Université de Aïn Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Sciences de la Matière

Polycopié pédagogique

MESSAOUDI Ilhem Souad

Titre

Méthodes Numériques

Cours destiné aux étudiants de

2^{éme} année LMD

Année : 2021/2022

Université de Aïn Temouchent –Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Sciences de la Matière

Polycopié pédagogique

.... (Code) ....

Titre

Méthodes Numériques

Cours destiné aux étudiants de

2^{éme} année LMD

Année : 2021/2022

Avant-propos

Ce document est un support pédagogique du cours de la matière : ***Méthodes numériques et programmations***, destiné aux étudiants de la deuxième année licence (LMD) en Physique et Chimie. Dans ce cours on s'intéresse à un certain nombre de ***méthodes directes*** et ***itératives*** utilisées pour la résolution des systèmes ***d'équations linéaires***, ***des équations non linéaires,*** la résolution numérique des ***équations différentielle***, ***Trapèze*** et ***Simpson*** pour l'intégration numérique. Le tous est regroupé sous le terme générique de '' ***Méthodes Numériques*** ''. Toutes ces techniques de résolutions permettent de résoudre de manière exacte ou de manière approchée un problème donné.

A la fin de ce cours, l'étudient obtient des connaissances solides sur différentes méthodes numériques que par la suite sera capable de les implémenter en langage de programmation tel que Matlab. De plus ce cours est une base au plusieurs cours de méthodes numérique qui seront enseignés durant le cursus de graduation de nos étudiants.

TABLE DES MATIERE

CHAPITRE IV

TABLE DES FIGURES

Méthodes Numériques et Programmation

Programme **:**

Chapitre I : ***Résolution numérique des équations non-linéaires f(x)=0***

1. Méthode de dichotomie (bissection).
2. Méthode de Newton.

Chapitre II : ***Résolution numérique des équations linéaires***

1. Méthode de Gauss.
2. Méthode de Gauss-Seidel.

Chapitre III : ***Intégration numérique***

1. Méthode des Trapèzes.
2. Méthode de Simpson.

Chapitre IV : ***Résolution numérique des équations différentielles ordinaires***

1. Méthode d'Euler.
2. Méthode de Range-Kutta.

Mode d'évaluation : Continu 50 %   Examen 50%

Pourquoi un cours d'analyse numérique et à quoi cela sert-il ?????

Pour résumer, on peut dire que l'analyse numérique est à la frontière entre les ***mathématiques*** et ***l'informatique***. Il s'agit en quelque sorte d'un interprète qui permettra de transposer la connaissance mathématique théorique à la pratique d'un ordinateur et de pouvoir ainsi résoudre des problèmes concrets.

L'objectif de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes de mathématiques issus de la modélisation des problèmes réels et dont on cherche à calculer la solution à l'aide d'un ordinateur, i. e. à trouver ou à donner des valeurs approchées de la solution exacte avec une certaine précision.

Les deux objectifs principaux de l'analyse numérique sont, d'une part, de pouvoir ***résoudre numériquement*** des problèmes concrets dont on connait ou pas la solution analytique et d'autre part, d'analyser le comportement des méthodes utilisées.

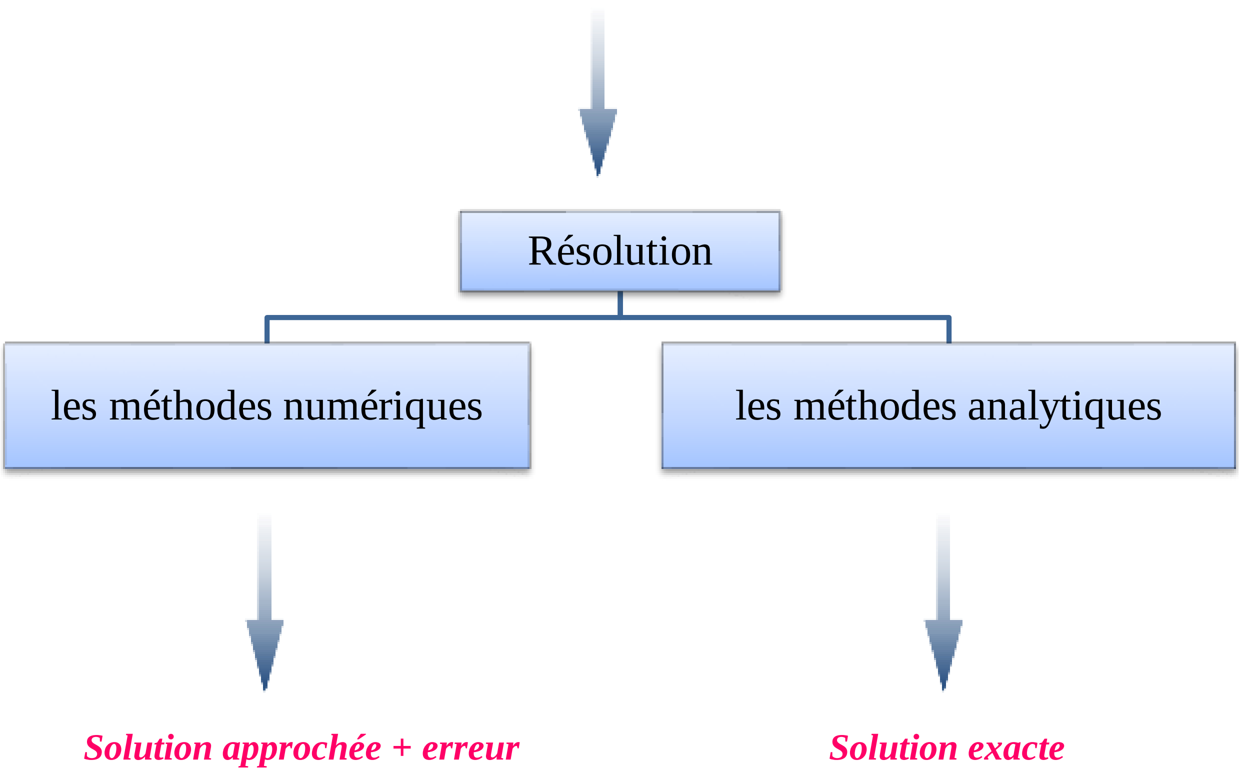
On utilise une méthode numérique lorsqu'il ***n'existe pas de solution analytique*** ou celle-ci existe mais est difficile à obtenir. Une méthode numérique doit être:

Pratique: la solution doit être calculée en un temps raisonnable.

Précise: La solution doit être une bonne approximation de la solution vraie.

Problème mathématique

(Équation non linéaire, Intégrale, équation différentielle…)



Le but de ce cours, est donc, de fournir les principes de base des méthodes numériques les plus utilisées. Ce polycopié est organisé en 4 chapitres, chaque chapitre comporte un rappel théorique de différentes méthodes, et un énoncé des travaux dirigés. Toutefois, en exposant les résultats de test afin de caractériser les performances de chaque méthode.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les différentes méthodes de résolution numérique des équations non linéaires à savoir, la méthode de dichotomie et la méthode de Newton.

Le problème de la résolution numérique des équations différentielles ordinaires est traité dans le chapitre deux, nous allons étudier la méthode de Gauss et celle de Gauss-Seidel.

Le troisième chapitre est consacré à l'intégration numérique de fonctions. Deux approches sont développées ; la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson.

On traite la résolution numérique des équations différentielles ordinaires dans le chapitre quatre. Deux méthodes sont présentées à savoir, la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta.

Chapitre I :

Résolution des équations non linéaires f(x)=0

Sommaire

1.1 Introduction :

L'objet essentiel de ce chapitre est l'approximation des racines d'une fonction réelle d'une variable réelle, c'est-à-dire la résolution approchée du problème suivant :
Étant donné une équation non linéaire, à une seul variable, est définie par :

$$f(x) = 0$$

La valeur de la variable x qui vérifie cette égalité est appelée ***solution*** (ou racine) de l'équation, elle est notée x_0. Dans beaucoup de cas, on doit recourir aux méthodes numériques car la solution ne peut pas être déterminée analytiquement.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre l'équation non linéaire, ces méthodes se distinguent par leurs principes et leurs vitesses de convergence. Nous introduisons dans cette section les méthodes de ***dichotomie*** (ou de bissection) et de celle de ***Newton*.**

Nous les présentons dans l'ordre de complexité croissante des algorithmes. Dans le cas de la méthode de dichotomie, la seule information utilisée est le signe de la fonction f aux extrémités de sous-intervalles, tandis que pour l'autre algorithme on prend aussi en compte les valeurs de la fonction et/ou de ses dérivées.

1.2 Méthode de dichotomie :

La méthode de la dichotomie encore appelée méthode de ***bissection*** est la méthode la plus simple, la plus lente mais probablement aussi la plus robuste (Donne toujours une solution correcte). Elle est basée sur ***le théorème des valeurs intermédiaires*** (*T.V.I*).

1.2.1 Principe :

Son principe et de trouver ***une solution approchée*** à une équation $f(x)=0$. Précisément, supposons que la fonction f est continue sur l'intervalle [a, b], avec $f(a).\, f(b) \leq 0$. On sait donc qu'il existe au moins un réel α dans l'intervalle [a, b] tel que $f(\alpha)=0$.

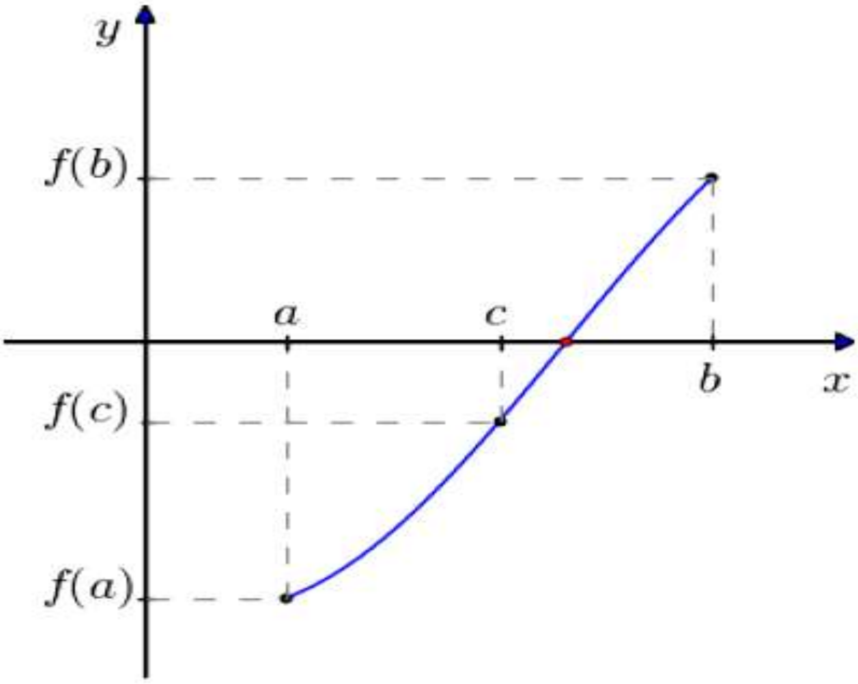


Figure 1.1 : Principe de la méthode de Dichotomie

- On prend $c = \frac{a+b}{2}$ (la moitié de l'intervalle [a,b]).
- Si ***f(c)=0***, la solution est égale à, alors arrêter la recherche.
- Sinon, nous teston **le signe** ***f(a). f(c)*** et ***f(c). f(b).***
- Si ***f(a). f(c) <0***, la solution se trouve dans l'intervalle ***[a,c]***, alors on prend

  b=c
- Si ***f(c). f(b) <0***, la solution se trouve dans l'intervalle ***[c,b]*** alors on prend

  a=c

Ce processus de division par deux de l'intervalle de la fonction est ***réitéré*** (répété) jusqu'à la convergence pour la tolérance ε considérée.

Test d'arrêt **:** On itérera le processus jusqu'à obtenir ***b - a*** $< \varepsilon$, pour ε donné.

Le nombre d'opération **:** $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$

1.2.2 Théorème des valeurs intérimaires :

Pour toutes les méthodes numériques pour la résolution de (Pr), il faut d'abord faire une étape très importante, qui consiste à trouver des intervalles de la forme $[a_i; b_i]$ dans lesquels l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution. Cette étape est appelée séparation des zoés. Pour cela, on fait appelle au théorème suivant :

- ***f(a). f(b)*** $\leq$ ***0.***
- ***f*** continue sur [a,b] $\rightarrow$ ***f*** admet au moins une racine [a,b]**.**
- ***f*** monotone $\rightarrow$ ***f*** admet une racine unique dans [a,b].

Algorithme :

a, b, e et f sont donnés.

Si f(a)×f(b) ≥0 **alors**

Afficher ('Pas de racine sur]a;b[')

Sinon

Tant que b-a ≥ ε **Faire** (test d'arrêt)

c = (a+b)/2

Si f(x)=0 **alors**

Afficher ('x est la solution')

fin

Sinon Si f(a)×f(c) ≤ 0 **alors**

b ← c

Sinon

a ← c

fin si

fin tant que

Afficher (a,b)

Fin

Exemple :

Soit f une fonction continue définie par :

$$f(x)=x^2-3=0$$

- Déterminer par la méthode de dichotomie sur l'intervalle [1,2], un encadrement de la solution α de l'équation f(x)=0, avec une précision $e=10^{-2}$.

Solution :

- Analytiquement la solution exacte est $x^*=\sqrt{3}=1.7343$.

Puisque la condition ***f(1)*f(2) <0*** est vérifiée, on peut donc utiliser la méthode de Dichotomie :

Signe de *f(x)*

-	-	+
a=1	c=1.5	b=2

- ✓ On calcule le milieu *c* de l'intervalle [a,b] $\rightarrow c=1.5\neq 0$.
- ✓ Puis on calcule chacun de *f(a).f(c)* et *f(c).f(b)* pour voir le signe.
- ✓ Puisque le changement de signe se situe dans l'intervalle [1.5, 2], on conclue que la racine recherchée x^* est dans cet intervalle. On prend comme nouvel encadrement l'intervalle [1.5, 2] et on répète le processus. Les résultats obtenus sont condensés dans le tableau suivant:

n	***a (-)***	***b (+)***	***c***	***f(c)***	***b-a***
0	1	***2***	***1.5***	***- 0.63***	***1***
1	***1.5***	***2***	***1.75***	***+0.062***	***0.5***
2	***1.5***	***1.75***	***1.625***	***-0.3593***	***0.25***
3	***1.625***	***1.75***	***1.6875***	***-0.1523***	***0.125***
4	***1.6875***	***1.75***	***1.71875***	***-0.045***	***0.062***
5	***1.71875***	***1.75***	***1.7343***	***0.008***	***0.031***

Si on s'arrête à l'itération $n=5$, l'approximation obtenue est :

$$\boxed{x^* \approx c = 1.7343}$$

De plus l'erreur absolue de l'approximation vérifie.

1.3 Méthode de Newton-Raphson :

Comme il a été montré précédemment, la méthode de dichotomie exploite uniquement le signe de la fonction f aux extrémités des sous-intervalles. Lorsque cette fonction est différentiable, on peut établir une méthode plus efficiente en exploitant les valeurs de la fonction f et de ses dérivées.

L'idée est de remplacer la courbe représentative de la fonction par ***sa tangente***.

1.3.1 Principe :

Consiste à construire une suite (x_n), telle que x_{n+1} soit l'intersection de la tangente à la courbe de f au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe horizontale.

- On part d'un x_0 proche de la solution.

- À partir de x_0, on calcule un nouveau terme x_1 de la manière suivante : on trace la tangente à C_f en x_0. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 comme indiqué sur la figure ci-dessous.

- On réitère ce procédé en calculant x_2 en remplaçant x_0 par x_1, puis x_3 en remplaçant x_1 par x_2 et ainsi de suite…

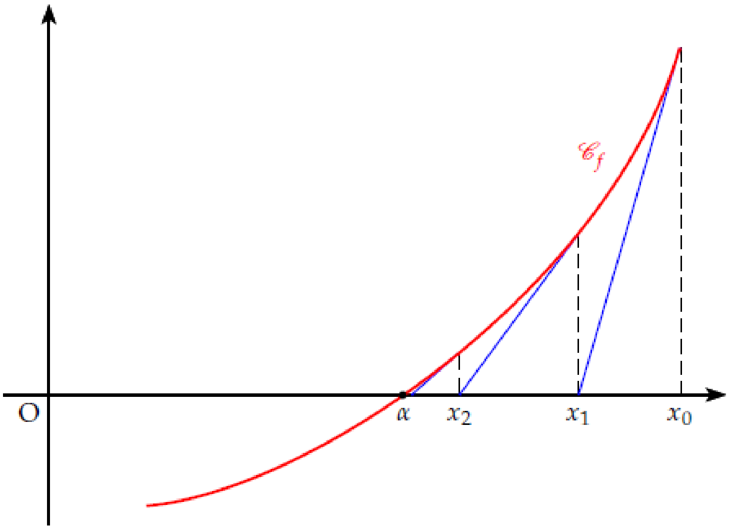


Figure 1.2 : Principe de la méthode de Newton

Formule de récurrence **:**

x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_f en x_n avec l'axe des abscisses.

L'équation de la tangente en x_n est : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$

Cette tangente coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$:

$$(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_n)(x - x_n) = -f(x_n)$$

$$x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Leftrightarrow \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On a donc la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}$$

***La condition d'arrêt* :**

On arrêt l'itération lorsque la différence entre deux pas consécutifs est inférieure à la précision souhaitée $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon.$

N.B : En cas il nous ne donne pas la valeur de $x_0 \in [a,b]$, donc soit $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ ça dépend de la vérification de : $f(x_n).f''(x_n) > 0$

Algorithme :

Variables : P, x, n entiers
f, f ′ fonctions

Entrées et initialisation

Lire P, *x*
$0 \rightarrow n$

Traitement

tant que $\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \geq 10^{-P}$ *et* $n \leq 10$ **faire**

$x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow x$

$n+1 \rightarrow n$

fin

Sorties : Afficher *n*, *x*

***Exemple 1* :**

Nous prenons l'exemple précédent, en retrouvant la solution avec x_0=1.5.

$$f(x)=x^2-3=0$$

Solution :

La fonction *f* est dérivable sur R : $f' = 2x$.

- $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)}$

  ↳ $\boldsymbol{x_1 = 1.75}$ $\Rightarrow |\boldsymbol{x_1 - x_0}| = |1.75 - 1.5| = \mathbf{0.25} \neq 0.01$

- $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.75 - \frac{f(1.75)}{f'(1.75)}$

  ↳ $\boldsymbol{x_2 = 1.7321}$ $\Rightarrow |\boldsymbol{x_2 - x_1}| = |1.7321 - 1.75| = 0.01$

La solution approchée est : x_2=1.7321 il a fallu juste deux opérations.

Exemple 2 :

Prenons l'exemple historique qu'avait pris Newton pour expliquer sa méthode :

- Déterminer une approximation de la solution de :

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Solution :

- ***L'équation admet une unique solution entre 2 et 3 :***

On pose la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\boldsymbol{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x - 5$

La fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\boldsymbol{R}$ (car polynôme) et : $f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816$ •

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\approx -3{,}911$	↘	$\approx -6{,}089$	↗	$+\infty$

A l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-5\approx-3,911 \text{ et } f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-5\approx-6,089$$

D'après le tableau de variation :

- Si $x\in\left]-\infty;\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$, alors $f(x)<0$. La fonction ne peut s'annuler.
- Si $x\in\left]\sqrt{\frac{2}{3}};\ +\infty\right[$, la fonction f est continue (car dérivable), monotone et $f(x)\in[-6.089;\ +\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha)=0$

On peut affiner l'intervalle de α : $f(2)=-1$ et $f(3)=16$ donc $\alpha\in[2\ ;3]$

La fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur $\boldsymbol{R}$ et la solution $\alpha\in[2\ ;3]$.

- ***Utilisation de l'algorithme :***

On peut utiliser pour x_0 soit 2 soit 3, mais $f(2)$ est plus proche de 0, sa convergence est plus rapide.

Si l'on effectue l'algorithme à la main, on a le tableau suivant pour une précision de 10^{-3} :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	2	-1	10	0,1	2,1
1	2,1	0,061	11,23	$-0{,}005\,43$	2,094 57
2	2,094 57	2×10^{-4}	11,16	-2×10^{-5}	2,094 55

On s'aperçoit de la redoutable efficacité de cet algorithme car en deux termes il arrive à une précision de 10^{-3}.

Chapitre II :

Résolution des systèmes d'équations linéaires AX=B

Sommaire

2.1 Introduction :

Beaucoup de problèmes se réduisent à la résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Il existe deux grandes classes de méthodes pour résoudre ce type de systèmes :

- ***Les méthodes directes*** qui déterminent explicitement la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques.

- ***Les méthodes itératives*** qui consistent à générer une suite de vecteurs convergeant vers la solution du système.

2.2 Système d'équations linéaires :

Définition : soit *n, p ≥1* des entiers. Un système linéaire *n x p* est un ensemble de *n* équations linéaires à *p* inconnu peut être écrit de la forme suivante :

$$(s)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et les seconds membres b_i sont des éléments donnés de *R*, les inconnues $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_p$ sont à rechercher dans R.

Si on note:

$$A: \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ . \\ . \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{pp} \end{pmatrix}; \quad B: \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}; \quad x: \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$$

Où la matrice ***A*** et le vecteur ***b*** sont connus et où ***x*** est un vecteur d'inconnues.

➢ Le système ***(S)*** est équivalent à l'écriture matricielle $A.x = b$

- Dans ce chapitre, nous ne traiterons que des systèmes linéaires carrés d'ordre n à coefficients réels, autrement dit $A = (a_{ij}) \in R$ et $b = (b_i) \in R^n$.

- Pour résoudre ce système, il existe deux méthodes :

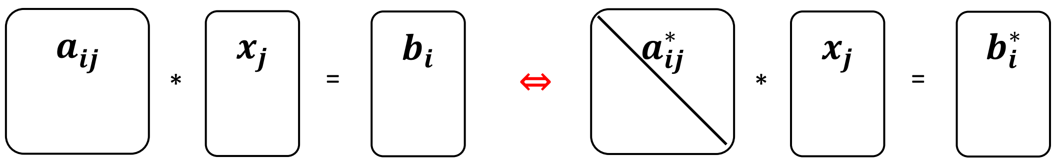
  - **Méthode directe (Gauss)**
  - **Méthode itérative (Gauss-Seidel)**

2.3 La méthode d'élimination de Gauss :

La méthode de *triangularisation de Gauss*, encore appelé *méthode du pivot de Gauss* ou *élimination de Gauss*, consiste à transformer une matrice ***A*** en une matrice triangulaire supérieure ***A'***, en éliminant, colonne après colonne, les éléments non nuls en dessous de la diagonale:

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0} \quad (\boldsymbol{i} > j)$$

- Le but de cette méthode est d'annuler progressivement les coefficients qui se trouvent sous la diagonale. Le système en suite résolu en commençant par la dernière des équations transformées.



- Les pivots $a_{kk}^{(k)}$ doivent être différents de zéro.

- Si $a_{kk}^{(k)} = 0$ → on doit permuter deux lignes avant de poursuivre le calcul.

$\boldsymbol{A.x = b}$ S'écrit :

$$(s)\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3} \end{cases}$$

La forme augmentée :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{33} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{33} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{pmatrix}$$

- ❖ Les termes diagonaux sont appelés ***les pivots.***
- ❖ Si un pivot a_{ii} est nul, on change la ligne.

L'algorithme de Gauss qui va triangulariser la matrice ***A*** se déroule de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} . a_{kj}^{(k)} & i = k+1, \dots n \\ a_{ij}^{(k+1)} = 0 & j = k+1, \dots n \\ b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} . b_{k}^{(k)} & \end{cases}$$

L'Algorithme d'élimination de Gauss :

1) ***La triangularisation***

pour *k=1* ***jusqu'à*** *n-1*

pivot ← a_{kk} (****stratégie de pivot****)

Si *pivot≠0* ***alors***

pour *i=k+1* ***jusqu'à*** *n*

$b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{pivot} b_k$

pour *j=k+1* ***jusqu'à*** *n*

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{pivot} a_{kj}$

Fin pour

Fin pour

Fin Si

Fin

La solution du système suivant l'algorithme est:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_n}. \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}.x_j\right) \end{cases}$$

2) Résolution du système triangulaire :

$$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$$

pour *i=n-1* ***jusqu'à*** *1*

somme← 0

pour *j=i+1* ***jusqu'à*** *n*

somme← somme + $a_{ij}\ x_j$

Fin pour

$$x_i \leftarrow \frac{b_i - somme}{a_{ii}}$$

Fin pour

Exemple :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

- Calculer la solution exacte en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.

Solution :

La forme augmentée :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & * & 1 \\ 5 & -6 & 2 & * & 2 \\ -4 & 2 & 1 & * & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & * & 1 \\ 0 & -8 & 1 & * & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} & * & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & * & 1 \\ 0 & -8 & 1 & * & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & * & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Donc la solution est : $X^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.4 La méthode indirect « Gauss-Seidel » :

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative (indirecte) qui permet de fournir des solutions approchées de résolution de système linéaire de la forme ***A.x=b*** où :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{33}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix}$$

Pour cela on va construire une suite de vecteurs :

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\dots x^{(k)}, x^{(k+1)}$$

Qui converge vers ***X***, solution du système d'équations linéaires.

Soit le système de 3 équations à trois inconnues :

$$(s)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}\,x_1 - a_{23}\,x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}\,x_1 - a_{32}\,x_2)/a_{33} \end{cases}$$

À la première itération, on calcule à partir du vecteur initial :

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)};\ x_2^{(0)};\ x_3^{(0)})$$

Les valeurs de ***x*** de la première itération se calculent ainsi :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)})/a_{11} \\ x_2^{(1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)})/a_{22} \\ x_3^{(1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})/a_{33} \end{cases}$$

Le calcul de $x^{(k+1)}$ lorsque $x^{(k)}$ est connu :

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} \ a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} \ a_{ij}x_j^{(k+1)}}{a_{ij}}}$$

Avec *i=1…n*

- L'algorithme de Gauss-Seidel ne nécessite qu'un vecteur de stockage, $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}$étant remplacé par $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k+1})}$ au cours de l'itération.

Le test d'arrêt :

On arrête les calculs lorsque les valeurs successives de x_j sont suffisamment voisines.
Pour cela, on peut utiliser :

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq e^{(k+1)}$$

Exemple :

Voici un aperçu d'exécution pour le système suivant par la méthode de Gauss Seidel $X^{(0)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 \ + x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \ = 8 \\ 4x_1 + \qquad 7x_3 = 16 \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{13 - x_2 + x_3}{2} \\ x_2 &= \frac{8 - x_1 + x_3}{-5} \qquad \Rightarrow \qquad apres\ 3\ it\acute{e}rations : \\ x_3 &= \frac{16 - 4x_1}{7} \end{aligned}$$

On trouve la solution suivante : $X^{(3)} = (6.0139050, -0.16744637, -1.1508029)$

Chapitre III :

Méthodes Intégration numérique

Sommaire

3.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est d'approcher numériquement $\int_a^b f(x)\,dx$, très souvent le calcul explicite de l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,\ b]$ dans R, définie par $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ est impossible à atteindre. Par conséquent, on fait appel à des méthodes numériques, afin de calculer une approximation de $I\ (f)$. Dans ces méthodes numériques, la fonction f, est remplacée par une somme finie constituée de n sous-intervalles.

3.1.1 Les motivations:

Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée ***analytiquement*** (à la main). Cependant, ce n'est que très rarement ***possible***, et le plus souvent un des cas suivants se présente :

- Le calcul analytique est long, compliqué et rébarbatif
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer.
- Cette intégrale n'a pas d'expression analytique.

Dans tous ces cas, on préfèrera calculer ***numériquement*** la valeur de l'intégrale ***I***.

3.1.2 Le principe :

L'idée principale est de trouver des méthodes qui permettent de calculer rapidement une valeur approchée $\tilde{I}$ de l'intégrale à calculer :

$$\tilde{I} \approx I$$

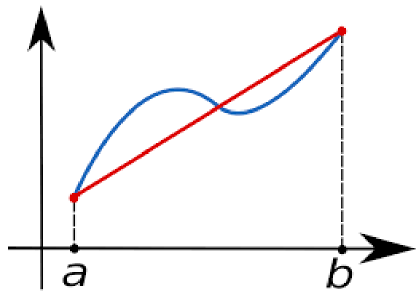
$$\tilde{I} = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f_k$$

Où $\quad f_k = f(x_k), \qquad k \in [0, n]$

3.2 *Méthode des trapèzes :* (P=1)

Pour approximer la fonction f, cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 (la droite) qui passe par $f_0 = f(a)\ et\ \ f_1 = f(b)$:

$$\boxed{P_1(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 - f_0}{b - a}\left(x - \frac{a + b}{2}\right)}$$



L'intégrale approchée $\tilde{I} = \int_a^b P_1(x)dx$ se calcule alors mathématiquement ou géométriquement et donne :

$$\boxed{\tilde{I_1} = (b - a).\frac{f_0 + f_1}{2} = (b - a).\frac{f_a + f_b}{2}}$$

En cas plusieurs polynômes :

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en sous- intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, avec $i = 1,2,\ldots, n$; $x_0 = a$; $x_n = b$ sur lesquels la fonction f est remplacée par le segment de droite qui joint les points $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et $(x_i, f(x_i))$.

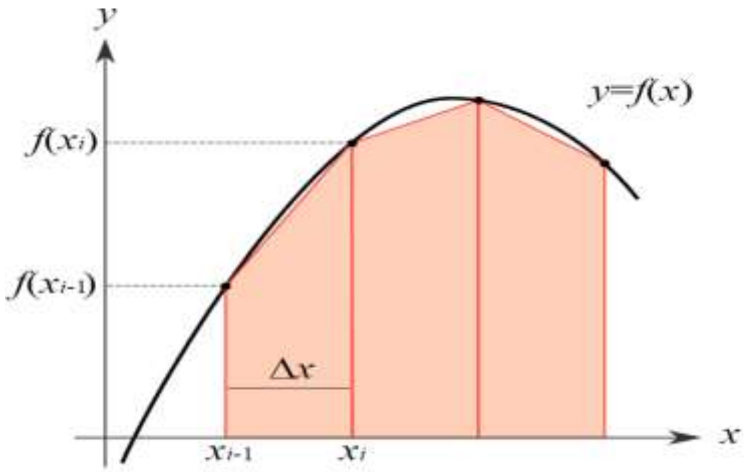


Figure 3.1 *:* Principe de la méthode des trapèzes

$$\boxed{\widetilde{I_n} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)}$$

n **:** nombre de trapèzes.

h= *(b-a)/n* signifie la longueur de sous intervalles.

Calcul de l'erreur **:**

On peut montrer que pour la formule des trapèzes, l'erreur est donnée par :

$$\boxed{E = \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}\right| . \underbrace{sup}_{x\in[a,b]} \left|f''(\varepsilon)\right|}$$

L'Algorithme des trapèzes :

Lire (a; b ; n)

h=(b – a)/ n ; ***(*le pas de calcul*)***

s1= (f(a) + f(b))/2 ;

s2=0 ;

pour *k=1* ***jusqu'à*** *n-1, 1 ;*

*s2 = s2 + f (a+k*h);*

fin

*Int=h/2 *(s1+s2)*

Afficher (*'Int'*)

Fin

Exemple :

- Calculer $\int_0^5 e^{\sin x}\,dx$ en prenant n=5 ; Donner une majoration de l'erreur.
- Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de 0.01.

Solution :

La formule des trapèzes :

$$\widetilde{I_n} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 0$	1
$x_1 = x_0 + h = 1$	2.3198
$x_2 = x_1 + h = 2$	2.4826
$x_3 = x_2 + h = 3$	1.1516
$x_4 = x_3 + h = 4$	0.4692
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$	0.3833

$$\int_0^5 f(x)dx \approx \frac{5-0}{5}\left(\frac{f(5)+f(0)}{2} + f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\right) = \mathbf{7.1147}$$

❖ Pour avoir une précision de 0.01, il faut avoir :

$$\left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}\right| . \underbrace{sup}_{x\in[a,b]} |f''(\varepsilon)| \leq 0.01$$

➪ Ce qui donne :

$$n \geq \sqrt{\frac{sup\,|f''(\varepsilon)|(b-a)^3}{12 * 0.01}} = 53.2; \qquad \text{soit} \quad \boldsymbol{n = 54}$$

3.3 Méthode de Simpson :

Pour approximer la fonction *f*, cette méthode utilise le polynôme du second degré (d'ordre2) définissant par un arc de parabole passant par ***les trois points***

$$f_0 = f(a) \ ; \ f_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ et \ \ f_2 = f(b) \ .$$

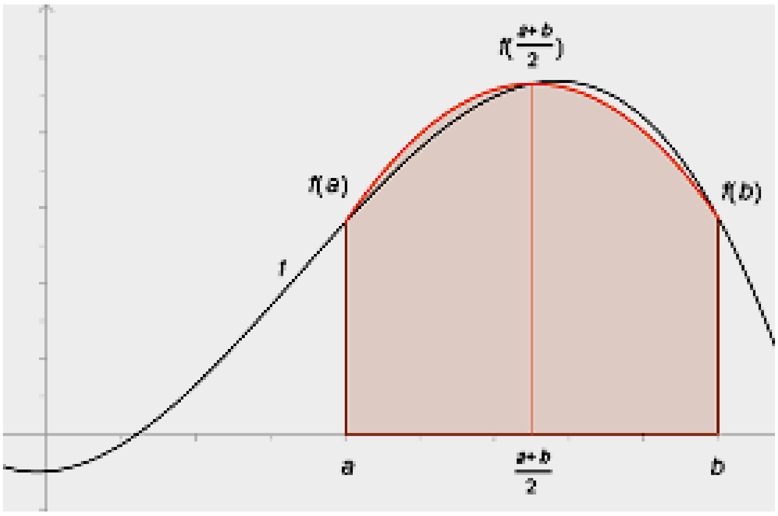


Figure 3.2 *:* Principe de la méthode de Simpson

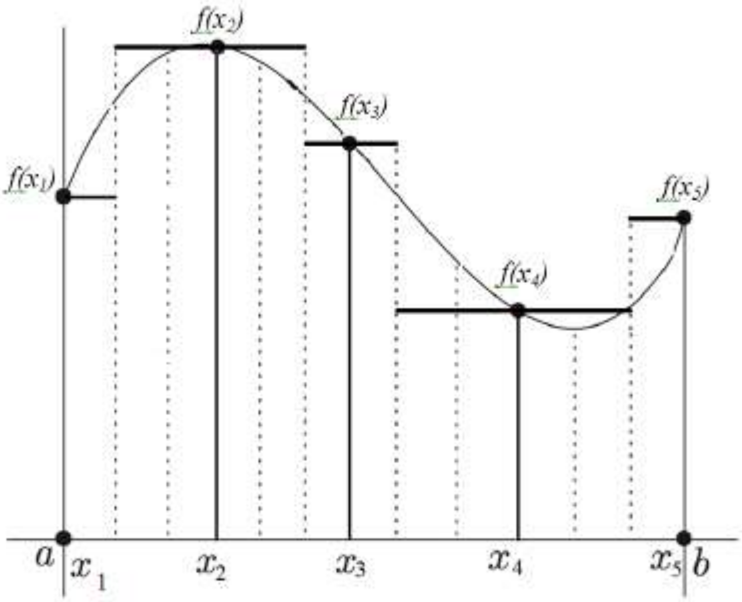
L'intégrale approchée $\tilde{I}$ se calcule alors simplement et donne :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx P_2(x) \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Cette formule est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à ***3*** : on dit que la méthode de Simpson est ***d'ordre 3***.

Par ailleurs, plus l'intervalle est ***petit***, ***meilleure*** est l'approximation de la valeur de l'intégrale. Par conséquent, pour obtenir un résultat correct, on subdivise l'intervalle [a,b] en un nombre ***pair*** de sous-intervalles et on additionne la valeur obtenue sur chaque sous-intervalle. On a ainsi :

- ***n*** est le nombre de sous-intervalles de [a,b] avec n pair;
- ***h= (b - a) /n*** est la longueur de ces sous-intervalles ;
- $x_i = a + ih$ pour $i=0, 1,..., n-1, n$.



$$\tilde{I} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots ... + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_n + 4\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2k}\right]}$$

***Calcul de l'erreur* :**

On peut montrer que pour la formule de Simpson, l'erreur est donnée par :

$$E = \left|\frac{(b-a)^5}{180n^4}\right| . \underbrace{\sup}_{x\in[a,b]} |f^4(\varepsilon)|$$

L'Algorithme des trapèzes :

```
Lire (a; b ; n)
    h=( b – a )/ n ;      (*le pas de calcul*)
    s1= f(a) + f(b) ;

    s2=0 ;
  pour   k=1   jusqu'à   n-1, 2 ;
        s2= s2 +4* f ( a+ k*h);
  Fin

  s3=0 ;
  pour   k=2   jusqu'à   n-2, 2 ;
  s3= s3 + 2* f(a+k*h);

  Fin

  Int=h/3*(s1+s2+s3);

   Afficher  ('Int');
Fin
```

Exemple :

- Calculer $\int_0^5 e^{\sin x}\, dx$ en partageant l'intervalle [0, 5] en 4 segments.
- Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de 0.01.

Solution :

Pour la méthode de Simpson, le nombre de segments doit être pair, c'est la raison pour laquelle on a pris n=4 et non pas n=5 comme pour les cas précédents.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{4} = 1.25$$

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{f(x_i)}$
$x_0 = a = 0$	*1*
$x_1 = x_0 + h = 1.25$	*2.5831*
$x_2 = x_1 + h = 2.5$	*1.8193*
$x_3 = x_2 + h = 3.75$	*1.5646*
$x_4 = x_3 + h = 5 = b$	*0.3833*

D'après la formule de Simpson, on a :

$$\tilde{I} = \int_0^5 f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{1} f_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{1} f_{2i}\right]$$

$$\int_0^5 f(x)dx \approx \frac{1.25}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2)\right] = \mathbf{7.3387}$$

❖ Pour avoir une précision de 0.01, il faut avoir :

$$\left|\frac{(b-a)^5}{180n^4}\right| . \underbrace{sup}_{x\in[a,b]} \left|f^4(\varepsilon)\right| \leq 0.01$$

- En dérivant 4 fois la fonction $f(x) = e^{\sin x}$, on obtient :

$$f^4(x) = e^{\sin x}(sin^4(x) + 6\, sin^3(x) + 5 sin^2(x) - 5\sin(x) - 3)$$

$$\underbrace{sup}_{x\in[0,4]} |f^4(x)| = 4\, e$$

- Ce qui donne :

$$n \geq \sqrt{\frac{sup\, |f^4(\varepsilon)|(b-a)^5}{180 * 0.01}} = 11.7, \qquad \text{soit} \quad \boldsymbol{n = 12}$$

Rappelons que ***n*** doit être pair, le premier entier naturel pair ≥ 11.7 est bien 12.

Ce qui montre que la méthode de Simpson est plus précise comparée à la méthode précédente.

Chapitre IV :

Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

Sommaire

4.1 Introduction :

Les équations différentielles constituent l'un des domaines les plus importants de l'analyse grâce à leurs nombreuses applications. Elles permettent de modéliser mathématiquement plusieurs phénomènes physiques et biologiques et d'étudier des problèmes de population, de métrologie...

Il n'est pas toujours possible de résoudre ***les équations différentielles*** et trouver leurs solutions analytiques, pour tels problèmes on applique des méthodes numériques pour déterminer des solutions approchées aux équations différentielles.

L'objet de ce travail se porte sur la résolution numérique des équations différentielles linéaires. En effet pour résoudre ce problème plusieurs méthodes numériques sont possibles parmi les quelles on présente ***la méthode d'Euler*** et celle de ***Runge-Kutta***.

4.2 La méthode d'Euler :

La méthode d'Euler, nommée ainsi en l'honneur de *Leonhard Euler* ; est une procédure numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec *une condition initiale*. C'est la plus ancienne et la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles.

C'est une approximation linéaire par morceaux de la trajectoire sur l'intervalle [a b], on choisit $n+1$ points t_0, t_1, t_2, t_3 …. t_n, avec $t_0 = a$, $t_1 = b$ et le pas $h = (b - a)/2$

Principe :

- Étant donnée une fonction ***f*** définie sur un intervalle $I=[x_0,x_n]$ et un réel y_0.
- On cherche une fonction ***F***, dérivable sur I, telle que :

$$\begin{cases} F(x_0) = y_0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases} \quad \text{pour tout } \boldsymbol{x} \text{ de } \boldsymbol{I}$$

Lorsqu'on ne sait pas trouver une formule explicite de ***F(x)***, la méthode d'Euler permet de tracer ***une courbe approchée*** de celle de ***F***.

Si ***F*** est une fonction dérivable sur un intervalle ***I*** et x_i un réel de ***I.***

Pour tout réel ***h*** non nul et proche de 0 tel que x_i+h soit dans ***I*** on a :

$$F(x_i + h) \approx F(x_i) + h\,F'(x_i)$$

- Soit $F(x_1) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$

- Donc $\begin{cases} F(x_1) \approx y_0 + h\,f(x_0) \\ y_1 = y_0 + h\,f(x_0) \end{cases}$

- On obtient $F(x_1) \approx y_1$

$$\begin{cases} F(x_2) = F(x_1) + h\,f(x_1) \\ y_2 = y_1 + h\,f(x_1) \end{cases}$$

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + h\,f(x_{n-1})}$$

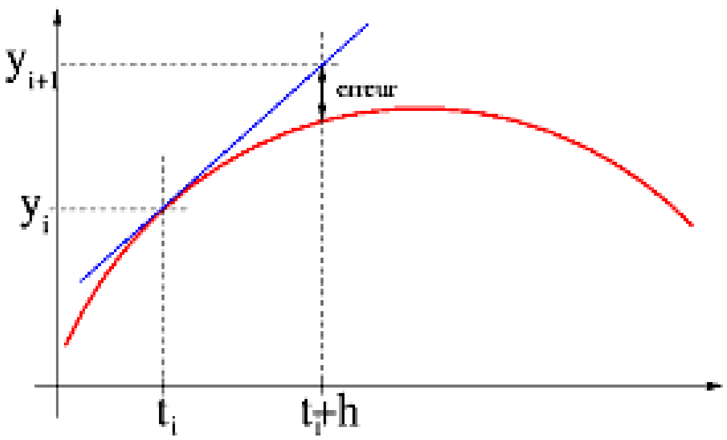


Figure 4.1 : Principe de la méthode d'Euler

L'Algorithme d'Euler

1. Initialisation du pas ***h*** et de la durée ***T***.
2. Initialisation des conditions initiales :

   t=0 et y=y(0).
3. Tant que **t ≤ *T*** faire :

a. Calcul de $\boldsymbol{k_1 = f(t,y)}$.

b. $\boldsymbol{y = y + h\,k_1\,;\; t = t+h}$

c. enregistrement des données.

Exemple :

Faire trois itérations avec *h=0.1* de la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{cases} y'(t) = t\sin(y(t)) \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

On a donc : $t_0 = 0,\ y_0 = 2 \quad et \quad f(t_n, y_n) = t\sin(y(t))$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 2 \\ y_1 = 2 + 0.1.0.\sin(2) = 2 \\ y_2 = 2 + 0.1.0.1.\sin(2) = 2.00 \end{cases}$$

4.3 La méthode de Runge-Kutta :

Les méthodes de Runge-Kutta (RK) d'ordre 1,2 ou 4 sont des méthodes d'approximation de solutions des équations différentielles, elles ont été nommées en l'honneur des mathématiciens ***Carl Range*** et ***Martin Wilhelm Kutta*** (1901).

C'est méthode reposent sur le principe de l'itération, c'est à dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite, ce sont des méthodes à pas unique, directement dérivées de la méthode d'Euler. Elle calcule la valeur de la fonction en quatre points intermédiaires selon :

$$\begin{cases} y_0 = \ valeur\ initiale \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(f(t_k, y_{1k}) + 2f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{2k}\right) + 2f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{3k}\right) + 2f(t_{k+1}, y_{4k})\right) \end{cases}$$

$$avec\ k = 0, 1, \dots\dots, n-1\ et \quad \begin{cases} y_{1k} = y_k \\ y_{2k} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_{2k})) \\ y_{3k} = y_k + \frac{h}{2}\left(f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{2k}\right)\right) \\ y_{4k} = y_k + h\left(f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{3k}\right)\right) \end{cases}$$

Notons que le nombre de termes retenus dans la série de Taylor définit l'ordre de la méthode de ***Runge-Kutta***. Il vient que la méthode ***Runge-Kutta*** d'ordre 4, s'arrête au terme *O (h4)* de la série de Taylor.

L'Algorithme de Runge-kutta

1. Initialisation du pas ***h*** et de la durée ***T***.
2. Initialisation des conditions initiales *: t=0 et y=y(0).*
3. Définition de la fonction ***f(t, y)***.
4. Tant que $t \leq T$ faire :
   a. Calcul de $k_1 = f(t,y)$.
   b. Calcul de $k_2 = f(t + h/2, y + hk_1/2)$.
   c. Calcul de $k_3 = f(t + h/2, y + hk_2/2)$.
   d. Calcul de $k_4 = f(t + h, y + hk_3)$.
   e. $y = y + h/6\ (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$; $t = t+h$.
   f. enregistrement des données.

4.4 Pas variable :

Comment choisir le pas h ?

- Trop large : erreurs, instabilité, divergence…
- Trop petit : on n'avance pas, long temps de calcul.

  - On veut un pas idéal :

    - Aussi grand que possible sans trop d'erreur.
    - Lié aux raideurs des équations.
    - Le pas idéal peut varier au cours du temps.

L'estimation de l'erreur se fait par deux méthodes :

- Euler avec un pas h.
- Euler avec deux pas $h/2$.
- Erreur estimée = différence des deux valeurs :

  - $Erreur = |X_a - X_b|$

Annexe

Examen 1

Exercice01 :

Soit f la fonction définie sur R par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

1. Etudier le sens de variations de f(x) sur R.
2. Démontrer que l'équation f(x) admet une unique solution α dans R.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} prés en utilisant la méthode de dichotomie.

Exercice 02 :

Déterminer par la méthode *des trapèzes* puis par celle de *Simpson* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

1. Ces points d'appui sont ceux donnant *sin x*, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Exercice 03 :

Soit le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.
2. Faire deux itérations avec la méthode de Gauss Seidel, on prend le vecteur initial$x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Examen 2

Question de cours :

1. Donner le principe du théorème des valeurs intermédiaires (***TVI***).
2. Quelle est la différence entre la méthode des trapèzes et celle de Simposon.
3. Donner le principe de la méthode d'Euler.

Exercice01 :

2. Déterminer par la méthode *des trapèzes* puis par celle de *Simpson* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ sur la base du tableau suivant :

X	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

2. Ces points d'appui sont ceux donnant *sin x*, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Exercice 02 :

Montrer que la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ admet une racine unique dans l'intervalle [-2,2].

1. Utiliser la méthode de dichotomie pour calculer cette racine (prendre $\varepsilon=10^{-2}$).

Exercice 03 :

Soit le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = -1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.
2. Faire deux itérations avec la méthode de Gauss Seidel, on prend le vecteur initial$x^{(0)}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Examen 3

Question de cours :

1. Quelle est la différence entre la méthode des trapèzes et celle de Simpson.
3. Donner le principe de la méthode de Gauss.

Exercice 01 :

Montrer que la fonction $f(x) = x^3 - 4x - 8.95$ admet une racine unique dans l'intervalle [2,3].

2. Utiliser la méthode de dichotomie pour calculer cette racine (prendre $\varepsilon = 10^{-2}$).

3. Recalculer cette racine en utilisant la méthode de Newton, avec $x_0=3$.

Exercice 02 :

On considère l'intégrale : $I = \int_1^3 \ln(x)\, dx$

3. Evaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes puis celle de Simpson avec *n*=4 sous-intervalle. Comparer les résultats ainsi obtenus avec la valeur exacte.

4. Quel nombre de sous-intervalles *n* faut-il choisir pour avoir une erreur *E* inférieure à 0.5 10^{-4} grâce à la méthode des Trapèzes.

Exercice 03 :

Soit le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 6x_2 - 3\,x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

3. Calculer la solution exacte en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.
4. Faire deux itérations avec la méthode de Gauss Seidel, on prend le vecteur initial $x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Examen 4

Exercice 01 :

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ définie sur l'intervalle [0,1].

4. Utiliser la méthode de dichotomie pour calculer cette racine (prendre **$\varepsilon=10^{-3}$**).

5. Recalculer cette racine en utilisant la méthode de Newton.

Exercice02 :

On considère l'intégrale : I= $\int_1^3 \ln(x)\, dx$

5. Evaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes puis celle de Simpson avec *n*=4 sous-intervalle. Comparer les résultats ainsi obtenus avec la valeur exacte.

Exercice 03 :

Soit le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4\,x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4\,x_3 = 14 \\ 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Calculer la solution exacte en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.
6. Faire trois itérations avec la méthode de Gauss Seidel, on prend le vecteur initial $x^{(0)}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Examen 5

Questions de cours :

1) La méthode ***d'élimination de Gauss*** consiste à transformer la matrice A en :

a) une matrice diagonale ☐ **b)** une matrice triangulaire supérie☐ **c)** une matrice ☐ unitaire

2) La méthode ***des trapèzes*** est un polynôme (justifier votre réponse) :

a) d'ordre 1 ☐ **b)** d'ordre 2 ☐ **c)** une droite ☐ **d)** une parabole ☐

3) Quelle est la différence entre la méthode de Gauss et celle de Gauss-Seidel ?

4) Décrire brièvement le principe de la méthode ***d'Euler.***

Exercice 01 :

Soit *f* une fonction définie sur IR par : $f(x) = \cos(x) - x$.

1. Montrer par la méthode de dichotomie que cette fonction admet une seule racine sur l'intervalle [0.75, 1] (prendre $\varepsilon=10^{-2}$).
2. Recalculer cette racine en utilisant la méthode de Newton avec x_0=0.75.

Exercice 03 :

Soit le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2\,x_1 - \quad x_2 \qquad\quad = 1 \\ -x_1 + 2\,x_2 - \; x_3 = 0 \\ \qquad\quad -x_2 + 2x_3 \; = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.

2. Faire deux itérations avec la méthode de Gauss Seidel, on prend le vecteur initial $x^{(0)}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Bibliographie

[1]. G. Allaire et S.M. Kaber, *Algèbre linéaire numérique*, Ellipses, 2002.

[2]. C. Brezinski, *Introduction à la pratique du calcul numérique*, Dunod, Paris 1988.

[3]. J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists* , New York, 1992, Marcel Dekker, Inc.

[4]. F. Liret et D.Martinais, *Cours de mathématiques, Algèbre 1ère année*, 2003, Dunod

[5]. J. G. Dion et R. Gaudet, *Méthodes d'Analyse Numérique : de la théorie à l'application*. MODULO, 1996.

[6]. P., LASCAUX et R THÉODOR., *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Méthodes itératives*. Dunod, 2000.

[7]. FFILBET., *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* Dunod, 2009.

[8]. F .Jedrzejewski ., *Introduction aux méthodes numériques,* Deuxième edition, Springer Verlag, 2005. France.

[9]. P. G CIARLET., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation-cours et exercices corrigés*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1998.

[10]. G. Allaire et S.M. Kaber, Introduction *à Scilab. Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire*, Ellipses, 2002.