2 Performance améliorée :**

Les FGM peuvent offrir une meilleure résistance à l'usure, à la corrosion, aux produits chimiques et aux intempéries.

#### **4.6.3 Sécurité accrue :**

Les FGM peuvent améliorer la sécurité des infrastructures et des personnes.

#### **4.6.4 Innovation :**

Les FGM permettent de créer des solutions innovantes pour les défis du génie civil.

### **4.7 Défis et perspectives :**

Le développement et l'utilisation des FGM dans le domaine des travaux publics font face à certains défis, tels que le coût élevé de production et le manque de normes et de réglementations. Cependant, les progrès de la recherche et de la technologie font baisser les coûts et les efforts sont en cours pour développer des normes et des réglementations pour l'utilisation des FGM dans les infrastructures.

## **5. Conclusion :**

Ce chapitre a abordé les matériaux à gradient de propriétés appelés « FGM », leur évolution, leurs caractéristiques réelles, leurs domaines d'utilisation et l'application des FGM dans le secteur des travaux publics.

# **Chapitre 2 :**

## **Analyse vibratoire des poutres et théories**

### **1. Définition des poutres :**

Une poutre est un élément structural essentiel dans le domaine de la construction et du génie civil. Elle est définie comme un support horizontal allongé, fabriqué en bois, en métal ou en béton armé, conçu pour résister à la flexion sous des charges. Les poutres sont utilisées pour supporter des poids sur de longues portées sans nécessiter de support intermédiaire, ce qui les rend cruciales pour la stabilité des structures telles que les bâtiments, les ponts et les toits. En architecture, les poutres peuvent également avoir une fonction esthétique, en plus de leur rôle structurel, en ajoutant du caractère et de la beauté aux espaces intérieurs et extérieurs. Dans l'ingénierie aéronautique, une poutre peut désigner une partie de la structure d'un avion qui relie les empennages aux ailes ou au fuselage. [52]

### **2. Analyse vibratoire des poutres :**

L'analyse vibratoire des poutres est une branche importante de la mécanique des structures qui se concentre sur l'étude des vibrations des poutres. Cette analyse est cruciale pour garantir la sécurité et la durabilité des structures, car les vibrations excessives peuvent entraîner des défaillances ou des dommages. Les poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont particulièrement intéressantes en raison de leur capacité à avoir des propriétés qui varient de manière continue à travers leur épaisseur, ce qui peut être optimisé pour améliorer la performance vibratoire. En utilisant la théorie d'Euler-Bernoulli, les ingénieurs peuvent modéliser le comportement vibratoire des poutres FGM en appliquant le principe des travaux virtuels pour obtenir les équations de mouvement. Les fréquences fondamentales, qui sont essentielles pour comprendre la réponse dynamique de la structure, sont calculées en résolvant ces équations. Des études numériques peuvent ensuite être menées pour examiner l'influence de la distribution des matériaux sur les fréquences fondamentales, en tenant compte de différentes conditions aux limites. Ces analyses permettent de prédire comment la structure réagira à diverses excitations et charges, et sont donc indispensables dans la conception et l'évaluation des structures modernes.[53]

### **3. Flexion des poutres :**



La flexion des poutres est un concept fondamental dans le domaine de la résistance des matériaux, particulièrement en génie civil et mécanique. Elle décrit la déformation subie par une poutre lorsqu'elle est soumise à des forces extérieures, telles que des charges ou des poids. Cette déformation est généralement une courbure qui résulte de l'application de ces forces. La théorie des poutres, qui comprend les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, permet de prédire le comportement des poutres sous diverses charges. Le modèle d'Euler-Bernoulli, par exemple, néglige l'influence du cisaillement et est donc plus adapté aux poutres longues et minces où cet effet est moins significatif. En revanche, la théorie de Timoshenko prend en compte l'effet du cisaillement, ce qui la rend plus précise pour les poutres courtes et épaisses où le cisaillement ne peut être ignoré.

La flexion peut être analysée à travers des essais mécaniques tels que les tests de flexion trois-points ou quatre-points, qui évaluent la résistance d'un matériau à la flexion. Ces tests sont cruciaux pour garantir la sécurité et la fiabilité des structures en poutres. En chaudronnerie, par exemple, le pliage d'une tôle est une forme de flexion où l'on cherche à dépasser la limite élastique du matériau pour obtenir une déformation plastique permanente. Cependant, dans la plupart des autres applications, l'objectif est d'éviter de dépasser cette limite élastique afin de préserver l'intégrité structurelle de la poutre.

L'étude de la flexion des poutres implique également la compréhension de la fibre neutre, qui est la ligne imaginaire au sein de la poutre où la longueur reste constante pendant la flexion. Les fibres situées au-dessus de cette ligne sont étirées (traction), tandis que celles en dessous sont comprimées. La connaissance précise de la position de la fibre neutre est essentielle pour calculer les contraintes et les déformations subies par la poutre.

En résumé, la flexion des poutres est un phénomène complexe qui nécessite une compréhension approfondie des propriétés des matériaux et des principes de la mécanique. Les ingénieurs utilisent ces connaissances pour concevoir des structures capables de résister aux forces auxquelles elles seront soumises tout au long de leur vie utile, assurant ainsi la sécurité et la durabilité des constructions. La flexion des poutres reste un domaine d'étude et d'innovation important, avec des recherches continues pour développer de nouveaux matériaux et méthodes de conception pour répondre aux défis de l'ingénierie moderne.[54]

#### **4. La vibration de flexion :**

La vibration des flexions est un phénomène physique qui se produit lorsque des forces dynamiques sont appliquées à un objet élastique, comme une poutre ou une plaque, ce qui

entraîne des oscillations autour de sa position d'équilibre. Ces vibrations sont cruciales dans de nombreux domaines de l'ingénierie et de la physique, car elles peuvent affecter la durabilité et la stabilité des structures. Par exemple, dans le domaine de la construction, comprendre les vibrations de flexion peut aider à concevoir des bâtiments et des ponts qui résistent mieux aux tremblements de terre et aux vents forts. En aéronautique, les vibrations de flexion sont prises en compte pour assurer la sécurité et le confort des passagers et de l'équipage. Les ingénieurs utilisent des équations complexes, comme l'équation des poutres, pour prédire le comportement vibratoire des structures et concevoir des solutions pour minimiser les effets indésirables. Les conditions aux limites, telles que les extrémités encastées ou libres, jouent un rôle essentiel dans la détermination des fréquences naturelles et des modes de vibration d'une structure. Des techniques comme la méthode de Rayleigh ou la méthode de Ritz sont souvent employées pour approximer les réponses vibratoires. De plus, l'amortissement est un aspect important de l'étude des vibrations, car il contribue à réduire l'amplitude des oscillations au fil du temps. La réponse forcée, qui se produit lorsque des vibrations externes sont appliquées à une structure, est également un sujet d'étude important pour comprendre comment les structures réagissent à des charges dynamiques continues.[55]

### **5. Les lois de mélange des poutres :**

Les lois de mélange des poutres sont des principes fondamentaux en résistance des matériaux et en mécanique des structures, qui permettent de comprendre et de prédire le comportement des poutres composées de plusieurs matériaux différents. Ces lois prennent en compte les propriétés mécaniques de chaque matériau constitutif ainsi que leur distribution au sein de la poutre pour déterminer les caractéristiques globales de la structure. Par exemple, dans le cas des matériaux fonctionnellement gradués (FGM), les propriétés varient de manière continue le long de la poutre, ce qui nécessite l'utilisation de théories avancées pour modéliser leur comportement sous diverses sollicitations. Les équations différentielles obtenues à partir de ces théories permettent de calculer les déformations, les contraintes et les fréquences de vibration des poutres en FGM, en tenant compte des gradients de propriétés. Ces modèles sont essentiels pour la conception de structures dans des domaines tels que l'aérospatial, la médecine ou la défense, où les matériaux doivent répondre à des exigences spécifiques en termes de performance et de fiabilité. En outre, les lois de mélange jouent un rôle crucial dans le dimensionnement des poutres, en permettant aux ingénieurs de sélectionner les matériaux appropriés et de calculer les dimensions nécessaires pour que la structure résiste aux charges appliquées tout en minimisant le poids et le coût. Les lois de mélange des poutres illustrent

l'importance de la mécanique des matériaux dans l'ingénierie moderne et soulignent la nécessité d'une compréhension approfondie des propriétés des matériaux pour le développement de technologies innovantes.[56]

### 5.1 La loi exceptionnelle E-FGM :

De nombreux chercheurs font appel à la fonction exponentielle afin de décrire les caractéristiques matérielles des matériaux FGM. La fonction exponentielle est répertoriée par [Delale 1983] :

$$E(z) = A \times e^{B(z+h/2)}$$

Avec :  $A = E_2$  et  $B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

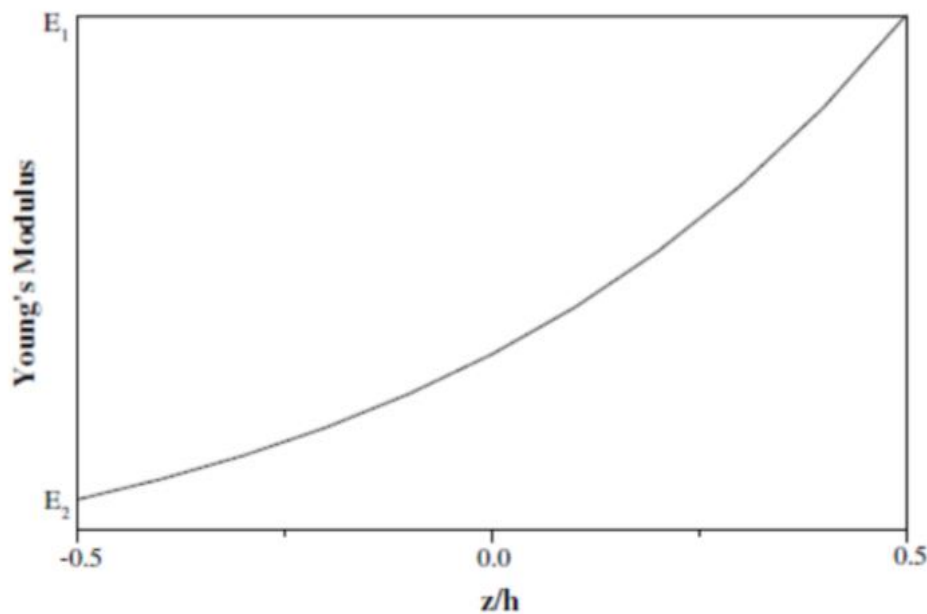


Figure 1: Variation du module de Young de la poutre E-FGM

### 5.2 La loi de puissance P-FGM :

La fraction volumique des P-FGM est assurée par une loi de puissance qui se présente sous la forme suivante :

$$f(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^P$$

Où N est un paramètre du matériau qui représente l'ordre du polynôme.

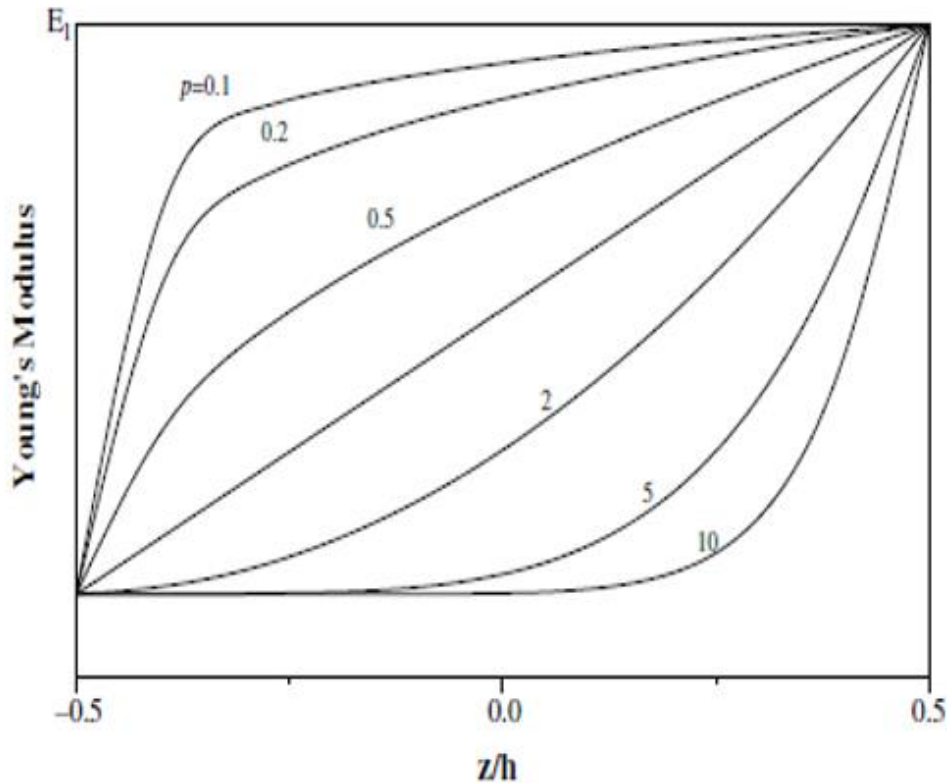


Figure 2:Variation du module de Young dans une plaque P-FGM

### 5.3 La fonction sigmoïde S-FGM :

Afin de limiter la fluctuation rapide de la matière près de la surface supérieure et inférieure, on a établi la répartition des matériaux en utilisant deux fonctions en loi de puissance. On désigne cette distribution sous le nom de fonction sigmoïde. Ainsi, la proportion volumique du matériau est exprimée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h-2z}{h} \right)^k \\ f_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h+2z}{h} \right)^k \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{array} \right.$$

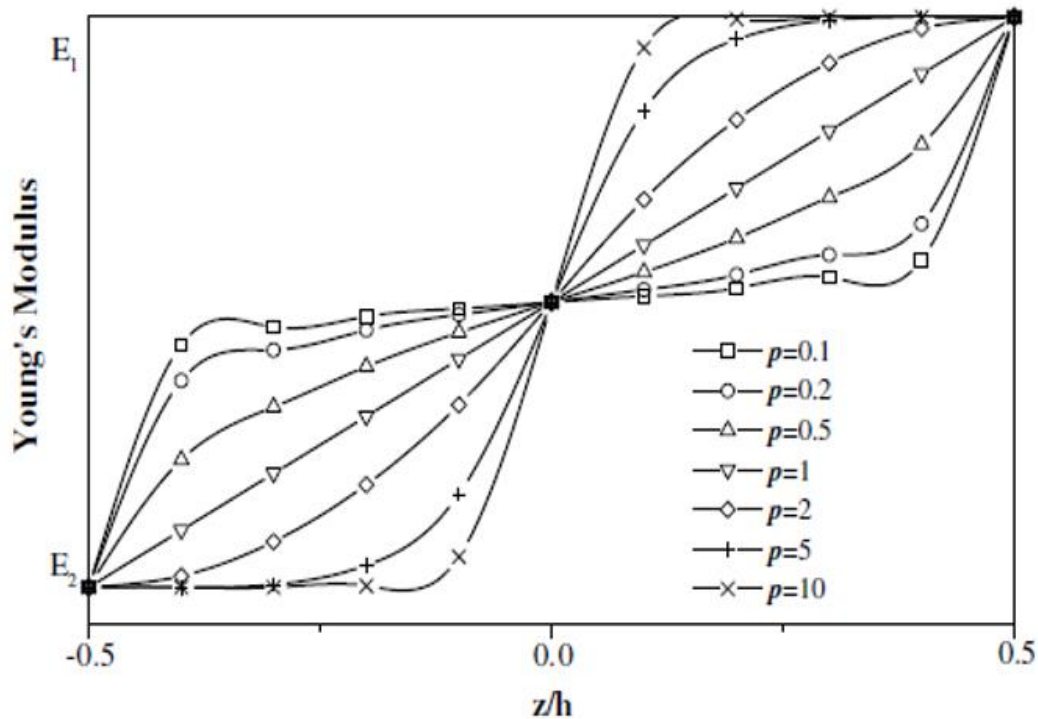


Figure 3: Variation du module de Young dans une poutre S-FGM

## 6. Les différentes théories des poutres :

### 6.1 La théorie Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) :

On sait que la théorie d'Euler-Bernoulli repose sur la théorie de flexion des poutres élémentaires qui ne prend pas en compte les effets de la déformation de cisaillement. On sait aussi qu'elle ne s'applique qu'aux poutres fines.

Dans cette méthode, la quantité d'équations n'est pas liée au nombre de couches car la poutre multicouche est homogénéisée, ce qui la considère comme une seule couche.

Selon cette théorie, on néglige les déformations causées par le cisaillement transversal (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

La fonction qui explique comment le déplacement se répartit en fonction de l'épaisseur de la poutre est :

$$\phi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

En ce qui concerne les poutres élancées et selon la théorie classique des poutres, le mouvement d'un point M est représenté par les deux éléments suivants :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

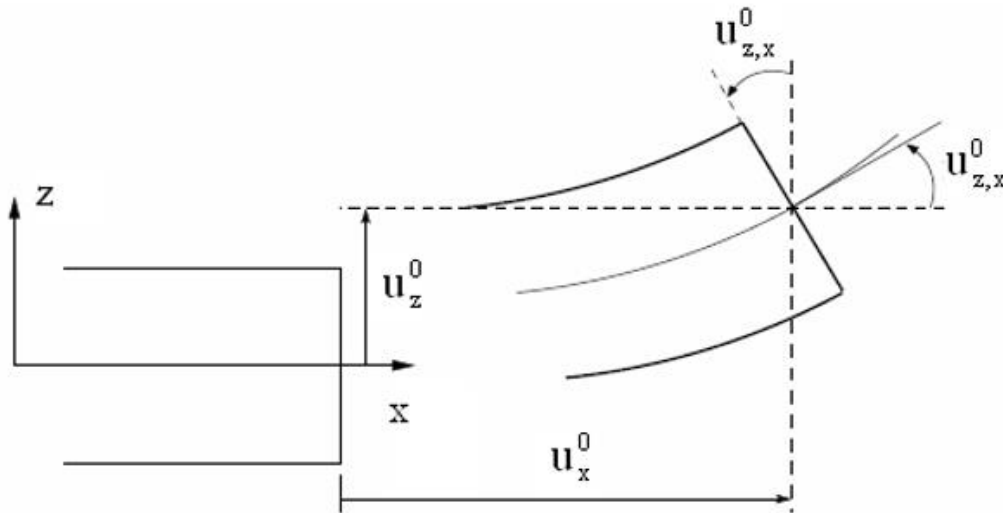


Figure 4: Cinématique d'Euler Bernoulli

### 6.2 La théorie de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDT) :

Au prix d'une fonction supplémentaire, la théorie de Timoshenko est plus approfondie et plus étendue que la théorie élémentaire des poutres. Grâce à cette solution, les solutions analytiques issues de la théorie classique peuvent être améliorées. Cependant, ces solutions sont sujettes à des erreurs dans les environs des appuis et de la zone de coupe, ce qui peut entraîner des concentrations de contrainte et des champs de déplacement inégal.

S'appliquant aux poutres courtes, elle repose sur le principe selon lequel, après une déformation, la section plane demeure plane mais perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre. C'est le résultat du cisaillement transversal, mis au jour par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. La théorie est similaire à la théorie de "Reissner-Mindlin" pour les plaques épaisses. Si nous avons un faible élancement, l'impact du cisaillement sur la déformée est plus significatif. Dans ce cas, la fonction  $\phi(z)$  est égale à  $Z$ . Le cisaillement est homogène et les déformations causées par le cisaillement transversal n'ont pas été ignorées. Il s'agit de la théorie de premier plan (FSDT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_x(x) + zy'_{xz} \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

$y'_{xz}(x)$  C'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :  $y'_{xz}(x) = w''_x(x) - \phi'(x)$

$\phi^0(x)$  Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

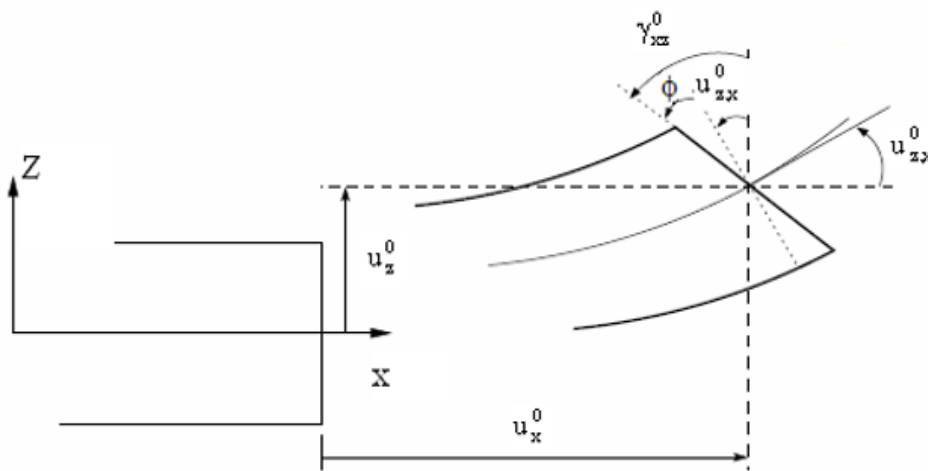


Figure 5: Cinématique de Timoshenko.

### 6.3 La Théorie d'Ordre Élevé (HSDT) :

La répartition des champs de déplacement dans cette théorie n'est pas linéaire en fonction de l'épaisseur de la poutre. Elle a une plus grande précision que la théorie du premier ordre, car elle ajoute une fonction qui prend en compte le phénomène de « gauchissement ». Ce phénomène se produit lorsque la section transversale de la poutre commence à se déformer.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_x(x) + \phi(z)y'_{xz}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases}$$

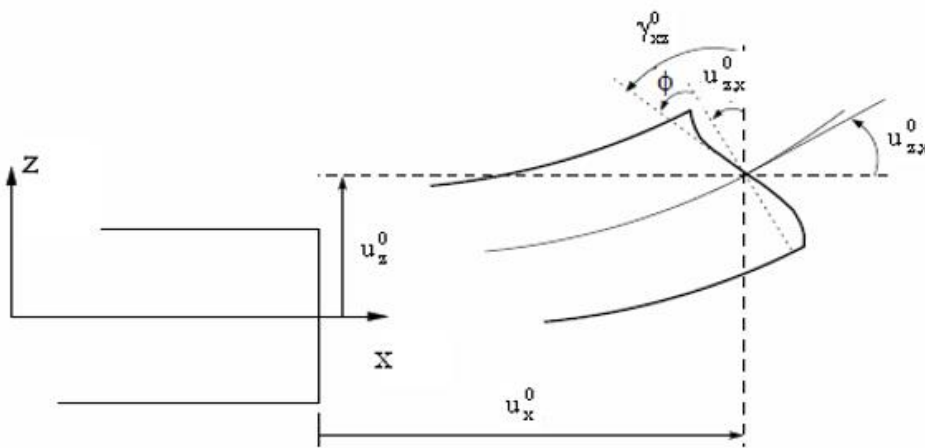
$$y_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \phi'(z) y_{xz}^0(x) + w_x^0(x)$$

$$y_{xz}(x) = \phi'(z) y_{xz}^0(x)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$\phi'(z) / z = \pm h / 2 = 0$$

Il est essentiel de respecter cette condition afin d'obtenir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre, d'une part, et de sélectionner correctement les fonctions cubiques qui répondent à cette condition.



**Figure 6:** Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

## 7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons examiné une vision générale des poutres ainsi que l'évolution des théories sur ces derniers. La présentation des lois de mélange des poutres a été suivie d'une démonstration des différentes théories des poutres, telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDT) et les théories d'ordre élevé (HSDT). Il est très intéressant de considérer toutes ces théories pour évaluer le cisaillement Transversal.



# **Chapitre 3 :**

## **Développement d'une nouvelle théorie**

## 1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode facile à mettre en place pour analyser le comportement vibratoire en flexion des poutres épaisses composées de matériaux fonctionnellement gradués FG. Ces calculs offrent des approximations de qualité de la solution exacte dans cette situation

## 2. Formulation théorique :

### 5.4 Définition du modèle :

Prenons une poutre rectangulaire en FGM de longueur  $L$ , section transversale rectangulaire, largeur ( $b$ ) et hauteur ( $h$ ).

Nous supposons que la poutre présente un comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles de la poutre FGM varient selon une distribution de puissance le long de son

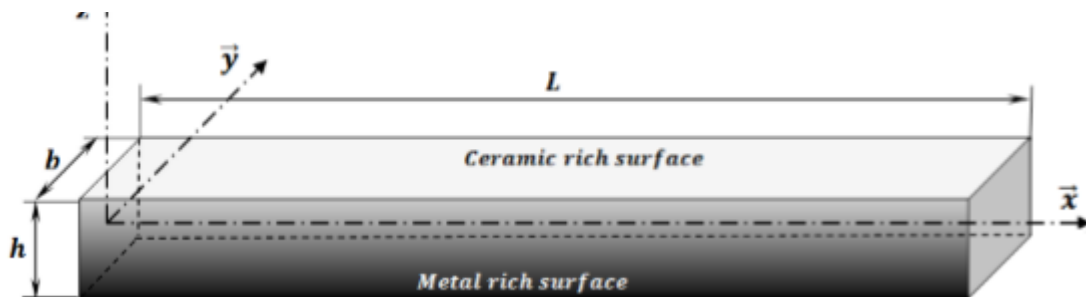


Figure 7: La géométrie de la poutre FG

épaisseur, comme suit :

La poutre FG est une structure composite composée d'une combinaison de métal et de céramique, avec une transition graduelle de la surface supérieure en céramique pure à la surface inférieure en métal pur. Les caractéristiques effectives de la poutre, représentées par les propriétés des matériaux  $P$ , varient à travers l'épaisseur de la poutre FG en ce qui concerne le rapport de volume et les propriétés des matériaux constitutifs. Cette variation est formulée selon la loi du mélange.

$$P = P_m \mathcal{G}_m + P_c \mathcal{G}_c, P = (E, \rho, \nu, \dots) \quad (1)$$

$E, \rho, \nu$  sont le module de Young, la densité de masse et le coefficient de Poisson, respectivement. La variation de  $\nu$  est généralement faible, de sorte qu'elle reste constante  $\mathcal{G}_c$  et  $\mathcal{G}_m$  sont des proportions de volume en céramique et en métal, respectivement, définies par [36]

$$\mathcal{G}_m + \mathcal{G}_c = 1, \mathcal{G}_c = \left(0,5 + \frac{z}{h}\right)^p, p \geq 0 \quad (2)$$

L'indice de gradient ( $p$ ), avec  $p \geq 0$  détermine le profil du matériau dans la direction de l'épaisseur de la poutre FG. Il peut être modifié pour obtenir la distribution optimale des matériaux de composants. La figure 8 montre la répartition de la proportion de volume de la céramique à travers l'épaisseur de la poutre FG pour divers indices de matériaux. Chaque caractéristique efficace de la poutre FG peut être exprimée comme suit :

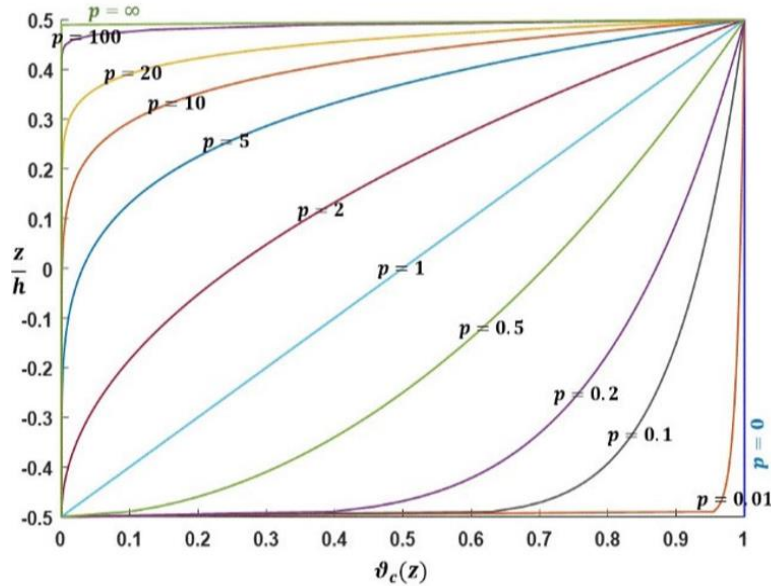


Figure 8: Profil de la proportion de volume en céramique à travers l'épaisseur de la poutre FG, pour différents matériaux

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(0,5 + \frac{z}{h}\right)^p + P_m, P = E, \rho \quad (3)$$

### 5.5 Champs de déplacement et de contrainte :

Les déplacements transversaux et axiaux de la poutre FG sont exprimés, selon la théorie quasi-3D [35,37] comme suit :

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right) - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) + w_{st}(x) \end{cases} \quad (4)$$

Avec

$$w_{st}(x) = g(z)\phi(x), g(z) = 1 - f'(z) \quad (5)$$

$u_0$  : Déplacement axial ;

$w_b$  : Déplacement transversal due à la flexion ;

$w_s$  : Déplacement transversal due au cisaillement ;

$w_{st}$  : Déplacement d'étirement de l'épaisseur ;

$u_0, w_b, w_s$  Et  $\phi$  sont quatre inconnus à déterminer ;

$f(z)$  Et  $g(z)$  sont les fonctions de forme.

### 5.6 Le champ de déformations :

Sont les suivantes

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = g'(z)\phi(x) \\ \gamma_{xz} = g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Le matériau de la poutre FG suit la loi de Hooke. Ainsi, l'équation élastique linéaire peut être exprimée comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = E(z) \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$= E(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{dg(z)}{dz} \phi \\ \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} - \nu z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \nu f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{dg(z)}{dz} \phi \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

### 5.7 Les équations gouvernantes :

Pour obtenir l'équation régissant de la poutre, le principe de Hamilton est appliqué comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (8)$$

**L'énergie de déformation** : la variation de l'énergie de déformation de la poutre est exprimée par :

$$\begin{cases} \delta U = \int_0^L \int_0^b \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_z \delta \varepsilon_z) dz \right] dy dx \\ \delta U = \int_0^L (N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} - M_x^b \delta \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - M_x^s \delta \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \int_0^L Q_{xz} \delta (\frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \int_0^L N_z \delta \phi(x)) dx \end{cases} \quad (9)$$

Ou,  $N_x, M_x^b, M_x^s, Q_{xz}$  et  $N_z$  sont les résultants de contraintes spécifiés comme :

$$\begin{cases} (N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, z, f(z)] \sigma_x b dz \\ Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} g(z) b dz \\ N_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \frac{dg}{dz} b dz \end{cases} \quad (10)$$

En utilisant l'équation (7), les résultants de stress donnés en équation (10) peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{cases} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ Q_{xz} \\ N_z \end{cases} = \begin{bmatrix} A & B & B_s & X & 0 \\ B & D & D_s & Y & 0 \\ B_s & D_s & H_s & Y_s & 0 \\ X & Y & Y_s & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (11)$$

(A, B, D,  $B_s, D_s, H_s, X, Y, Y_s, Z, A_s$ ) sont la rigidité de la poutre FG exprimée, et sont données par l'Appendice A.

- **Energie potentielle** : due à la charge transversale externe appliquée :

$$\delta v = -\int_0^L q(x) \delta w dx = -\int_0^L q(x) \delta [w_b + w_s + w_{st}] dx \quad (12)$$

$q(x)$  : Charge transversale externe.

- **Énergie cinétique** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta k = \int_0^L \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{w}\delta\dot{w})dz] dx dz \\ \delta k = \int_0^L \left( I_0 [\dot{u}_0 \delta\dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s)] + J_0 [(\dot{w}_b + \dot{w}_s)\delta\dot{\phi} + \dot{\phi}\delta(\dot{w}_b + \dot{w}_s)] \right) dx \\ - \int_0^L \left( I_1 \left[ \dot{u}_0 \frac{\partial \delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta\dot{u}_0 \right] + I_2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{w}_b}{\partial x} + J_1 \left[ \dot{u}_0 \frac{\partial \delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta\dot{u}_0 \right] \right) dx \\ - \int_0^L \left( K_2 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{w}_s}{\partial x} - J_2 \left[ \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta\dot{w}_b}{\partial x} \right] + K_0 \dot{\phi}\delta\dot{\phi} \right) dx \end{array} \right. \quad (13)$$

Où  $(I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2, K_0, K_2)$  sont les inerties massiques, définies respectivement par : En remplaçant les expressions pour  $\delta U, \delta V$  et  $\delta K$  des équations (9), (12) et (13) en équation (14), on obtient le système suivant en intégrant les parties et en réunissant les coefficients de  $\delta u_0; \delta w_b, \delta w_s$  et  $\delta \phi$  :

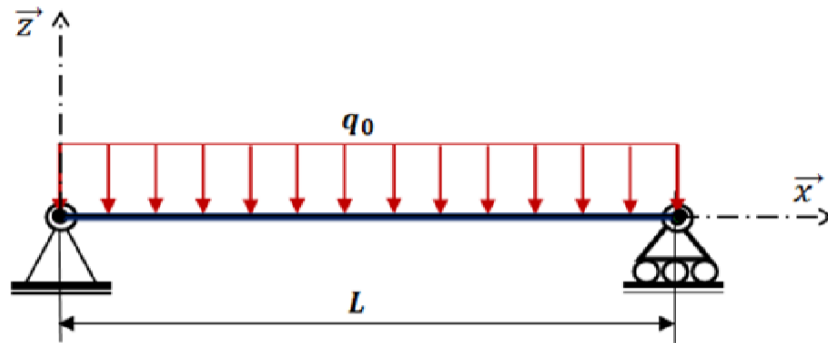
$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + J_0 \ddot{\phi} \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_{xz}}{\partial x} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + J_0 \ddot{\phi} \\ \delta \phi : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - N_z = J_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_0 \ddot{\phi} \end{array} \right. \quad (14)$$

L'équation (14) peut être exprimée en termes de déplacement de  $u_0, w_b, w_s$  et  $\phi$  en utilisant les équations (10) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u_0 : A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + X \frac{\partial \phi}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta w_b : B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + Y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + q = I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + J_0 \ddot{\phi} \\ \delta w_s : B_s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + (A_s + Y_s) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + q = J_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + J_0 \ddot{\phi} \\ \delta \phi : X \frac{\partial u_0}{\partial x} - Y \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + (A_s + Y_s) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - A_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Z \phi = J_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_0 \ddot{\phi} \end{array} \right. \quad (15)$$

### 5.8 La solution analytique pour une poutre FGM simplement appuyée : (poutre S-S FG) :

Dans la présente section, la solution analytique est donnée pour le cas d'une poutre fonctionnellement gradué simplement appuyée présentée à la figure 3 (poutre S-S FG) sous la charge uniforme répartie sur toute sa longueur.



**Figure 9:** poutre fonctionnellement classifié (poutre S-S FG) facilement pris en charge sous une charge uniforme.

Des solutions analytiques des équations de mouvement sont fournies, basées sur des solutions de type Navier. Les déplacements suivants  $u_0$ ,  $w_b$ ,  $w_s$  et  $\phi$  sont supposés être des combinaisons de fonctions trigonométriques connues qui satisfont aux conditions limites et aux coefficients inconnus à déterminer pour chaque valeur de « n ».

$$\begin{bmatrix} u_0(x,t) \\ w_b(x,t) \\ w_s(x,t) \\ \phi(x,t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_n \cos(\lambda x) e^{i\omega_n t} \\ W_{bn} \sin(\lambda x) e^{i\omega_n t} \\ W_{sn} \sin(\lambda x) e^{i\omega_n t} \\ \phi_n \sin(\lambda x) e^{i\omega_n t} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\omega_n$  Est la fréquence propre associée au nth mode propre,  $\lambda = n\pi/L$ , et  $U_n$ ,  $W_{bn}$ ,  $W_{sn}$  et  $\phi_n$  sont le coefficient inconnu.

Les conditions limites suivantes sont imposées pour une poutre avec deux extrémités simplement soutenues.

$$U = W = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (17)$$

La charge mécanique transversale assumée  $q(x)$  est développée dans une série Fourier sinusoïdale comme :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\lambda x) \quad (18)$$

Les coefficients  $Q_n$  sont fournis ci-dessous pour certaines charges.

- Cas de distribution sinusoïdale :

$$n = 1 \Rightarrow Q_1 = q_0 \quad (19)$$

- Cas de distribution uniforme :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, (n = 1, 3, 5) \quad (20)$$

Ainsi, des solutions analytiques peuvent être obtenues à partir du système de valeurs propres ci-dessous pour toute valeur fixe de « n » :

$$([K] - \omega_n^2 [M])\{\Delta\} = \{F\} \quad (21)$$

Dans le cas du problème statique, l'équation (24) devient :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (22)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\lambda^2 & -B\lambda^3 & -B_s\lambda^3 & -X\lambda \\ -B\lambda^3 & D_{11}\lambda^4 & D_{11}^s\lambda^4 & y\lambda^4 \\ -B_s\lambda^3 & D_{11}^s\lambda^4 & H\lambda^4 + A_s\lambda^2 & (A_s + y_s)\lambda^2 \\ -X\lambda & y\lambda^2 & (A_s + y_s)\lambda^2 & Z + A_s\lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & -I_1\lambda & -J_1\lambda & 0 \\ -I_1\lambda & I_0 + I_2\lambda^2 & I_0 + J_2\lambda^2 & J_0 \\ -J_1\lambda & I_0 + J_2\lambda^2 & I_0 + K_2\lambda^2 & J_0 \\ 0 & J_0 & J_0 & K_0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \\ \phi_n \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \\ 0 \end{Bmatrix}$$



**3. Conclusion :**

Dans ce chapitre, Une théorie de déformation de cisaillement est présentée pour l'analyse des vibrations des poutres FGM. Cette théorie besoin le principe de Hamilton pour dériver les équations de mouvement, la solution de ces équations est déterminée par la solution de Navier et aux conditions des limites de la poutre FGM utilisé.

# **CHAPITRE 4 :**

## **Résultats et discussions**

## 1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse vibratoire de flexion des poutres en matériaux à gradient évalué FGM. Le modèle ainsi choisit est basé sur le modèle hyperbolique de déformation en cisaillement à quatre variables.

## 2. Résultats numériques et discussion :

Dans cette partie, une charge transversale uniforme est appliquée sur la poutre S-S FG. Des exemples numériques sont proposés en premier lieu pour valider le modèle présenté ci-dessus et évaluer sa précision. Le matériau de la poutre FG est composé de  $Al_2O_3$  (alumina) et Al (aluminium). Les caractéristiques matérielles des composants correspondants sont indiquées dans le tableau 1.

**Tableau 1:** Caractéristiques du matériau et Al [38].

Composants	$\nu$	E(GPa)	$\rho(Kg/m^3)$
Ceramic (alumina $Al_2O_3$ )	0.3	380	3960
Metal	0.3	70	2702

La forme sans dimension est utilisée comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= 100 \left( \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} \right) U \left( 0, -\frac{h}{2} \right); \bar{W} = 100 \left( \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} \right) W \left( \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right), \bar{\sigma}_x = \left( \frac{h}{q_0 L} \right) \sigma_x \left( \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right); \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \left( \frac{h}{q_0 L} \right) \sigma_{xz} (0, 0); \bar{\sigma}_z = \left( \frac{h}{q_0 L} \right) \sigma_z \left( \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right); \bar{\omega} = (\omega L^2 / h) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \end{aligned} \quad (24)$$

Un exemple numérique indiqué dans le tableau 2 est effectué pour différents indices de matériaux (p) et pour le rapport (L/h) pour valider le présent modèle. Les résultats obtenus par cette théorie concernant les déplacements et les contraintes pour (L/h = 5, 20) sont comparés à ceux de la solution analytique fournie par Li et al. [39]. On utilise la fonction de forme suivante basée sur la théorie de la poutre de Reddy :

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \quad (25)$$

**Tableau 2:** Comparaison des déplacements transversaux et axiaux non-dimensionnels, des contraintes axiales et de cisaillement de la poutre S-S FG pour divers indices de matériaux et le rapport (L/h).

p	Théorie	L/h =5				L/h =20			
		$\bar{W}$	$\bar{U}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{W}$	$\bar{U}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$
0	Li et al. [39]	3.1657	0.9402	3.8020	0.7500	2.8962	0.2306	15.0130	0.7500
	CBT	2.8783	0.9211	3.7500	-	2.8783	0.2303	15.000	-
	<b>Présent</b>	3.1681	0.9406	3.7919	0.7503	3.8962	0.2306	15.0129	0.7429
0.5	Li et al. [39]	4.8292	1.6603	4.9925	0.7676	4.4645	0.4087	19.7005	0.7676
	CBT	4.4401	1.6331	4.9206	-	4.4401	0.4083	19.6825	-
	<b>Présent</b>	4.8202	1.6653	4.9893	0.7674	4.4644	0.4087	19.7003	0.7599
1	Li et al. [39]	6.2599	2.3045	5.8837	0.7500	5.8049	0.5686	23.2054	0.7500
	CBT	5.7746	2.2722	5.7959	-	5.7746	0.5680	23.1834	-
	<b>Présent</b>	6.2475	2.2903	5.8797	0.7503	5.8049	0.5685	23.2052	0.7429
5	Li et al. [39]	9.7802	3.7089	8.1030	0.5790	8.8151	0.9133	31.8112	0.5790
	CBT	8.7508	3.6496	8.1329	-	8.7508	0.9124	31.7711	-
	<b>Présent</b>	9.7787	3.6955	8.1099	0.5867	8.8181	0.9134	31.8127	0.5998
10	Li et al. [39]	10.8979	3.8860	9.7063	0.6436	9.6879	0.9536	38.1372	0.6436
	CBT	9.6072	3.8097	9.5228	-	9.6072	0.9524	38.0913	-
	<b>Présent</b>	10.8847	3.8780	9.7086	0.6645	9.6905	0.9536	38.1383	0.6572

### 2.1 Analyse statique :

Le tableau 2 révèle que la théorie actuelle est avec bon accord par rapport aux résultats obtenus par Li et al. [39] et confirme ainsi la validation de la méthode proposée. On peut également constater que le modèle CBT, qui omet les effets de la déformation de cisaillement, sous-estime les déplacements et les contraintes des poutres épaisses FG.

L'impact de l'indice de matériau (p) et du rapport d'élanement (L/h) sur les déplacements transversaux  $\bar{W}$  et axiaux  $\bar{U}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x$  et de cisaillement  $\bar{\sigma}_{xz}$  de la poutre S-S FG sous une charge uniforme est illustré dans les tableaux 2 et 3. En général, tous les modèles des poutres de déformation de cisaillement donnent des résultats presque identiques, sauf dans le cas de la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\sigma}_{xz}$ . Cela peut s'expliquer par les différentes

fonctions de forme d'épaisseur de cisailent transversale  $g(z)$  utilisées dans chaque modèle. On peut voir que ces deux déplacements et la contrainte axiale de S - S FGB augmente avec l'augmentation de  $(p)$ . Cela est dû au fait que des valeurs plus élevées de l'indice de la loi de puissance  $(p)$  correspondent à une grande portion de métal par rapport à la partie céramique, rendant ainsi ces poutres FG plus souples. En fait, quand  $p = 0$ , la poutre est faite entièrement de céramique et a les plus petits déplacements. En augmentant  $(p)$  de la loi de la puissance, la constitution de la FGM change d'une poutre en tout-métal à une poutre mélangeant la céramique et le métal, puis à une poutre  $(p \rightarrow \infty)$ . Par conséquent, le pourcentage de phase métallique augmente et la poutre devient plus souple, ce qui conduit à des déplacements accrus. Toutefois, l'effet de l'indice de matériau sur la contrainte de cisailent est négligeable puisque la valeur de ce contrainte est négligeable par rapport au contrainte axiale.

**Tableau 3:** Effet du rapport d'élanement  $(L/h)$  et de l'indice de matériau  $(p)$  sur les déplacements transversaux et axiaux non-dimensionnels, les contraintes axiales et de cisaillement de la poutre FG S-S.

p	L/h=2				L/h=7				L/h=12			
	$\bar{W}$	$\bar{U}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{W}$	$\bar{U}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{W}$	$\bar{U}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xz}$
0	4.7289	2.5728	1.6588	0.7452	3.0406	0.6703	5.2947	0.7504	2.9408	0.3888	9.0248	0.7507
0.5	6.9470	4.4740	2.1876	0.7625	4.6618	1.1865	6.9507	0.7674	4.5269	0.6890	11.8440	0.7677
1	8.9036	6.1551	2.5866	0.7452	6.0522	1.6492	8.1898	0.7504	5.8838	0.9583	13.9523	0.7507
5	15.667	10.0137	3.6884	0.6009	9.3520	2.6521	11.2654	0.6070	8.9777	1.5398	19.1450	0.6073
10	18.146	10.6328	4.3860	0.6581	10.345	2.7727	13.4960	0.6648	9.8830	1.6082	22.9475	0.6652

Pour enquêter à nouveau sur les effets de l'étirement d'épaisseur sur les déplacements, on fait une comparaison entre le déplacement non-dimensionnel de la poutre obtenue à partir du présent modèle avec et sans étirement d'épaisseur à la figure 10 (a), (b) pour les déplacements transversal et axial, respectivement, pour  $(L/h = 5)$  et  $(p = 5)$ . On voit la différence entre les deux courbes. Il est grand au milieu de la poutre et devient zéro aux extrémités pour le déplacement transversal et deviendrait zéro au milieu de l'axial, contrairement au déplacement axial qui est grand à l'extrémité et disparaît au milieu.

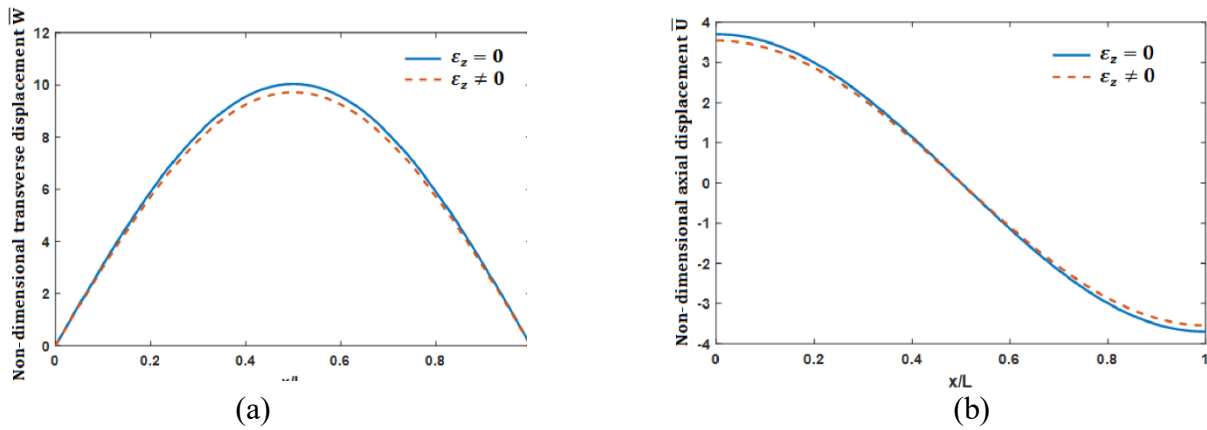


Figure 10: Effet d'étirement de l'épaisseur sur les déplacements transversaux non-dimensionnels (a) et axiaux (b).

L'effet de l'étirement sur l'évolution du déplacement axial non-dimensionnel le long de la poutre sur les faces supérieure et inférieure est évalué à partir de la figure 11 (a), (b) pour ( $L/h = 5$ ) et ( $p = 5$ ). Nous constatons que l'étirement a un effet très léger sur le déplacement axial. On peut également constater que l'étirement est maximale aux extrémités et zéro au milieu de la longueur de la poutre.

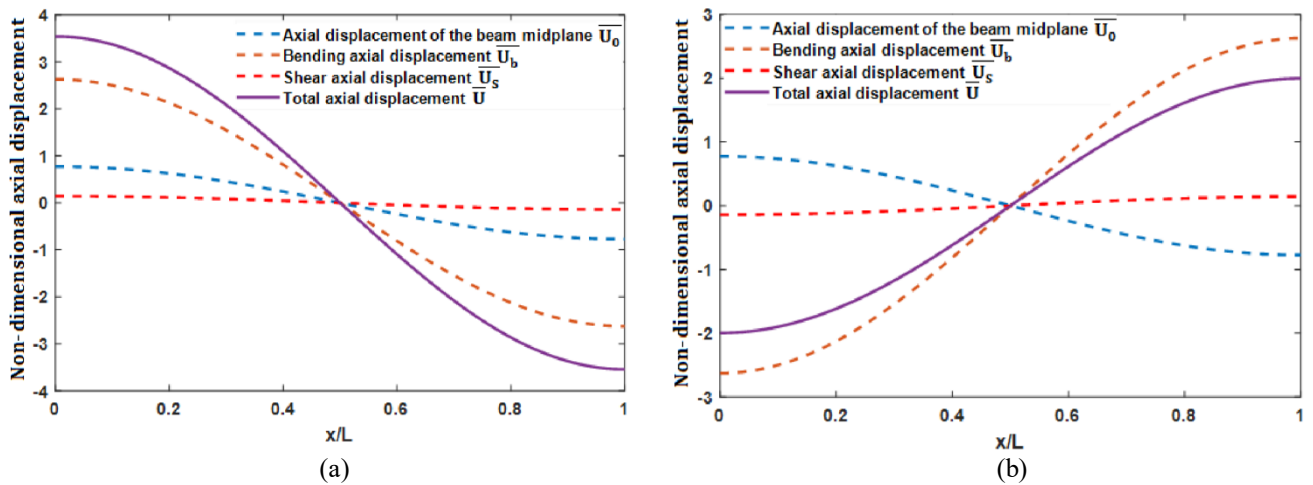


Figure 11: Effet de l'étirement sur le déplacement axial le long de la FGM sur : (a) la face inférieure de la poutre et (b) la surface supérieure.

Dans le deuxième exemple d'examen et d'analyse, les effets de la contrainte et de l'étirement d'épaisseur sur les déplacements axiaux et transversaux non-dimensionnels de la poutre de FG S-S sont évalués à la figure 12 pour ( $L/h = 5$ ) et ( $p = 5$ ). Il est évident à partir de ces chiffres que l'effet de l'étirement est plus important sur les deux déplacements, et il est plus grand que l'effet de l'étirement d'épaisseur pour le déplacement transversal. Cela signifie que l'inclusion

de l'effet de déformation de cisaillement conduit à une augmentation des déformations et plus prononcées pour les feux courts. Ainsi, l'effet de cisaillement sur les déplacements ne peut pas être négligé, en particulier pour les poutres épaisses.

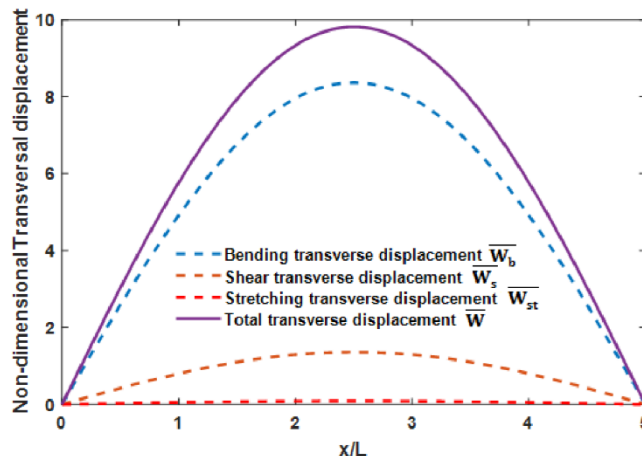


Figure 12: Effets de contrainte de cisaillement et d'étirement sur le déplacement transversal.

Dans la figure 13 (a), (b), l'évolution du déplacement non-dimensionnel (a) en plan à l'extrémité  $\bar{U}(0)$  et (b) le déplacement transversal  $\bar{W}(L/2)$  au milieu de l'intervalle à travers l'épaisseur de la poutre FG sous une charge uniforme est présentée pour  $(L/h = 5)$  et  $(p = 5)$ . Une légère différence apparaît pour cette poutre le plus court. On voit que le déplacement maximal se situe au bas de la poutre pour un déplacement axial et le plan médiane pour un déplacement transversal. Ceci est dû à la prise en considération de l'étirement d'épaisseur ( $\epsilon_z \neq 0$ ).

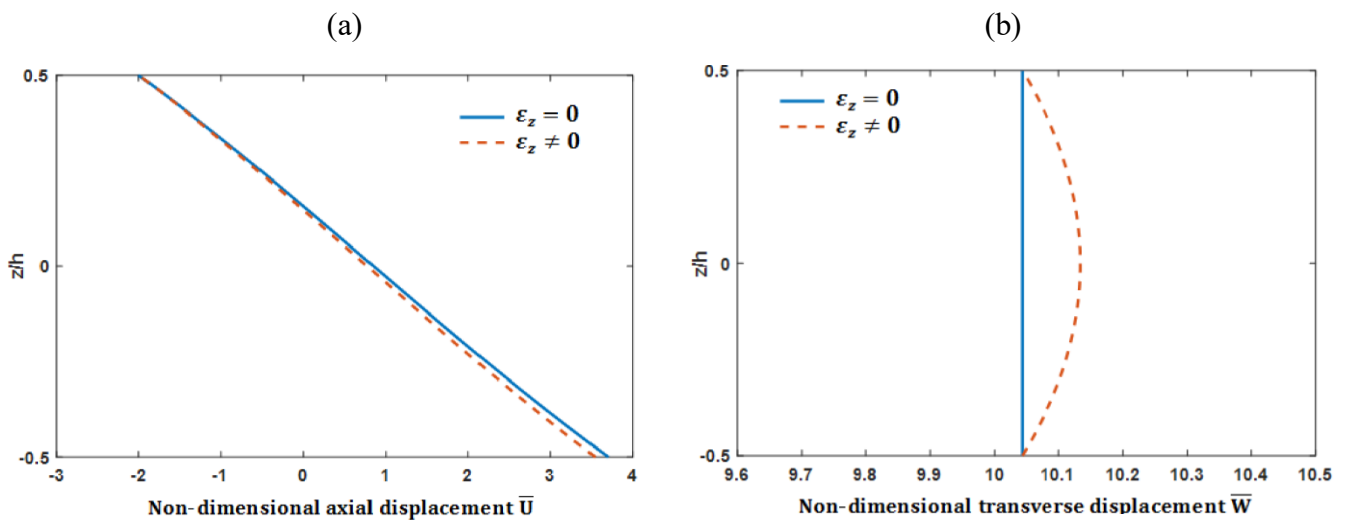
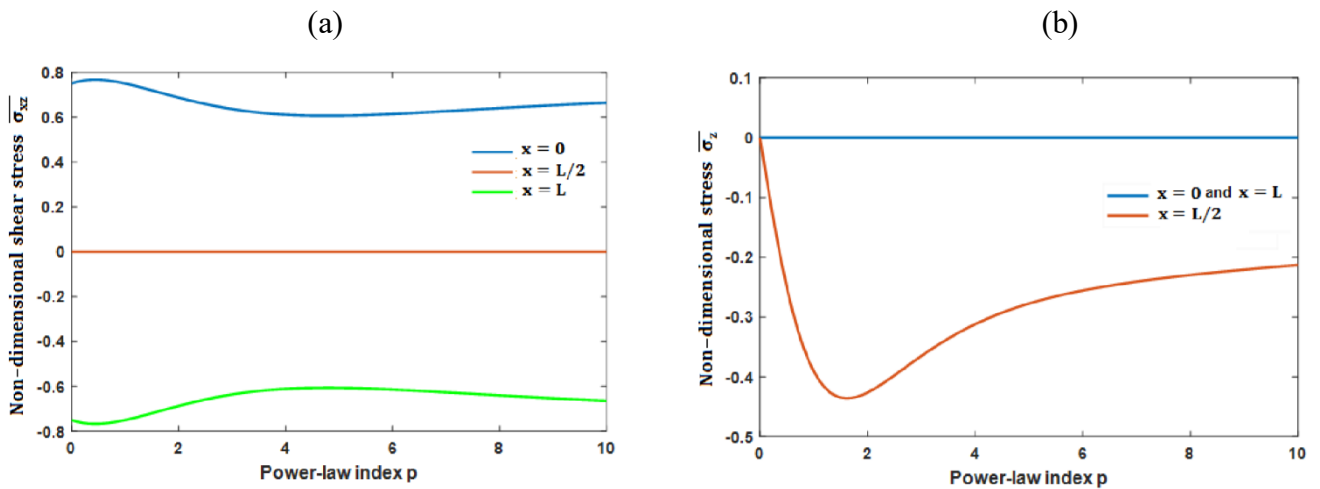


Figure 13: Non-dimensionnel : (a) déplacement axial, U et (b) déviation du milieu de la gamme W à travers l'épaisseur de la poutre FG.

La figure 14 (a) illustre l'évolution de la contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle et la figure 14 (b) montre la contrainte due à l'étendue de l'indice  $p$  pour ( $L/h = 5$ ). Toutes les courbes affichent la dépendance de l'indice de matière des contraintes. Il est clair que la contrainte due à l'étirement d'épaisseur présente des valeurs faibles mais pas négligeables par rapport à celles de la contrainte de cisaillement transversale.



**Figure 14:** Non-dimensionnel : (a) contraintes de cisaillement, (b) tension due à l'étirement d'épaisseur par rapport au paramètre du matériau.

Les variations de la contrainte axiale non-dimensionnelle  $\bar{\sigma}_x$  à travers la profondeur et par rapport à la longueur non-dimensionnelle du FGB sont présentées à la figure 15(a), (b) pour ( $L/h = 5$ ) et ( $p = 5$ ). La contrainte axiale est nulle aux bords de l'extrémité, mais elle est maximale au milieu de la poutre, et la face supérieure est étirée. En revanche, la face inférieure est compressée. La contrainte normale de la traction sur la face supérieure de la poutre est plus élevée que la contrainte normale de compression sur la surface inférieure, car sur la partie supérieure, la poutre est riche en céramique, alors que sur la facette inférieure il est riche en métal. On observe que le plan neutre avec une contrainte axiale zéro est déplacé vers le haut par rapport à la position moyenne. Cela est dû au matériau non homogène de la poutre FG ( $p = 5$ ).



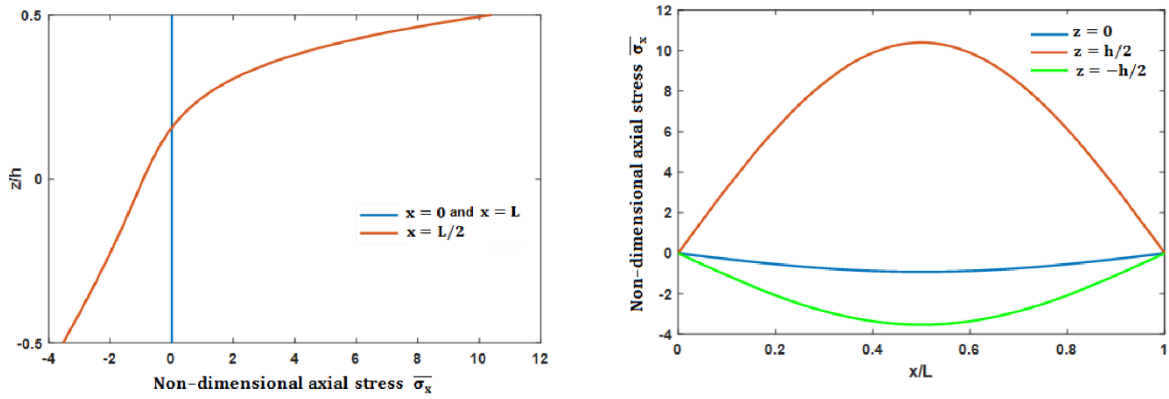


Figure 15: Distributions : (a) au-dessus de l'épaisseur de la poutre FG, (b) par rapport à la longueur non-dimensionnelle du façade FG.

(a)

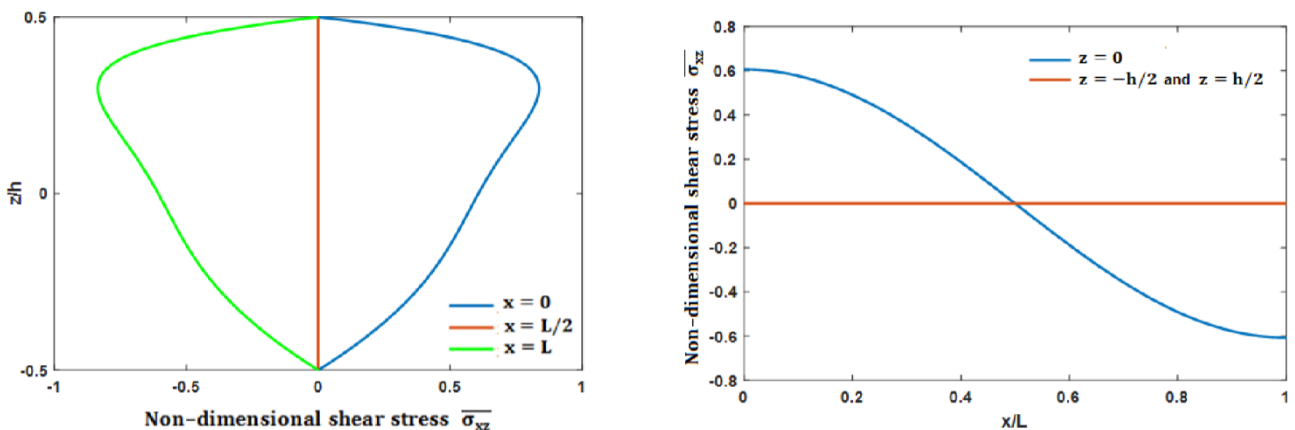
(b)

La figure 16 (a), (b) dessine les répartitions de la contraintes de cisaillement e non-dimensionnelle  $\bar{\sigma}_{xz}$  par l'épaisseur et par rapport à la longueur non-dimensionnelle de la poutre FG, respectivement pour ( $L/h = 5$ ) et ( $p = 5$ ). Ces chiffres révèlent que la contrainte de cisaillement atteint sa valeur maximale aux extrémités de la poutre, mais avec des signes opposés. Il est annulé au milieu de la poutre sur le plan neutre et les faces inférieure et supérieure. En conséquence, les conditions de non-coupeur sur les faces inférieure et supérieure de la poutre sont satisfaites.

(a)

(b)

Figure 16: Distributions : (a) au-dessus de l'épaisseur de la poutre FG, (b) par rapport à la longueur non-dimensionnelle de la façade FG.



L'impact d'étirement de l'épaisseur sur les contraintes est évalué à la figure 17(a), (b) pour ( $L/h = 5$ ) et ( $p = 5$ ). On peut voir que  $\bar{\sigma}_z$  est égal à zéro aux deux extrémités. Sa valeur la plus élevée est atteinte au milieu de la poutre. La face supérieure de la poutre est étirée. En revanche, la face inférieure est comprimée. La de compression à la face inférieure de la poutre FG est plus élevé que le stress d'extension à la surface supérieure.

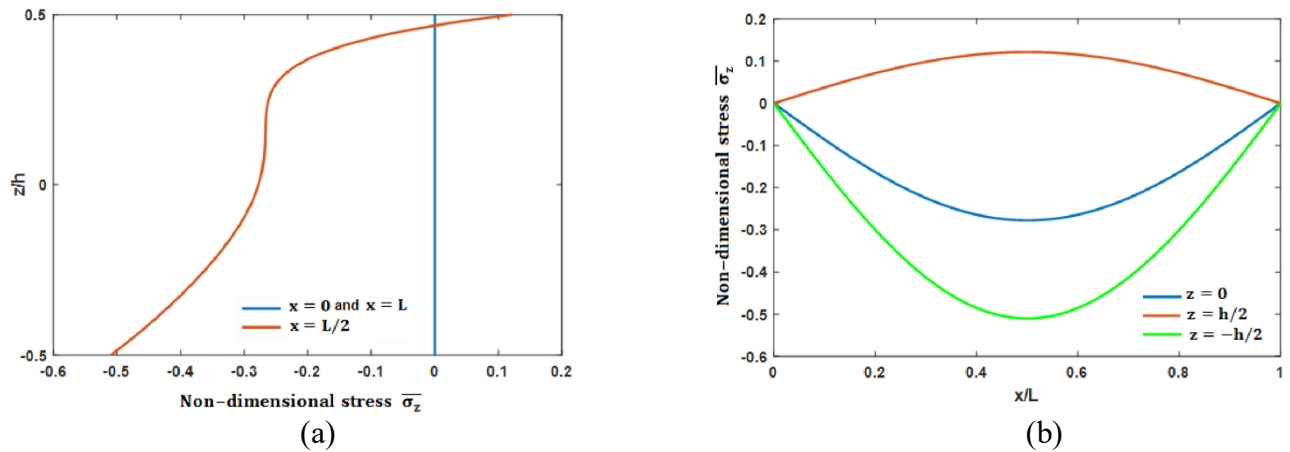


Figure 17: Distributions : (a) au-dessus de l'épaisseur de la poutre FG ; (b) par rapport à la longueur non-dimensionnelle des poutres FG.

## 2.2 Analyse des vibrations :

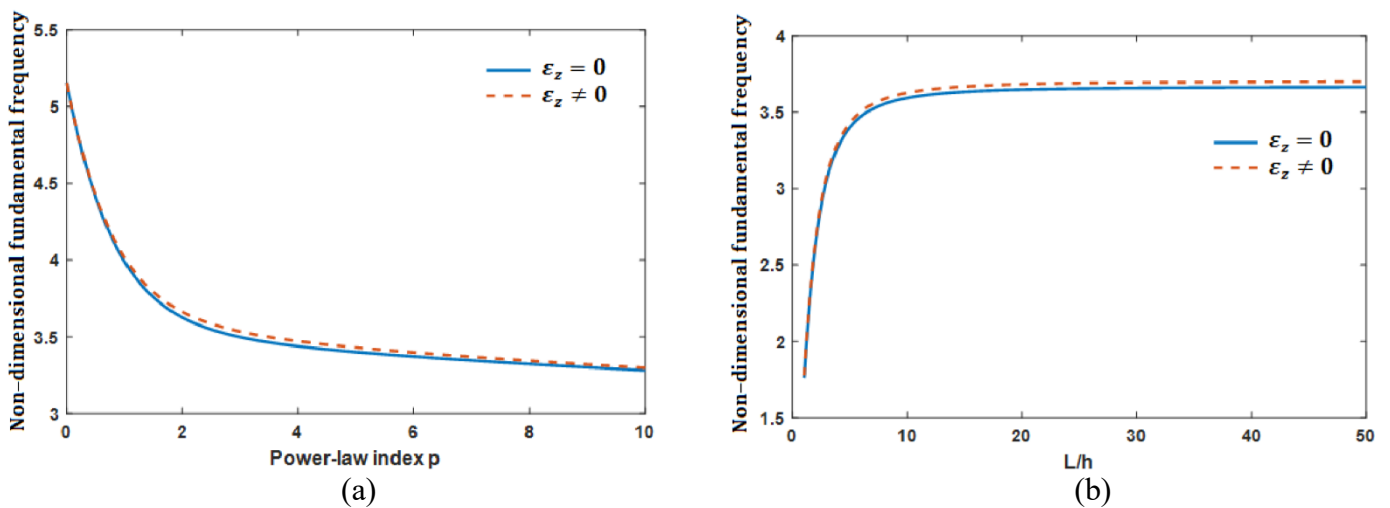
Le tableau 4 résume les fréquences sans dimension associées aux formes du premier, deuxième et troisième mode de la poutre S-S FG pour divers rapports ( $L/h$ ) et paramètres de matériau ( $p$ ).

**Tableau 4:** Comparaison des fréquences de ma poutre S-S FG pour certaines valeurs de (L/h) et (p).

L/h	Mode	Theory	P						
			0	0.5	1	5	10		
5	1	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	5.1530	4.4110	3.9900	3.4000	3.2810	
			$\varepsilon_z \neq 0$	5.1527	4.4107	3.9904	3.4012	3.2816	
		Present	$\varepsilon_z \neq 0$	5.1516	4.4230	4.0169	3.4310	3.2984	
			$\varepsilon_z = 0$	17.8840	15.4610	14.0120	11.5350	11.0220	
		2	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	17.8812	15.4588	14.0100	11.5431	11.0240
				$\varepsilon_z \neq 0$	17.8900	15.5052	14.0978	11.6348	11.0785
	3	Present	$\varepsilon_z = 0$	34.2250	29.8490	27.1080	21.6990	20.7530	
			$\varepsilon_z = 0$	34.2097	29.8382	27.0979	21.7158	20.5561	
		HSDT [30]	$\varepsilon_z \neq 0$	34.2975	29.9670	27.2813	21.8884	20.6748	
			$\varepsilon_z = 0$	5.4600	4.6510	4.2050	3.6480	3.5390	
		1	Present	$\varepsilon_z = 0$	5.4603	4.6511	4.2051	3.6485	3.5390
				$\varepsilon_z \neq 0$	5.4602	4.6657	4.2351	3.6835	3.5595
20	2	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	21.5730	18.3960	16.6340	14.3730	13.9260	
			$\varepsilon_z = 0$	21.5732	18.3962	16.6344	14.3746	13.9263	
		Present	$\varepsilon_z \neq 0$	21.5710	18.4520	16.7511	14.5094	14.0043	
			$\varepsilon_z = 0$	47.5940	40.6530	36.7690	31.5720	30.5340	
		3	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	47.5930	40.6526	36.7679	31.5780	30.5369
				$\varepsilon_z \neq 0$	47.5841	40.7709	37.0192	31.8649	30.7005

Encore une fois, les résultats obtenus par le présent modèle, lorsque l'étirement d'épaisseur est négligé, sont étroitement corrélés avec ceux obtenus avec la solution HSDT [30]. Le modèle HSDT sous-estime les fréquences des poutres FG épaisses. Ceci est dû à l'étirement de l'épaisseur de la poutre omis par la formulation HSDT dans le cas des poutres épaisses FG. Il est souligné que dans la formulation HSDT [30], le nombre d'inconnus est supérieur à celui fourni par le modèle actuel.

La variation de la fréquence sans dimension par rapport au paramètre du matériau pour un ( $L/h = 5$ ) avec et sans prendre en compte l'étirement de l'épaisseur est dessinée à la figure 18 (a). Le plan a montré que l'augmentation ( $p$ ) conduit à une diminution des fréquences. La fréquence la plus élevée est obtenue pour ( $p = 0$ , poutre entièrement céramique), et la plus faible pour ( $P \rightarrow \infty$ , poutres entièrement métalliques). Cela peut s'expliquer par le fait que l'augmentation de ( $p$ ) conduit à une diminution de la quantité de céramique dans le mélange, qui est remplacée par le métal, ce qui entraîne la diminution du module de Young qui rend la poutre plus souple. En outre, dans ce type de composition, la densité du métal est supérieure à celle de la céramique et la masse totale de la poutre FG augmente en augmentant la proportion de métal dans la poutre, ce qui le rend plus doux. Par conséquent, la fréquence diminue en augmentant l'indice de matière ( $p$ ).



**Figure 18:** Effet de (a) le paramètre du matériau et (b) le rapport de longueur ( $L/h$ ) sur la fréquence fondamentale sans dimension de la poutre FG S-S.

L'écart entre les deux courbes montre que la différence entre les fréquences des deux modèles avec et sans étirement d'épaisseur est significative pour les modes plus élevés et pour les petits rapports ( $L/h$ ) (voir aussi les tableaux 4 et 5). Cela est dû aux effets de la déformation normale. Cet effet conduit à une augmentation des fréquences vibratoires, et cette augmentation est amplifiée à des modes de vibration plus élevés et pour des rapports de faiblesse faibles. Cela implique que le modèle de la poutre de déformation normale devrait être employé pour une meilleure prédiction des fréquences au lieu du modèle qui néglige les effets de la déformation transversale normale. On voit que les fréquences sont sous-estimées lorsque l'étirement d'épaisseur est omis.

**Tableau 5:** Effet du rapport (L/h) sur la fréquence fondamentale  $t$  non-dimensionnelle de la poutre S-S FG pour divers indices de matériaux.

L/h	Mode	Theory	$\varepsilon_z$	P				
				0	0.5	1	5	10
2	1	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	4.1229	3.5811	3.2488	2.6369	2.5066
			$\varepsilon_z \neq 0$	4.1288	3.5939	3.2697	2.6578	2.5199
	2	Present	$\varepsilon_z = 0$	11.2755	9.9531	9.0776	7.0387	6.5825
			$\varepsilon_z \neq 0$	11.3606	10.0311	9.1548	7.0986	6.6339
	3	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	18.8329	16.7556	15.3540	11.7045	10.8540
			$\varepsilon_z \neq 0$	19.0593	16.9370	15.5040	11.8133	10.9627
7	1	Present	$\varepsilon_z = 0$	5.3051	4.5303	4.0972	3.5223	3.4072
			$\varepsilon_z \neq 0$	5.3043	4.5436	4.1254	3.5545	3.4256
	2	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	19.5009	16.7623	15.1752	12.7469	12.2452
			$\varepsilon_z \neq 0$	19.4986	16.8082	15.2720	12.8527	12.3049
	3	Present	$\varepsilon_z = 0$	39.3228	34.0427	30.8609	25.3129	24.1409
			$\varepsilon_z \neq 0$	39.3514	34.1495	31.0553	25.5131	24.2620
12	1	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	5.4202	4.6199	4.1772	3.6156	3.5045
			$\varepsilon_z \neq 0$	5.4198	4.6342	4.2068	3.6498	3.5244
	2	Present	$\varepsilon_z = 0$	20.9836	17.9355	16.2232	13.8997	13.4318
			$\varepsilon_z \neq 0$	20.9793	17.9871	16.3331	14.0246	13.5027
	3	HSDT [30]	$\varepsilon_z = 0$	44.9631	38.5796	34.9166	29.5118	28.4027
			$\varepsilon_z \neq 0$	44.9542	38.6852	35.1425	29.7618	28.5434

L'impact du rapport (L/h) sur les fréquences est montré sur la figure 18 (b) et aux tableaux 4 et 5. On voit qu'une augmentation du rapport (L/h) conduit à une augmentation des fréquences, et cette augmentation est amplifiée à des modes de vibration plus élevés. Les fréquences ont tendance à augmenter lorsque la poutre devient plus courte (ou plus épaisse).

**3. Conclusion :**

Dans ce travail on a présenté deux parties, la première partie se base sur l'étude statique et la deuxième sur l'étude dynamique.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est simple et efficace pour analyser la vibration en flexion des poutres en FGM.

# Conclusion Générale

## Conclusion et perspectives

Dans ce travail une théorie de la poutre raffinée est mise en œuvre pour l'analyse vibratoire en flexion des poutres FG épaisses, en tenant compte de l'étirement de l'épaisseur. Le déplacement transversal est supposé être la somme de trois composantes : la flexion, le cisaillement et l'étirement de l'épaisseur. Cela permet de réduire le nombre de paramètres inconnus, donc le nombre d'équations gouvernantes. Selon une loi de mélange, les caractéristiques matérielles effectives de la poutre FG sont censées changer continuellement le long de la direction de l'épaisseur en fonction de la proportion volumique des constituants. Les équations gouvernantes sont obtenues à partir du principe de Hamilton et sont résolues en utilisant les solutions de Navier. Les résultats analytiques et numériques obtenus dans ce travail concordent avec ceux obtenus à l'aide d'autres théories avec plus de paramètres inconnus. Une analyse de sensibilité a été réalisée pour l'étirement de l'épaisseur, le paramètre matériel et la finesse de la poutre. Pour cette investigation, les poutres les plus courtes ont montré le plus grand impact de l'étirement de l'épaisseur, ce qui doit être pris en compte dans des simulations plus réalistes sur le plan physique. À la fois la géométrie et les paramètres matériels affectent les réponses vibratoires des poutres FG. Enfin, il est observé que la théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre supérieur proposée n'est pas seulement précise, mais offre également une approche élégante et facilement applicable pour simuler les comportements de flexion et de vibration des poutres FGM, pertinente par exemple dans la conception thermo-structurale des engins spatiaux.

La formulation se prête particulièrement bien aux simulations par éléments finis ainsi qu'à d'autres méthodes numériques utilisant le calcul symbolique pour les problèmes de flexion de poutres, ce qui sera envisagé dans un proche avenir. D'autres applications de notre poutre FG affinée sont prévues dans une autre contribution pour consolider notre approche.



# Référence Bibliographique

## Référence Bibliographique

1. Koizumi, M. FGM activities in Japan. *Compos. Part B Eng.* 1997, 28, 1–4, doi:10.1016/s1359-8368(96)00016-9.
2. Moita, J.S.; Araújo, A.L.; Correia, V.F.; Soares, C.M.M. Mechanical and thermal buckling of functionally graded axisymmetric shells. *Compos. Struct.* 2021, 261, doi:10.1016/j.compstruct.2020.113318.
3. Moleiro, F.; Madeira, J.F.A.; Carrera, E.; Reddy, J.N. Design optimization of functionally graded plates under thermo-mechanical loadings to minimize stress, deformation and mass. *Compos. Struct.* 2020, 245, doi:10.1016/j.compstruct.2020.112360.
4. Gul, U.; Aydogdu, M.; Karacam, F. Dynamics of a functionally graded Timoshenko beam considering new spectrums. *Compos. Struct.* 2019, 207, doi:10.1016/j.compstruct.2018.09.021.
5. Li, X.F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. *J. Sound Vib.* 2008, 318, 1210–1229.
6. Benatta, M.A.; Mechab, I.; Tounsi, A.; Bedia, E.A.A. Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Comput. Mater. Sci.* 2008, 44, 765–773.
7. Ben-Oumrane, S.; Abedlouahed, T.; Ismail, M.; Mohamed Bachir, B.; Mustapha, M.; El Abbas, A.B. A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams. *Comput. Mater. Sci.* 2009, 44, 1344–1350.
8. Sina, S.A.; Navazi, H.M.; Haddadpour, H. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Mater. Des.* 2009, 30, 741–747.
9. Şimşek, M. Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. *Int. J. Eng. Appl. Sci.* 2009, 1, 1–11.
10. Ghayesh, H.M. Vibration analysis of shear-deformable AFG imperfect beams. *Compos. Struct.* 2018, 200, 910–920.
11. Mena, R.; Tounsi, A.; Mouaici, F.; Mechab, I.; Zidi, M.; Bedia, E.A.A. Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2012, 19, 641–652.
12. Yaghoobi, H.; Yaghoobi, P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach. *Meccanica* 2013, 48, 2019–2035.
13. Feldman, E.; Aboudi, J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos. Struct.* 1997, 38, 29–36.
14. Abrate, S. Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Compos. Part B* 2008, 39, 151–158.
15. Mahdavian, M. Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *J. Solid Mech.* 2009, 1, 213–225.

## Référence Bibliographique

---

16. Mohammadi, M.; Saidi, A.R.; Jomehzadeh, E. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Appl. Compos. Mater.* 2010, 17, 81–93.
17. Della Croce, L.; Venini, P. Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2004, 193, 705–725.
18. Yang, J.; Liew, K.M.; Kitipornchai, S. Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Compos. Sci. Technol.* 2005, 65, 1165–1175.
19. Zhao, X.; Lee, Y.Y.; Liew, K.M. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 2009, 90, 161–171.
20. Loy, C.T.; Lam, K.Y.; Reddy, J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int. J. Mech. Sci.* 1999, 41, 309–324.
21. Pradhan, S.C.; Loy, C.T.; Lam, K.Y.; Reddy, J.N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Appl. Acoust.* 2000, 61, 111–129.
22. Strozzi, M.; Pellicano, F. Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells. *Thin Walled Struct.* 2013, 67, 63–77, doi:10.1016/j.tws.2013.01.009.
23. Moleiro, F.; Correia, V.M.F.; Araújo, A.L.; Soares, C.M.M.; Ferreira, A.J.M.; Reddy, J.N. Deformations and stresses of multilayered plates with embedded functionally graded material layers using a layerwise mixed model. *Compos. Part B Eng.* 2019, 156, doi:10.1016/j.compositesb.2018.08.095.
24. Thai, H.T.; Vo, T.P. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *Int. J. Mech. Sci.* 2012, 62, doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014.
25. Ebrahimi, F.; Jafari, A. A Higher-Order Thermomechanical Vibration Analysis of Temperature-Dependent FGM Beams with Porosities. *J. Eng.* 2016, 2016, doi:10.1155/2016/9561504.
26. Aydogdu, M.; Taskin, V. Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Mater. Des.* 2007, 28, 1651–1656.
27. Şimşek, M. Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions. *Compos. Struct.* 2016, 149, doi:10.1016/j.compstruct.2016.04.034.
28. Patil, R.; Joladarashi, S.; Kadoli, R. Studies on free and forced vibration of functionally graded back plate with brake insulator of a disc brake system. *Arch. Appl. Mech.* 2020, 90, doi:10.1007/s00419-020-01743-x.
29. Zhong, Z.; Yu, T. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Compos. Sci. Technol.* 2007, 67, doi:10.1016/j.compscitech.2006.08.023.
30. Larbi, L.O.; Kaci, A.; Houari, M.S.A.; Tounsi, A. An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams. *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2013, 41, doi:10.1080/15397734.2013.763713.

## Référence Bibliographique

---

31. Larbi, L.O.; Hadji, L.; Meziane, M.A.A.; Bedia, E.A.A. An analytical solution for free vibration of functionally graded beam using a simple first-order shear deformation theory. *Wind Struct. Int. J.* 2018, 27, doi:10.12989/was.2018.27.4.247.
32. Bouremana, M.; Houari, M.S.A.; Tounsi, A.; Kaci, A.; Bedia, E.A.A. A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams. *Steel Compos. Struct.* 2013, 15, doi:10.12989/scs.2013.15.5.467.
33. Fekrar, A.; Houari, M.S.A.; Tounsi, A.; Mahmoud, S.R. A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates. *Meccanica* 2014, 49, doi:10.1007/s11012-013-9827-3.
34. Osofero, A.I.; Vo, T.P.; Nguyen, T.K.; Lee, J. Analytical solution for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams using various quasi-3D theories. *J. Sandw. Struct. Mater.* 2016, 18, doi:10.1177/1099636215582217.
35. Meradjah, M.; Kaci, A.; Houari, M.S.A.; Tounsi, A.; Mahmoud, S.R. A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams. *Steel Compos. Struct.* 2015, 18, doi:10.12989/scs.2015.18.3.793.
36. Praveen, G.N.; Reddy, J.N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Int. J. Solids Struct.* 1998, 35, doi:10.1016/S0020-7683(97)00253-9.
37. Minh, P.P.; Manh, D.T.; Duc, N.D. Free vibration of cracked FGM plates with variable thickness resting on elastic foundations. *Thin Walled Struct.* 2021, 161, doi:10.1016/j.tws.2020.107425.
38. Tornabene, F. Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2009, 198, doi:10.1016/j.cma.2009.04.011.
39. Li, X.F.; Wang, B.L.; Han, J.C. A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. *Arch. Appl. Mech.* 2010, 80, doi:10.1007/s00419-010-0435-6.
40. BOUTAHAR, Youssef, LEBEAL, Nadhir, et BASSIR, David. A refined theory for bending vibratory analysis of thick functionally graded beams. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no 12, p. 1422.
50. HAIRY, Patrick. Approche data-driven en métallurgie aluminium.
51. MOURAD, Benadouda, et al. Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement graduée. 2019. Thèse de doctorat.
52. FOURCADE, Thibault. Définition des poutres Réf : TBA220 v2
53. KACAR, Alev, TAN, H. Tugba, et KAYA, Metin O. Free vibration analysis of beams on variable winkler elastic foundation by using the differential transform method. *Mathematical and Computational Applications*, 2011, vol. 16, no 3, p. 773-783.
54. LARBI CHAHT, Fouzia, et al. Etude du comportement des nano-poutres en flexion, en flambement et en vibration en utilisant les théories non locales de déformation de cisaillement des poutres. 2015. Thèse de doctorat.

## Référence Bibliographique

---

55. CHETTAH, Madani et BARKATT, Amina. ÉTUDE DE L'ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES DE PLAQUES COMPOSITES STRATIFIÉES A PLIS CROISÉS A L'AIDE D'UNE THÉORIE SIMPLIFIÉE. 2023. Thèse de doctorat. Université Ibn Khaldoun.

56. BETTOUMI, Amel et MENIA, Fatima. Analyse du comportement vibratoire des poutres poreuses en FGM. 2019.