

N° d'ordre :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب

Universite Ain Témouchent-Belhadj Bouchaib



Faculté : Sciences et de la Technologie  
Département : Génie civil et travaux publics  
Laboratoire des Structures Intelligentes



## THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT**

**Domaine** : Sciences et technologie

**Filière** : Travaux Publics

**Spécialité** : voies et ouvrages d'arts

**Par** : DJIDAR Fatima Zohra

### Intitulé

**Analyse dynamique des structures en utilisant des  
différentes formes du champ de déplacement ;  
application à la vibration libre d'un tablier de pont**

Soutenue publiquement, le / / , devant le jury composé de :

Nom & Prénom(s)	Grade	Qualité	Etablissement de rattachement
GUENANECHÉ Boucif	Pr	Président	Université d'Ain Témouchent.
HEBALI Habib	Pr	Rapporteur	Université de Mascara.
AMARA Khaled	Pr	Co-rapporteur	Université d'Ain Témouchent.
SADOUN Mohamed	MCA	Examineur	Université de Mascara.
YOUZRA Hadj	MCA	Examineur	Université de Mascara.
ATTIA Amina	MCA	Examinatrice	Université d'Ain Témouchent.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





# DEDICACES

*A la mémoire de mon père disparu trop tôt* 🌹

*Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde et son vaste paradis.*

*A ma très chère mère* 🌹

*Puisse Dieu, le tout puissant vous combler de santé, de bonheur et vous procurer une longue vie.*

*A mes frères* 🌹

*A tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de mon cursus.* 🌹



**REMERCIEMENTS**

# REMERCIEMENTS

Avant tout, Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné le courage ; la volonté et la patience pour faire ce travail.

Cette thèse présente les résultats de recherches réalisées au sein du Laboratoire des structures intelligentes (SSL) de L'université d'Ain Témouchent, dirigé par **Mr. AISSA MAMOUN Sidi Mohamed**, Professeur à l'Université Belhadj Bouchaib d'Ain Témouchent. Je tiens à le remercier pour m'avoir accueillie au sein de ce laboratoire.

Au terme de ce travail, je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de cette étude.

Je voudrais remercier grandement mon directeur de thèse, **Mr. HEBALI Habib**, Professeur à l'Université Mostapha Stambouli de Mascara et mon co-directeur de thèse **Mr. AMARA Khaled**, Professeur à l'Université Belhadj Bouchaib d'Ain Témouchent, pour m'avoir fait confiance en me confiant ce sujet de recherche passionnant et riche de connaissances scientifiques. Je tiens à les remercier surtout, pour tous leurs nombreux conseils précieux et avisés à la hauteur de leurs compétences et de leurs réelles qualités humaines. Ils ont toujours été là pour me soutenir au cours de l'élaboration de cette thèse. Je les remercie pour toute la patience et la disponibilité dont ils ont fait preuve à mon égard.

Je tiens également à témoigner toute ma reconnaissance au Professeur **Houmadi Youcef**, directeur du Centre de Documentation, de Recherche et d'Expertise de l'ENA, pour les conseils judicieux et le soutien constant qu'il a su me donner tout au long de ce travail doctoral .Merci pour m'avoir aidé à pousser la voiture !

Je tiens à remercier **Mr. GUENANECHÉ Boucif**, Professeur à l'Université Belhadj Bouchaib d'Ain Témouchent de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

J'adresse également mes profonds remerciements aux Maitres de conférences **Mr. SADOUN Mohamed** et **Mr. YOUZRA Hadj** (Université Mostapha Stambouli de Mascara), ainsi que **Mme. ATTIA Amina**, Maitre de conférences à l'Université Belhadj Bouchaib d'Ain

Témouchent, les membres du jury qui ont accepté à évaluer ce travail. Soyez assuré de mon sincère respect et de ma plus profonde gratitude.

Enfin, Je remercie du fond du cœur ma famille pour leur soutien permanent, leur disponibilité et leurs sacrifices.



**RESUME**

# RESUME

Dans ce travail on s'intéresse à l'analyse de flexion et de vibration libre d'un tablier de pont épais simplement appuyé en utilisant une nouvelle théorie exponentielle de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Contrairement aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et à la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) existantes, le modèle proposé utilise un nouveau champ de déplacement qui intègre des termes d'intégrales indéterminés et ne contient que deux variables. Les équations de mouvement des plaques sont déterminées par le principe des travaux virtuels. Les solutions analytiques pour les plaques isotropes simplement appuyées sont obtenues en utilisant la méthode de Navier, puis les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres. Les résultats des déplacements, des contraintes et des fréquences sont comparés avec ceux disponibles dans la littérature pour montrer l'efficacité de la théorie proposée. Les résultats démontrent que la théorie actuelle avec seulement deux inconnues est non seulement précise et efficace, mais aussi simple pour résoudre les réponses de flexion et de vibration libre d'un tablier de pont épais et peut atteindre la même précision que les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDTs existantes qui ont plus de variables.

**Mots clés :** Flexion, vibration libre, tablier de pont, théories de déformation de cisaillement, plaques isotropes, fréquences fondamentales



# ABSTRACT

# Abstract

This work focuses on the analysis of the bending and free vibration of simply supported thick bridge deck using a new exponential shear deformation theory. Contrary to the existing higher order shear deformation theories (HSDT) and the first shear deformation theory (FSDT), the proposed model uses a new displacement field which incorporates undetermined integral terms and involves only two variables. The equations of motion of the plates are determined by the principle of virtual work. The analytical solutions of simply supported isotropic plates are obtained by employing Navier method and then fundamental frequencies are obtained by solving a problem with eigenvalues. The results of displacements, stresses and frequencies are compared with those available in the literature to show the efficiency of the proposed theory. The results demonstrate that the present theory with only two unknowns is not only accurate and efficient, but also simple for solving the flexural and free vibration responses of thick bridge deck and can achieve the same accuracy of the existing higher order shear deformation theories HSDTs which have more number of variables.

**Keywords:** Bending, free vibration, bridge deck, shear deformation theories, isotropic plates, fundamental frequencies.

ملخص

## ملخص

في هذا العمل نركز على تحليل الانحناء والاهتزاز الحر لسطح الجسر السميكة المستند على مساند بسيطة باستخدام نظرية جديدة لتشوه القص الأسي. على عكس نظريات تشوه القص ذو الترتيب العالي ونظرية تشوه القص من الدرجة الأولى، فإن النموذج المقترح يقدم حقل إزاحة جديد يحتوي على تكاملات غير محددة ويتضمن مجهولين فقط. يتم تحديد معادلات حركة الصفيحة من قبل مبدأ العمل الافتراضي. يتم الحصول على الحلول التحليلية للصفائح موحدة الخواص المستندة على مساند بسيطة باستخدام طريقة نافيه، اما فيما يخص الترددات الأساسية فقد تم الحصول عليها من خلال حل مشكل القيم الذاتية. تتم مقارنة نتائج الإزاحة والاهتزازات والترددات مع نتائج النظريات المدروسة سابقا لإظهار فعالية النظرية المقترحة. تظهر النتائج أن النظرية الحالية بمجهولين فقط ليست دقيقة وفعالة فحسب بل بسيطة لحل استجابات الانحناء والاهتزاز الحر لسطح الجسر السميكة وإمكانها تحقيق نفس دقة نظريات تشوه القص ذو الترتيب العالي الموجودة والتي تحتوي على عدد أكبر من المجهولين.

**الكلمات المفتاحية:** الانحناء، الاهتزاز الحر، سطح الجسر، نظرية تشوه القص، الصفائح موحدة الخواص، الترددات الأساسية.



# TABLE DES MATIERES

# TABLE DES MATIERES

<b>DEDICACES</b> .....	<b>i</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	<b>ii</b>
<b>RESUME</b> .....	<b>iv</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>v</b>
<b>ملخص</b> .....	<b>vi</b>
<b>TABLE DES MATIERES</b> .....	<b>vii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	<b>xi</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> .....	<b>xv</b>
<b>LISTE DES NOTATIONS</b> .....	<b>xvi</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et les FGMs

I.1. Introduction.....	6
I.2. Matériaux composites .....	7
I.3. Eléments constituant d'un matériau composite .....	7
I.3.1. Matrice .....	7
I.3.2. Renforcement.....	9
I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués .....	11
I.5. Historique de développement des matériaux fonctionnellement gradués.....	18
I.6. Classification conventionnelle des matériaux FGM .....	20
I.6.1. Classification basée sur la structure des FGM.....	20
I.6.2. Classification basée sur le type de gradient FGM .....	22
I.7. Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés .....	23
I.7.1. Procédés de fabrication à l'état solide .....	23
I.7.1.1. Méthode de la métallurgie des poudres .....	23
I.7.2. Procédés de fabrication à l'état liquide .....	24
I.7.2.1. Méthodes de la force centrifuge .....	24
I.7.2.2. Méthode de coulée en barbotine .....	25

I.7.2.3. Méthode de coulée en bande .....	25
I.7.2.4. Méthode d'infiltration .....	26
I.7.2.5. Méthode de Langmuir-Blodgett .....	27
I.7.3. Procédés de fabrication à l'état gazeux .....	28
I.7.3.1. Méthodes de dépôt en phase vapeur .....	28
I.7.3.1.1. Méthode de dépôt physique en phase vapeur .....	28
I.7.3.1.2. Méthode de dépôt chimique en phase vapeur .....	29
I.7.3.2. Méthode de pulvérisation thermique .....	30
I.7.3.3. Revêtement par laser .....	31
I.8. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés .....	32
I.8.1. Aérospatiale .....	32
I.8.2. Automobile .....	34
I.8.3. Ingénierie .....	35
I.8.4. Sport .....	35
I.8.5. biomédical .....	35
I.8.6. Défense .....	36
I.8.7. Energétiques et électroniques .....	36
I.9. Application des matériaux fonctionnellement gradués FGM dans le domaine du génie civil.....	37
I.9.1. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements) .....	37
I.9.2. Les chaussées souples .....	37
I.9.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes.....	37
I.9.4. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel) .....	37
I.9.5. Les joints dans la charpente métallique .....	38
I.10. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	38
I.10.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	39
I.10.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	40
I.10.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	41
I.11. Les relations contrainte-déformation .....	42
I.12. Différents types de matériaux .....	42
I.12.1. Matériaux anisotropes .....	42
I.12.2. Matériaux monocliniques.....	44
I.12.3. Matériaux orthotropes .....	44
I.12.4. Matériaux transversalement isotropes.....	46
I.12.5. Matériaux isotropes .....	47

I.13. Conclusion .....	48
------------------------	----

## Chapitre II : Généralités sur les ponts

II.1 Introduction .....	49
II.2. Eléments constitutifs d'un pont .....	50
II.2.1. Superstructure .....	50
II.2.1.1. Eléments structuraux du tablier .....	50
II.2.1.2. Equipements du tablier .....	51
II.2.2. Appareils d'appuis .....	53
II.2.3. Appuis .....	53
II.2.3.1. Pile.....	53
II.2.3.2. Culée .....	55
II.3. Types fondamentaux de tabliers de pont et applications .....	55
II.3.1. Ponts en béton armé .....	56
II.3.1.1. Ponts à dalles pleines .....	56
II.3.1.2. Pont à dalles évidées .....	57
II.3.1.3. Sections de dalles en T.....	57
II.3.1.4. Section de dalle ou de poutre en caisson .....	58
II.3.2. Tabliers de pont orthotropes en acier .....	59
II.3.3. Ponts mixtes.....	60
II.3.4. Ponts en polymères renforcés de fibres .....	60
II.4. Conclusion .....	61

## Chapitre III : Théories des plaques

III.1. Introduction .....	62
III.2. Généralités sur les théories d'élasticité .....	62
III.2.1. Définition des plaques .....	62
III.2.2. Théorie Classique de Love-Kirchhoff (CPT, Classical plate theory) : .....	63
III.2.3. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT First Order .....	66
Shear Deformation Theory) :.....	66
III.2.4. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT Higher Shear .....	69
Deformation Theory) : .....	69
III.2.4.1. Modèles basés sur des fonctions polynomiales.....	71
III.2.4.2. Modèles basés sur des fonctions non-polynomiales .....	72

III.3. Conclusion.....	74
------------------------	----

## Chapitre IV : Analyse de flexion et de vibration libre d'un tablier du pont isotrope épais en utilisant une nouvelle ESDT

IV.1. Introduction.....	75
IV.2. Formulations théoriques.....	75
IV.2.1. Configuration géométrique .....	75
IV.2.2. Champ de déplacement de la nouvelle théorie .....	76
IV.2.3. Champs des déformations .....	77
IV.2.4. Champs des contraintes.....	78
IV.2.5. Equations de mouvement.....	78
IV.2.5.1. Energie de déformation .....	78
IV.2.5.2. Energie potentielle.....	79
IV.2.5.3. Energie cinétique .....	79
IV.3. Solutions analytiques pour une plaque isotrope simplement appuyée.....	81
IV.4. Conclusion .....	83

## Chapitre V : Résultats et discussions

V.1.Introduction .....	84
V.2. Les résultats numériques .....	84
V.1.1.Analyse de flexion .....	85
V.2.2.Analyse de la vibration libre .....	95
V.3. Conclusion.....	96
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>98</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>100</b>



# **LISTE DES FIGURES**

# LISTE DES FIGURES

## Chapitre I

<b>Fig. I. 1.</b> Schéma de la distribution de la composition des matériaux dans les FGM [93]. ....	12
<b>Fig. I. 2.</b> Matériau en deux phases [94] : a) composite traditionnel : composition et propriétés constantes ; b) FGM : changement graduel de la composition et de la microstructure donne un gradient dans les propriétés .....	12
<b>Fig. I. 3.</b> Exemples des matériaux FGM dans la nature ([97],[98] ). .....	13
<b>Fig. I. 4.</b> Protection thermique des matériaux [100]......	14
<b>Fig. I. 5.</b> Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes [101]......	16
<b>Fig. I. 6.</b> Exemples de quelques combinaisons pour un matériau FGM [104]. .....	17
<b>Fig. I. 7.</b> Aperçu historique des étapes importantes de la recherche et du développement des FGM [102]......	20
<b>Fig. I. 8.</b> Classification des structures FGM ;(a) FGM à gradient continu ; (b) FGM à gradient discontinu.....	21
<b>Fig. I. 9.</b> Différents types d'un FGM. a) Gradient de composition. b) gradient de la dimension. c), d) Gradient de l'orientation. e), f) Gradient de fraction volumique [118]. .....	21
<b>Fig. I. 10.</b> Classification des matériaux à gradient fonctionnel selon le type de gradients FGM [119]......	22
<b>Fig. I. 11.</b> Principales étapes de la métallurgie des poudres pour produire des FGM discrets [135]......	24
<b>Fig. I. 12.</b> Méthodes de fabrication de FGM par force centrifuge (a) méthode de coulée centrifuge, (b), méthode de coulée centrifuge de boue et (c) méthode de pressurisation centrifuge [142]......	25

<b>Fig. I. 13.</b> Illustration schématique du processus de coulée en bande [148].....	26
<b>Fig. I. 14.</b> Illustration schématique du processus d'infiltration (a) méthode de coulée sous pression, (b) méthode de pression [150].....	27
<b>Fig. I. 15.</b> Illustration schématique de la méthode de Langmuir-Blodgett [151]. ....	28
<b>Fig. I. 16.</b> Schéma de principe du procédé PVD [158]. ....	29
<b>Fig. I. 17.</b> Représentation schématique du procédé CVD [104]. ....	30
<b>Fig. I. 18.</b> Schéma du procédé de pulvérisation thermique [102].....	31
<b>Fig. I. 19.</b> Illustration du procédé de revêtement par laser [102].....	31
<b>Fig. I. 20.</b> Principaux domaines d'application des matériaux FGM.....	32
<b>Fig. I. 21.</b> Pièces en FGM dans les applications aérospatiales [166]. ....	33
<b>Fig. I. 22.</b> Pièces en FGM dans les applications automobiles [98]. ....	34
<b>Fig. I. 23.</b> Géométrie d'une plaque en FGM. ....	38
<b>Fig. I. 24.</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	40
<b>Fig. I. 25.</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	41
<b>Fig. I. 26.</b> Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. ....	42
<b>Fig. I. 27.</b> Plan de symétrie .....	44
<b>Fig. I. 28.</b> Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie. .....	45
<b>Fig. I. 29.</b> Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope. ....	46

## Chapitre II

<b>Fig. II. 1.</b> Eléments de structure du pont [199] .....	50
<b>Fig. II. 2.</b> Les éléments constructifs de la pile [200] .....	54

<b>Fig. II. 3.</b> Les éléments constructifs de la culée [200].....	55
<b>Fig. II. 4.</b> Dalle pleine [203] .....	57
<b>Fig. II. 5.</b> Dalle évidée [203].....	57
<b>Fig. II. 6.</b> Sections de dalles en T [201].....	58
<b>Fig. II. 7.</b> Poutre en caisson [201].....	59
<b>Fig. II. 8.</b> Tabliers de pont orthotropes en acier [201].....	59
<b>Fig. II. 9.</b> Tablier de pont mixte [204].....	60
<b>Fig. II. 10.</b> Tablier en polymères renforcés de fibres [201]. .....	61

## Chapitre III

<b>Fig. III. 1.</b> Exemple de plaque d'une géométrie quelconque [207].....	63
<b>Fig. III. 2.</b> Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff avant et après déformation [209].....	64
<b>Fig. III. 3.</b> Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [209].....	67
<b>Fig. III. 4.</b> Illustration de la plaque d'ordre élevé [209].....	69

## Chapitre IV

<b>Fig. IV. 1.</b> Géométrie des plaques et système de coordonnées .....	76
--	----

## Chapitre V

<b>Fig. V. 1.</b> La Variation du déplacement ( $\bar{u}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	86
<b>Fig. V. 2.</b> La Variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ )à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	87

<b>Fig. V. 3.</b> La Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).....	87
<b>Fig. V. 4.</b> La Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ) .....	88
<b>Fig. V. 5.</b> La Variation du déplacement ( $\bar{u}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	89
<b>Fig. V. 6.</b> La Variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	90
<b>Fig. V. 7.</b> La Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	90
<b>Fig. V. 8.</b> La Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ) .....	91
<b>Fig. V. 9.</b> La Variation du déplacement ( $\bar{u}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	93
<b>Fig. V. 10.</b> La Variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ). .....	93
<b>Fig. V. 11.</b> La Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h=4$ ).....	94
<b>Fig. V. 12.</b> La Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).....	94



# LISTE DES TABLEAUX

# LISTE DES TABLEAUX

## Chapitre I

<b>Tableau I. 1 :</b> Principales différences entre matrices TD et les TP [51] .....	8
<b>Tableau I. 2:</b> Fibres de verre principales [62]. .....	10
<b>Tableau I. 3:</b> Propriétés physiques de différentes classes de fibres de verre [48]. .....	10
<b>Tableau I. 4:</b> Les différences entre le composite et le FGM [97]. .....	15

## Chapitre III

<b>Tableau III. 1.</b> Fonctions de cisaillement relatives aux différentes théories de plaque d'ordre élevé HSDT .....	71
--	----

## Chapitre V

<b>Tableau. V. 1.</b> Comparaison du déplacement adimensionnel ( $\bar{u}$ ), du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et de la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ ) dans une plaque carrée isotrope soumis à une charge uniformément répartie.....	85
<b>Tableau. V. 2.</b> Comparaison du déplacement adimensionnel ( $\bar{u}$ ), du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), , de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ )et de la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ )dans une plaque carrée isotrope soumise à une charge sinusoïdale .....	88
<b>Tableau. V. 3.</b> Comparaison du déplacement adimensionnels ( $\bar{u}$ ), du déplacement transversal( $\bar{w}$ ), de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), , de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et de la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ )dans une plaque carrée isotrope soumise à une charge variant linéairement.....	92
<b>Tableau. V. 4.</b> Comparaison des fréquences adimensionnelles de flexion ( $\bar{\omega}_w$ ) et de cisaillement ( $\bar{\omega}_\theta$ ) des plaques carrées isotropes simplement appuyées ( $S=10$ ). .....	95
<b>Tableau. V. 5.</b> Comparaison des fréquences adimensionnelles de flexion ( $\bar{\omega}_w$ ) des plaques rectangulaires isotropes simplement appuyées ( $S=10$ ). .....	96



# **LISTE DES NOTATIONS**

# LISTE DES NOTATIONS

$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$G$	Module de cisaillement dans le plan
$E$	Module de Young
$E(z)$	Module de Young en fonction de « $z$ »
$E_m$	Module de Young du métal
$E_c$	Module de Young de céramique
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « $z$ »
$\rho(z)$	Densité du matériau en fonction de « $z$ »
$V(z)$	Fraction volumique
$p$	Paramètre du matériau
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement axial de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$ .
$\varphi_x, \varphi_y$	Les rotations autour des axes $x$ et $y$
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction $x, y$ et $z$
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion

$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta U$	Variation de l'énergie de déformation
$\delta V$	Variation de l'énergie potentielle
$\delta K$	Variation de l'énergie cinétique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_{sx}, N_{sy}, N_{sxy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$N_{Tcx}, N_{Tcy}$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$i$ et $j$	Nombres naturels
$(A_{ij}, B_{ij}, A_{sij}, H_{ij})$	Termes de rigidité de la matrice
$(m, n)$	Mode de vibration
$q(x, y)$	Charge transversale
$\bar{\omega}_w$	Fréquence adimensionnelle de flexion
$\bar{\omega}_\theta$	Fréquence adimensionnelle de cisaillement
$I_i$	Inerties de masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice



# **INTRODUCTION GENERALE**

# Introduction générale

Il est clairement entendu que les matériaux ont une plus grande influence sur la vie humaine ; il est donc nécessaire de comprendre leur comportement, les méthodes de traitement pour les utiliser dans diverses applications.

Le choix d'un matériau pour une application donnée dépend de la fonction, des exigences de fabrication, du coût, de la disponibilité, etc. En outre, une meilleure conception et une meilleure sélection des matériaux amélioreront les performances des systèmes.

Les plaques sont largement utilisées dans l'industrie et les nouveaux domaines technologiques tels que l'ingénierie aéronautique, la marine, le génie civil et mécanique.

Les effets de cisaillement transversal et de déformation normale sont définis dans les plaques flexibles en cisaillement qui peuvent être constituées des matériaux isotropes, orthotropes, anisotropes ou matériaux composites stratifiés.

L'analyse des plaques épaisses est fondamentalement un problème tridimensionnel. Les théories bidimensionnelles peuvent être dérivées en faisant des hypothèses appropriées concernant la cinématique de la déformation ou l'état de contrainte dans l'épaisseur de la plaque [1].

Dans le cadre de l'étude de stabilité des plaques, une vaste gamme de modèles de plaques a été développée.

En général, les théories des plaques peuvent être divisées en trois catégories principales, à savoir : la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques d'ordre élevé (HSDT).

La plus simple est la théorie classique des plaques (CPT), également connue sous le nom de théorie de Love-Kirchoff [2], qui ignore les effets de cisaillement transversal et fournit des résultats raisonnables pour les plaques minces et isotropes. La théorie de Kirchoff est largement utilisée pour la flexion statique, les vibrations et la stabilité des plaques minces dans le domaine de la mécanique des structures solides.

Différentes applications de cette théorie sont présentées par Timochenko et Krieger [3], Timoshenko et Gere [4], Dym and Shames [5] et bien d'autres. Strel'bitskaya et Matoshko [6] présentent une brève étude de la flexion des plaques élastiques. La revue consacrée à l'analyse de la théorie classique des plaques isotropes minces est donnée par Vasil'ev [7]. Étant donné que la déformation transversale de cisaillement est négligée dans la théorie de la CPT, elle ne peut pas être appliquée aux plaques épaisses où les effets de déformation de cisaillement sont plus importants. Ainsi, son adéquation est limitée aux plaques minces. Afin de surmonter les limites de la CPT, les théories de déformation de cisaillement ont été recommandées.

Les théories de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDTs) peuvent être considérées comme des améliorations par rapport à la théorie classique de la plaque mince de Kirchhoff.

La FSDT connu sous le nom Reissner [8] et Mindlin [9] tient compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal par le biais d'une variation linéaire des déplacements axiaux à travers l'épaisseur. Étant donné que la FSDT ne respecte pas les conditions d'équilibre aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire.

Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer, car il dépend non seulement des paramètres géométriques, mais aussi des conditions de chargement et des conditions aux limites [10].

De nombreuses recherches ont été présentées dans différents articles scientifiques en utilisant la FSDT. Pour l'analyse statique de plaques isotropes homogènes épaisses, Mindlin [9] a étendu le travail de Timoshenko [11,12]. Timoshenko a été le premier à examiner les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres. La théorie de Mindlin pour les plaques épaisses a été étendue aux plaques anisotropiques stratifiées par Yang, et al [13], Whitney et Pagano [14]. Cependant, ces théories souffrent de l'inconvénient de l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement dépendants du problème.

Mantari et Granados [15] ont proposé une nouvelle FSDT avec quatre variables dans lequel des termes d'intégrale dans la cinématique des plaques sont utilisés pour l'analyse statique de plaques sandwich fonctionnellement graduées.

Les limites de la théorie classique de la plaque et des théories de déformation de cisaillement du premier ordre ont forcé le développement de déformations de cisaillement d'ordre élevé pour éviter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement et obtenir la variation réaliste de la déformation/contrainte de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque [1].

Reddy [16] a proposé une théorie modifiée du troisième ordre qui tient compte non seulement les déformations de cisaillement transversal, mais aussi leur variation parabolique dans l'épaisseur de la plaque. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'utiliser des coefficients de correction de cisaillement pour calculer les contraintes de cisaillement.

Lee et al. [17] ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé de Reddy [16] pour l'analyse non linéaire des plaques isotropes épaisses. Hanna et Leissa [18] ont étudié la vibration libre des plaques épaisses en utilisant la HSDT.

Il existe une autre classe de théories raffinées de déformation de cisaillement, où l'utilisation de la fonction trigonométrique est faite pour prendre en compte les effets de déformation de cisaillement.

Levy [19] a développé pour la première fois une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses en utilisant des fonctions sinusoïdales dans le champ de déplacement. Stein [20,21], Stein et al. [22], ont également proposé de telles théories et les ont appliquées aux plaques isotropes sous forme modifiée.

Touratier et al [23] ont utilisé des fonctions trigonométriques pour décrire la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal dans l'épaisseur de la plaque.

Les théories contenant des fonctions trigonométriques impliquant des coordonnées d'épaisseur dans les champs de déplacement sont désignées comme théories trigonométriques de déformation de cisaillement (TSDTs).

Shimpi [24] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes afin de réduire le nombre des variables utilisées dans les équations d'équilibre.

L'effet de cisaillement transversal et de la contrainte normale transversale sur la flexion statique des plaques isotropes épaisses en utilisant la TSDT est étudié par Ghugal et Sayyad [25].

Ghugal et Pawar [26] ont développé une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de flexion, flambement et de vibration libre des plaques épaisses.

Sayyad et Ghugal [27] ont utilisé une théorie exponentielle de déformation de cisaillement pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques isotropes épaisses simplement appuyées.

Nombreuses études ont utilisé la HSDT comme Shahrjerdi et al [28] , Viswanathan et al [29] , Swaminathan et Naveenkumar [30] , Avcar [31] , Madenci [32] , Zoutania et Hadji [33] et Boulal et al [34].

Certaines études sur les caractéristiques mécaniques de la structure des plaques composites peuvent être présentées par Ghodrati et al. [35], Ton-That [36], Pinto et al [37]. Récemment, une plus grande attention a été accordée au réseau neuronal artificiel à l'aide d'un algorithme d'optimisation arithmétique pour l'évaluation des dommages dans les structures des plaques fonctionnellement graduées (FGM) comme Khatir et al. [38], Zenzen et al [39], Tran-Ngoc et al. [40], Khatir et al [41].

Cuong-Le et al [42] présentent une solution tridimensionnelle (3D) pour la vibration libre et le flambage de la plaque annulaire et de la coque conique et cylindrique de matériaux FG poreux-cellulaires à l'aide d'une analyse isogéométrique. Détection des dommages sur les plaques composites stratifiées rectangulaires à l'aide d'une technique de réseau neuronal convolutionnel à base d'ondelettes est présentée par Saadatmorad et al [43].

Ce travail de thèse a pour objectif d'analyser le comportements de flexion et de vibration libre d'un tablier de pont isotrope épais simplement appuyé en utilisant une simple HSDT avec deux variables dans lesquelles au lieu de termes dérivés dans le champ de déplacement, des termes d'intégrales indéterminées sont utilisés.

La thèse débute par une introduction générale, structuré ensuite autour de cinq chapitres et s'achève par une conclusion générale.

-Dans **le premier chapitre**, on exposera d'une façon claire des brèves généralités sur les matériaux composites, ensuite on présentera une recherche bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs classifications, les principales techniques d'élaboration de ces matériaux, ainsi que leurs domaines d'application puis on définira les différentes lois qui régissent la variation des propriétés

matérielles. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite des généralités sur le comportement élastique du matériau.

**-Le deuxième chapitre** est consacré aux généralités sur les ponts en mettant l'accent sur les types fondamentaux des tabliers.

**-Le troisième chapitre** présente les différentes théories des plaques.

**-Dans le quatrième chapitre**, on développera un modèle analytique pour prédire le comportement de flexion et de vibration libre des plaques isotropes épaisses ; dans notre cas « application à la vibration libre d'un tablier de pont ». En appliquant le principe d'Hamilton pour dériver les équations d'équilibre et pour les résoudre en utilisant la solution de Navier.

**-Le cinquième chapitre** est réservé à la validation et l'évaluation de notre modèle par des études comparatives entre les résultats déterminés par notre nouvelle théorie à ordre élevé avec ceux disponibles dans la littérature.

Enfin, Le présent travail s'achève par une conclusion générale permettant de souligner l'efficacité de la méthode utilisée dans les calculs des matériaux.



# CHAPITRE I

## I.1. Introduction

Les matériaux, l'énergie et la science moderne sont les trois piliers de la technologie moderne. La recherche et le développement de nouveaux matériaux sont à l'origine de l'invention des matériaux, pierre angulaire du secteur de la haute technologie du 21<sup>ème</sup> siècle. Ces dernières années, la science des matériaux a connu un développement rapide [44].

La raison en est l'augmentation des interactions interdisciplinaires d'une part, et l'introduction de nouvelles théories, de nouvelles méthodes et de nouvelles techniques expérimentales d'autre part. De plus, le besoin urgent d'une application pratique du matériau a fait naître de nouvelles exigences.

L'utilisation de matériaux innovants est une garantie de compétitivité dans tous les domaines de l'industrie.

Le secteur de la construction est en train de se révolutionner de deux manières principales. La première est le développement des techniques de construction, comme l'utilisation d'outils automatisés dans la construction. L'autre est l'avancement des matériaux de construction à haute performance, comme l'introduction de composites à haute résistance [45].

Les matériaux composites sont considérés comme l'un des matériaux les plus potentiels pour les applications aérospatiales en raison de leur rapport résistance/poids élevé et de leur excellente résistance à la fatigue [46,47].

En général, les matériaux composites utilisés pour les applications structurelles sont classés dans la catégorie des systèmes à haute performance et sont constitués de matériaux synthétiques qui offrent des rapports résistance/poids élevés, mais qui nécessitent souvent des environnements de fabrication contrôlés pour une performance optimale [48].

Ces dernières années, les études sur les nouveaux matériaux performants se sont concentrées sur de nouveaux matériaux connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ces matériaux sont utilisés dans les engins spatiaux de nouvelle génération en raison de leur "haute performance" et de leur rôle "multifonctionnel" [49]. Ils peuvent également être utilisés dans d'autres domaines de l'ingénierie.

## I.2. Matériaux composites

Le terme « matériau composite (CM) » désigne un matériau solide et hétérogène, formé de plusieurs constituants distincts, dont l'association confère à l'ensemble des propriétés qu'aucun des composants considérés ne possède séparément [50]. Le CM nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le renfort et la matrice, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, **l'interface** [51].

Le renfort, assure la tenue mécanique et la matrice a pour rôle d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort, de transférer les flux d'efforts entre les plis, et de garantir la tenue à l'environnement (corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température [52].

Les matériaux composites sont classés selon le type de matrice en trois grandes familles, à savoir organique, minérale et métallique. Parmi les composites organiques, on trouve le carton (résines et fibres de cellulose), les pneus laminés (caoutchouc, acier, résines organiques, fibres de verre, carbone et bore) et les plastiques renforcés (résines et fibres courtes) [53-57].

Parmi les composites minéraux, on trouve le béton (ciment, sable et additifs), les composites carbone-carbone (carbone et fibres de carbone) et les composites céramiques (céramiques et fibres céramiques) [58]. Et aussi, les derniers sont les composites métalliques (aluminium/fibres de bore et aluminium/fibres de carbone) [59-61].

Ces matériaux composites affectent plusieurs domaines d'application, à savoir l'emballage, l'automobile, les structures légères, le génie civil, l'aviation, les sports, la biomédecine, les composants thermomécaniques et l'aérospatiale [62].

## I.3. Eléments constitutants d'un matériau composite

### I.3.1. Matrice

La matrice peut être thermoplastique, thermodurcissable et/ou élastomère type. Le rôle de la matrice est de lier les fibres de renforcement, répartir les contraintes, fournir la résistance chimique de la structure et donner la forme désirée au produit final [63,64]. Le choix de la matrice dépend de l'utilisation pour laquelle le matériau composite est destiné.

- **Matrices thermoplastiques**

Les matrices thermoplastiques sont en forme de chaînes linéaires qui peut être transformé à l'état fondu. Dans la plupart des processus de fabrication, les matrices thermoplastiques sont

chauffées, puis formées par moulage, par injection, extrusion ou thermoformage, avant d'être refroidi de sorte que le produit fini conserve sa forme. Cette opération est réversible, ce qui permet de recycler ce matériau.

Aujourd'hui il existe de nombreux types de thermoplastiques avec un large éventail de propriétés. Ils peuvent être rendus aussi flexibles que le caoutchouc, aussi rigide que le métal et le béton, ou aussi transparents que le verre, pour une utilisation dans de nombreux produits. Ils ne s'oxydent pas, ont une résistance élevée à la corrosion et sont excellents thermiques et isolants électriques. En raison de leur légèreté, haute résistance mécanique et résistance aux effets de l'environnement, les thermoplastiques sont des matériaux idéals pour de nombreuses applications. Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polyéther sulfone (PES), le polyamide (polyhexaméthylène sébacique), le polycarbonate (PC), le polyéther-imide (PEI), le polyéther-cétone-cétone (PEKK) et Polyéther éther cétone (PEEK) [62].

- **Matrices thermodurcissables**

Généralement liquides à température ambiante, ils se solidifient pendant leur exécution sous l'influence de la chaleur et d'un additif appelé durcisseur. Ils sont ainsi transformés par la cuisson qui est une modification chimique consistant en un lien très fort entre les molécules en trois dimensions. La transformation est irréversible et forme un produit infusible et insoluble.

En général, ils sont plus rigides que les matrices thermoplastiques, résistent mieux au fluage et conviennent au moulage de grandes pièces avec des fibres courtes, longues ou tissées [65]. Les matrices thermodurcissables les plus utilisées sont les polyesters, les phénoplastes, les résines époxy, les polyuréthanes et les polyimides.

**Tableau I. 1** : Principales différences entre matrices TD et les TP [51]

<b>Matrices</b>	<b>TD</b>	<b>TP</b>
<b>Etat de base</b>	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
<b>stockage</b>	Réduit	Illimité
<b>Mouillabilité des renforts</b>	Aisée	Difficile
<b>moulage</b>	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
<b>cycle</b>	Long (polymérisation)	Court
<b>Tenue au choc</b>	Limitée	Assez bonne
<b>Tenue thermique</b>	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
<b>Chutes et déchets</b>	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
<b>Conditions de travail</b>	Emanations de solvants	Propreté

- **Élastomères**

Les polymères élastomères ont les mêmes qualités élastiques que le caoutchouc. Un élastomère au repos se compose de longues chaînes moléculaires repliées sur elles-mêmes. Sous l'action d'une contrainte, les molécules peuvent glisser les unes par rapport aux autres et se déformer. Pour que le matériau de base ait une bonne élasticité, il subit une vulcanisation. C'est un processus de durcissement qui crée un réseau tridimensionnel plus ou moins rigide sans enlever la flexibilité des chaînes moléculaires. Le soufre, le carbone et divers agents chimiques sont introduits dans l'élastomère pendant la vulcanisation [66-68].

Différentes formulations permettent la production de caoutchoucs synthétiques pour des utilisations spécifiques. Les élastomères sont utilisés dans la fabrication de coussins, de certains isolants, de semelles de chaussures ou de pneus. Le styrène butadiène est un matériau thermoplastique obtenu par polymérisation du styrène en présence de butadiène [69,70].

### **I.3.2. Renforcement**

Le renfort constitue le renfort ou le squelette qui fournit la résistance mécanique (résistance à la traction et la rigidité). Il est, par définition, de nature filamentaire (fibre organique ou inorganique) allant de la particule allongée à la fibre continue [53,71]. Le plus utilisé est la fibre de verre E qui représente plus de 95% des applications. En outre, la fibre d'aramide (Kevlar) est également d'un grand intérêt [72,73].

En général, dans une structure composite (anisotrope), les fibres fonctionnent bien en traction, mais en comparaison avec les structures métalliques (isotropes), la performance en compression est moins bonne et la résistance au cisaillement reste faible. Parmi les fibres les plus employées, on peut citer :

- **Fibres de verre**

Actuellement, les fibres de verre représentent la majorité des renforts les plus utilisés pour le renforcement de matériaux composites avancés dans divers domaines d'application industrielle [74]. Elles constituent le renforcement essentiel des matériaux composites à diffusion large et à haute performance (Tableau.I.2). La forme la plus ancienne et la plus populaire des fibres de verre est le verre E ou le verre de qualité électrique. Les autres types de fibres de verre comprennent le verre A ou le verre alcalin, Verre C ou verre résistant aux produits chimiques, le verre R à haute résistance, le verre D et le verre S [48].

**Tableau I. 2:** Fibres de verre principales [62].

Principaux constituants en %	types de verres		
	E	D	R
Oxyde de silice (SiO <sub>2</sub> )	53-54	70	60
Oxyde d'alumine(Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	14-15	-	25
Oxyde de magnésie(MgO)	20-24	0.5	9
Oxyde de bore(B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	6-9	22	6

**Tableau I. 3:** Propriétés physiques de différentes classes de fibres de verre [48].

Classes de fibres de verre	Propriétés physiques
<b>verre A</b>	Durabilité, résistance et résistivité électrique élevées
<b>verre C</b>	Haute résistance à la corrosion
<b>verre D</b>	Faible constante diélectrique
<b>verre E</b>	Résistance et résistivité électrique plus élevées
<b>verre AR</b>	Résistance aux alcalis
<b>verre R</b>	Résistance supérieure et résistance à la corrosion acide
<b>verre S</b>	Résistance à la traction plus élevée

- **Fibre de carbone à haute résistance (CFHS)**

Les fibres de carbone sont largement utilisées dans l'élaboration des matériaux composites thermodurcissables. Elles ont employé dans plusieurs domaines industriels tels que la construction spatiale, l'aéronautique, l'aviation, l'automobile [75-78]. La fibre de carbone connue comme la meilleure fibre, il a été préparé à partir de la carbonisation du polyacrylonitrile (PAN). Le polyacrylonitrile (PAN) est le précurseur le plus utilisé pour produire les fibres de carbone, qui offre une résistance à la traction élevée et un module élastique plus élevé.

Les fibres de carbone offrent des caractéristiques de résistance mécanique et thermique exceptionnelles, une résistance à la traction et à la compression extrêmement élevée et une rigidité supérieure. Elles offrent le module et la force spécifiques les plus élevés. Leur rigidité et leur module d'élasticité peuvent aller du verre à trois fois celle de l'acier.

De plus, elles ont la capacité de conserver leur résistance à la traction même à des températures élevées et sont indépendantes de l'humidité. Les fibres de carbone ne se cassent

pas nécessairement sous contrainte contrairement aux fibres de verre et autres polymères organiques [79]. Elles offrent également des conductivités électriques et thermiques élevées avec un coefficient de dilatation thermique relativement faible [80-83].

- **Fibres aramides**

Actuellement, les matériaux composites thermodurcissables avancés renforcés de fibres d'aramide ont une performance économique significative dans le domaine industriel. Ces matériaux avancés ont une excellente ténacité, excellente résistance aux chocs, faible densité et longue durée de vie [53, 84,85]. Le kevlar est la fibre aramide la plus connue.

Les fibres de Kevlar sont souvent utilisées pour des applications composites à haute performance où la légèreté, la résistance et la rigidité élevées, la résistance aux dommages et la résistance à la fatigue sont de la plus haute importance.

Les fibres aramides sont souvent utilisées dans les applications qui exigent une grande résistance et un faible poids avec une résistance aux chocs élevée. Certaines des applications les plus fréquentes des matériaux aramides comprennent les gilets pare-balles, les véhicules de refroidissement, les coques de navires et le renforcement structurel des structures civiles. Néanmoins, ces fibres présentent souvent une faible force de compression. En outre, le module de compression de l'aramide est du même ordre que son module de traction [86].

- **Fibre de polybenzimidazole**

Le polybenzimidazole (PBI) est une fibre très efficace et possède d'excellentes propriétés nouvelles et avancées dans les matériaux composites utilisés dans les secteurs de l'aérospatiale, de l'automobile et de l'énergie éolienne [87].

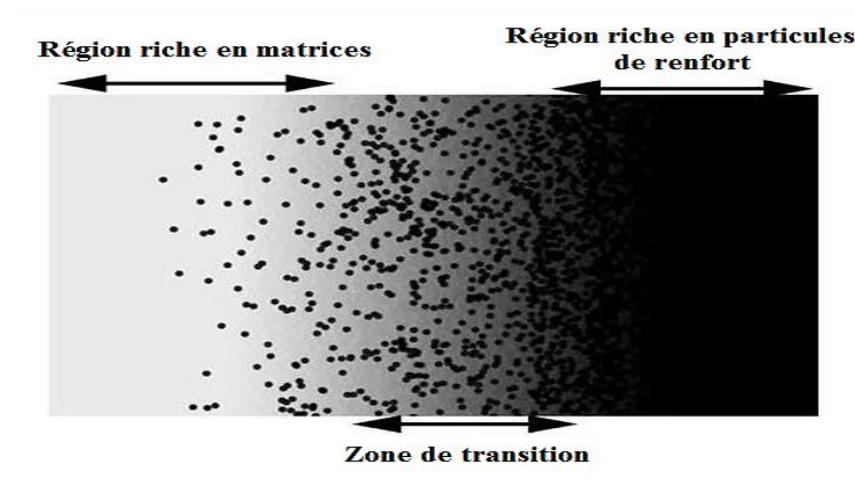
#### **I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués**

Matériau à gradient fonctionnel (FGM), un matériau révolutionnaire, appartient à une classe de matériaux avancés dont les propriétés varient en fonction de la dimension [88,89].

Il existe une différence substantielle entre les FGM et les matériaux composites traditionnels (CM). Les composites sont normalement formés par la combinaison de deux ou plusieurs matériaux différents ayant des propriétés physiques et chimiques individuelles sous forme solide. Cependant, les matériaux composites sont caractérisés par une interface abrupte et une faible liaison interfaciale entre les matériaux combinés. Il en résulte de brusques changements de propriétés et, par conséquent, une défaillance éventuelle dans des conditions

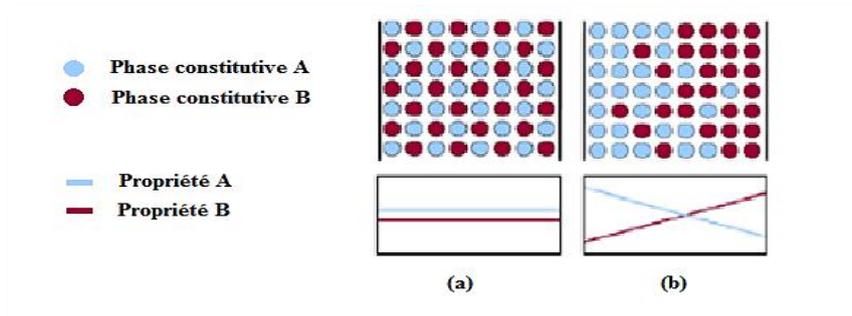
de travail difficiles, telles qu'une température élevée et une charge d'impact importante. Cette rupture est attribuée à la désintégration du renforcement de la matrice ; ce type de rupture est appelé délamination [90]. Pour résoudre ce problème, des chercheurs japonais ont été confrontés à ce défi au milieu des années 1980 et ont mis au point un nouveau matériau appelé FGM [91,92].

Les FGM sont une catégorie particulière de matériaux composites, comme le montre la fig.I.1, avec une variation spatiale où les propriétés varient dans une direction spécifique.



**Fig. I. 1.** Schéma de la distribution de la composition des matériaux dans les FGM [93].

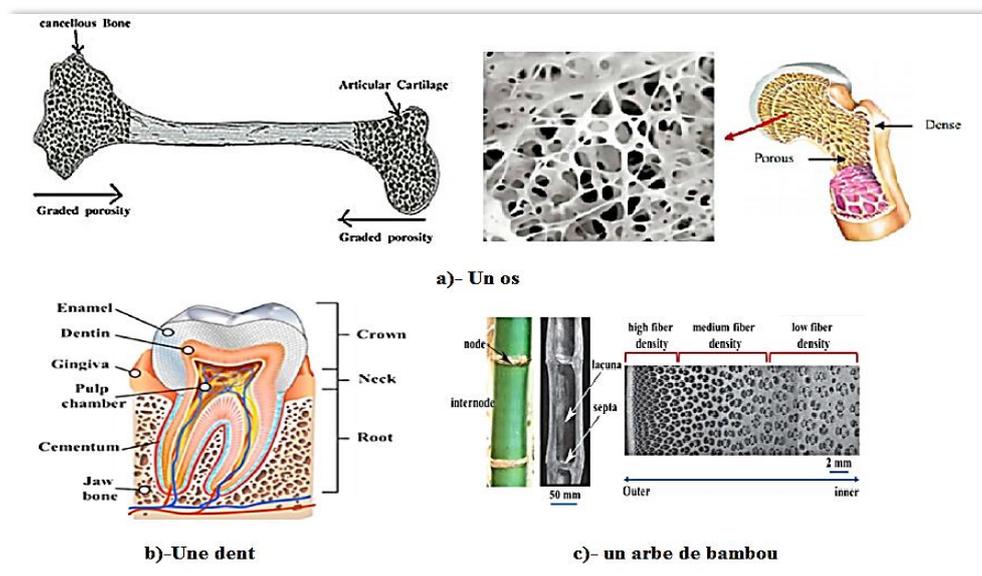
Les Matériaux à gradient fonctionnel peuvent comprendre plus de deux phases constitutives (comme CM), L'interface pointue et le changement progressif d'un composite traditionnel et d'un FGM sont illustrés respectivement sur les figures I.2.a et I.2.b.



**Fig. I. 2.** Matériau en deux phases [94] : a) composite traditionnel : composition et propriétés constantes ; b) FGM : changement graduel de la composition et de la microstructure donne un gradient dans les propriétés

Bien que le type de ce matériau avancé ait été développé par des ingénieurs et des scientifiques, Les matériaux à gradient fonctionnel sont présents dans la nature. Les exemples naturels les plus importants de structures à gradient fonctionnel sont les parties du corps humain, comme les os, les dents et la peau, car ces parties présentent une gradation des propriétés de dureté et de ductilité, ainsi que les bio-tissus des animaux et des arbres [95]. La fig.I.3 montre certains exemples des matériaux FGM dans la nature.

La nature a conçu ces matériaux pour répondre à leurs exigences de service attendues. Cette idée est émulée de la nature pour résoudre le problème d'ingénierie de la même manière que le réseau neuronal artificiel est utilisé pour émuler le cerveau humain [96].



**Fig. I. 3.** Exemples des matériaux FGM dans la nature ([97],[98] ).

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent une variation continue des propriétés des matériaux qui résultent de la microstructure non homogène.

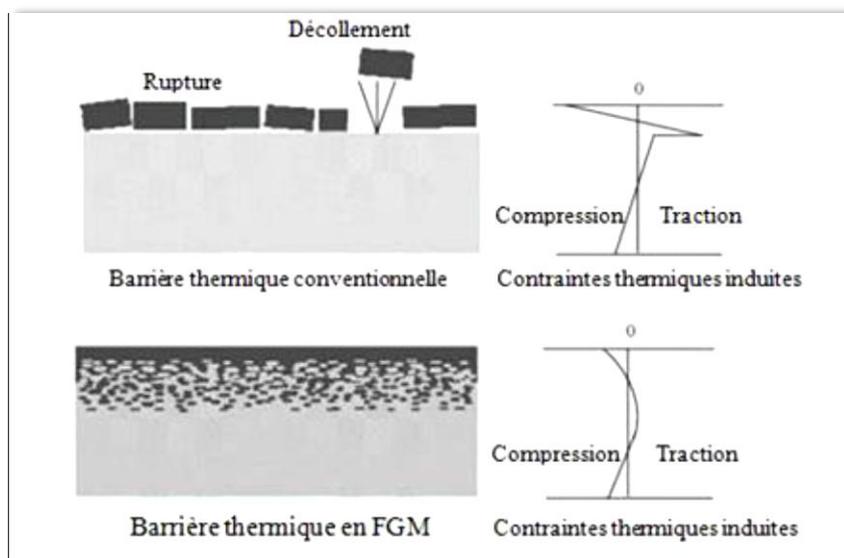
Les FGM possèdent une microstructure, une composition chimique ou un ordre atomique dépendant de la position, ce qui peut entraîner une variation continue des propriétés du matériau en fonction de la position des propriétés matérielles, telles que les propriétés mécaniques, électriques et thermiques.

Les propriétés globales des FGM sont uniques et différentes de celles des matériaux individuels qui les forment. En raison des propriétés uniques des matériaux gradués, les FGM ont attiré une grande attention de la part des chercheurs dans de nombreux domaines,

notamment l'aérospatiale, les biomatériaux et l'ingénierie entre autres, au cours des dernières décennies [96].

La gradation des propriétés dans un FGM réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les concentrations de contraintes que l'on trouve dans les composites traditionnels [99]. La Fig.I.4 illustre La Protection thermique des matériaux FGM et non FGM.

Le FGM élimine les interfaces pointues existant dans les matériaux composites qui sont à l'origine des défaillances [90]. Il remplace cette interface pointue par une interface à gradient qui produit transition douce d'un matériau à l'autre [91,92].



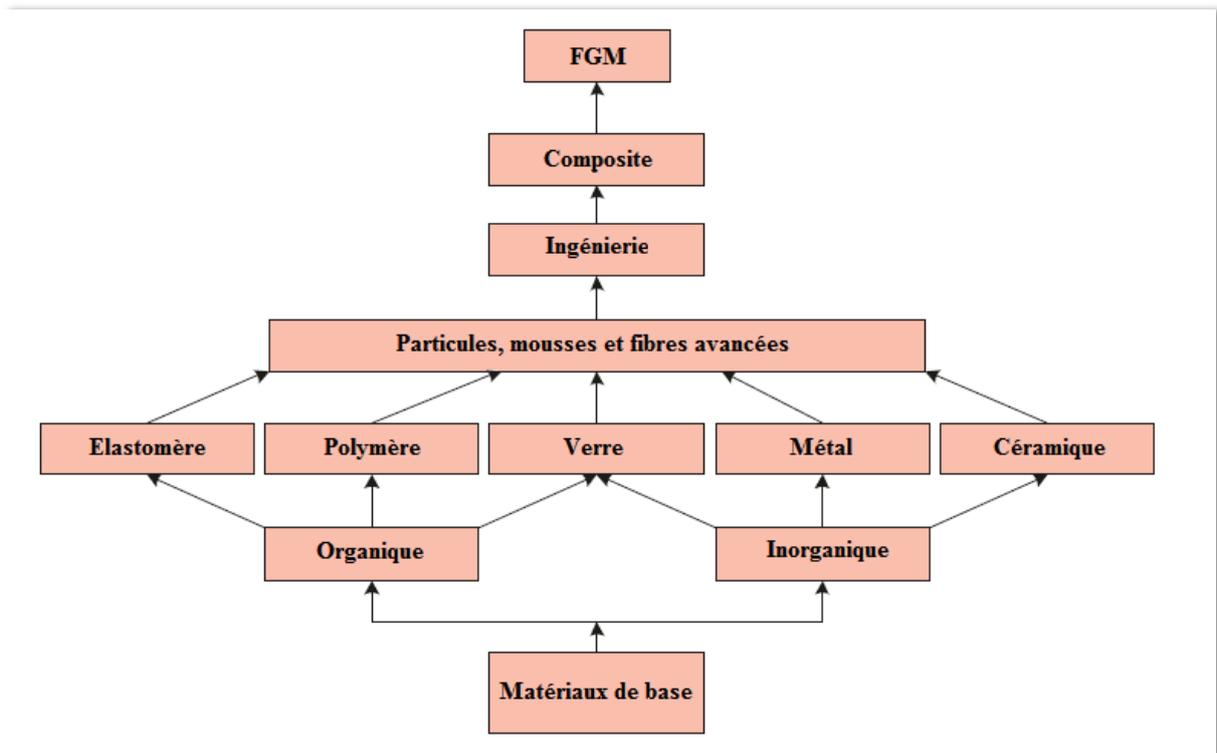
**Fig. I. 4.** Protection thermique des matériaux [100].

L'une des caractéristiques uniques du FGM est la possibilité de personnaliser un matériau pour une application spécifique [88]. Les différences entre les matériaux composites et les FGM sont présentées dans le tableau I.4.

**Tableau I. 4:** Les différences entre le composite et le FGM [97].

<b>Composite traditionnel</b>	<b>FGM</b>
-Interface abrupte entre les matériaux qui se combinent, entraînant un changement brutal des propriétés	-Transition en douceur entre les matériaux de combinaison
-La délamination se produit dans des conditions de travail extrêmes	-Très bonne liaison interfaciale entre les matériaux, donc la délimitation est évitée
-La charge matricielle, la faiblesse et la force des matériaux de combinaison sont également réparties	-Les propriétés des matériaux de combinaison sont spatialement distribuées
-Toute la pièce est un peu thermoconductrice et la matrice a perdu un peu de dureté.	-Un côté est largement dur et l'autre côté est largement conductrice de chaleur

L'utilisation scientifique des matériaux de base disponibles en divers composés inorganiques et organiques a ouvert la voie au développement des polymères avancés, des alliages d'ingénierie, des céramiques structurales, etc. La structure du développement des matériaux modernes est illustrée à la Fig.I.5. Ces matériaux possèdent de nombreux avantages qui les rendent appropriés dans des applications potentielles. Il s'agit notamment d'une réduction potentielle de la résistance dans le plan et à travers l'épaisseur, une amélioration des propriétés thermiques, une grande ténacité, etc [101].



**Fig. I. 5.** Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes [101].

La gradation des propriétés des matériaux FGM permet au concepteur d'adapter la réponse du matériau pour répondre aux critères de conception. Par exemple, la navette spatiale utilise des tuiles en céramique comme protection thermique contre la chaleur générée lors de la rentrée dans l'atmosphère terrestre. Cependant, ces tuiles sont sujettes à des fissures à l'interface tuile / superstructure en raison des différences de coefficients de dilatation thermique.

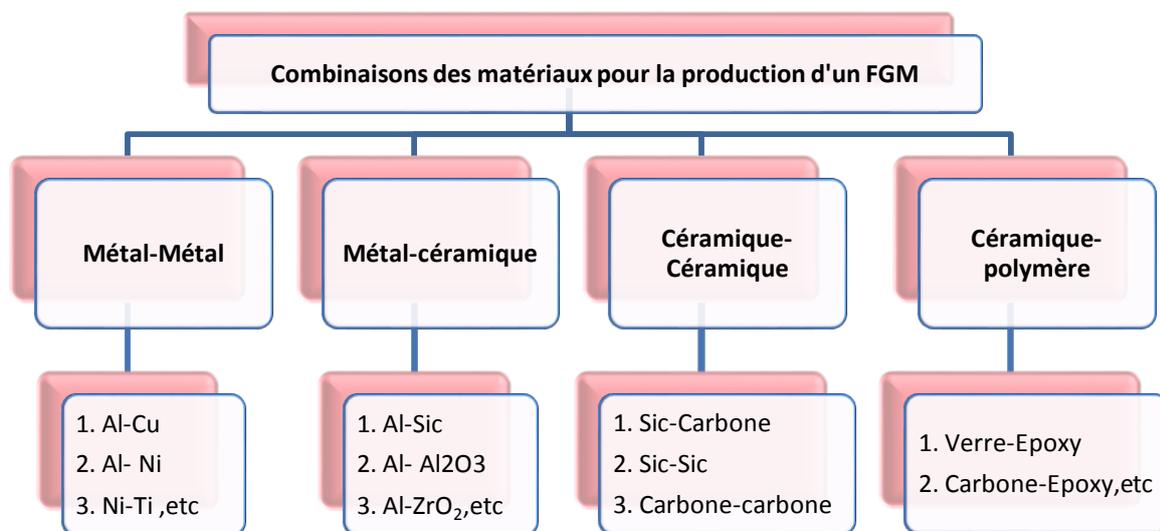
Un FGM composé de céramique et de métal peut fournir la protection thermique et la capacité de charge en un seul matériau, éliminant ainsi le problème des tuiles fissurées que l'on trouve sur la navette spatiale [99].

Les matériaux à gradient fonctionnel fabriqués par les concepteurs sont généralement classés en fonction de la combinaison de constituants comme : céramique/métal, céramique/céramique, métal/métal et céramique/polymère où, céramique/métal est la combinaison de matériaux la plus couramment utilisée (Fig.I.6).

Les FGM en céramique/métal, qui contiennent des alliages métalliques (matrice) et des phases secondaires (céramique), sont gradués d'une phase céramique à une phase métallique.

Ces FGM ont acquis une importance considérable en raison de leur capacité à tirer parti de propriétés mécaniques améliorées telles que la dureté, la résistance, l'usinabilité, la ténacité et à améliorer les résistances thermiques, d'usure et de corrosion [102].

Les FGM réduisent également les contraintes thermiques développées et affichées une meilleure adhérence entre les phases, ce qui améliore la résistance à la rupture et la ténacité le long du volume gradué [103].



**Fig. I. 6.** Exemples de quelques combinaisons pour un matériau FGM [104].

En fonction de la géométrie et de la section transversale du matériau à produire, les FGM peuvent être classés en deux groupes principaux, les FGM minces (dit FGM thin) et les FGM massifs ou en vrac (dits FGM bulk) [105].

#### a. FGM mince

Ils se présentent généralement sous la forme d'un revêtement de surface et ont des sections transversales fines. Le choix de la méthode de dépôt de surface utilisée dans la fabrication des FGM minces est dicté par les exigences de service du matériau. Les différentes techniques de dépôt pour les FGM minces comprennent le dépôt chimique ou physique en phase vapeur (CVD/PVD), la pulvérisation de plasma, le dépôt de couches atomiques (ALD), l'électrodéposition, la synthèse autopropagée à haute température (SHS), entre autres [96,106,107]. Les FGM minces ne conviennent généralement pas aux applications dans des conditions de service extrêmes.

**b. FGM massifs :**

Les FGM en vrac sont des volumes de matériaux qui nécessitent des processus plus intensifs en main-d'œuvre. Les FGM en vrac sont produits par la technique de la métallurgie des poudres, la méthode de coulée par centrifugation, les techniques de moulage libre solide, etc [99].

**I.5. Historique de développement des matériaux fonctionnellement gradués**

L'idée originale de gradient de composition et de structure dans la microstructure des matériaux a été proposée pour la première fois pour les composites et les matériaux polymères en 1972. Les FGM actuels ont été développés à partir de l'étude des composites et des matériaux polymères en 1972 par Bever et Duwez [108,109]. L'étude a examiné les propriétés du matériau global et réévalué l'application potentielle des composites à gradient [108,110].

Bever en 1972 a étudié divers composites à gradient, a étudié les propriétés globales du matériau et a passé en revue les applications potentielles des composites à gradient. Shen en 1972 a rapporté que la gradation des matériaux polymères pouvait être induite par la variation de la nature chimique des monomères, de la composition moléculaire des polymères et de la structure supramoléculaire ou de la morphologie des polymères. Cependant, l'étude n'a pas pris en compte la conception, la fabrication et l'évaluation du gradient de la structure [110].

Le développement des FGM modernes a commencé au milieu des années 1980 au Japon. Les ingénieurs japonais ont été confrontés à la difficulté de trouver un matériau adapté à une barrière particulière dans un projet d'avion spatial hypersonique. La barrière requiert une épaisseur inférieure à 10 mm et des conditions de travail thermiques de 1000 K et 2000 K de températures intérieures et extérieures respectivement. Cette nécessité a poussé les ingénieurs à fabriquer la barrière en utilisant le concept FGM [91].

Dans le cadre du développement de revêtements et de joints en céramique pour le moteur de fusée réutilisable, l'application du contrôle continu de la texture a été suggérée en 1985 [111]. Ceci afin de minimiser la contrainte thermique et pour augmenter la force d'adhérence. Ces types de matériaux gradués ont été nommés matériaux à gradient fonctionnel en 1986, qui sont ensuite devenus des matériaux à gradient fonctionnel avec l'acronyme FGM.

En 1987, un projet national parrainé par le gouvernement a été lancé, intitulé « *la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude*

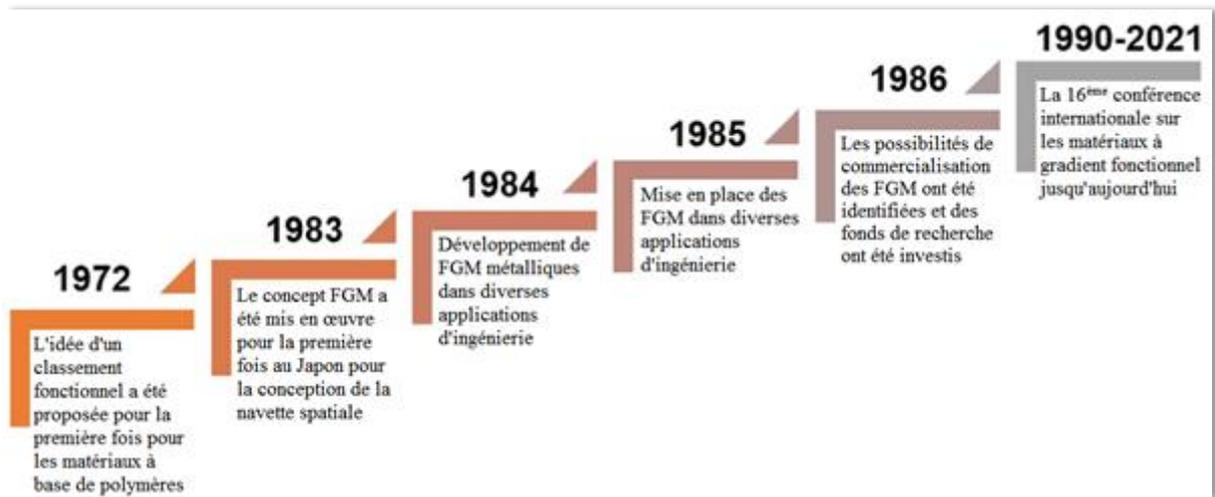
*de la relaxation des contraintes thermiques* » pour la barrière thermique d'un avion spatial au Japon [112].

Les FGM ont permis de résister à une température de surface de 17 000 °C et à un gradient de température de 10 000 °C sur une section de 10 mm seulement. Les résultats et le développement de ce projet de recherche ont été diffusés dans le monde entier via des articles, des médias et des conférences internationales. En raison de leurs propriétés matérielles graduelles uniques, les FGM ont suscité un grand intérêt de la part des chercheurs. Les FGM sont potentiellement applicables dans de nombreux domaines. En plus des barrières thermiques, des revêtements et des joints susmentionnés dans l'aérospatiale, des FGM ont également été développées pour d'autres nouvelles applications [96].

De 1987 à 1991, la technologie FGM est devenue très populaire et plusieurs techniques de production ont été développées. Les premières méthodes de fabrication comprennent le dépôt chimique en phase vapeur (CVD), la pulvérisation plasma, la métallurgie des poudres, la synthèse auto-propagée à haute température (SHS) et le galvanofmage.

Le premier symposium international sur le FGM organisé par le forum FGM s'est tenu à Sendai en 1990 [113]. Il a attiré environ 400 participants, y compris des scientifiques étrangers. Au cours du symposium, un comité consultatif international a été créé sous la direction du professeur Mitsue Koizumi [112].

Depuis 1991 jusqu'à aujourd'hui, ces méthodes antérieures de traitement des FGM ont été réévaluées et modifiées et de nouvelles méthodes ont été développées. Ces techniques de fabrication ont été classées de différentes manières par plusieurs auteurs. Miyamoto et al en 1999, ont regroupé les processus en quatre catégories principales : les processus de couche, de fusion, de masse et de préforme [114]. Ces techniques de production de FGM ont éliminé le problème traditionnel de délamination des composites, causé par l'interface pointue qui est principalement responsable de la défaillance des composites.



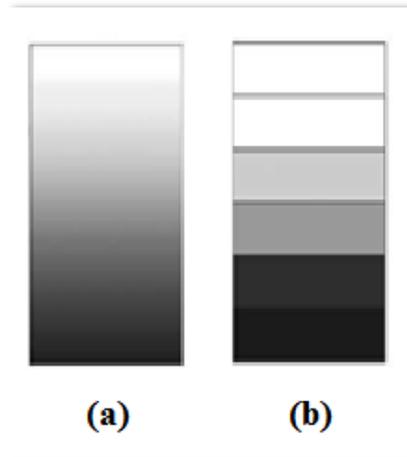
**Fig. I. 7.** Aperçu historique des étapes importantes de la recherche et du développement des FGM [102].

## I.6. Classification conventionnelle des matériaux FGM

### I.6.1. Classification basée sur la structure des FGM

En général, les structures FGM sont classées en deux catégories générales (Fig.I.8). La première catégorie est constituée de structures dites à gradient continu, dans lesquelles le facteur de gradient traverse en continu le volume du matériau et la seconde catégorie est appelée gradients discontinus, dans lesquelles le facteur de gradient change progressivement [115,116].

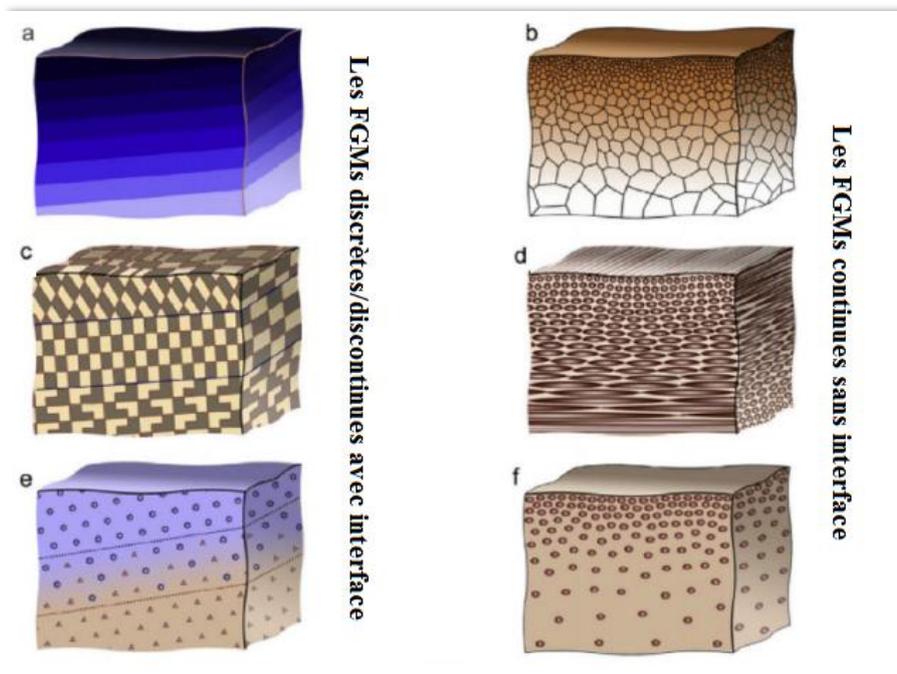
- Dans le premier groupe, aucune zone claire ou ligne de séparation n'a pu être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone.
- Les composants du matériau évoluent selon une gradation discontinue par étape dans un autre groupe, qui est identifié comme FGM stratifié ou séparé. Dans cette catégorie, il existe une interface similaire entre les couches qui est visible et distingue chaque couche de la suivante. Le choix du type de structure de gradient dépend fortement des conditions de travail du matériau.



**Fig. I. 8.** Classification des structures FGM ;(a) FGM à gradient continu ; (b) FGM à gradient discontinu.

Selon la nature du gradient, les FGM peuvent être regroupés selon les types suivants [117]

- 1) Type de gradient de fraction
- 2) Type de gradient de taille.
- 3) Type de gradient de forme.
- 4) Type de gradient d'orientation.



**Fig. I. 9.** Différents types d'un FGM. a) Gradient de composition. b) gradient de la dimension. c), d) Gradient de l'orientation. e), f) Gradient de fraction volumique [118].

### I.6.2. Classification basée sur le type de gradient FGM

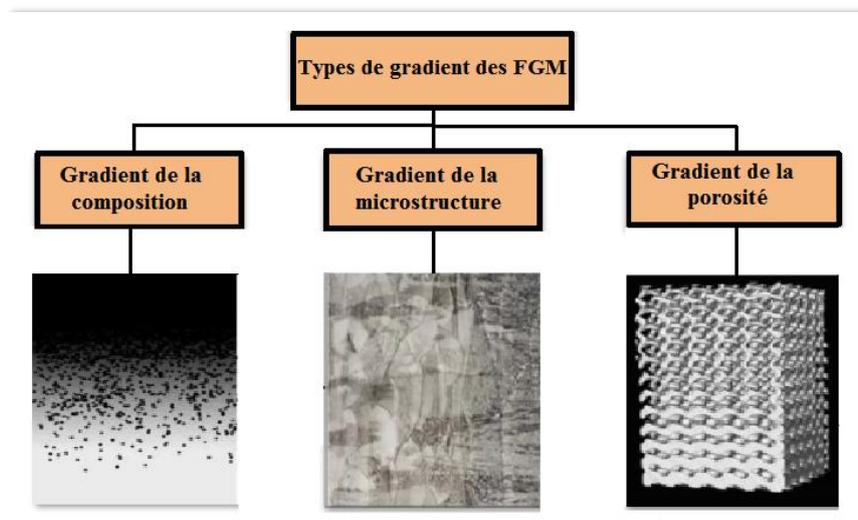
Afin de distinguer les FGM en fonction des types de gradients, les FGM peuvent être classés en trois groupes différents : la composition chimique du gradient, la microstructure du gradient et la porosité du gradient (Fig. I.10) [119].

Dans le groupe des matériaux à gradient basé sur la composition chimique, la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau.

La combinaison du gradient FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre et conduit à des phases distinctes aux structures chimiques différentes. Ces différentes phases de production dépendent de la quantité de matière synthétique et les conditions dans lesquelles les matériaux sont produits [120].

Le deuxième type de gradient, désigne un groupe dont la surface du matériau présente une microstructure différente de celle de son noyau. Ces éléments sont principalement produits lors du processus de refroidissement [121]. Ils sont utilisés dans des applications et des dispositifs où la surface doit avoir certaines capacités telles que la résistance à l'usure et à la corrosion, etc. tandis que le noyau du corps possède une autre propriété [122].

Dans le troisième type de cette classification, la porosité varie en fonction de l'emplacement dans le matériau. Dans la conception des FGM à porosité graduelle, non seulement la taille de la porosité est très importante, mais aussi leur forme, en fonction du type d'application [123]. Les matériaux à porosité graduelle ont beaucoup plus d'applications dans l'industrie médicale et plusieurs études ont été publiées dans ce domaine [124-130].



**Fig. I. 10.** Classification des matériaux à gradient fonctionnel selon le type de gradients FGM [119]

## I.7. Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

### I.7.1. Procédés de fabrication à l'état solide

#### I.7.1.1. Méthode de la métallurgie des poudres

La métallurgie des poudres (MP) est l'une des techniques les plus anciennes de production de matériaux. Elle a été récemment employée pour la production de FGM [131], et elle est maintenant, en raison de ses vastes caractéristiques, l'une des méthodes les plus courantes dans ce domaine [132]. C'est également l'une des méthodes à l'état solide les plus importantes pour la production de FGM en vrac avec des caractéristiques de gradient discontinu [133,134]. Cette méthode utilise quatre étapes essentielles pour produire les FGM : le mélange, l'empilement, la compression et le frittage, comme l'illustre la fig.I.11 [135].

La première étape consiste à mélanger la poudre en choisissant le groupe de matériaux en fonction de la spécification exigeant des propriétés graduée, Ensuite, le poids de la poudre et le mélange, afin de s'assurer que chacun dans le mélange est dispersé, car cela détermine de manière significative les caractéristiques du produit [136].

La deuxième étape consiste à empiler le mélange de manière séquentielle dans le moule en fonction de la distribution spatiale des matériaux. Au cours de cette étape, les propriétés progressives formées dans chaque couche sont contrôlées par la composition, puis l'étape suivante est le compactage de la poudre empilée pour lui donner la résistance et l'intégrité [137].

Enfin, le frittage s'effectue généralement à une température inférieure au point de fusion du matériau principal et selon diverses méthodes de frittage, notamment "hot isostatic pressing (HIP) ", "pressureless sintering" après "cold isostatic pressing (CIP) compaction", "hot press" et "spark plasma sintering (SPS) " [135].

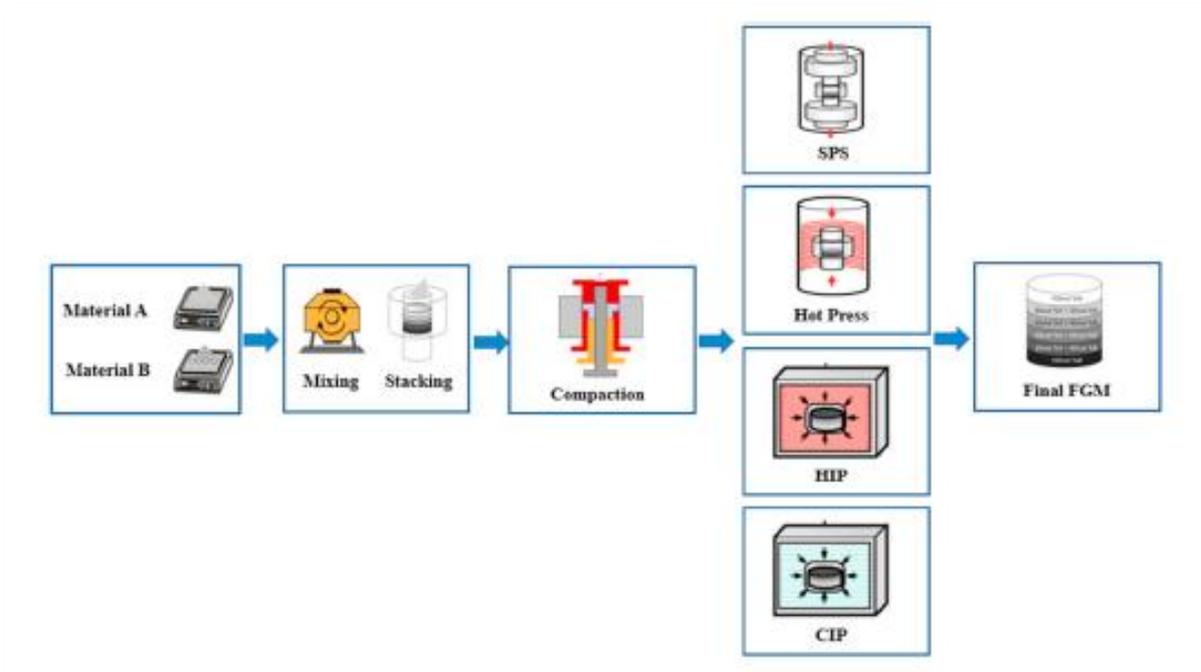


Fig. I. 11. Principales étapes de la métallurgie des poudres pour produire des FGM discrets [135].

### I.7.2. Procédés de fabrication à l'état liquide

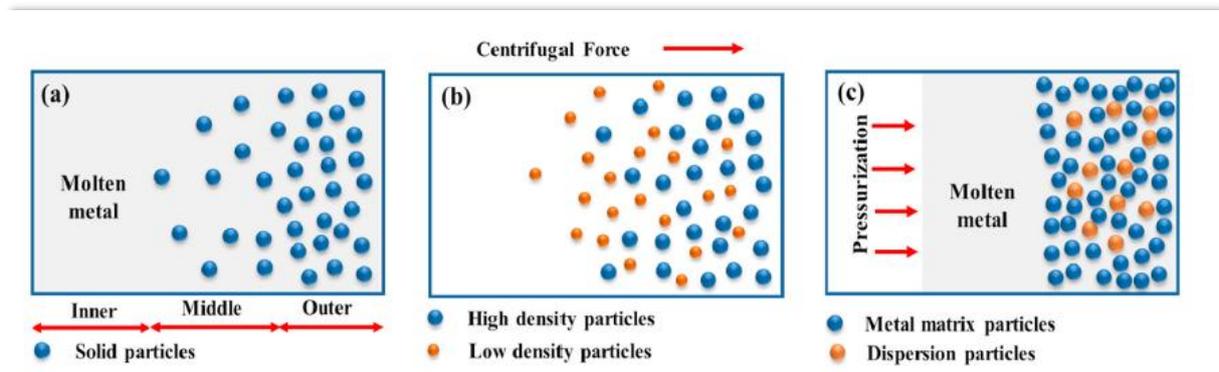
Il existe de nombreuses méthodes telles que les méthodes de la force centrifuge, le coulage séquentiel en barbotine, le coulage en bandes et l'infiltration qui peuvent être classées sous le principe de l'état liquide pour la production de matériaux à gradient de propriétés [138]. Ces méthodes peuvent produire des matériaux à gradient avec des propriétés continues, et la plupart de ces dernières sont moins coûteuses que les autres méthodes [139]. Mais leurs inconvénients sont la difficulté à contrôler la gradation et la mouillabilité entre les matériaux, en plus des problèmes liés au métal fondu [102].

#### I.7.2.1. Méthodes de la force centrifuge

La force centrifuge est le principal moteur pour la fabrication de FGM en vrac en plus d'une gradation continue avec des caractéristiques spécifiques qui peuvent être appropriées pour de nombreuses applications industrielles [140]. En raison de la force centrifuge créée par la rotation du moule, la distribution inégale se produit entre deux ou plusieurs phases des matériaux dans la direction radiale [141].

Ces dernières années, il existe plusieurs méthodes utilisées pour la production de FGM dépendent directement de la caractéristique de la force centrifuge telles que la méthode de coulée centrifuge, méthode de coulée centrifuge de boue (Centrifugal slurry pouring method)

et la méthode de pressurisation centrifuge (Centrifugal pressurization methods) [142], comme le montre la fig.I.12.



**Fig. I. 12.** Méthodes de fabrication de FGM par force centrifuge (a) méthode de coulée centrifuge, (b), méthode de coulée centrifuge de boue et (c) méthode de pressurisation centrifuge [142].

### I.7.2.2. Méthode de coulée en barbotine

La coulée en barbotine est une suspension de particules céramiques dans une matrice liquide avec une granulométrie fine. La surface est versée par capillarité dans un moule perméable, où la matrice est drainée de la barbotine. Les parois du moule restent recouvertes d'une couche de barbotine d'argile. Le fluide restant est drainé hors du moule après avoir atteint l'épaisseur de paroi appropriée. Le moulage est retiré du moule lorsqu'il est sec.

Les avantages considérables de la coulée en barbotine ont été utilisés dans la fabrication des FGM, tels que la possibilité de produire des formes complexes et de rendre la gradation continue [143].

### I.7.2.3. Méthode de coulée en bande

Le coulage en bande est une autre méthode de production de FGM minces (avec un gradient de couche de 50 à 1000  $\mu\text{m}$ ), travaillant initialement dans les céramiques conventionnelles, mais qui a atteint un haut niveau de complexité des céramiques modernes [144].

Les méthodes de coulée en bande sont notamment utilisées pour fabriquer des substrats pour les circuits intégrés et les structures multicouches utilisés dans les circuits intégrés et les condensateurs multicouches.

Le Doctor Blading est un type courant de procédé de coulée en bande [145]. Cette méthode comprend une suspension de poudre céramique continuellement versée sur une couche mobile de support faite d'un matériau plat non liant tel que le téflon, qui contient un solvant organique

tel que l'éthanol et divers autres additifs (par exemple, un liant polymère) [146]. Un couteau plat étire la pâte à une épaisseur particulière, évapore le solvant et dépose le fil sur un disque de traitement supplémentaire [147], comme le montre la fig.I.13.

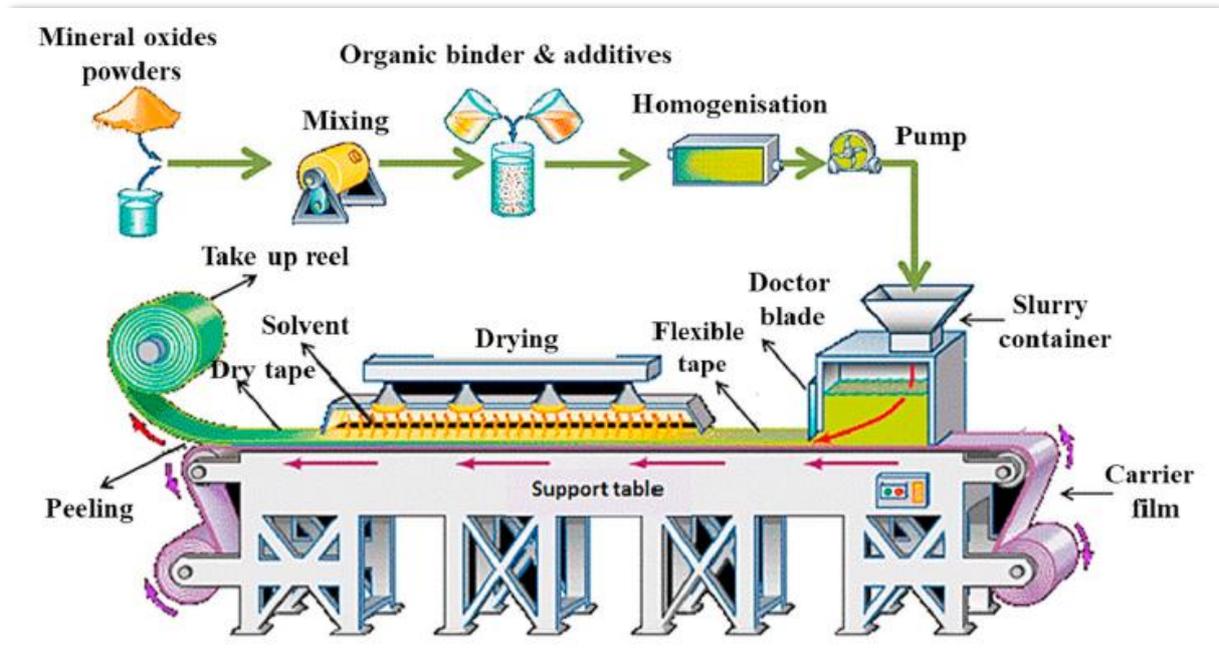
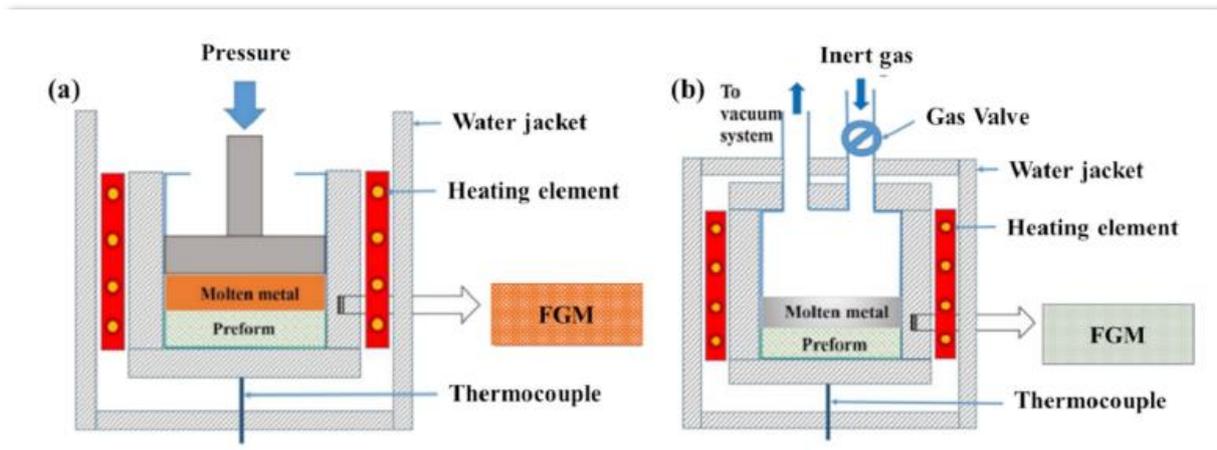


Fig. I. 13. Illustration schématique du processus de coulée en bande [148].

#### I.7.2.4. Méthode d'infiltration

La technique d'infiltration est un procédé en phase liquide choisi pour la fabrication de composants FGM moins complexes, en termes de taille et de caractéristiques. L'imbibition efficace des céramiques en phase dispersée dans la matrice fondue, pendant le processus de fabrication, permet d'obtenir une porosité minimale [149].

La méthode d'infiltration avec le métal liquide peut être réalisée sans pression (action capillaire) ou par pression (action gazeuse ou mécanique). Comme le montre la fig.I.14. La préforme réagit avec le matériau par un effet chimique à l'interface ce qui produit la structure fonctionnellement graduée. Cette méthode présente les avantages d'une courte période de préparation et de la formulation rapide [138].



**Fig. I. 14.** Illustration schématique du processus d'infiltration (a) méthode de coulée sous pression, (b) méthode de pression [150].

### I.7.2.5. Méthode de Langmuir-Blodgett

La méthode du film de Langmuir-Blodgett (LB) a commencé ces dernières années à attirer l'attention des chercheurs et de la société d'ingénierie pour produire des structures graduelles. Ce procédé permet de déposer des matériaux uniformes jusqu'à l'épaisseur d'une seule couche moléculaire avec une grande précision [151]. Les films produits par la méthode LB peuvent être utilisés comme couches actives ou isolants passifs dans des applications électroniques. En outre, les films LB présentent une caractéristique intéressante ; la structure interne de la couche est contrôlée de manière complexe jusqu'au niveau moléculaire et l'épaisseur du film est contrôlée avec précision.

Le principe de la méthode LB est de former un matériau amphiphile à la surface de l'eau sous la forme d'un revêtement mono- moléculaire, puis de le transférer sur un substrat solide. Les molécules amphiphiles sont disposées à l'interface air-eau pendant l'étape aqueuse. La couche de surface est comprimée par une membrane spéciale pour créer une couche de surface mono-moléculaire unique, comme le montre la Fig.I.15a.

La compression isotherme séquentielle affecte la structure du film mono-moléculaire, qui est transmise par un ensemble d'états bidimensionnels, traditionnellement appelés eau, cristal liquide et cristal solide, comme le montre la Fig.I.15b. Par conséquent, la structure et les caractéristiques physico-chimiques des films produits peuvent être vérifiées en connaissant le diagramme de phase du film. Un substrat plat est immergé dans la solution et ensuite drainé avec la surface adsorbée pour déplacer le film sur un support solide. Afin d'obtenir différentes

couches multimoléculaires, un processus de transfert de film mono-moléculaire peut être reproduit plusieurs fois [151].

Malgré les formidables propriétés obtenues par cette méthode dans les composites conventionnels, elle nécessite encore des efforts de la part des chercheurs pour entrer dans le cadre des méthodes courantes de fabrication des FGM.

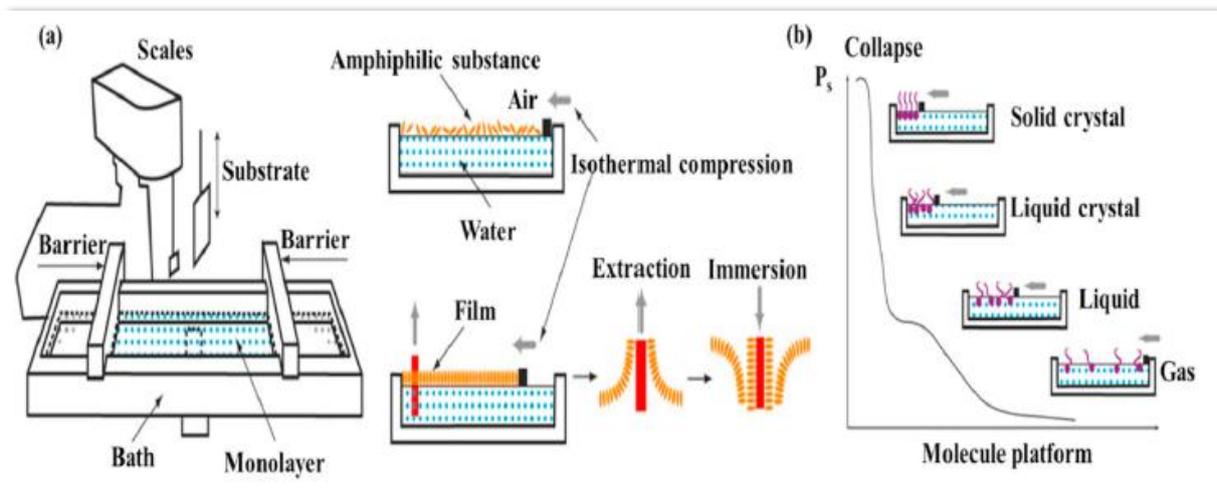


Fig. I. 15. Illustration schématique de la méthode de Langmuir-Blodgett [151].

### I.7.3. Procédés de fabrication à l'état gazeux

#### I.7.3.1. Méthodes de dépôt en phase vapeur

La méthode du dépôt en phase vapeur est l'une des plus importantes méthodes pour produire une couche mince graduée par le procédé constructif. La technique de dépôt en phase vapeur décrit un processus par lequel des matériaux sont condensés en un matériau solide au cours du cycle de vapeur [152]. Cette méthode est généralement utilisée pour produire des revêtements qui contrôlent les caractéristiques des substrats telles que la mécanique, l'usure, la corrosion et la température par la couche graduée [153]. Le dépôt de la vapeur est généralement classé en deux groupes : le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD).

##### I.7.3.1.1. Méthode de dépôt physique en phase vapeur

Le dépôt physique en phase vapeur (PVD) se distingue par une méthode dans laquelle le matériau passe d'un état condensé à phase de vapeur, puis revient à état de film mince condensé, comme le montre la Fig.I.16. Le PVD est recommandée principalement pour les applications

qui exigent un revêtement de surface mince, car cette méthode de fabrication est coûteuse et consomme beaucoup d'énergie [154].

La méthode PVD est l'une des méthodes essentielles pour la fabrication de FGM minces en raison de ses énormes avantages, tels que la possibilité de produire des films minces très purs avec une structure graduée, de créer une grande variété de composés, à partir du dépôt de métal de base aux alliages, et de respecter l'environnement par rapport aux autres techniques [155]. Les types de méthodes de dépôt sous vide pour le développement de films minces ou de revêtements peuvent être représentés par le PVD.

Il existe de nombreux procédés PVD qui sont utilisés pour produire un film mince lisse avec des propriétés graduées, comme le dépôt à l'arc cathodique, l'évaporation par faisceau d'électron, l'évaporation sous vide, la sublimation en espace clos, l'ablation laser pulsé, le dépôt par pulvérisation, le dépôt par électrons pulsés et la méthode du sandwich par sublimation [156]. Cette méthode a été utilisée dans de nombreuses applications, telles que l'aérospatiale et l'automobile, en raison de l'amélioration des propriétés mécaniques et de la résistance à l'usure grâce à la formation d'une couche mince fonctionnellement graduée [157].

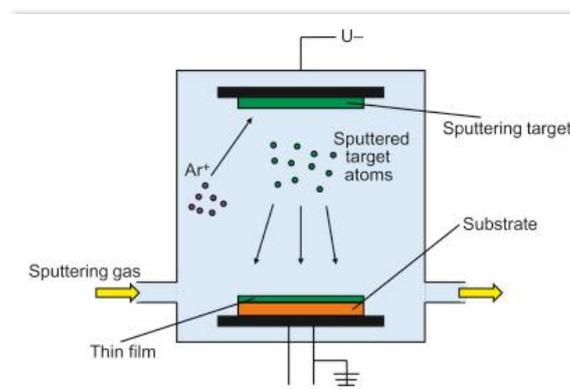


Fig. I. 16. Schéma de principe du procédé PVD [158].

### I.7.3.1.2. Méthode de dépôt chimique en phase vapeur

Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) est un procédé adopté pour fabriquer des matériaux solides de haute qualité en utilisant un système de dépôt sous vide. De nombreux procédés de CVD sont utilisés pour produire un film mince lisse avec des propriétés graduées, comme "atmospheric pressure", "low pressure", "ultrahigh vacuum", "hot filament", "laser-assisted", "electron assisted", et "direct liquid injection" [159].

La méthode CVD est généralement appliquée pour produire des couches minces avec des propriétés graduées pour les applications du semi-conducteur.

Dans un procédé CVD typique, un ou plusieurs précurseurs volatils sont exposés au substrat qui réagit aux précurseurs désirés et se décompose à la surface du substrat. Cette méthode consiste à introduire la substance de revêtement dans le vide, puis à vaporiser le matériau de revêtement jusqu'à ce qu'il soit vaporisé [160]. Ce dernier peut être vaporisé de deux façons, soit en réduisant la pression de surface, soit en chauffant le matériau, comme le montre la fig.I.17.

Récemment, le CVD a été utilisé pour produire un film mince fonctionnellement gradué pour des applications de revêtement avec des propriétés graduées afin d'améliorer et de renforcer les propriétés mécaniques, ainsi que la résistance à la corrosion et à l'usure.

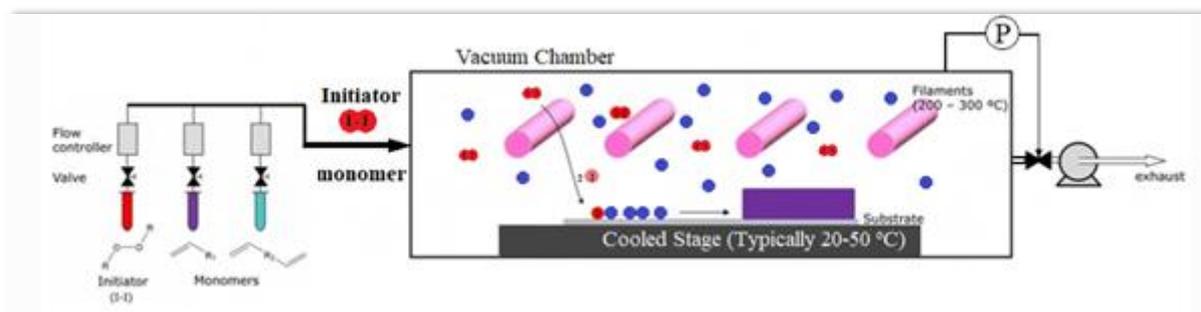


Fig. I. 17. Représentation schématique du procédé CVD [104].

### I.7.3.2. Méthode de pulvérisation thermique

La méthode de pulvérisation thermique est l'une des méthodes essentielles utilisées dans la production de FGM pour créer un revêtement de surface de dimensions minces par pulvérisation [161]. La couche superficielle graduée protège les composants parce que leur surface nécessite une protection appropriée contre la corrosion, l'usure, la chaleur, et l'isolation électrique, car il est difficile pour ces composants d'être exposés à un seul cas de service [162].

Il existe plusieurs procédés utilisés pour fabriquer des FGM avec des propriétés graduées par le biais d'un revêtement par pulvérisation thermique [163].

Au début de ce processus, la source de chaleur est utilisée pour faire fondre les matières premières pour le revêtement, puis en traitant les gaz et en les pulvérisant sur un matériau de base, ces matériaux fondus ou liquides sont poussés jusqu'à ce qu'ils se solidifient et forment une couche solide comme le montre la Fig.I.18.

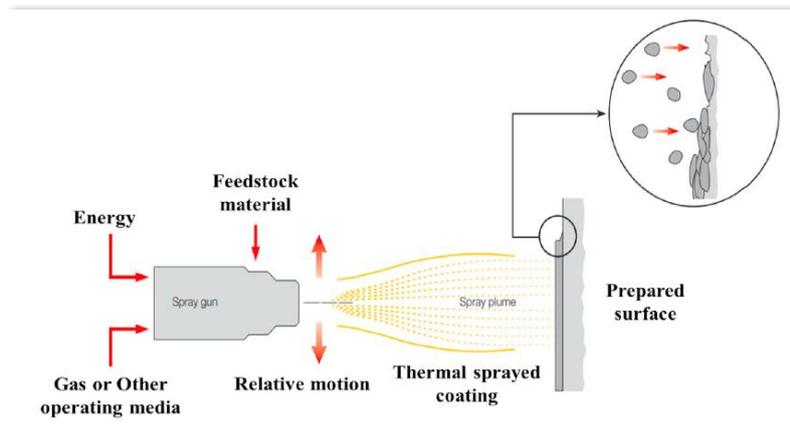


Fig. I. 18. Schéma du procédé de pulvérisation thermique [102].

### I.7.3.3. Revêtement par laser

Le revêtement par laser est une technique moderne utilisée pour fabriquer des FGM où des matériaux dissemblables sont fusionnés par intercession du laser (Fig.I.19). Les structures qui exigent des propriétés mécaniques préfèrent la technique de fabrication par dépôt laser pour un revêtement épais et dense sur des structures complexes [164].

Cette méthode est efficace lorsqu'il y a une différence considérable dans les températures de fusion de la matrice et des matériaux de renforcement. Cette technique a été préférée pour réaliser un revêtement gradué sur des formes et des structures complexes. La technique de traitement par superposition de couches a ses propres limites en raison de la mise en place coûteuse de la production et du coût initial [107].

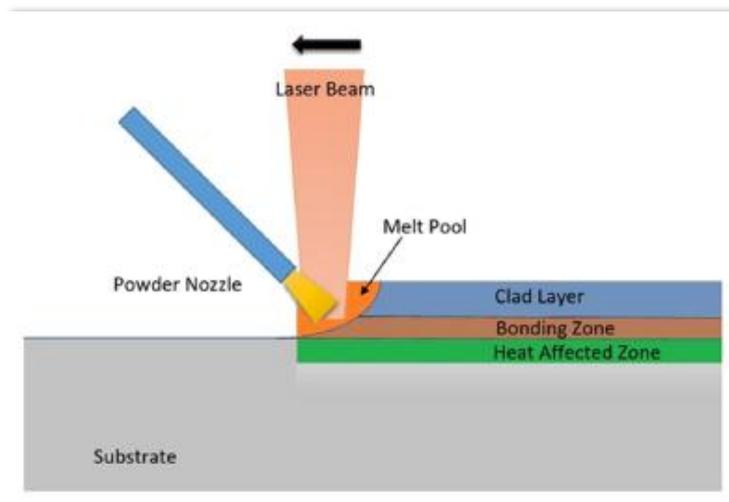


Fig. I. 19. Illustration du procédé de revêtement par laser [102]

### I.8. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Les FGM sont la solution idéale pour répondre à la demande croissante d'applications nécessitant des propriétés contradictoires dans les mêmes composants, Où ces composants nécessitent parfois une dureté à l'extérieur et une ductilité élevée à l'intérieur. Par conséquent, les FGM sont appliqués dans un large intervalle de domaines tels que l'aérospatiale, l'automobile, l'énergie nucléaire, l'électronique, le domaine militaire, les matériels du sport, comme le montre la fig.I.20 [165].



Fig. I. 20. Principaux domaines d'application des matériaux FGM

#### I.8.1. Aérospatiale

Bien que l'application réelle initiale pour les FGM ait été les engins spatiaux en réduisant les contraintes thermiques entre les surfaces extérieures et intérieures, Cependant, il a été utilisé dans de nombreuses autres applications en raison de ses avantages [114].

La plupart des pièces d'engins spatiaux et d'avions utilisent désormais des FGM, telles qu'un moteur de fusée, des plaques d'échange de chaleur, et certaines structures, comme les

réflecteurs, les panneaux solaires, les supports de caméra, les roues de turbine, le revêtement des aubes de turbine, couvercles de nez, et le bord frontal des missiles, et les navettes spatiales comme indiqué sur la Fig.I.21 [166].

Ces composants sont exposés dans des zones spécifiques à des températures élevées ou à une dégradation extrême, et c'est ce que fournissent les FGM aux propriétés graduées afin de protéger ces composants. Al renforcé par des céramiques à base d'oxydes comme  $Al_2O_3$  ont révélé une excellente résistance à la chaleur et à la corrosion et sont utilisées pour produire des pièces de moteur et des buses de fusée [167].

Afin d'améliorer la liaison entre les matériaux fonctionnellement gradués, P. Zhao et al [168] ont proposé une nouvelle méthode de collage pour les composites FG (W et W-Cu) en utilisant la méthode de pressage à chaud pour améliorer les propriétés graduées pour les applications aérospatiales. Dans une autre étude, S. Kumar et al. [169] ont conçu et produit des composites polymère-céramique pour étudier l'effet des paramètres de procédé sur la microstructure et les propriétés mécaniques pour les applications aérospatiales.



Fig. I. 21. Pièces en FGM dans les applications aérospatiales [166].

### I.8.2. Automobile

De nombreux composants automobiles, tels que pistons de moteur diesel et garnitures de cylindres, chambres de combustion, freins de voitures de course, arbres de transmission, et volants, doivent être soumis à un gradient thermique, de pression ou de contrainte. Par conséquent, les matériaux fonctionnellement gradués sont très appropriés pour ces composants, comme le montre la Fig.I.22. En plus de la possibilité d'utiliser les FGM dans les revêtements de carrosserie automobile.

En raison de leur coût élevé, l'utilisation des FGM est très limitée dans les applications automobiles, et ne concerne généralement que les parties critiques des voitures [170]. R. Kimberly et al. [171] ont réalisé avec succès des composites FG  $Al_2O_3/Al_2TiO_5$  en utilisant la métallurgie des poudres afin d'étudier l'influence de structure graduée sur le comportement de microstructure et les propriétés physiques et thermiques pour des applications automobiles. Les résultats ont montré que les FGM ont améliorés les propriétés mécaniques et thermiques des pourritures de freins de voitures.

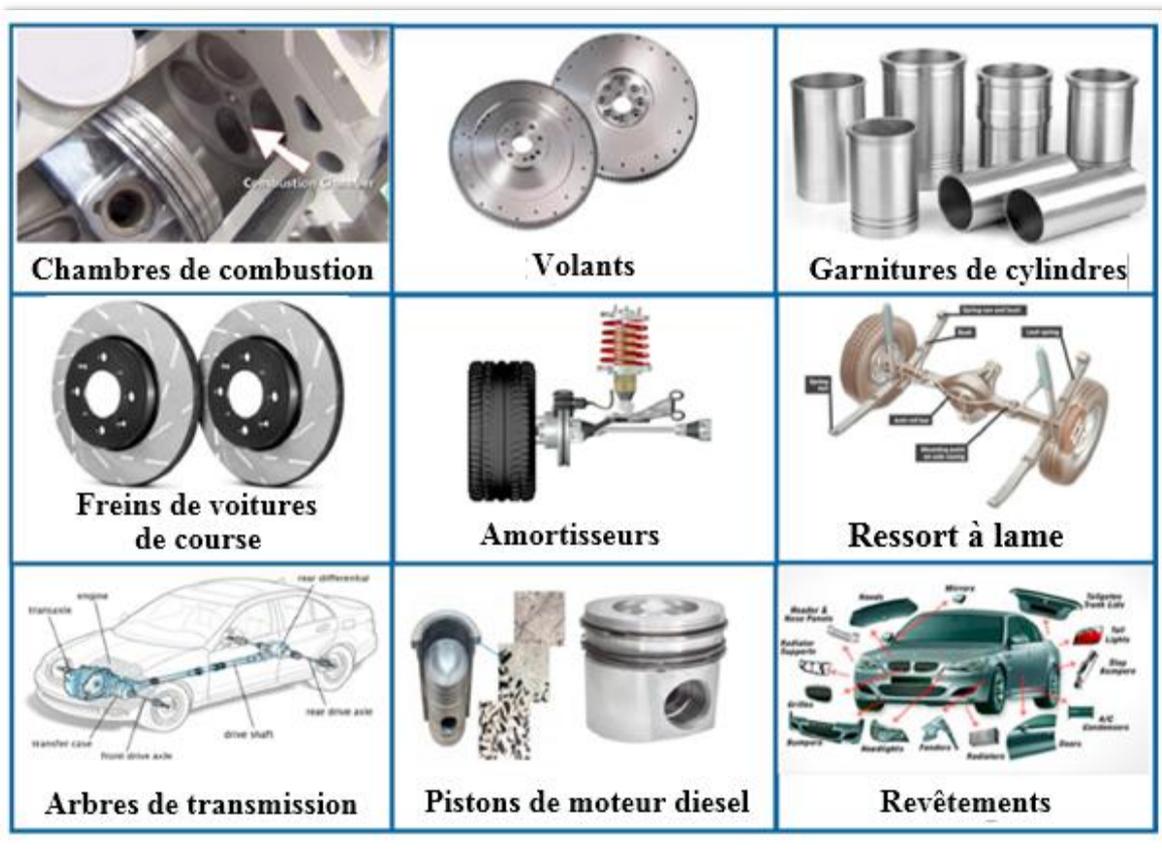


Fig. I. 22. Pièces en FGM dans les applications automobiles [98].

### I.8.3. Ingénierie

Les FGM sont largement utilisés dans la fabrication de nombreux composants d'ingénierie tels que les outils de coupe, et les blocs moteurs de machines, car ils améliorent facilement la résistance mécanique, thermique, à l'usure et à la corrosion de ces composants [172].

Ces dernières années, les FGM WC/Co et le TiCN-WC/Co ont été utilisés pour fabriquer des outils de coupe tels que des outils de tournage, des fraises et des forets hélicoïdaux pour améliorer la résistance à l'usure et à la dureté des surfaces afin d'augmenter la durée de vie des outils, les vitesses d'usinage à l'avance et de réduire le temps d'usinage [173,174].

Les composites céramiques FG WC-Co ont été conçus et produits par O. Eso et al. [175], conformément à la méthode de frittage en phase liquide pour étudier l'effet de la fraction pondérale et de la taille des particules de cobalt sur la microstructure et les propriétés mécaniques des FGM pour des applications d'outils de coupe. D'après leurs conclusions, la granulométrie des particules dépend fortement de la force capillaire et de la fraction pondérale et grâce à cette gradation, les propriétés requises peuvent être obtenues.

### I.8.4. Sport

En outre, les FGM sont utilisés dans de nombreux équipements sportifs tels que les clubs de golf, les raquettes de tennis, les skis, grâce au développement de procédés de fabrication additive pour produire des matériaux à gradient de propriété pour réduire le poids et le frottement, améliorer la durabilité et le rapport résistance/poids, et augmenter la dureté et la résistance à l'usure.

### I.8.5. biomédical

Les matériaux à gradient de propriété permettent à la biocompatibilité des composants médicaux de présenter en même temps la résistance de liaison et la résistance à la corrosion et à l'abrasion qu'il est impossible d'atteindre avec la structure uniforme [176,177]. Par conséquent, ils sont maintenant largement utilisés dans les prothèses et les composants des dents artificielles. Ces dernières années, les FGM Ti-HA, Ti-Co, Ti-ZrO<sub>2</sub>, HA-ZrO<sub>2</sub>, Ti-SiO<sub>2</sub> et TiN-HA ont été utilisés pour produire des implants dentaires et des os artificiels. Afin d'améliorer la biocompatibilité, la résistance à l'usure et la dureté, ce qui accélère la croissance des os et la prévention de la perte osseuse [123,178].

En plus des implants dentaires et des pièces prothétiques, les FGM sont également utilisés pour réparer les cartilages [179]. M. Thieme et al. [180] ont fabriqué des composites Ti poreux par la méthode de la métallurgie des poudres afin d'étudier l'influence de la protection contre les contraintes sur la microstructure et les propriétés mécaniques des matériaux des prothèses orthopédiques. Leurs résultats ont indiqué que les composites FG avaient amélioré la propriété de compatibilité osseuse, et donc ils ont suggéré que ces matériaux soient plus appropriés comme une alternative permanente à la culture du squelette.

Dans une autre étude, B. Lee et al. [124] ont développé le composite FG Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-ZrO<sub>2</sub> en utilisant le procédé monolithique fibreux afin d'améliorer l'ostéoconductivité et les propriétés mécaniques des implants orthopédiques. D'après leurs conclusions, la fabrication de structures graduées sans défauts de masse est significativement contrôlée par des paramètres tels que la porosité, la taille de la poudre et la fraction volumique.

#### **I.8.6. Défense**

La tendance générale actuelle dans le domaine de la défense est de réduire le poids des véhicules, et d'empêcher la propagation des fissures en utilisant des FGM, où les structures graduées sont utilisées comme matériaux résistant à la pénétration pour la fabrication de plaques de blindage, et de gilets pare-balles, ainsi que pour la fabrication de pièces défensives telles que des tiges de guidage, des rouleaux de précision, des tubes, des verrous, des logements d'essieux et des percuteurs [181,182].

C. Huang et Y. Chen [183] ont utilisé le principe de FGM pour fabriquer des armures légères, très résistantes aux chocs et peu coûteuses à partir d'Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-ZrO<sub>2</sub> en utilisant la méthode de la métallurgie des poudres. Ils ont effectué une simulation pour analyser les résultats afin de vérifier leurs résultats expérimentaux. De plus, ils ont indiqué que les composites FG Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> sont des matériaux prometteurs pour les applications de défense en raison de leur dureté, leur conductivité thermique, leur résistance chimique et leur conductivité électrique par rapport aux composites conventionnels.

#### **I.8.7. Energétiques et électroniques**

En plus des domaines précédents, les FGMs présentent un fort potentiel pour les applications énergétiques et électroniques ainsi que pour les applications optoélectroniques. Le concept de FGMs avec un gradient thermique est maintenant utilisé dans divers systèmes énergétiques plutôt que de faire fonctionner un seul matériau à des températures très élevées ou

très basses comme dans les générateurs d'énergie thermique, les composants d'énergie solaire et les condensateurs des dispositifs de conversion d'énergie, capteurs et électrodes [184,185].

Ces matériaux fonctionnellement gradués sont également utilisés dans les batteries, les semi-conducteurs (transistors, diodes et dispositifs optoélectroniques), les dispositifs piézoélectriques et les circuits intégrés [186].

## **I.9. Application des matériaux fonctionnellement gradués FGM dans le domaine du génie civil**

### **I.9.1. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements)**

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation [187].

### **I.9.2. Les chaussées souples**

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité [187].

### **I.9.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes**

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples [187].

### **I.9.4. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel)**

Les parois intérieures des tunnels doit être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM semble être une solution efficace [187].

### I.9.5. Les joints dans la charpente métallique

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre des éléments de poids et de nuances différentes comme l'acier/l'aluminium. Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est qu'il subit une forte accumulation concentration de contraintes, et s'avère plus vulnérable en cas d'action cyclique. L'utilisation des joints en FGM représente une solution optimale [187].

### I.10. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les FGM, qui sont souvent isotropes et non homogènes, sont constitués d'un mélange de deux matériaux pour obtenir une composition qui assure une certaine fonctionnalité. Un FGM peut être définie par la variation graduelle de la fraction volumique des constituants.

La fonction de loi de puissance [188, 189] et la fonction exponentielle [190, 191] sont couramment utilisées pour décrire les variations des propriétés matérielles des FGM. Cependant, dans les fonctions exponentielles et de puissance, les concentrations de contraintes apparaissent dans l'une des interfaces dans lesquelles le matériau change continuellement mais rapidement. C'est pourquoi Chung et Chi [192] ont proposé une FGM sigmoïde (S-FGM), qui est composée de deux fonctions de puissance pour définir une nouvelle fraction volumique. Chi et Chung [193] ont indiqué que l'utilisation d'une S-FGM peut réduire de manière significative les facteurs d'intensité de contrainte d'un corps fissuré.

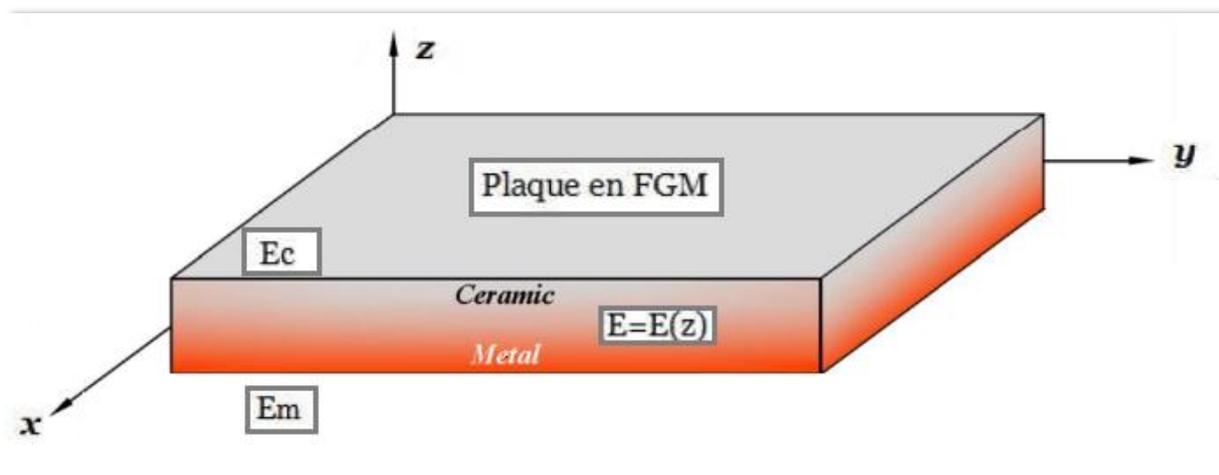


Fig. I. 23. Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z), \nu = \nu(z)$ .

Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.10.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM correspond à une fonction de loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^P \quad \text{I. 1}$$

Où  $P$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [188] :

$$P(z) = P_1 + (P_2 - P_1)V(z) \quad \text{I. 2}$$

Où  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement les caractéristiques du matériau de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la fig.I.24, ce qui montre que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $P < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $P > 1$ .

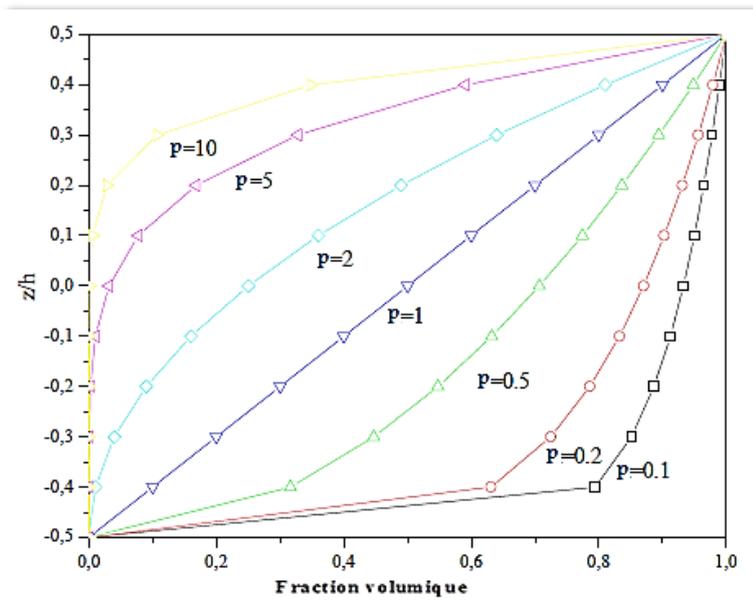


Fig. I. 24. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### I.10.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout d'une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [188]. Afin de résoudre ce problème, Chung et chi [194] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne répartition des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies comme suit :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{h/2} \right)^P \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I. 3. a}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{h/2} \right)^P \text{ Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{I. 3. b}$$

En appliquant la loi de mélange, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I. 4. a}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{I. 4. b}$$

La variation de la fraction volumique selon les équations (I.4.a) et (I.4.b) avec des répartitions sigmoïdes est présentée dans La fig. I.25, ce type de plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

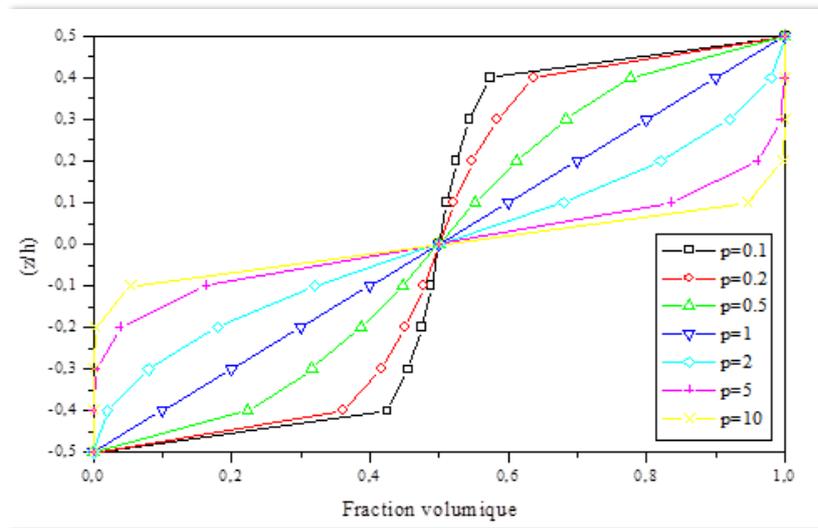


Fig. I. 25. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.10.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Plusieurs chercheurs emploient la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FG comme suit [190] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad \text{I. 5. a}$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad \text{I. 5. b}$$

La fig.I.26 présente La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

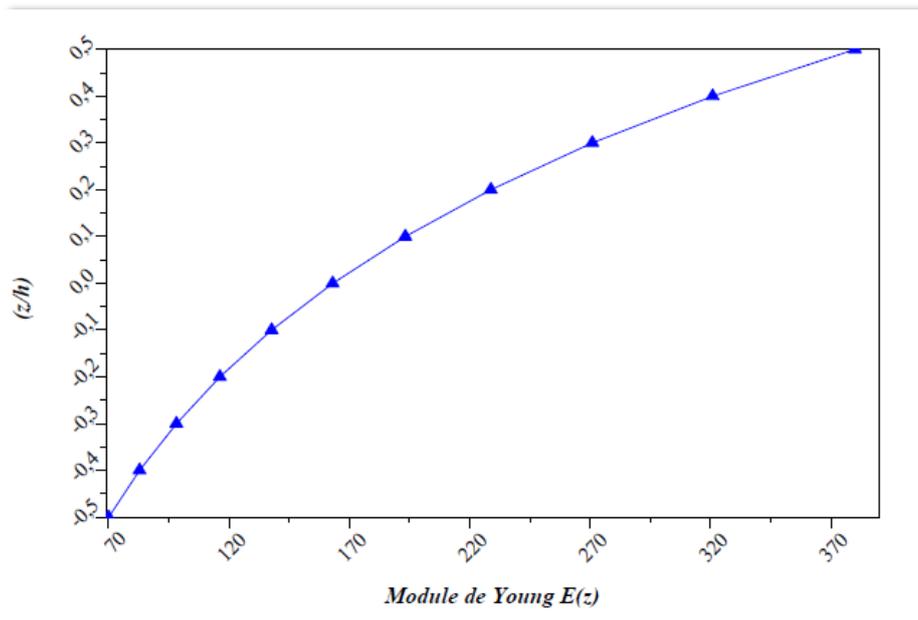


Fig. I. 26. Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

### I.11. Les relations contrainte-déformation

La forme généralisée de la loi de Hooke, qui relie la contrainte à la déformation, est la suivante :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \text{I.6}$$

Où [C] est une matrice de rigidité.

La relation entre la contrainte et la déformation par [C] est une approximation qui est valable pour de petites déformations. Pour un matériau homogène linéairement élastique, les propriétés du matériau sont supposées être les mêmes en tout point du matériau.

La relation déformation-contrainte est obtenue en inversant la matrice de rigidité dans la relation contrainte-déformation (I.6), ce qui donne :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1}\{\sigma\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{I.7}$$

Où [S] est la matrice de flexibilité ou de souplesse (symétrique).

### I.12. Différents types de matériaux

#### I.12.1. Matériaux anisotropes

Les matériaux anisotropes sont des matériaux dont les propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie [195].

La loi de Hooke peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{cases} \quad \text{I. 8}$$

Où  $S_{ijkl}$  est le tenseur de souplesse.

-Le tenseur de rigidité a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes  $\sigma_{ij}$  et des déformations  $\varepsilon_{kl}$ , il y a une réduction des coefficients a 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants.

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \text{et } \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases} \quad \text{I. 9}$$

-Application du théorème des travaux virtuels :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij} \quad \text{I. 10}$$

-La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I. 11}$$

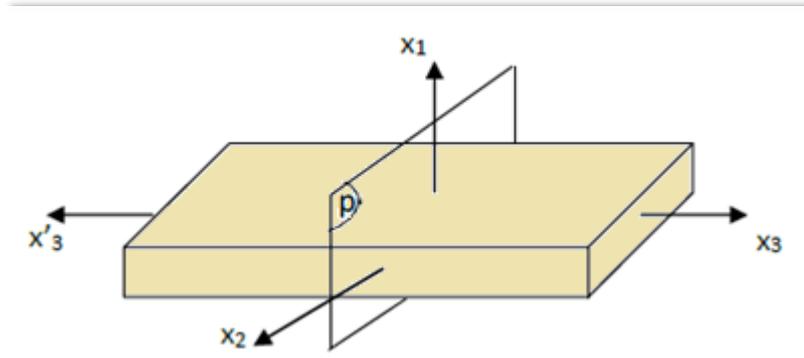
-La forme inverse de l'équation (I. 11), est écrite sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I. 12}$$

Lorsque le matériau est quelconque et ne présente pas de symétrie élastique, il est dit anisotrope. Un matériau anisotrope est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes.

**I.12.2. Matériaux monocliniques**

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie.



**Fig. I. 27.** Plan de symétrie

La forme de la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I. 13}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

**I.12.3. Matériaux orthotropes**

Selon Kollar et Springer [196], un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels.

Un matériau qui possède deux plans de symétries perpendiculaires possède obligatoirement le troisième et ce type de matériau est dit orthotrope. Il y a 9 constantes élastiques indépendantes associées à un matériau orthotrope et un total de 12 termes non nuls.

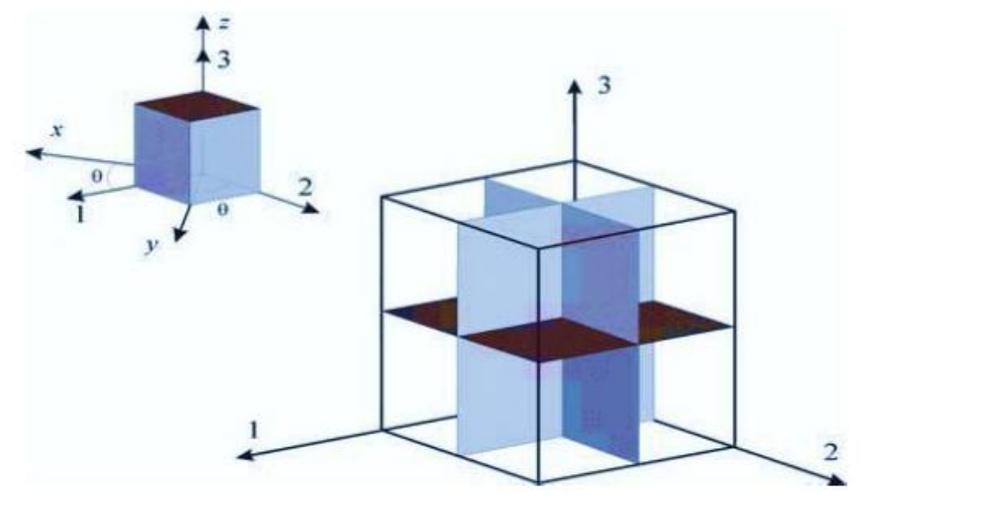


Fig. I. 28. Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.

La matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I. 14}$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I. 15}$$

Les constantes de rigidité et de souplesse sont caractérisées par 9 coefficients indépendants :

- 3 modules d'élasticité longitudinal dans les directions de l'orthotrope.
- 3 modules de cisaillement  $G_{12}$  ;  $G_{23}$  et  $G_{31}$

$\nu_{ij}$ : ( $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$  et  $\nu_{31}$ ) est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction  $j$  quand la contrainte est appliquée selon la direction  $i$ .

La matrice de souplesse étant symétrique, nous obtenons la relation suivante :

$$S_{ij} = S_{ji} \rightarrow \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \rightarrow \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}; \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \text{I. 16}$$

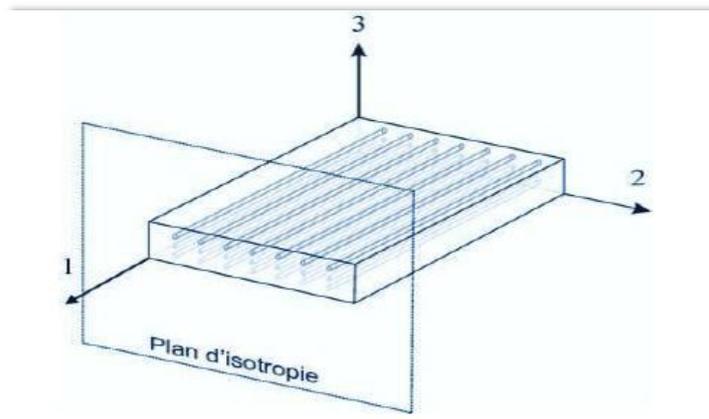
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I.17}$$

**I.12.4. Matériaux transversalement isotropes**

Un matériau composite orthotrope possédant de plus une symétrie de révolution autour d'un axe est nommé isotrope transverse. Un matériau isotrope transverse est caractérisé par cinq constantes élastiques indépendantes si la base est connue.

Pour un matériau transversalement isotrope, il existe un axe de symétrie du matériau (défini comme une direction par rapport à laquelle le matériau a des propriétés identiques) en plus de trois plans de symétrie. Par conséquent, deux fibres de matière ayant les positions symétriques par rapport à l'axe de symétrie ont la même rigidité [197].

Le composite renforcé par fibres longues et uniformes est un exemple de matériau transversalement isotrope.



**Fig. I. 29.** Représentation schématique d'un matériau transversalement isotrope.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc :

$$C_{22} = C_{33} ; \quad C_{12} = C_{13} ; \quad C_{55} = C_{66} ; \quad C_{44} = \frac{C_{22} - C_{33}}{2} \quad \text{I.18}$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{I. 19}$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ( $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}$  et  $G_{12}$ )

### I.12.5. Matériaux isotropes

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. Donc, les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu; G_{12} = G_{31} = G_{23} = G \quad \text{I. 20}$$

Pour un matériau isotrope, tous les plans sont des plans de symétrie du matériau et sont isotropes.

Il y a 2 constantes élastiques indépendantes associées à un matériau isotrope et 12 termes non nuls dans la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité résultante pour un matériau isotrope est :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{I. 21}$$

La matrice de souplesse a la même forme.

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases} C_{11} = \lambda + 2\mu \\ C_{12} = \lambda \end{cases} \quad \text{I. 22}$$

**I.13. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons exposé d'une façon claire des généralités sur les matériaux composites, ensuite, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs classifications, les principales techniques d'élaboration de ces matériaux, ainsi que leurs domaines d'application, nous avons aussi cité les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers et à la fin nous avons présenté les différents types des matériaux.



# CHAPITRE II

## II.1 Introduction

Le terme « ouvrages d'art » regroupe de nombreux types de constructions de génie civil qui assurent la continuité ou la protection des voies de circulation.

De tels ouvrages sont qualifiés « d'art » parce que les connaissances ou l'expérience impliquées dans leur conception et leur construction jouent un rôle tout aussi important que la théorie. Cet ensemble de connaissance constitue ailleurs ce que l'on appelle l'art de l'ingénieur.

Un pont peut être défini comme un ouvrage d'art pour franchir un obstacle naturel ou artificiel, à savoir une rivière, une vallée, une route ou une voie ferrée [198].

Un pont intègre deux parties principales :

- La superstructure : la partie traversant l'obstacle.
- L'infrastructure : la partie supportant la superstructure et transférant ses charges au sol à travers les fondations.

Un pont peut être classé selon plusieurs critères :

- Le matériau de construction du pont, comme les ponts en maçonnerie, les ponts en bois, les ponts métalliques en acier ou en aluminium ou en fer, les ponts en béton armé ou en béton précontraint, et plus récemment des ponts mixtes acier-béton.
- Le système structurel du pont, qui se distingue par le système structurel longitudinal et le système structurel transversal.
  - le système longitudinal, donne lieu à des ponts à poutres, des ponts à ossature, des ponts en arc et des ponts à câble ; à savoir, les ponts à haubans et les ponts suspendus.
  - le système structurel transversal, se caractérise par le type adopté pour la section transversale de la superstructure, à savoir les ponts à poutres dallées ou en poutre-caisson.

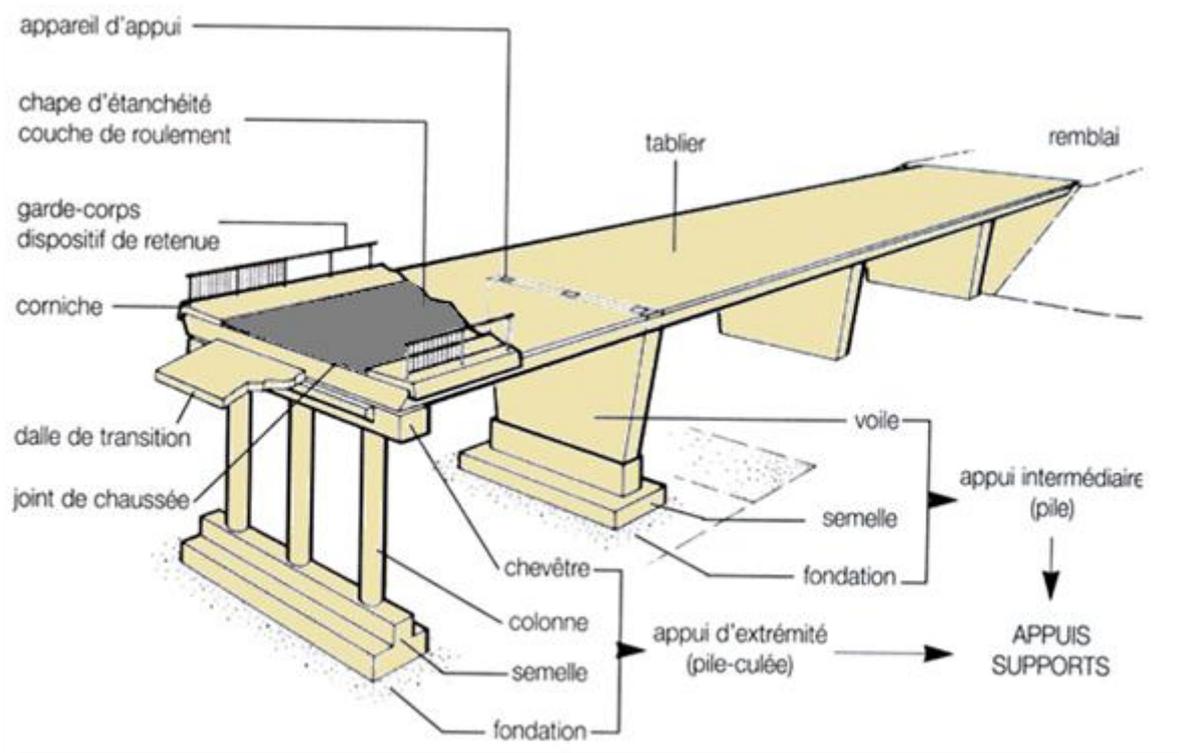


Fig. II. 1. Eléments de structure du pont [199]

## II.2. Eléments constitutifs d'un pont

La structure du pont se compose des éléments suivants :

### II.2.1. Superstructure

La superstructure de la structure du pont est constituée d'une dalle de pont, d'une poutre, d'une entretoise, etc. Ces éléments varient en fonction du type de pont (béton, acier ou composite). L'objectif principal de la superstructure du pont est de résister à la charge qui lui est directement imposée et de transférer ainsi les forces formées par les charges à l'infrastructure.

Les éléments de superstructure du pont sont expliqués plus en détail ci-dessous.

#### II.2.1.1. Eléments structuraux du tablier

1. **Poutres principales (maîtresse) :** Les poutres sont destinées à soutenir la chaussée et à l'empêcher de se déformer. Les poutres sont principalement utilisées dans les ponts en béton. Dans le cas des ponts à poutres, on utilise le plus souvent des poutres à section en I et à deux semelles et âmes porteuses.

2. **Entretoises** : Ce sont des poutres transversales d'un pont, c'est à dire perpendiculaires aux poutres principales et ont pour rôle d'éviter le basculement et de répartir les charges entre les poutres principales.
3. **Longrines ou longerons** : Ce sont des poutres longitudinales qui s'appuient sur l'entretoise.
4. **L'hourdis** : c'est une couche de remplissage de maçonnerie constituée de béton et reposant sur des éléments préfabriqués en béton. Cette couche est destinée à recevoir la couche de roulement (revêtement, chape d'étanchéité) et les surcharges et à transmettre ces derniers aux poutres.  
Dans les ponts, l'hourdis est la partie plane horizontale ou quasi-horizontale, aussi appelée dalle.

#### II.2.1.2. Equipements du tablier

Les équipements du tablier ne sont pas des éléments structuraux qui contribuent directement à la résistance du tablier tels que les poutres, les entretoises et l'hourdis, mais ils permettent d'assurer la fonction d'un pont vis-à-vis ses usagers telle que la sécurité, le confort et la durabilité. Parmi ces équipements on peut citer le revêtement de la chaussée, le trottoir, la corniche, le garde-corps, les dispositifs de sécurité et les joints de chaussée.

##### 1. Le revêtement du tablier

Il est constitué de 2 éléments :

###### a) Chape d'étanchéité :

Utilisé pour empêcher la pénétration d'eau dans les tabliers de pont (eau de pluie, eau de lavage, en particulier l'eau contenant des sels anti-verglas dans les ponts routiers) entraînant de graves risques de corrosion des armatures d'acier. Elle est composée de feuilles à base de bitume légèrement renforcées de fils d'acier. La feuille est collée à la dalle en utilisant la résine synthétique. Sur sa face supérieure, la feuille est protégée par une couche d'asphalte gravillonné qui joue les 2 rôles principaux :

- Renforcement de la feuille dans sa résistance vis-à-vis les sollicitations des charges roulantes.
- C'est une surface d'accrochage qui permet l'adhérence entre la couche d'étanchéité et la couche de roulement.

**b) Couche de roulement :**

Elle est constituée d'une couche de béton bitumineux d'une épaisseur comprise entre 6 et 8 cm. Elle doit offrir un bon uni et des qualités antidérapantes, diffuser et répartir les charges vers l'hourdis et présenter une adhérence pérenne avec le système d'étanchéité.

**2. Le trottoir**

Il permet la circulation des piétons. Surélevé de 15 à 20 cm par rapport à la chaussée, il assure la protection des usagers vis-à-vis le trafic routier. La largeur minimale du trottoir est de 1 m, elle est importante en zone urbaine.

**3. La corniche**

La corniche est un élément qui équipe les bords latéraux d'un pont.

Parmi ses fonctions :

- Elle améliore l'esthétique de l'ouvrage
- Elle protège le tablier contre les eaux pluviales.
- Elle sert à porter le garde-corps.

**4. Le garde-corps**

Le garde-corps est un dispositif de retenue pour les piétons. Il est conçu pour assurer la sécurité des personnes. Il permet non seulement de maintenir la circulation à l'intérieur des limites, mais aussi d'améliorer l'esthétique du pont.

**5. La glissière de sécurité**

Les glissières de sécurité sont en acier galvanisé souple et sont capables de résister à de grandes déformations. Par conséquent, elles absorberont les chocs des véhicules qui s'écartent de la trajectoire. Les composants d'une glissière sont :

- Eléments de glissement guide le véhicule dans le sens de la circulation. Lorsqu'un véhicule en perdition entre en contact avec l'élément de glissement au niveau de sa carrosserie, ce dernier doté d'une grande souplesse va se déformer en poche pour absorber la majeure partie de l'énergie cinétique du véhicule.
- Ecarteur : Lorsqu'il se brise, il absorbe une partie de l'énergie cinétique du véhicule frottant contre la glissière.

- Support : c'est le dernier élément qui recevra le choc. Il est fixé au pont à l'aide d'une platine boulonnée. L'espace normal entre les supports est de 4 m.

### 5. La barrière de sécurité

La barrière de sécurité est destinée à empêcher des véhicules lourds de tomber du pont. On distingue les barrières lourdes et les barrières légères.

### 6. Les joints du tablier

Les tabliers de ponts subissent des variations dimensionnelles sous les effets de la température, fluage, retrait et des charges d'exploitation.

Pour limiter ces déplacements et des déformations et pour permettre la dilatation du tablier, ce dernier est coupé sur sa longueur en plusieurs parties, la jonction entre ces parties est assurée par les joints transversaux qui assurent la continuité du tablier.

On a 2 types de joints :

- Les joints de trottoir qui ne subissent que des déplacements.
- Les joints de chaussée qui à la fois travaillent aux déplacements du tablier, et résistent aux chocs des pneus des véhicules qui les franchissent.

## II.2.2. Appareils d'appuis

Les appareils d'appui sont des dispositifs permettant de transmettre les charges et les mouvements aux appuis (pile ou culées) et aux fondations. Les charges à transmettre sont essentiellement verticales (permanente + exploitation) et horizontales (forces de freinage) [199]. Les appareils d'appui permettent aussi des mouvements de rotation ou de translation du tablier.

## II.2.3. Appuis

Ils transmettent les charges du tablier vers les fondations. On distingue les appuis intermédiaires qui sont les piles et les appuis de rive qui sont les culées.

### II.2.3.1. Pile

Les piles sont des structures verticales utilisées pour supporter le tablier. Ils permettent de transmettre les charges au sol par l'intermédiaire des fondations. La structure des piles a principalement deux fonctions :

- La transmission des charges aux fondations.
- Résistance aux forces horizontales.

Dans la plupart des cas, les piles sont conçues pour résister aux seules charges verticales. Dans les régions situées dans la zone sismique, il est recommandé de concevoir la pile pour les charges latérales également.

On peut classer à deux familles :

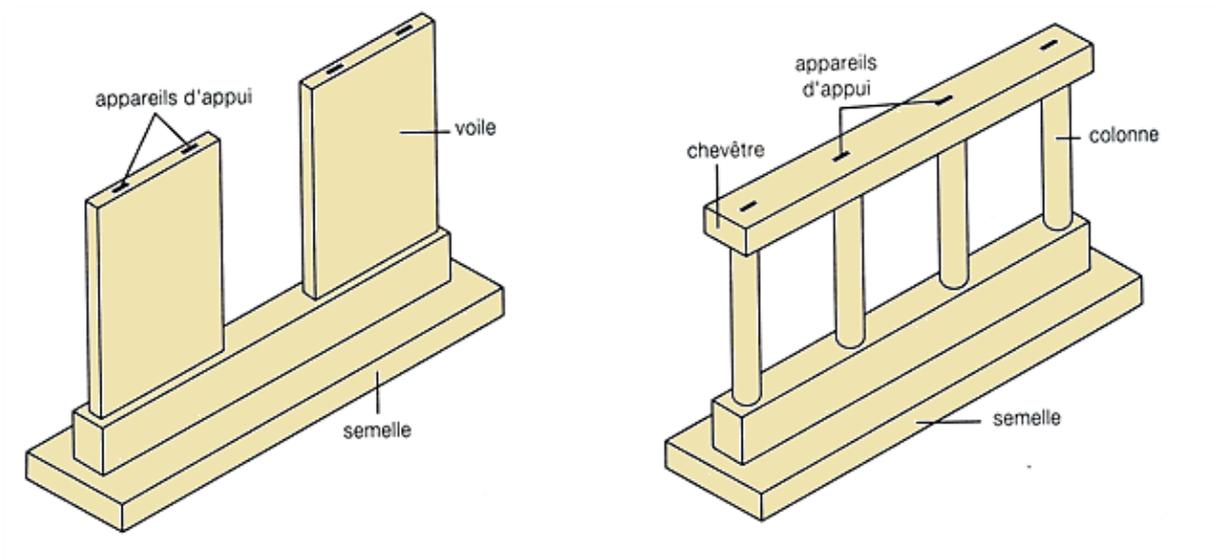
- Pile constituée un élément large (voile).
- Pile constituée un élément mince (poteau ou colonne).

La forme et la taille de la pile dépendent principalement de l'esthétique, du site, de l'espace et des contraintes économiques de la construction. Généralement, la pile du pont est construite par la méthode in situ avec des coffrages à grands panneaux.

Les piles doivent être solides pour supporter les charges horizontales et verticales.

### ➤ Les différentes parties des piles

- **Le sommier (Chevêtre) :** c'est la partie supérieure de la pile qui transfère les charges des superstructures au fût. Elle est en béton armé.
- **Le fût :** c'est la partie verticale qui transfère les charges et les mouvements du pont à la fondation.
- **La fondation :** c'est la partie qui permet de transmettre les charges qu'elle supporte au sol. Lorsque la capacité du sol de surface est trop faible, les tassements prévus sont préjudiciables à la construction, on fait appel alors à des fondations profondes (des pieux forés).



**Fig. II. 2.** Les éléments constructifs de la pile [200]

### II.2.3.2. Culée

Les culées sont des structures verticales utilisées pour retenir la terre que se trouve derrière la structure. Elles limitent les déplacements horizontaux et verticaux (tassements) qui sont dus aux charges de la superstructure ou des terres soutenues. Les charges permanentes et dynamiques de la superstructure du pont sont supportées et transmises vers le sol de fondations par les culées.

La fonction technique d'une culée se caractérise par l'accès à l'intérieur de l'ouvrage, on peut lui associer un local technique lorsque des conduites ou des canalisations passent à l'intérieur du tablier.

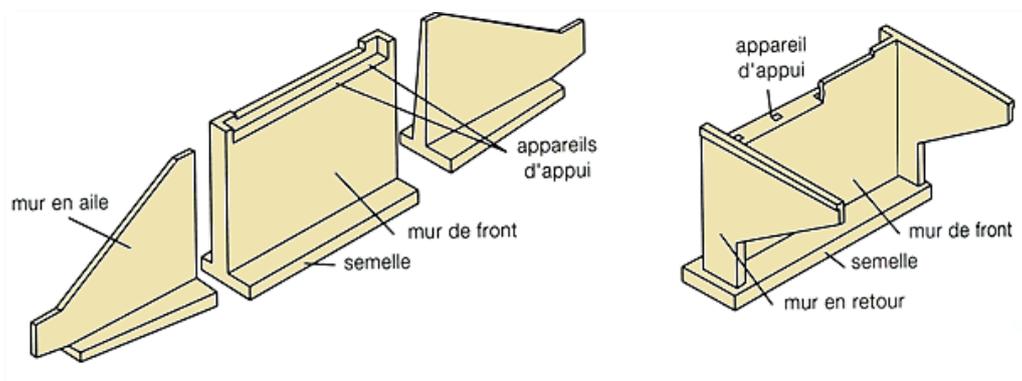


Fig. II. 3. Les éléments constructifs de la culée [200]

### II.3. Types fondamentaux de tabliers de pont et applications

Les tabliers de pont sont l'un des éléments de base du pont qui en constitue la surface. Le tablier du pont peut être soit coulé sur place, préfabriqué, en acier, en bois, en béton, ou d'autres systèmes de revêtement qui reposent sur des poutres en béton ou en acier (ponts composites). Les tabliers de pont définissent le plus souvent les caractéristiques du pont. Dans un pont suspendu, le tablier est suspendu à l'élément structurel principal. Dans le cas d'un pont à haubans, le tablier est le principal élément structurel qui supporte la charge et la transmet par l'intermédiaire des câbles. En outre, le tablier joue un rôle important dans l'aspect esthétique du pont. Ainsi, lors de la conception d'un pont, il est très important d'accorder une attention particulière aux tabliers afin de maintenir un bon niveau de service, de sécurité, d'apparence, etc. Le système de tablier varie en fonction de la structure du pont, des types de méthodes de construction. Nous abordons ici les différents types de tabliers de pont [201].

### II.3.1. Ponts en béton armé

Les tabliers en béton sont les plus courants dans la construction de ponts, notamment en raison de leur facilité de préparation et de mise en place dans des formes et des tailles variées. Les tabliers en béton ont une bonne durabilité, sont très résistants à l'usure et offrent également un bon contrôle de la traction. Parmi ces caractéristiques, la durabilité des tabliers en béton dépend également du système de drainage, de l'armature, de l'inclinaison du pont et de l'épaisseur des dalles.

La principale cause de détérioration des dalles en béton est due à la corrosion des armatures. Cette corrosion est typiquement due aux attaques des chlorures (pénétration des molécules de chlorure à travers les fissures des dalles).

La corrosion des barres d'acier d'armature dans les éléments en béton est une réaction électrochimique entre l'acier et son environnement. Selon l'une des principales théories, elle se produit lorsque le film d'oxyde, formé pendant l'hydratation du ciment et maintenu par la forte alcalinité du béton ( $\text{pH} < 12,5$ ), est rompu par l'intrusion d'ions chlorure.

Dans les tabliers de pont en béton, les ions chlorure proviennent principalement des sels de déverglaçage utilisés lors des opérations d'entretien hivernal et de l'exposition à l'eau de mer. Les chlorures contenus dans le sel pénètrent dans le béton et lorsqu'ils atteignent une concentration critique, ils brisent le film passif qui entoure l'acier d'armature, et la corrosion est amorcée [202]. Il est donc très important de prévoir un enrobage adéquat des armatures dans les dalles de pont. Il existe différents types de tabliers en béton utilisés dans les ponts, dont certains sont les suivants ;

#### II.3.1.1. Ponts à dalles pleines

Les dalles rectangulaires pleines (fig.II.4) ne sont pas une forme structurelle très efficace pour les ponts, car le moment de la surface est faible par rapport à sa surface et à son poids. Ce type de tablier est surtout adopté pour les travées relativement petites (jusqu'à 20 m), le coût de construction est relativement faible et le renforcement est simple.

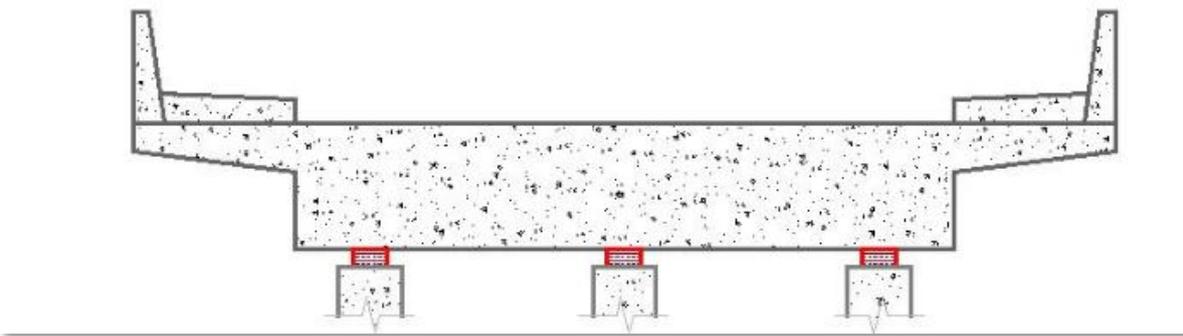


Fig. II. 4. Dalle pleine [203]

### II.3.1.2. Pont à dalles évidées

Les sections de dalles rectangulaires vides sont utilisées lorsque la portée du pont est comprise entre 20 et 30 mètres. Il est courant dans certains pays d'utiliser du béton coulé sur place avec des vides en polystyrène, comme le montre la fig.II.5. Cette structure peut être construite en utilisant du béton armé ordinaire ou peut être post-tendue.

La présence de vides peut augmenter le coût de la construction, car les vides ajoutent de la complexité à l'armature, en particulier à l'armature dans la section de flexion transversale. Mais elle réduit le poids propre et la surface du béton à précontraindre en affectant le second moment de la surface. Le diamètre du vide est le plus souvent inférieur de 60 % à sa profondeur. Le vide doit également être pris en compte dans la conception de la résistance à la flexion transversale.

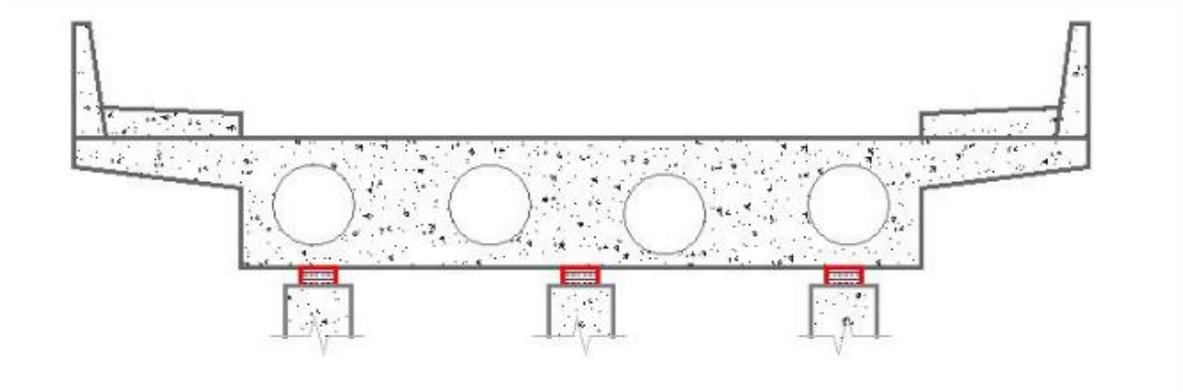


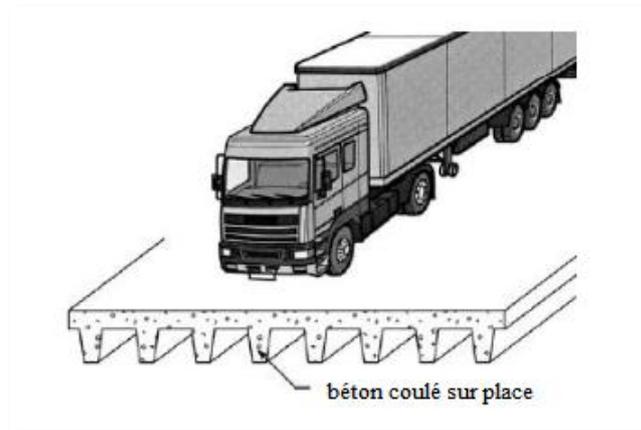
Fig. II. 5. Dalle évidée [203]

### II.3.1.3. Sections de dalles en T

Les sections en T sont principalement adoptées dans la gamme de portée de 20-40m comme une alternative aux dalles vides dans les ponts. Les poutres peuvent être fabriquées soit en préfabriqué, soit sur site. La partie supérieure de la section en T appelée bride qui supporte la

dalle travaille avec la poutre pour réduire la compression et la déflexion peut être contrôlée dans une large mesure.

De plus, le moment de résistance est plus grand que celui des sections rectangulaires et de la dalle monolithique. Les principaux défis des ponts à section en T sont l'action de la force de cisaillement. Des fissures peuvent se développer dans l'âme et les ailes en raison des modifications de la section transversale.



**Fig. II. 6.** Sections de dalles en T [201]

#### II.3.1.4. Section de dalle ou de poutre en caisson

Les sections en caisson sont utilisées lorsque la portée est supérieure à 40 m et les sections en caisson sont plus économiques pour la construction de tabliers dans cette gamme de portée. Les poutres en caisson peuvent également être construites en tant que section préfabriquée ou composite préfabriquée, une section en U précontrainte et une dalle en béton in situ.

Les poutres en caisson présentent de nombreux avantages comme une bonne résistance à la torsion, car le tablier est dans un plan courbe. De plus, la poutre peut être construite plus large en raison de la présence de deux âmes et de brides solides. L'intérieur des poutres caissons peut être utilisé pour des services tels que des conduites de gaz, des canalisations, des câbles, etc.

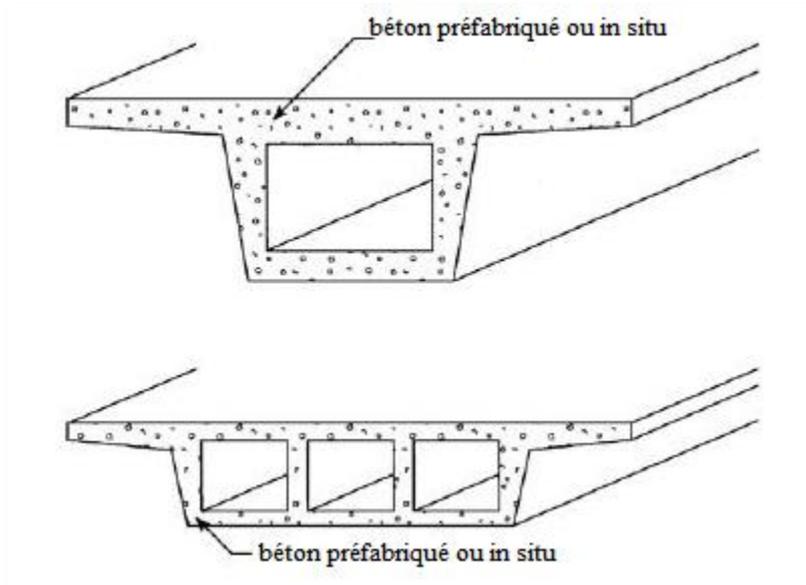


Fig. II. 7. Poutre en caisson [201]

### II.3.2. Tabliers de pont orthotropes en acier

Les tabliers orthotropes en acier sont désormais largement utilisés en Europe, en Amérique du Sud et en Asie. Les principaux avantages de ces tabliers sont les suivants : le poids de la structure peut être considérablement réduit (car les tabliers sont conçus pour être intégrés aux poutres comme une bride commune), ils ont une longue durée de vie et sont faciles à installer.

Une autre caractéristique des tabliers de pont orthotropes en acier est qu'ils peuvent être installés en une seule unité dans les ponts à courte portée. Un inconvénient majeur des ponts en acier est l'effet de la fatigue. Une conception détaillée est nécessaire pour surmonter les problèmes de fatigue des ponts en acier.

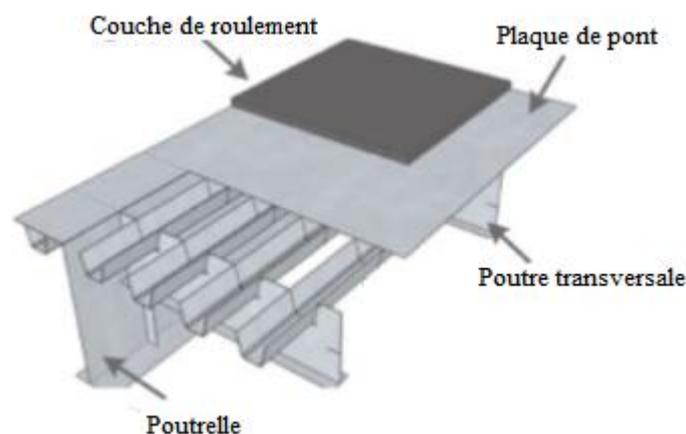


Fig. II. 8. Tabliers de pont orthotropes en acier [201]

### II.3.3. Ponts mixtes

Les tabliers de pont mixtes font généralement référence à l'interaction d'éléments structurels en béton et en acier. Ils sont utilisés dans la construction de ponts principalement en raison de leur capacité à s'adapter à la géométrie et aux contraintes de conception, ainsi que de la fiabilité des éléments en acier. La transmission du cisaillement dans les tabliers mixtes se fait par l'intermédiaire de connecteurs de cisaillement qui sont noyés dans le béton et dont l'autre extrémité est soudée sur la poutre en acier.

Le béton est bon en compression et l'acier est bon en traction et en compression. La déflexion peut donc être contrôlée dans une large mesure. En outre, les éléments en acier peuvent être recyclés à l'avenir au moment de la démolition. L'acier comme élément principal est plus facile à monter que la poutre en béton.

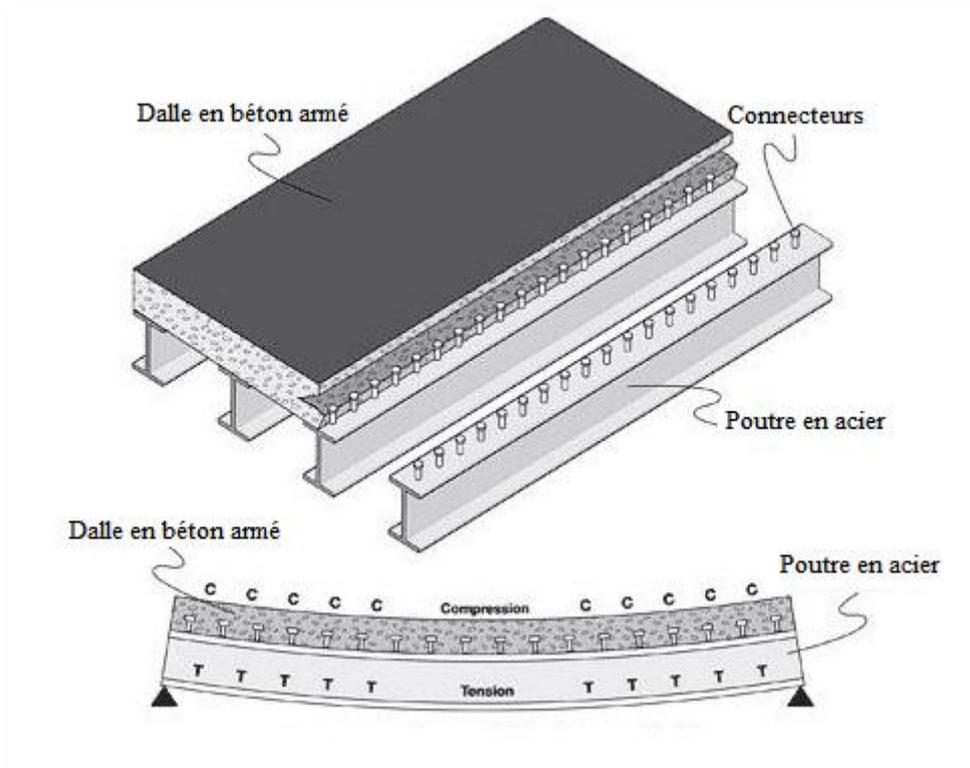


Fig. II. 9. Tablier de pont mixte [204]

### II.3.4. Ponts en polymères renforcés de fibres

Les polymères renforcés par des fibres sont principalement utilisés dans l'industrie aérospatiale et maintenant dans la construction de ponts. Les matériaux composites FRP sont constitués de fibres alignées dans des matériaux en résine, ce qui rend les panneaux très solides, personnalisables et très légers. Les fibres de carbone et de verre sont le plus souvent adoptées

pour les tabliers de pont. Ils sont installés sous forme de panneaux de pont à pleine profondeur après avoir été moulés en panneaux cellulaires [201].



**Fig. II. 10.** Tablier en polymères renforcés de fibres [201].

Les tabliers en polymère renforcé de fibres sont utilisés comme alternative aux tabliers de pont en béton coulé sur place. Ces panneaux sont conçus pour s'emboîter les uns dans les autres à l'aide de clés de cisaillement mâles et femelles. Pour les raccorder sur les cadres en acier, des poches sont formées sur la poutre, puis soudées par des connecteurs de cisaillement.

Les matériaux en FRP peuvent perdre de leur résistance lorsqu'ils sont exposés à une chaleur élevée et provoquer un accident de véhicule. L'asphalte, le béton ou les matériaux polymères sont donnés dans les surfaces d'usure comme revêtements. Le FRP est très utile pour les ponts mobiles, les tabliers ou les dalles soumis à un environnement hautement corrosif [201]. Les tabliers de pont en FRP offrent plusieurs avantages par rapport aux tabliers de pont en béton armé :

Ces matériaux présentent un rapport résistance/poids très élevé et une résistance extrême au gel et aux sels de déglacage (donc réduction des coûts d'entretien), ces matériaux conviennent aux tabliers de pont, offrant ainsi une alternative plus durable et plus légère aux tabliers de pont en béton.

La nature simple et modulaire de la construction de tabliers de pont en FRP constitue un avantage supplémentaire. L'installation est plus rapide sur le chantier [205].

#### **II.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les ponts, leur classification, leurs éléments constitutifs leurs principales méthodes de fabrication, et finalement nous avons cité les différents types de tabliers de pont et applications.



# CHAPITRE III

CHAPITRE III

### III.1. Introduction

En général, le comportement des plaques sous charges mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant soit la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D), soit des théories équivalentes d'élasticité monocouche « Equivalent single layer theory (ESL) ». Ces théories d'ESL peuvent tenir compte des effets de cisaillement et de déformation normale selon le niveau d'hypothèses.

Le modèle ESL le plus simple est la théorie classique des plaques (CPT), également connue sous le nom de Théorie de Love-Kirchoff [2], qui ignore les effets de cisaillement transversal. Il convient donc uniquement aux plaques minces.

La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles ESL est la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) connue sous le nom Reissner [8] et Mindlin [9]. La FSDT tient compte de l'effet de déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque. Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire.

Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction du cisaillement, des théories de déformation du cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites.

### III.2. Généralités sur les théories d'élasticité

#### III.2.1. Définition des plaques

Une plaque est par définition un corps solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont une des dimensions (appelée épaisseur  $h$ ) est petite par rapport aux deux autres dimensions (fig.III.1), Les éléments de plaques sont généralement utilisés pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres [206].

On définit :

- Le plan moyen est situé dans le plan  $(0, x, y)$  à équidistance entre les deux faces (Un plan passant au milieu de l'épaisseur de la plaque)
- $h$  est l'épaisseur de la plaque.
- Les deux surfaces générées par les points supérieurs ( $z = h/2$ ) et inférieurs ( $z = -h/2$ ) de  $h$  sont les surfaces supérieures et inférieures (ou faces) de la plaque
- $\Omega$  est appelée surface médiane, ou surface de référence de la plaque.

- le feuillet neutre (ou feuillet moyen) constitue un élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y), où  $z = 0$ .
- Une fibre normale est par définition l'ensemble des points situés sur une normale au plan médian (ayant ainsi pour direction z) à une position (x, y)

Selon le mode de déformation, les plaques peuvent être classées en trois grandes catégories :

- les **plaques minces à petites déformations** (Kirchhoff).
- les **plaques minces à grandes déformations** (Karman).
- les **plaques épaisses** (Mindlin-Reissner).

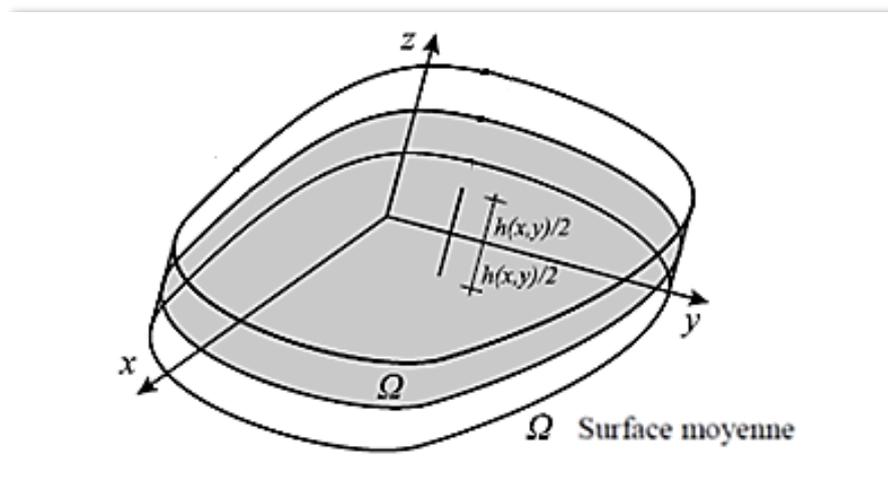


Fig. III. 1. Exemple de plaque d'une géométrie quelconque [207].

### III.2.2. Théorie Classique de Love-Kirchhoff (CPT, Classical plate theory) :

Le modèle le plus simple de Love -Kirchhoff est parfois appelé dans la littérature « la théorie Classique des plaques minces ». Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur [208].

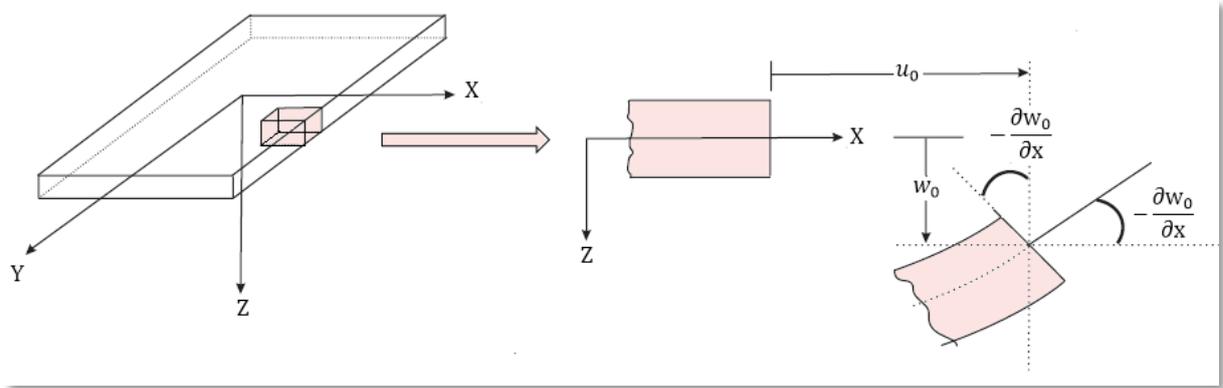
Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff [209] :

- Les sections perpendiculaires au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation Donc la déformation de cisaillement transverse est supposée nulle ( $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) et les effets dus à l'effort tranchant sont négligés.

- L'épaisseur de la plaque est faible, par conséquent les contraintes dans le sens de cette dernière sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ ).
- Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont non extensibles).

Ces hypothèses sont clairement résumées dans la fig.III.2 :



**Fig. III. 2.** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff avant et après déformation [209].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit pour la théorie classique des plaques sous la forme [209] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{(III. 1. a)}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{(III. 1. b)}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad \text{(III. 1. c)}$$

Où :

$u_0$  et  $v_0$  sont les déplacements de membrane dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

$w_0$  est la flèche de la plaque.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w_0}{\partial y}$  sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Cette théorie donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses car elle ne tient pas en compte de l'effet de cisaillement.

La CPT est le modèle ESL le plus simple et il est seulement convient aux plaques/coques minces où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeable.

- *Feldman et Aboudi [210] ont étudié le flambement élastique des plaques FG sous charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison d'approches micromécaniques et structurelles. Les équations directrices dérivées de la CPT ont été*

*résolues analytiquement pour la charge de flambement des plaques FG avec diverses conditions aux limites.*

- *La CPT est utilisée par Javaheri et Eslami [211-212] pour étudier le comportement de flambement des plaques FG sous quatre types de chargements thermiques [211] et de chargement en compression [212].*
- *Ghannadpour et al. [213] ont examiné le flambement thermique des plaques FG en utilisant la CPT. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode des éléments finis au lieu de Solution de Navier [211].*
- *Mahdavian [214] a examiné le gauchissement des plaques FG soumises à une compression non uniforme en utilisant la CPT et les solutions de Fourier.*
- *Mohammadi et al. [215] ont dérivé les solutions analytiques pour la charge de flambage des plaques FG avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres bords ayant des conditions limites arbitraires (c.-à-d. plaque de type Levy). Les équations gouvernantes dérivées de la CPT ont été résolues analytiquement en utilisant une approche de solution de type Levy.*
- *Yanga et Shen [216] ont étudié les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sous des charges axiales et transversales en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman.*
- *Alinia et Ghannadpour [217] ont également utilisé la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier les réponses non linéaires des plaques FG sous pression transversale. Cependant, ils ont utilisé le principe de l'énergie potentielle minimale pour obtenir les solutions analytiques de plaques simplement appuyées.*
- *La CPT a également été utilisé pour analyser les plaques circulaires. Par exemple, les comportements de flexion non linéaire et de post-flambement thermique des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques ont été étudiés par Ma et Wang [218].*
- *Li et al. [219] ont également étudié le comportement de post-flambement non linéaire des plaques circulaires FG sous charge mécanique et thermique à l'aide de la CPT avec les hypothèses de Von Karman.*
- *La CPT a également été utilisé pour les coques FG en raison de sa simplicité. Du et al. [220] ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation sur la base de la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode à échelles multiples.*

- *Du et Li [221] ont étudié la réponse aux vibrations non linéaires des coques cylindriques FG dans des environnements thermiques en suivant une approche similaire.*
- *Shen [222-223] a étudié le comportement de post-flambement des coques cylindriques FG sous compression axiale [222] ou pression latérale [223] ou une augmentation de température uniforme [224] en utilisant la CPT avec les hypothèses de von Karman.*
- *Woo et al. [225] ont étudié le comportement de post-flambement des plaques FG et des coques cylindriques peu profondes sous des charges mécaniques et thermiques en utilisant la CPT et les hypothèses de Von Karman.*
- *Cheng et al. [226] ont adopté la CPT pour étudier le flambage des coques cylindriques FG soumis à une flexion pure.*
- *Woo et Meguid [227] ont étudié la flexion non linéaire des coques peu profondes FG sous charges transversales et un champ de température. Les équations gouvernantes dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman ont été résolues analytiquement pour la déflexion, les contraintes et les moments de flexion d'une coque simplement appuyées en utilisant la méthode de la série de Fourier.*

### III.2.3. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT First Order

#### Shear Deformation Theory) :

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, également appelée « Théorie de Reissner-Mindlin ». Elle est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces en prend en considération l'effet de cisaillement transverse.

Mindlin [9] et Reissner [8,228] ont proposé indépendamment une théorie des plaques qui incorpore l'effet de la déformation de cisaillement transversal pour l'analyse des plaques épaisses.

On peut souvent trouver des cas dans la littérature où les deux théories des plaques ont été associées ensemble sous le nom de théorie des plaques de Reissner-Mindlin ou classées dans la catégorie des théories des plaques dites déformation de cisaillement du premier ordre.

#### Hypothèse de Reissner-Mindlin :

Les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, où après application des charges, les fibres normales au plan moyen restent droites mais pas

nécessairement normales au plan moyen déformé, de plus la longueur d'une fibre transverse varie peu au cours de la déformation [8,9].

Dans ce cas la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène aussi à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante à travers l'épaisseur de la plaque. Cette divergence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant prédit par la théorie du premier ordre est souvent corrigé en introduisant un facteur de correction de cisaillement K. [9]

La théorie du premier ordre est basée sur un champ des déplacements comportant cinq inconnues (il y en avait que trois dans le cas de la CPT) comme suivant [9] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \tag{III. 2. a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \tag{III. 2. b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{III. 2. c}$$

Où :

$u_0$  et  $v_0$  sont les déplacements de membrane dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

$w_0$  est la flèche de la plaque.

$\phi_x, \phi_y$  sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\left( \phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

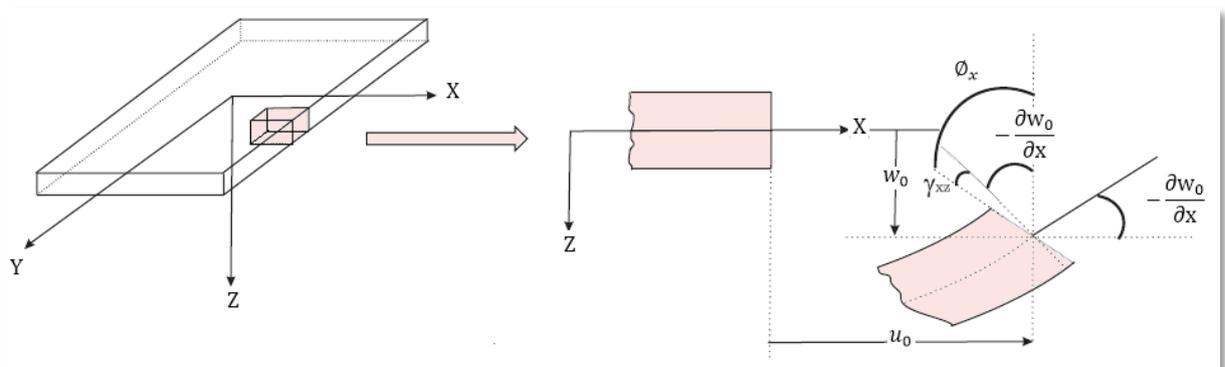


Fig. III. 3. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [209].

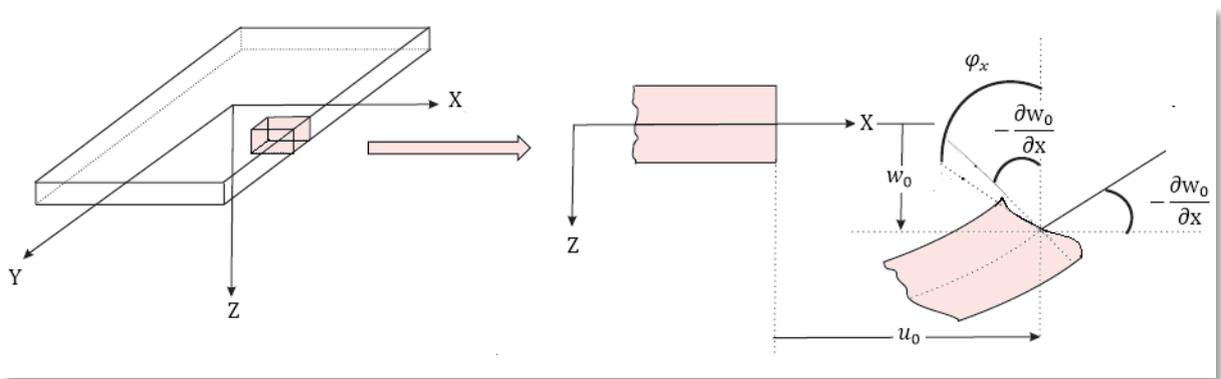
La théorie FSDT est largement appliquée pour étudier le comportement des plaques FGM :

- Praveen et Reddy [229] ont étudié les réponses transitoires non linéaires des plaques FG sous charges thermiques et mécaniques en utilisant la méthode des éléments finis et la FSDT avec les hypothèses de Von Karman.
- Della Croce et Venini [230] ont présenté une famille hiérarchique d'éléments finis pour l'analyse de flexion des plaques FG sous charges mécaniques et thermiques à l'aide de la FSDT et d'une formulation variationnelle. Cependant, le couplage étirement-flexion a été ignoré dans leur travail.
- Chen [231] a étudié les vibrations non linéaires des plaques FG soumises à une action combinée de contraintes de compression et de flexion initiales dans le plan à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von Karman.
- La FSDT avec les hypothèses de Von Karman a également été utilisée par Alijani et al. [232] pour étudier les vibrations non linéaires des plaques FG simplement appuyées dans les environnements thermiques.
- Fallah et al. [233] ont étudié les vibrations libres des plaques FG reposant sur une fondation élastique à l'aide de la FSDT et d'une approche semi-analytique basée sur une combinaison de la série de puissance infinie et de la méthode de Kantorovich.
- Lanhe [234] et Bouazza et al. [235] ont dérivé des solutions analytiques pour la température de flambage des plaques FG simplement appuyées sous deux types de charges thermiques en utilisant la FSDT et solution de Navier.
- Yaghoobi et Yaghoobi [236] ont étudié le flambage des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique sous des charges thermiques et mécaniques.
- Park et Kim [237] ont adopté la FSDT avec les hypothèses de Von Karman pour étudier le post-flambement et les vibrations des plaques FG sous charges thermiques en utilisant la méthode des éléments finis.
- Kiani et Eslami [238] ont étudié le flambement et le post-flambement des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique sous charge mécanique en utilisant la FSDT avec les hypothèses de Von Karman.

### III.2.4. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT Higher Shear Deformation Theory) :

Les limitations de la FSDT peuvent être surmontées en introduisant les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé des plaques. [239]

La théorie des plaques d'ordre élevée est basée sur les mêmes hypothèses que les théories classiques et du premier ordre des plaques, sauf que la section droite et perpendiculaire au plan moyen avant déformation, ne reste pas droite après déformation et peut présenter un gauchissement. Ce modèle n'exige aucun coefficient de correction du cisaillement et donne des contraintes de cisaillement transversales plus précises.



**Fig. III. 4.** Illustration de la plaque d'ordre élevé [209].

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{III. 3. a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{III. 3. b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III. 3. c})$$

Où :  $u_0, v_0$  et  $w_0$  sont les déplacements de membrane dans les directions  $x, y$  et  $z$  respectivement.

$\phi_x, \phi_y$  sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement.

On pose aussi  $\left( \varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$ .

La fonction  $f(z)$  représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales sur l'épaisseur.

En effet, les déplacements de la théorie de Love-Kirchhoff (CPT) sont obtenus facilement en mettant :

$$f(z) = 0 \quad (\text{III. 4})$$

La théorie de Reisner-Mindlin (FSDT) peut être obtenue par :

$$f(z) = z \quad (\text{III. 5})$$

On obtient aussi le déplacement de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement parabolique (**Parabolic shear deformation plate theory (PSDPT)**) de Reddy par :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{III. 6})$$

Reddy [16] a proposé une théorie modifiée qui prend en compte non seulement l'effet de déformations transversale de cisaillement mais aussi leur variation parabolique dans l'épaisseur.

La théorie sinusoïdale de plaque de déformation de cisaillement (**sinusoidal shear deformation plate theory (SSDPT)**) de Touratier [23] est obtenue comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III. 7})$$

Touratier a proposé le modèle "sinus" (SSDPT) en introduisant une fonction trigonométriques sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. Ce modèle est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale.

En outre, la théorie exponentielle de plaque de déformation de cisaillement (**Exponential shear deformation plate theory (ESDPT)**) de Karama et al [240] est obtenue par :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{III. 8})$$

Pour d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé, la fonction  $f(z)$  est montrée sur le tableau suivant :

**Tableau III. 1.** Fonctions de cisaillement relatives aux différentes théories de plaque d'ordre élevé HSDT

Théorie	Fonction de cisaillement $f(z)$
Ambartsumyan [241]	$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Reissner [242]	$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Soldatos et al. [243]	$f(z) = h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$
Aydogdu [244]	$f(z) = z \alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0$
Ait Atmane et al [245]	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]}$
El Meiche et al [246]	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{(\cos(\pi/2)-1)}$
Hebali et al. [247]	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2)-1]}$

### III.2.4.1. Modèles basés sur des fonctions polynomiales

- *Le comportement de flexion des plaques FG a été étudié par Roque et al. [248] à l'aide d'une méthode sans mailles avec des RBF multiquadriques. La formulation était basée sur la HSDT de Pandya et Kant [249] avec 7 inconnues et en tenant compte d'une variation cubique des déplacements axiaux et d'un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur.*
- *Matsunaga a encore étendu sa théorie aux problèmes de flambage thermique [250] et aux problèmes de flexion thermique [251] de plaques FG.*
- *Chen et al. [252] ont étudié les vibrations libres et le flambage des plaques FG sous une combinaison d'une contrainte d'extension et d'une contrainte de flexion pure.*

- Xiang et al. [253] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement du nième ordre pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG et composites. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant le champ de déplacement de la TSDT pour tenir en compte des termes polynomiaux d'ordre  $n$ . La TSDT est donc déduite en tant que cas spécifique. Cette théorie a été appliquée aux problèmes de flexion des plaques FG [254] et aux problèmes de vibration libre des plaques isotropes [255], des plaques sandwich FG [256] et des plaques FG reposant sur une fondation élastique [257].
- Xiang et Kang [258] ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnus pour la flexion des plaques FG à l'aide d'une méthode sans mailles avec des FBR à cannelures, tandis que Sobhy [259] a évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnus pour le flambage et la vibration libre des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique avec diverses conditions aux limites en utilisant une méthode en série.
- Wattanasakulpong et al. [260] ont utilisé la théorie TSDT raffinée de Shi [261] et la méthode Ritz pour analyser les problèmes de vibration libre et forcée des plaques FG encastrées sous des charges thermiques.
- Nguyen-Xuan et al. [262] ont présenté une formulation efficace pour les plaques sandwich composites en utilisant une théorie de déformation de cisaillement de cinquième ordre (FiSDT) en combinaison avec l'analyse isogéométrique par éléments finis (l'IGA). Les comportements de flexion statique, de flambage et de vibrations libres des plaques rectangulaires et circulaires dans différentes conditions limites ont été étudiés.

#### III.2.4.2. Modèles basés sur des fonctions non-polynomiales

- La fonction non-polynomiale a d'abord été utilisée par Levy [19] avec une fonction sinusoïdale pour développer une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses.
- La fonction sinusoïdale a ensuite été adoptée par Stein [20] et Touratier [23] pour élaborer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) à cinq inconnues pour les plaques composites isotropes et stratifiées, respectivement.
- La SSDT a été largement utilisé pour étudier la flexion thermique des plaques composites [263-264], le flambage des plaques composites [265], la flexion des plaques sandwich FG [266-267], le flambage et les vibrations des plaques sandwich FG [268-269], les vibrations des plaques FG [270], la flexion des plaques FG [271], la flexion

thermique des plaques de FG reposant sur une fondation élastique [272], le flambage thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique [273], nanopoutres [274] et nanoplaques [275].

- Soldatos [276] a d'abord utilisé une fonction hyperbolique pour développer une HSDT pour les plaques composites stratifiées.
- Akavci [277-278] a proposé une nouvelle fonction hyperbolique pour développer une HSDT pour l'analyse de flexion des plaques composites [277] et l'analyse des vibrations libres des plaques FG reposant sur une fondation élastique [278].
- Grover et al. [279] ont utilisé une fonction hyperbolique inverse pour développer une HSDT pour les plaques composites et les plaques sandwich.
- Mahi [280] a récemment développé une HSDT pour les plaques sandwich et composites FG basé sur une nouvelle fonction hyperbolique.
- La fonction exponentielle a d'abord été utilisée par Karama et al [238] pour développer une HSDT pour les poutres composites.
- Aydogdu [242] a étendu le travail précédent [238] aux plaques composites.
- Mantari et al. [281] ont également utilisé la fonction exponentielle pour développer une HSDT pour les coques sandwich et composite. Cette HSDT a été adoptée par Mantari et Guedes Soares [282] pour étudier le comportement de flexion des plaques FG.
- Basé sur une nouvelle fonction exponentielle, Mantari et al. [283] ont proposé une HSDT pour l'analyse des vibrations des plaques FG reposant sur une fondation élastique.
- Mantari et al. [284] et Mantari et Guedes Soares [285] ont utilisé une fonction tangentielle pour développer une HSDT pour les plaques isotropes, composites et sandwich [284] et les plaques FG [285].
- Mantari et al. [286-288] ont combiné des fonctions exponentielles et trigonométriques pour développer une HSDT pour les plaques sandwich et composites [286], les plaques FG [287] et les coques doublement courbées FG [288].
- Mantari et Guedes Soares [289-290] ont combiné des fonctions exponentielles et hyperboliques pour développer une HSDT pour les plaques/coques isotropes et multicouches [289] et les plaques FG [290].
- Une combinaison de fonctions tangentielles et exponentielles a été proposée par Mantari et al. [291] pour développer une HSDT pour les plaques FG.

- *Nguyen et al. [292] ont combiné des fonctions tangentielles et cubiques inverses pour les plaques sandwich FG, tandis que Thai et al. [293] ont combiné des fonctions tangentielles et linéaires inverses pour les plaques composites et sandwich.*
- *Thai et al. [294] ont suivi leurs travaux antérieurs [293] pour développer une HSDT pour l'analyse Isogéométrique des plaques sandwich FG en utilisant deux nouvelles fonctions trigonométriques.*

### III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes théories de déformation des plaques à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) pour prédire la réponse globale des plaques et des coques sous chargement mécaniques et thermiques.

Un aperçu sur les divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques et des coques FG a été aussi présenté.

- Parmi les modèles ESL, la CPT est largement utilisé pour prédire Les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques/coques minces FG. Tous les effets de la température, des imperfections géométriques initiales et de la non-linéarité géométrique peuvent être facilement inclus dans le modèle CPT car il est le plus simple parmi les modèles ESL. Bien que la CPT ignore les effets de cisaillement et de déformation normale, il peut fournir des prédictions acceptables pour les plaques minces/coques où les effets du cisaillement et des déformations normales sont insignifiants.
- Parmi les théories de déformation de cisaillement, la FSDT et la TSDT ont été largement utilisés pour la modélisation et l'analyse des plaques/coques FG. Cela pourrait être dû au fait que la FSDT et la TSDT ont été développés il y a longtemps par rapport à d'autres HSDT ayant le même nombre d'inconnues.
- Un grand nombre de HSDT basées sur des fonctions non polynomiales ont été développées récemment. Cependant, elles ne sont pas largement utilisées par rapport aux HSDT basées sur des fonctions polynomiales, sauf dans le cas de la SSDT.



# CHAPITRE IV

## **IV.1. Introduction**

Dans le cadre de l'analyse et de l'étude du comportement statique et dynamique des plaques, il est nécessaire d'opter les méthodes de résolution fiables, connaître les théories qui gèrent ces types des plaques et faire un bon choix de la théorie selon le cas à étudier afin d'obtenir des résultats exacts relatifs.

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques isotropes carrées et rectangulaires épaisses simplement appuyées (tablier de pont) à l'aide d'une nouvelle théorie de plaque raffinée à deux variables. La particularité de cette théorie est qu'elle utilise un nouveau champ de déplacement qui incorpore des termes d'intégrales indéterminées et n'implique que deux variables.

Les équations directrices de la théorie sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Ces équations de mouvement sont ensuite résolues par la méthode de Navier. Ainsi, les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant une équation de valeur propre.

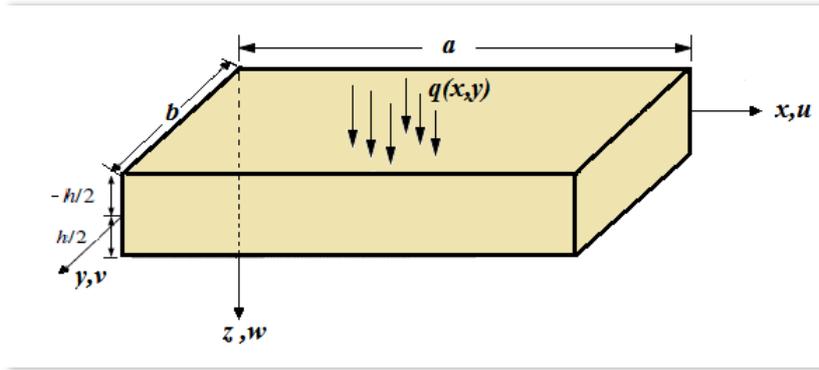
Les résultats des déplacements, des contraintes et des fréquences obtenus par la présente méthode sont comparés à ceux d'autres théories raffinées et à la théorie exacte connus dans la littérature pour montrer l'efficacité de la théorie proposée.

## **IV.2. Formulations théoriques**

### **IV.2.1. Configuration géométrique**

Considérons une plaque (de longueur  $a$ , de largeur  $b$ , et d'épaisseur  $h$ ) constituée d'un matériau isotrope (homogène) comme le montre la fig.IV.1. La plaque occupe (dans le système de coordonnées cartésiennes droites  $O-x-y-z$ ) une région :

$$0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b \quad - h/2 \leq z \leq h/2$$



**Fig. IV. 1.** Géométrie des plaques et système de coordonnées

### IV.2.2. Champ de déplacement de la nouvelle théorie

Le champ de déplacement du présent modèle est exprimé par la relation suivante :

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + K_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{IV.1a}$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + K_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad \text{IV.1b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad \text{IV.1c}$$

- $u, v, w$  sont respectivement les déplacements dans les directions des coordonnées  $(x, y, z)$ . Ces déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, de ce fait, les déformations sont infiniment petites.
- $w_0$  et  $\theta$  sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.
- Le déplacement transversal  $w$  dans la direction  $z$  est supposé être une fonction des coordonnées  $x, y$  et le temps  $t$  seulement.
- La fonction de cisaillement utilisée dans ce travail est la suivante :

$$f(z) = z \exp \left[ -2 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad \text{IV.2}$$

- Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  dépendent de la géométrie.
- La plaque est soumise à une charge transversale uniquement  $q(x, y)$ .

On constate que la cinématique de l'équation (1) n'introduit que deux inconnues ( $w_0$  et  $\theta$ ).

### IV.2.3. Champs des déformations

Les relations déformation-déplacement de la présente théorie peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad \text{IV.3a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.3b}$$

Où les termes qui groupent le champ de déformation ont pour expressions :

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.4a}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad \text{IV.4b}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad \text{IV.4c}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{IV.4d}$$

Les intégrales utilisées dans la cinématique proposée doivent être déterminées par la solution de Navier et peuvent être exprimées par :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = \hat{A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = \hat{B} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \int \theta dx = \hat{A} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \int \theta dy = \hat{B} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{IV.5}$$

Dans l'équation (IV.5), les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont définis en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas par Navier. Par conséquent,  $A'$ ,  $B'$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont exprimés comme suit:

$$\hat{A} = -\frac{1}{\lambda^2}, \hat{B} = -\frac{1}{\mu^2}, k_1 = \lambda^2, k_2 = \mu^2 \quad \text{IV.6}$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont définis dans l'expression (IV.25).

#### IV.2.4. Champs des contraintes

Pour une plaque élastique et isotrope, les relations contrainte-déformation peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.7}$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement.

$C_{ij}$ , peut être donné comme suit :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, C_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{IV.8}$$

#### IV.2.5. Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement. Il peut être défini sous la forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad \text{IV.9}$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation ;  $\delta V$  est la variation de l'énergie potentielle ; et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique.

##### IV.2.5.1. Energie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la plaque isotrope est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [M_x \delta k_x^b + M_y \delta k_y^b + M_{xy} \delta k_{xy}^b + N_{sx} \delta k_x^s + N_{sy} \delta k_y^s + N_{sxy} \delta k_{xy}^s + N_{Tcx} \delta \gamma_{xz}^0 \\ &\quad + N_{Tcy} \delta \gamma_{yz}^0] dV \end{aligned} \quad \text{IV.10}$$

Où A est la surface supérieure de la plaque et les résultantes de contrainte N, M sont données par les expressions (IV.11) ci-après :

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \quad \text{IV.11a}$$

$$(N_{sx}, N_{sy}, N_{sxy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz \quad \text{IV.11b}$$

$$(N_{Tcx}, N_{Tcy}, ) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad \text{IV.11c}$$

#### IV.2.5.2. Energie potentielle

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée par :

$$\delta V = - \int_A q(x, y) \delta w_0 dA \quad \text{IV.12}$$

#### IV.2.5.3. Energie cinétique

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V (\ddot{u} \delta \ddot{u} + \ddot{v} \delta \ddot{v} + \ddot{w} \delta \ddot{w}) \rho dV \\ &= \int_A \left\{ I_1 \ddot{w}_0 \delta \ddot{w}_0 + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad - I_3 \left( K_1 \dot{A} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + K_1 \dot{A} \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + K_2 \dot{B} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + K_2 \dot{B} \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \\ &\quad \left. + I_4 \left( (K_1 \dot{A})^2 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + (K_2 \dot{B})^2 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad \text{IV.13}$$

Où le point «.» indique la dérivation par rapport à la variable de temps  $t$  ;  $\rho$  est la masse volumique ; et  $I_i$  sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z f(z), f(z)^2) \rho dz \quad \text{IV.14}$$

En substituant les expressions  $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta K$  des équations (IV.10), (IV.12) et (IV.13) dans l'équation (IV.9) et en faisant l'intégration par parties, et en recueillant les coefficients  $\delta w_0$  et  $\delta \theta$ .

On obtient les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} \delta w_0: -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - q & \quad \text{IV.15.a} \\ & = -I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_2 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_3 \left( K_1 \dot{A} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + K_2 \dot{B} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \theta: K_1 \dot{A} \frac{\partial^2 N_{sx}}{\partial x^2} + K_2 \dot{B} \frac{\partial^2 N_{sy}}{\partial y^2} + (K_1 \dot{A} + K_2 \dot{B}) \frac{\partial^2 N_{sxy}}{\partial x \partial y} - K_1 \dot{A} \frac{\partial N_{Tcx}}{\partial x} - K_2 \dot{B} \frac{\partial N_{Tcy}}{\partial y} & \quad \text{IV.15.b} \\ & = -I_3 \left( K_1 \dot{A} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + K_2 \dot{B} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\ & + I_4 \left( (K_1 \dot{A})^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (K_2 \dot{B})^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned}$$

En substituant l'équation (IV.3) dans l'équation (IV.7) et les résultats suivants dans l'équation (IV.11), les équations du mouvement sont obtenues en termes de déplacements ( $w_0, \theta$ ) sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} M \\ N_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ B & A_S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, N_{Tc} = H\gamma \quad \text{IV.16}$$

$$\text{Dans laquelle :} \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, N_S = \{N_{sx}, N_{sy}, N_{sxy}\}^t \quad \text{IV.17a}$$

$$k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad \text{IV.17b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, A_S = \begin{bmatrix} A_{S11} & A_{S12} & 0 \\ A_{S12} & A_{S22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{S66} \end{bmatrix} \quad \text{IV.18a}$$

$$N_{Tc} = \{N_{Tcx}, N_{Tcy}\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, H = \begin{bmatrix} H_{44} & 0 \\ 0 & H_{55} \end{bmatrix} \quad \text{IV.18b}$$

Les composantes de la rigidité sont données comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, A_{Sij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z^2, zf(z), f(z)^2) C_{ij} dz, (i, j = 1, 2, 6) \quad \text{IV.19a}$$

$$H_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} f(z)^2 C_{ij} dz, (i, j = 4, 5) \quad \text{IV.19b}$$

En substituant l'équation (IV.16) dans l'équation (IV.15), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(w_0, \theta)$ ; et les équations appropriées prennent la forme :

$$\begin{aligned} A_{111}d_{1111}w_0 - B_{11}K_1\dot{A}d_{1111}\theta + 2A_{12}d_{1122}w_0 - B_{12}(K_1\dot{A} + K_2\dot{B})d_{1122}\theta + A_{22}d_{2222}w_0 \\ - B_{22}K_2\dot{B}d_{2222}\theta + 4A_{66}d_{1122}w_0 - 2B_{66}(K_1\dot{A} + K_2\dot{B})d_{1122}\theta - q \\ = -I_1\ddot{w}_0 + I_2(d_{11}\ddot{w}_0 + d_{22}\ddot{w}_0) - I_3(K_1\dot{A}d_{11}\ddot{\theta} + K_2\dot{B}d_{22}\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad \text{IV.20a}$$

$$\begin{aligned} (-B_{11}d_{1111}w_0 + A_{s11}K_1\dot{A}d_{1111}\theta - B_{12}d_{1122}w_0 + A_{s12}K_2\dot{B}d_{1122}\theta)K_1\dot{A} + \\ (-B_{12}d_{1122}w_0 + A_{s12}K_1\dot{A}d_{1122}\theta - B_{22}d_{2222}w_0 + A_{s22}K_2\dot{B}d_{2222}\theta)K_2\dot{B} + \\ (-2B_{66}d_{1122}w_0 + A_{s66}(K_1\dot{A} + K_2\dot{B})d_{1122}\theta)(K_1\dot{A} + K_2\dot{B}) - (K_1\dot{A})^2H_{55}d_{11}\theta - \\ (K_2\dot{B})^2H_{44}d_{22}\theta = -I_3(K_1\dot{A}d_{11}\ddot{w}_0 + K_2\dot{B}d_{22}\ddot{w}_0) + I_4((K_1\dot{A})^2d_{11}\ddot{\theta} + (K_2\dot{B})^2d_{22}\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad \text{IV.20b}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2) \quad \text{IV.21}$$

Les contraintes de cisaillement  $(\tau_{xz}, \tau_{yz})$  peuvent être exprimées par les relations constitutives l'équation (IV.7) ou par l'intégration des équations d'équilibre de l'élasticité 3D par rapport à la coordonnée d'épaisseur

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \text{IV.22}$$

En intégrant l'équation (IV.22) par rapport à la coordonnée d'épaisseur  $z$  et en appliquant les conditions aux limites suivantes aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque :

$$[\tau_{xz}]_{z=\pm h/2} = 0 \quad , \quad [\tau_{yz}]_{z=\pm h/2} = 0 \quad \text{IV.23}$$

$\tau_{xz}^{CR}$  et  $\tau_{yz}^{CR}$  sont les contraintes obtenues par les relations constitutives et  $(\tau_{xz}^{EE}, \tau_{yz}^{EE})$  sont les contraintes calculées par les équations d'équilibre.

### IV.3. Solutions analytiques pour une plaque isotrope simplement appuyée

La procédure de solution de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables de déplacement sont exprimées comme produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} w_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \sin(\omega_{mn} t) \\ \theta_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \sin(\omega_{mn} t) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.24}$$

Où  $w_{mn}$ ,  $\theta_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $m$ ,  $n$  sont des nombres de mode et  $\omega$  est la fréquence de vibration libre de la plaque,  $\sqrt{-1}$  l'unité imaginaire avec :

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b} \quad \text{IV.25}$$

La charge transversale  $q$  est également développée dans la série sinusoïdale de double-Fourier comme suit :

**-Analyse de la flexion de plaques isotropes soumises à une charge uniformément répartie.**

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{IV.26a}$$

Où :

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \text{ pour } m = 1,3,5, \dots \dots \text{ et } n = 1,3,5, \dots \quad \text{IV.26b}$$

$$q_{mn} = 0 \text{ pour } m = 2,4, \dots \dots \text{ et } n = 2,4, \dots \quad \text{IV.26c}$$

**-Analyse de la flexion de plaques isotropes soumises à une charge sinusoïdale.**

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{IV.27}$$

**-Analyse de la flexion de plaques isotropes soumises à une charge variant linéairement.**

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{IV.28a}$$

Où :

$$q_{mn} = -(8q_0/mn\pi^2) \cos(m\pi) \text{ pour } m = 1,3,5, \dots \dots \text{ et } n = 1,3,5, \dots \quad \text{IV.28b}$$

En substituant l'équation (IV.24) dans l'équation (IV.20), on obtient le problème suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_{mn} \\ \theta_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.29}$$

Avec :

$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$  est la matrice de rigidité.

$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$  est la matrice de masse.

Où

$$K_{11} = 2(2A_{66} + A_{12})\lambda^2\mu^2 + A_{22}\mu^4 + A_{11}\lambda^4$$

$$K_{12} = -2(K_1\hat{A} + K_2\hat{B})B_{66}\lambda^2\mu^2 - (K_1\hat{A} + K_2\hat{B})B_{12}\lambda^2\mu^2 - K_1\hat{A}B_{11}\lambda^4 - K_2\hat{B}B_{22}\mu^4 \quad \text{IV.30a}$$

$$K_{22} = (K_1\hat{A}\lambda^4 A_{s11} + K_2\hat{B}\lambda^2\mu^2 A_{s12})K_1\hat{A} + (K_1\hat{A})^2\lambda^2 H_{55} + (K_1\hat{A}\lambda^2\mu^2 A_{s12} + K_2\hat{B}\mu^4 A_{s22})K_2\hat{B} + (K_2\hat{B})^2\mu^2 H_{44} + (K_1\hat{A}\lambda^2\mu^2 A_{s66} + K_2\hat{B}\lambda^2\mu^2 A_{s66})(K_1\hat{A} + K_2\hat{B})$$

$$m_{11} = -I_1 - I_2(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{12} = I_3(K_1\hat{A}\lambda^2 + K_2\hat{B}\mu^2)$$

IV.30b

$$m_{22} = -I_4((K_1\hat{A})^2\lambda^2 + (K_2\hat{B})^2\mu^2)$$

#### IV.4. Conclusion

Dans le présent travail, une théorie exponentielle efficace et simple de déformation de cisaillement (ESDT) est présentée pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques isotropes simplement appuyées. Contrairement aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et à la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) existantes, le modèle proposé utilise un nouveau champ de déplacement qui incorpore des termes d'intégrales indéterminées et n'implique que deux variables.

Les équations gouvernantes dans la plaque sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton, Les solutions et les relations analytiques sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.



# CHAPITRE V

### V.1.Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats numériques issus de l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques isotropes carrées et rectangulaires épaisses simplement appuyées obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple.

Pour montrer la précision et l'efficacité de la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (ESDT), les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé de Reddy [16], Ghugal et Sayyad [25], Ghugal et Pawar [26], Sayyad et Ghugal [27], et aux résultats déterminés par la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) de Mindlin [9], la théorie classique des plaques (CPT) de Kirchhoff [2,295] et la solution d'élasticité exacte de Pagano [296].

### V.2. Les résultats numériques

Les résultats numériques pour la flexion et la vibration sont présentés sous forme adimensionnelle par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{E_2 u}{qhS^3} \left(0, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right) & \bar{w} &= \frac{100Ew}{qhS^4} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) & \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x}{qS^2} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{qS^2} \left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right) & \bar{\tau}_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{qS} \left(0, \frac{b}{2}, 0\right) & \bar{\omega} &= \omega_{mn} h \sqrt{\rho/G} \end{aligned} \quad \text{V. 1}$$

Où  $S = (a/h)$  est le rapport d'épaisseur.

Les propriétés du matériau de la plaque isotrope sont utilisées :

$$E = 210\text{GPa} \quad \nu = 0.3 \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$$

Où  $E$  est le module d'Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $G$  est le module de cisaillement, et  $\rho$  est la densité du matériau.

### V.1.1. Analyse de flexion

**Exemple 1 :** Le tableau 1 montre la comparaison du déplacement adimensionnel, du déplacement transversal, de la contrainte normale, de la contrainte de cisaillement et de la contrainte de cisaillement transversal pour la plaque carrée isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour les différents rapports d'épaisseur.

**Tableau. V. 1.** Comparaison du déplacement adimensionnel ( $\bar{u}$ ), du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et de la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ ) dans une plaque carrée isotrope soumis à une charge uniformément répartie

S	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{zx}^{CR}$	$\bar{\tau}_{zx}^{EE}$
4	A.S.Sayyad [27]	ESDT	0.079	5.816	0.300	0.223	0.481	0.472
	Reddy [16]	HSDT	0.079	5.869	0.299	0.218	0.482	0.452
	Ghugal et Sayyad [25]	TSDT	0.074	5.680	0.318	0.208	0.483	0.420
	Ghugal et Pawar [26]	HPSDT	0.079	5.858	0.297	0.185	0.477	0.451
	Mindlin [9]	FSDT	0.074	5.633	0.287	0.195	0.330	0.495
	Kirchhoff [2, 295]	CPT	0.074	4.436	0.287	0.195	–	0.495
	Pagano [296]	Elasticity	0.072	5.694	0.307	–	0.460	–
	<b>Présente</b>	<b>ESDT</b>	<b>0.079</b>	<b>5.858</b>	<b>0.300</b>	<b>0.223</b>	<b>0.483</b>	<b>0.451</b>
10	A.S.Sayyad [27]	ESDT	0.075	4.658	0.289	0.204	0.494	0.490
	Reddy [16]	HSDT	0.075	4.666	0.289	0.203	0.492	0.486
	Ghugal et Sayyad [25]	TSDT	0.073	4.625	0.307	0.195	0.504	0.481
	Ghugal et Pawar [26]	HPSDT	0.074	4.665	0.289	0.193	0.489	0.486
	Mindlin [9]	FSDT	0.074	4.670	0.287	0.195	0.330	0.495
	Kirchhoff [2, 295]	CPT	0.074	4.436	0.287	0.195	–	0.495
	Pagano [296]	Elasticity	0.073	4.639	0.289	–	0.487	–
	<b>Présente</b>	<b>ESDT</b>	<b>0.075</b>	<b>4.664</b>	<b>0.289</b>	<b>0.200</b>	<b>0.506</b>	<b>0.484</b>

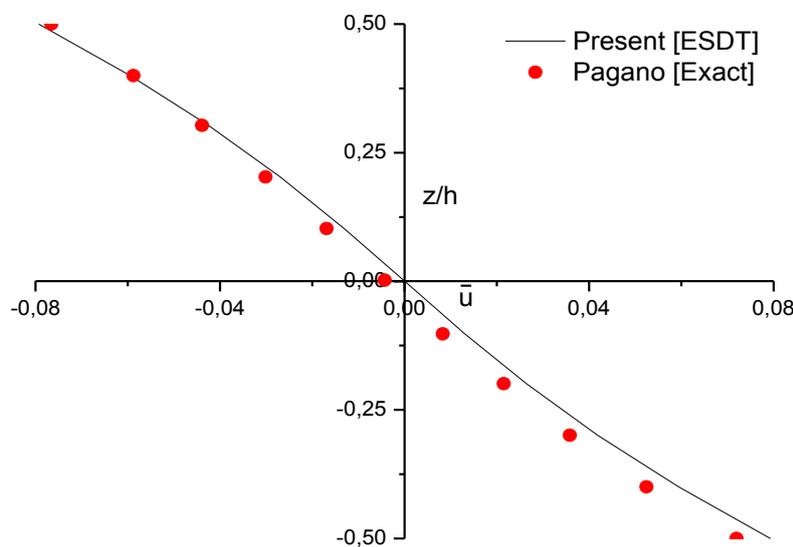
A partir de cette comparaison, un bon accord est observé entre les résultats de déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), déplacement axial ( $\bar{u}$ ), contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ ) calculés par la présente théorie (ESDT), et ceux trouvées dans la littérature. On peut voir à partir de ces résultats que la théorie proposée et les théories d'ordre élevé surestiment les valeurs du déplacement axial par rapport à celles de la solution exacte. La variation du déplacement axial ( $\bar{u}$ ) à travers l'épaisseur pour une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie est montrée dans la fig.V.1. On peut remarquer sur cette figure que le déplacement axial ( $\bar{u}$ ) augmente avec l'augmentation de l'épaisseur  $h$ .

La fig.V.2 illustre la variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) à travers l'épaisseur, on constate une bonne corrélation entre les résultats déterminés par notre modèle et ceux de Pagano

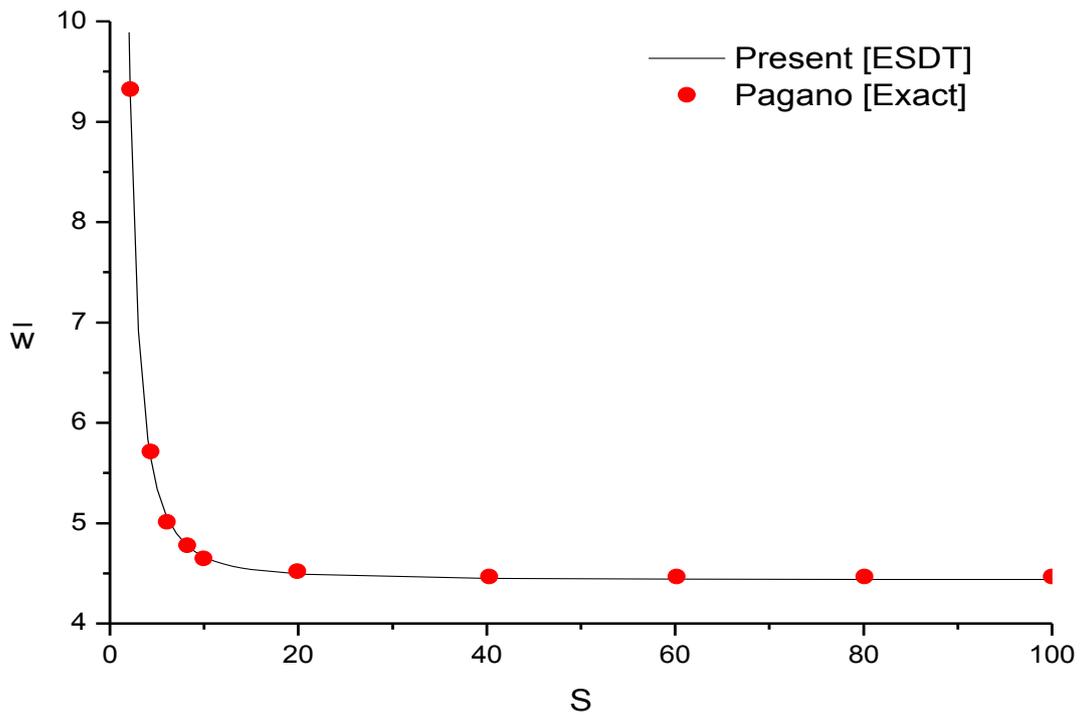
[296], ce qui confirme l'efficacité de la théorie proposée. Il est évident que  $\bar{w}$  diminue à mesure que le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) augmente.

Le tableau montre également que les valeurs maximales de la contrainte normale obtenues par la théorie actuelle, la théorie de Sayyad et Ghugal [27], et la théorie de Reddy [16] sont très proches de celles de la solution de pagano [296] pour le rapport d'épaisseur 4, alors que ces théories d'ordre élevé donnent la valeur exacte pour le rapport d'épaisseur 10. La Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ) est présentée à la fig.V.3. A partir de cette figure, on observe une bonne concordance entre les valeurs de  $\bar{\sigma}_x$  obtenues par la théorie actuelle et celles de Pagano [296]. On peut remarquer que la diminution de l'épaisseur mène à une augmentation de la contrainte normale.

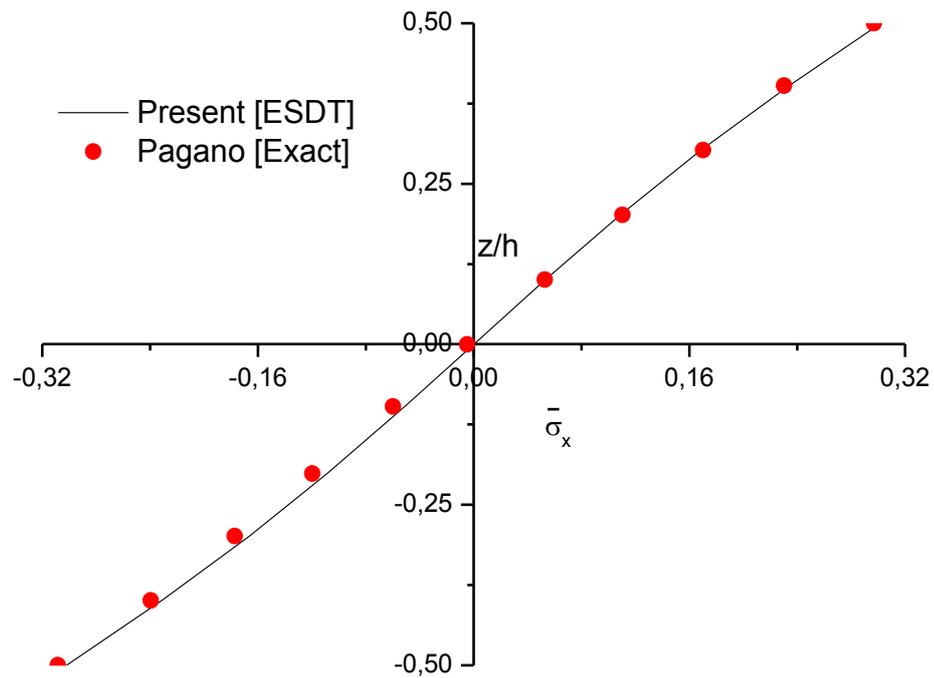
Les solutions d'élasticité exactes pour la contrainte de cisaillement ne sont pas disponibles, donc on compare nos résultats avec les autres théories d'ordre élevé, et les valeurs correspondantes de la FSDT et la CPT. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats disponibles dans la littérature. La fig.V.4 présente la variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ )



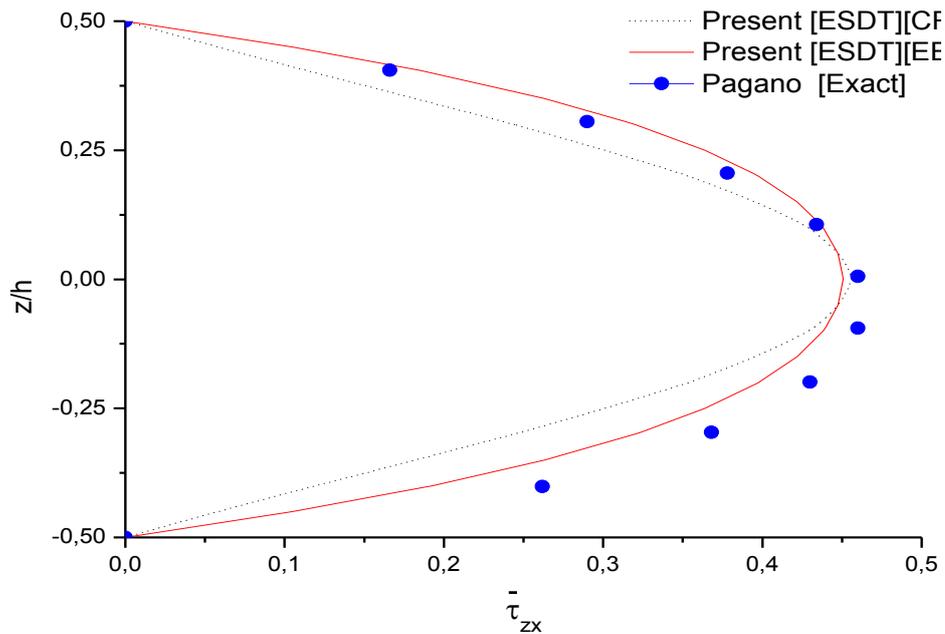
**Fig. V. 1.** La Variation du déplacement ( $\bar{u}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).



**Fig. V. 2.** La Variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).



**Fig. V. 3.** La Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ )



**Fig. V. 4.** La Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge uniformément répartie pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ )

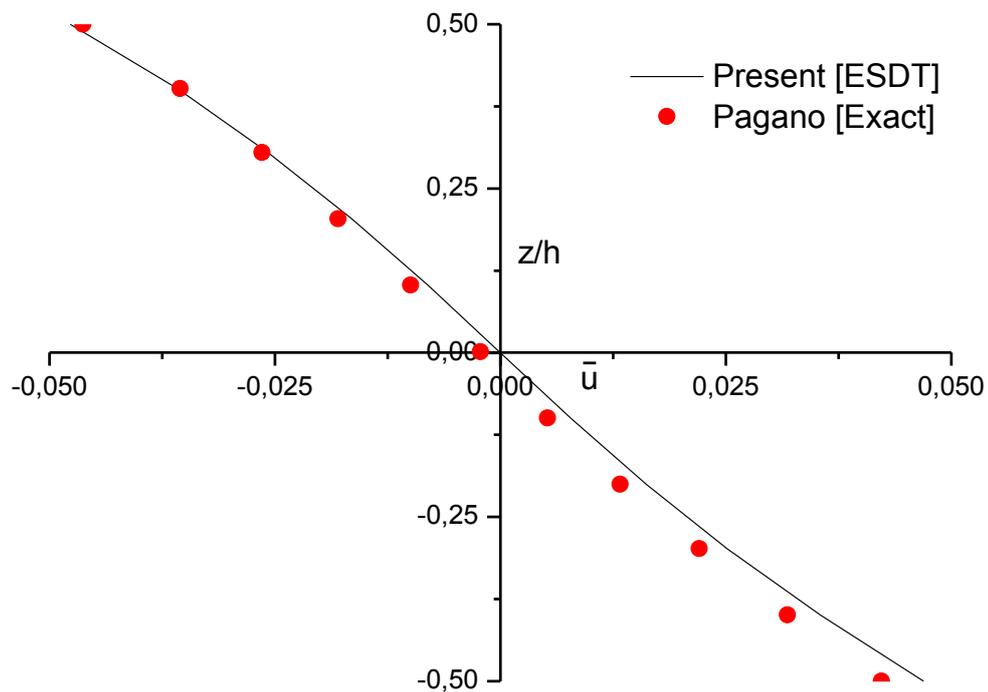
**Exemple2 :** Le tableau V.2 illustre les déplacements et les contraintes pour la plaque carrée isotrope sous une charge sinusoïdale. Une autre fois, une bonne corrélation est observée entre les présents résultats et ceux publiés précédemment.

**Tableau. V. 2.** Comparaison du déplacement adimensionnel ( $\bar{u}$ ), du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et de la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ ) dans une plaque carrée isotrope soumise à une charge sinusoïdale

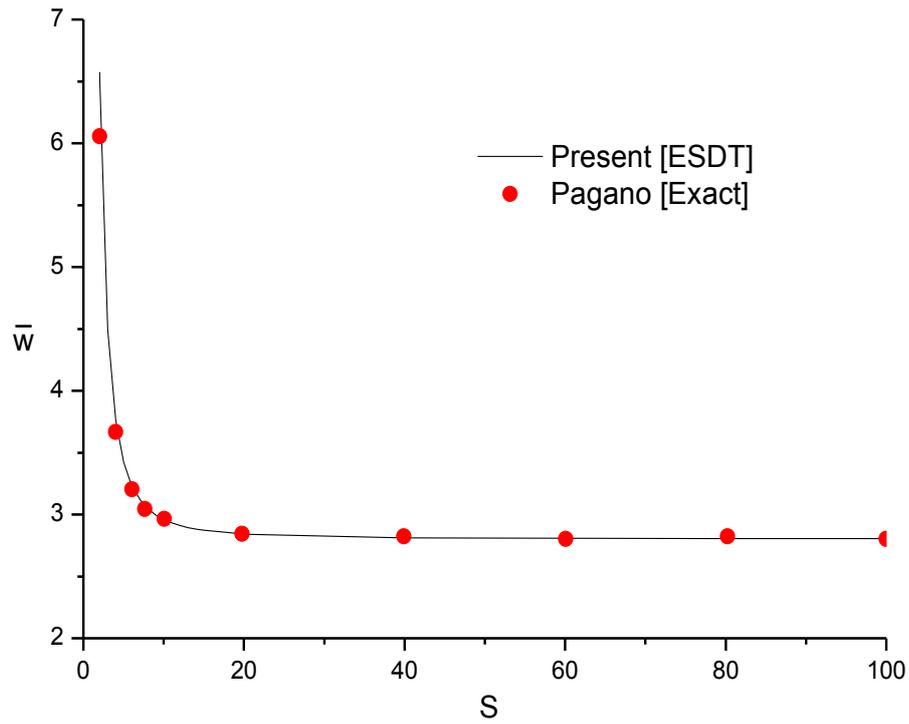
S	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{zx}^{CR}$	$\bar{\tau}_{zx}^{EE}$
4	A.S.Sayyad [27]	ESDT	0.046	3.748	0.213	0.114	0.238	0.236
	Reddy [16]	HSDT	0.046	3.787	0.209	0.112	0.237	0.226
	Ghugal et Sayyad [25]	TSDT	0.044	3.653	0.226	0.133	0.244	0.232
	Ghugal et Pawar [26]	HPSDT	0.047	3.779	0.209	0.112	0.236	0.235
	Mindlin [9]	FSDT	0.044	3.626	0.197	0.106	0.159	0.239
	Kirchhoff [2, 295]	CPT	0.044	2.803	0.197	0.106	–	0.238
	Pagano [296]	Elasticity	0.049	3.662	0.217	–	0.236	–
	<b>Présente</b>	<b>ESDT</b>	<b>0.046</b>	<b>3.778</b>	<b>0.210</b>	<b>0.113</b>	<b>0.252</b>	<b>0.234</b>
10	A.S.Sayyad [27]	ESDT	0.044	2.954	0.200	0.108	0.239	0.238
	Reddy [16]	HSDT	0.044	2.961	0.199	0.107	0.238	0.229
	Ghugal et Sayyad [25]	TSDT	0.044	2.933	0.212	0.110	0.245	0.235
	Ghugal et Pawar [26]	HPSDT	0.044	2.959	0.199	0.107	0.237	0.238
	Mindlin [9]	FSDT	0.044	2.934	0.197	0.106	0.169	0.239
	Kirchhoff [2, 295]	CPT	0.044	2.802	0.197	0.106	–	0.238
	Pagano [296]	Elasticity	0.044	2.942	0.200	–	0.238	–
	<b>Présente</b>	<b>ESDT</b>	<b>0.044</b>	<b>2.959</b>	<b>0.200</b>	<b>0.108</b>	<b>0.254</b>	<b>0.238</b>

A partir du tableau V.2, On peut voir que les résultats du déplacement ( $\bar{u}$ ) prédits par la théorie actuelle et les autres théories d'ordre élevé et la solution exacte sont identiques pour le rapport d'épaisseur 10. La variation du déplacement axial à travers l'épaisseur de la plaque est présentée dans la Fig. V.5.

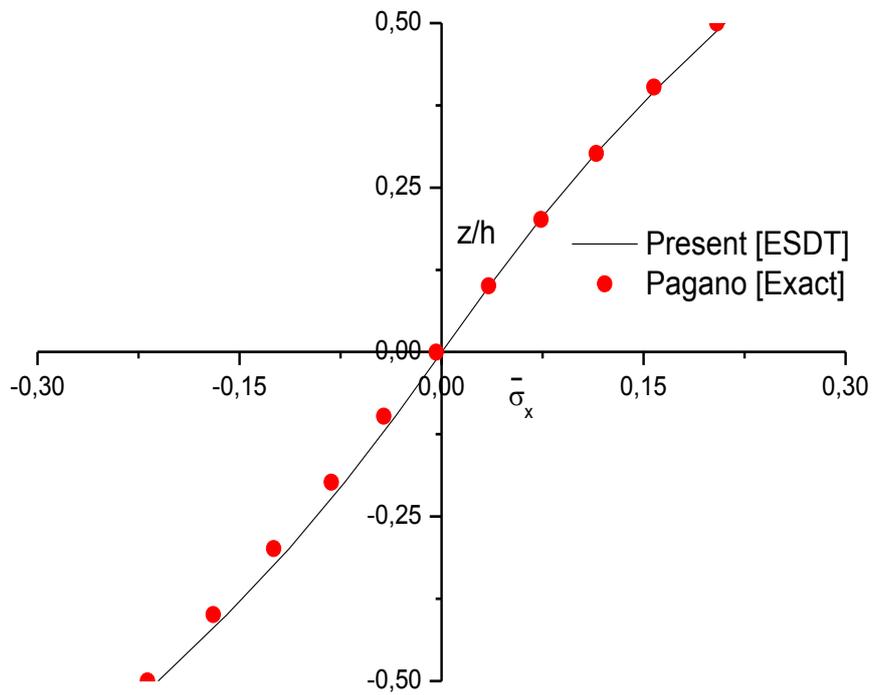
En outre, on peut observer aussi d'après ce tableau que les valeurs de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ) obtenue par la théorie actuelle ESDT sont très proches de celles déterminées par la HSDT et la HPSDT pour les rapports d'épaisseur 4 et 10 et sont identiques par rapport à la théorie de Sayyad et Ghugal [27] et la solution de Pagano [296] pour le rapport d'épaisseur 10.



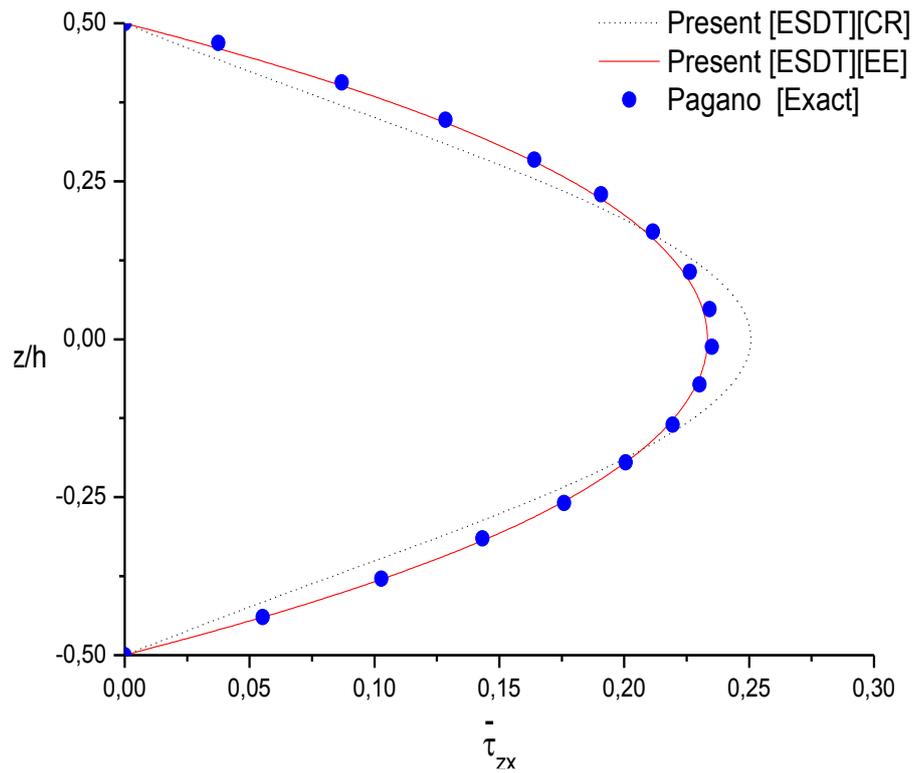
**Fig. V. 5.** La Variation du déplacement  $\bar{u}$  à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).



**Fig. V. 6.** La Variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).



**Fig. V. 7.** La Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).

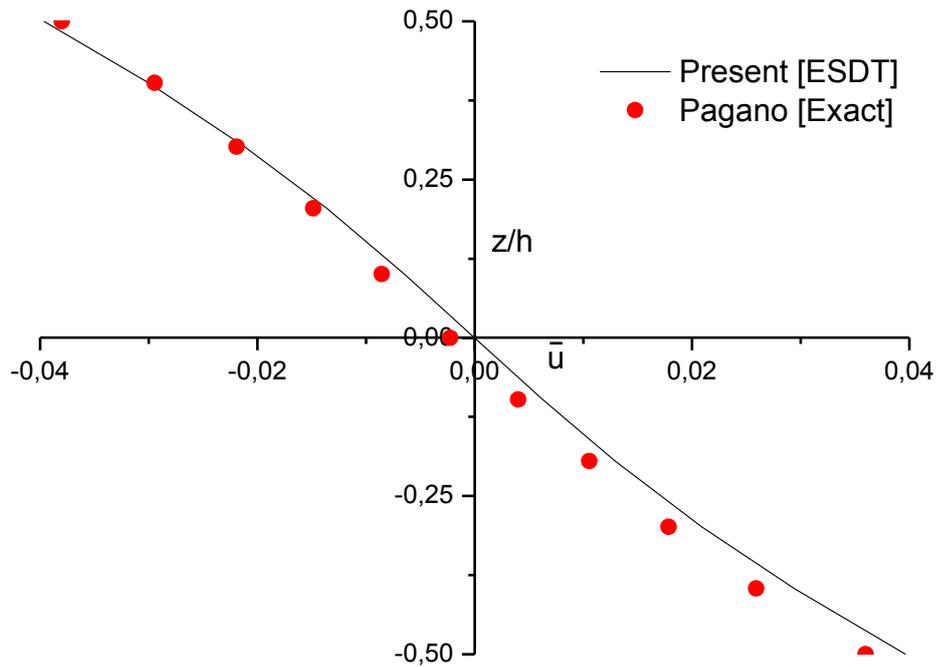


**Fig. V. 8.** La Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge sinusoïdale pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ )

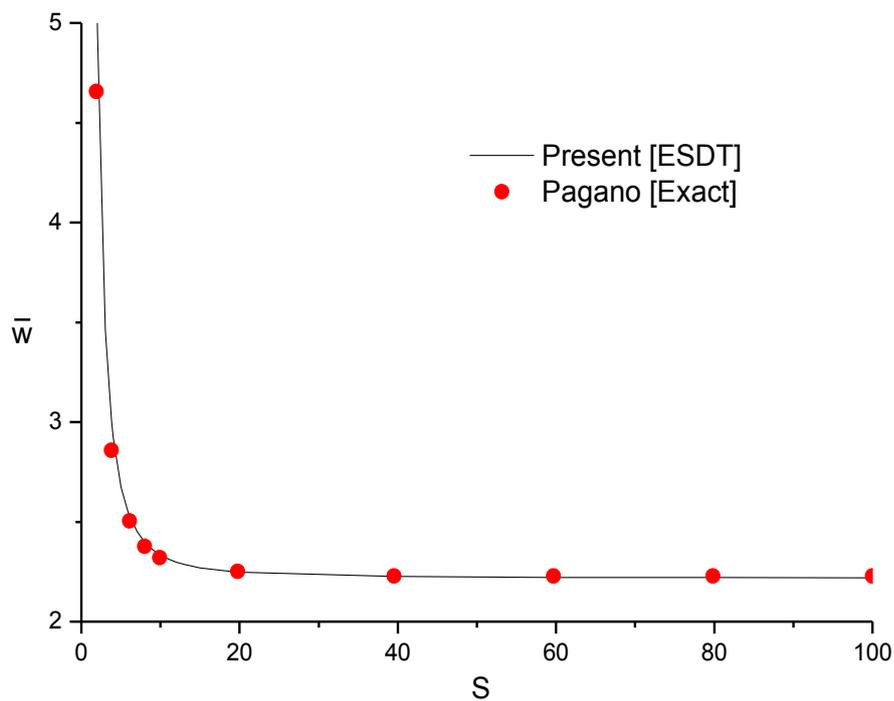
**Exemple 3 :** Les déplacements et les contraintes d'une plaque carrée simplement appuyées sous une charge variant linéairement sont présentés dans le tableau V.3. On peut conclure du tableau qu'un très bon accord est démontré entre les résultats de la théorie actuelle et ceux de la solution exacte pour le rapport d'épaisseur 10. Les variations des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur sont représentées sur les fig.V.9-12.

**Tableau. V. 3.** Comparaison du déplacement adimensionnels ( $\bar{u}$ ), du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ), de la contrainte normale ( $\bar{\sigma}_x$ ), de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xy}$ ) et de la contrainte de cisaillement transversal ( $\bar{\tau}_{zx}$ ) dans une plaque carrée isotrope soumise à une charge variant linéairement.

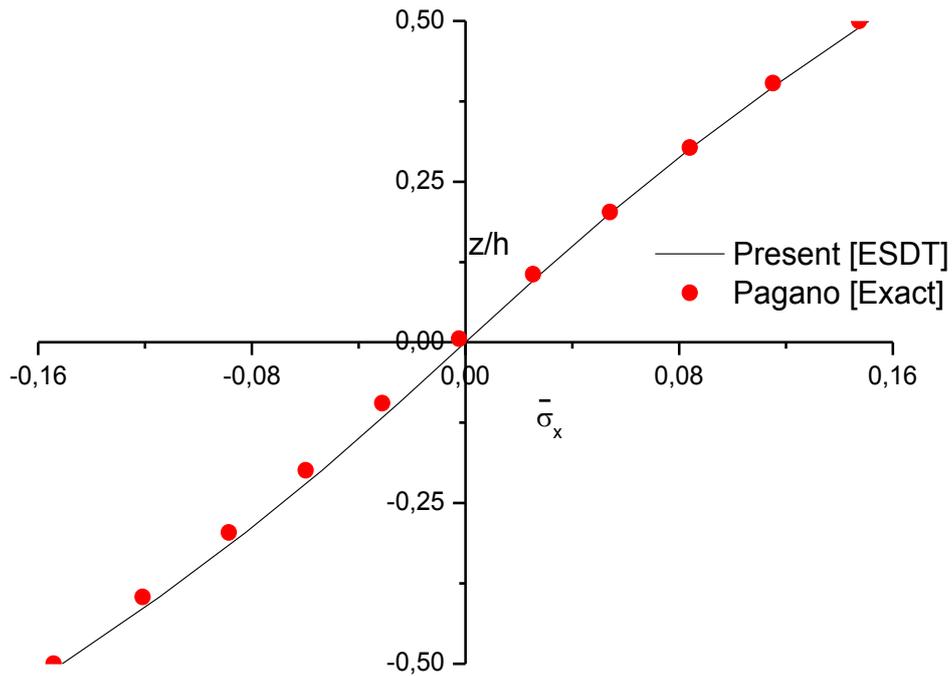
S	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{zx}^{CR}$	$\bar{\tau}_{zx}^{EE}$
4	A.S.Sayyad [27]	ESDT	0.0396	2.908	0.150	0.111	0.240	0.236
	Reddy [16]	HSDT	0.0395	2.935	0.150	0.109	0.241	0.226
	Ghugal et Sayyad [25]	TSDT	0.0370	2.840	0.159	0.104	0.241	0.210
	Ghugal et Pawar [26]	HPSDT	0.0395	2.929	0.148	0.092	0.239	0.225
	Mindlin [9]	FSDT	0.0370	2.817	0.144	0.097	0.165	0.247
	Kirchhoff [2, 295]	CPT	0.0370	2.218	0.144	0.097	–	0.247
	Pagano [296]	Elasticity	0.0360	2.847	0.153	–	0.230	–
	<b>Présente</b>	<b>ESDT</b>	<b>0.0397</b>	<b>2.929</b>	<b>0.151</b>	<b>0.108</b>	<b>0.240</b>	<b>0.225</b>
10	A.S.Sayyad [27]	ESDT	0.0375	2.329	0.144	0.102	0.247	0.245
	Reddy [16]	HSDT	0.0375	2.333	0.144	0.101	0.246	0.243
	Ghugal et Sayyad [25]	TSDT	0.0365	2.313	0.153	0.097	0.252	0.241
	Ghugal et Pawar [26]	HPSDT	0.0370	2.332	0.144	0.096	0.245	0.243
	Mindlin [9]	FSDT	0.0370	2.335	0.143	0.097	0.165	0.248
	Kirchhoff [2, 295]	CPT	0.0370	2.213	0.143	0.097	–	0.248
	Pagano [296]	Elasticity	0.0365	2.320	0.144	–	0.244	–
	<b>Présente</b>	<b>ESDT</b>	<b>0.0373</b>	<b>2.332</b>	<b>0.145</b>	<b>0.099</b>	<b>0.253</b>	<b>0.243</b>



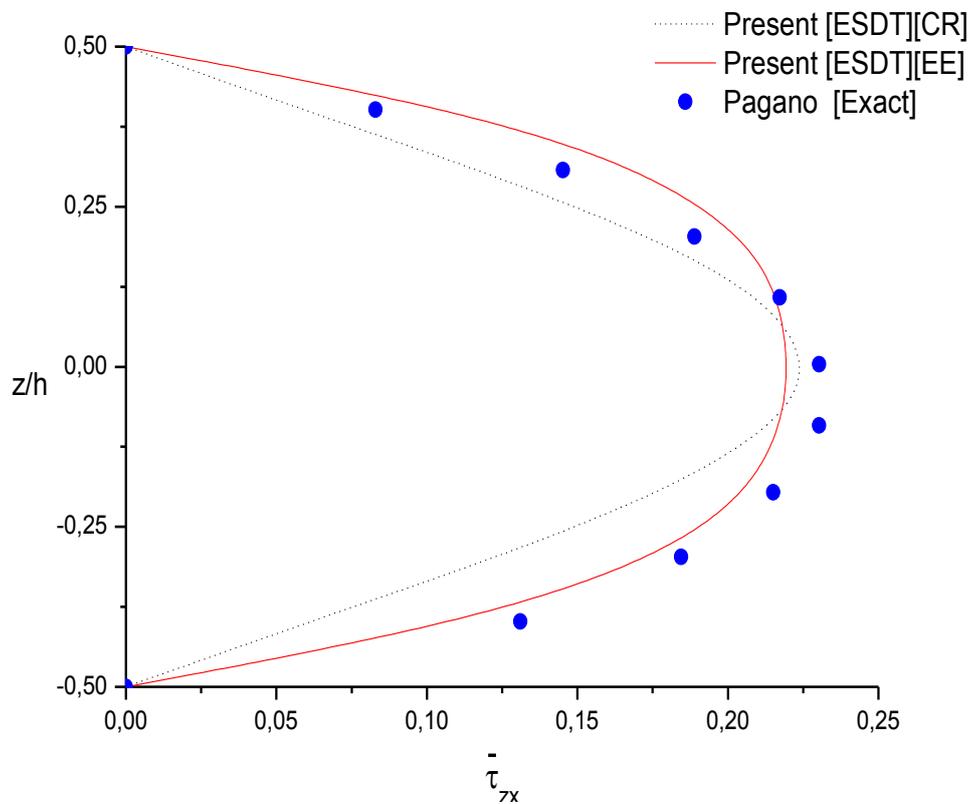
**Fig. V. 9.** La Variation du déplacement ( $\bar{u}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).



**Fig. V. 10.** La Variation du déplacement transversal ( $\bar{w}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ ).



**Fig. V. 11.** La Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h=4$ )



**Fig. V. 12.** La Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque isotrope soumise à une charge linéaire pour un rapport d'épaisseur ( $a/h= 4$ )

### V.2.2. Analyse de la vibration libre

**Exemple 4 :** Dans cette vérification, nous essayons de démontrer l'exactitude de la théorie actuelle en comparant les résultats des fréquences adimensionnelles obtenues avec ceux trouvés dans la littérature. La comparaison des fréquences adimensionnelles de flexion ( $\bar{\omega}_w$ ) et de cisaillement ( $\bar{\omega}_\theta$ ) pour des plaques carrées isotropes simplement appuyées est présentée dans le tableau V.4.

Dans le tableau V.5, les résultats de la fréquence adimensionnelle de flexion ( $\bar{\omega}_w$ ) pour des plaques rectangulaires isotropes reposant sur des appuis simples ont été présentés.

**Tableau. V. 4.** Comparaison des fréquences adimensionnelles de flexion ( $\bar{\omega}_w$ ) et de cisaillement ( $\bar{\omega}_\theta$ ) des plaques carrées isotropes simplement appuyées ( $S=10$ ).

a/b	$\bar{\omega}$	(m,n)	Pagano [296]	Présente	A.S.Sayyad [ESDT][27]	Ghugal et Sayyad [25]	Reddy [16]	Mindlin [9]	CPT [2, 295]
1	$\bar{\omega}_w$	(1,1)	0.0932	<b>0.0930</b>	0.0931	0.0933	0.0931	0.0930	0.0955
		(1,2)	0.2226	<b>0.2220</b>	0.2223	0.2231	0.2219	0.2219	0.236
		(1,3)	0.4171	<b>0.4153</b>	0.4163	0.4184	0.4150	0.4149	0.4629
		(2,2)	0.3421	<b>0.3408</b>	0.3415	0.3431	0.3406	0.3406	0.3732
		(2,3)	0.5239	<b>0.5213</b>	0.5228	0.5258	0.5208	0.5206	0.5951
		(2,4)	0.7511	<b>0.7464</b>	0.7499	0.7542	0.7453	0.7446	0.8926
		(3,3)	0.6889	<b>0.6848</b>	0.6874	0.6917	0.6839	0.6834	0.809
		(4,4)	1.0889	<b>1.0807</b>	1.0872	1.0945	1.0785	1.0764	1.3716
	$\bar{\omega}_\theta$	(1,1)	3.2465	<b>3.2555</b>	3.2428	3.2469	3.2555	3.2538	–
		(1,2)	3.3933	<b>3.4123</b>	3.3994	3.394	3.4125	3.4112	–
		(1,3)	3.6160	<b>3.6513</b>	3.6381	3.6178	3.6517	3.6510	–
		(2,2)	3.5298	<b>3.5586</b>	3.5455	3.5312	3.5589	3.558	–
		(2,3)	3.7393	<b>3.7842</b>	3.7709	3.7414	3.7848	3.7842	–
		(2,4)	4.0037	<b>4.0712</b>	4.0576	4.0082	4.072	4.072	–
(3,3)		3.9310	<b>3.9921</b>	3.9786	3.9351	3.9928	3.9926	–	
(4,4)		4.4013	<b>4.5082</b>	4.4944	4.4102	4.5092	4.5098	–	

A partir du tableau V.4, on peut confirmer que la théorie actuelle présente un excellent accord des fréquences adimensionnelles pour les différents modes de vibration avec celles de Reddy [16] et donne des valeurs proches de celles de Pagano [296] et l'ESDT de Sayyad [27].

Il est bien clair que la FSDT donne les valeurs les plus basses de la fréquence de flexion pour tous les modes de vibration par rapport à celles des théories d'ordre élevé et de solution exacte, alors que la CPT donne les valeurs les plus élevées pour cette fréquence.

**Tableau. V. 5.** Comparaison des fréquences adimensionnelles de flexion ( $\bar{\omega}_w$ ) des plaques rectangulaires isotropes simplement appuyées ( $S=10$ ).

a/b	$\bar{\omega}$	(m,n)	Exact [296]	Présente	A.S.Sayyad [ESDT][27]	Ghugal et Sayyad [25]	Reddy [16]	Mindlin [9]	CPT [2, 295]
$\sqrt{2}$	$\bar{\omega}_w$	(1,1)	0.0704	<b>0.0703</b>	0.0704	0.0705	0.0704	0.0703	0.0718
		(1,2)	0.1376	<b>0.1373</b>	0.1376	0.1393	0.1374	0.1373	0.1427
		(1,3)	0.2431	<b>0.2425</b>	0.2433	0.2438	0.2426	0.2424	0.2591
		(1,4)	0.3800	<b>0.3785</b>	0.3803	0.3811	0.3789	0.3782	0.4182
		(2,1)	0.2018	<b>0.2013</b>	0.2017	0.2023	0.2041	0.2012	0.2128
		(2,2)	0.2634	<b>0.2627</b>	0.2639	0.2642	0.2628	0.2625	0.2821
		(2,3)	0.3612	<b>0.3598</b>	0.3639	0.3623	0.3601	0.3595	0.3958
		(2,4)	0.4890	<b>0.4867</b>	0.4928	0.4906	0.4874	0.4861	0.5513
		(3,1)	0.3987	<b>0.3971</b>	0.3985	0.3999	0.3975	0.3967	0.4406
		(3,2)	0.4535	<b>0.4514</b>	0.4552	0.4550	0.4520	0.4509	0.5073
		(3,3)	0.5411	<b>0.5383</b>	0.5465	0.5431	0.5392	0.5375	0.6168

On peut constater sur le tableau V.5 que les résultats déterminés par l'ESDT proposée présentent une bonne concordance avec ceux obtenus par les théories d'ordres élevé et la solution exacte de Pagano [296]. On remarque aussi que la CPT surestime les fréquences de flexion en raison de la négligence des effets de la déformation de cisaillement transversal.

### V.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de flexion et de vibration libre d'un tablier de pont isotrope épais simplement appuyé.

L'ESDT développée, produit des résultats avec une bonne précision en comparaison avec la solution exacte et aux autres HSDT avec un nombre plus élevé d'inconnues.

Les résultats des déplacements et des contraintes obtenus par le présent modèle pour les plaques isotropes soumises à des charges différentes sont en bon accord avec ceux de la solution exacte.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les fréquences adimensionnelles de flexion et de cisaillement obtenues en utilisant la présente théorie pour tous les modes de vibration sont en excellent accord avec celles obtenues par les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé et la solution exacte.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée avec seulement deux inconnues est précise et simple pour résoudre les réponses en flexion et en vibration libre d'un tablier de pont épais.

Ce travail peut donc être utilisé comme référence pour vérifier l'efficacité de diverses théories approximatives.



# CONCLUSION GENERALE

## Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail de thèse, un modèle a été proposé pour l'analyse du comportement en flexion et en vibration libre d'un tablier de pont isotrope épais reposant sur des appuis simples à l'aide d'une nouvelle théorie de plaque raffinée à deux variables.

L'avantage principal de la théorie proposée par rapport aux théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé existant est que, la présente théorie n'implique que deux variables et incorpore des termes d'intégrales indéterminées dans laquelle les effets de la déformation de cisaillement transversal sont pris en compte. Elle satisfait les conditions aux limites en assurant la nullité des contraintes tangentielles dans les bords supérieur et inférieur de la plaque et cela sans faire intervenir de facteur de correction de cisaillement.

Plusieurs exemples ont été illustrés pour montrer l'efficacité de la présente théorie avec différentes cas de chargement.

Ce modèle offre des solutions précises et fiables par comparaison avec les autres théories de déformation de cisaillement. Un très bon accord a été observé dans tous les exemples considérés.

L'interprétation des résultats et graphes obtenu permet de conclure que :

- Les valeurs des déplacements et des contraintes calculées par la théorie actuelle pour différentes charges considérées sont en bon accord avec celles de la solution exacte.
- Les fréquences adimensionnelles de flexion et de cisaillement obtenues par la présente théorie pour tous les modes de vibration sont en excellent accord avec les valeurs des fréquences disponible dans la littérature pour une plaque carrée simplement appuyées.
- Les fréquences adimensionnelles de flexion prédites par le modèle proposé sont en accord étroit avec celles obtenues par les autres modèles d'ordre élevé et la solution exacte pour une plaque rectangulaire simplement appuyées.

Dans ce travail, il peut être conclu que la théorie des plaques raffinées proposée est efficace et simple pour la résolution des réponses en flexion et en vibration libre d'un tablier de pont épais simplement appuyé.

En perspective,

-Nous pouvons considérer les résultats obtenus par le présent modèle comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques pour les cas des plaques isotropes épaisses.

-Nous comptons améliorer la formulation actuelle envisagée dans les travaux futurs pour prendre en compte d'autres types de matériaux.

-Il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé proposé à deux variables pour l'étude des plaques en FGM / matériau composite.

-L'extension de cette étude est également envisagée pour prédire le comportement de flexion, de vibration libre et de flambement des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques ou viscoélastiques.



**REFERENCES**

**BIBLIOGRAPHIQUES**



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Ghugal, Y. M., & Shimpi, R. P. (2002). A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21(9), 775-813. <https://doi.org/10.1177/073168402128988481>
- [2] Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1850(40), 51-88. <https://doi.org/10.1515/crll.1850.40.51>
- [3] Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*, 2, 240-246. New York: McGraw-hill.
- [4] Timoshenko, S., & Gere, J. (1961). *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill. *NSH. York.*
- [5] Dym, C. L., & Shames, I. H. (1973). *Solid mechanics* (p. 190). New York, NY, USA:: McGraw-Hill.
- [6] Strel'bitskaya, A. I., & Matoshko, S. I. (1970). An analysis of publications dealing with investigation of flexible plates. *Soviet Applied Mechanics*, 6(7), 687-701.
- [7] Vasil'Ev, V. V. (1992). Theory of thin plates. *Rossijskaya Akademiya Nauk Izvestiya Mekhanika Tverdogo Tela*, 3, 26-47.
- [8] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 12, 69-77. <https://doi.org/10.1115/1.4009435>
- [9] Mindlin, R. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. of Appl. Mechanics*, 18, 31-38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
- [10] Thai, H. T., & Kim, S. E. (2015). A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 128, 70-86. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>
- [11] Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>

- [12] Timoshenko, S. P. (1922). On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253), 125-131. <https://doi.org/10.1080/14786442208633855>
- [13] Yang, P. C., Norris, C. H., & Stavsky, Y. (1966). Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of solids and structures*, 2(4), 665-684. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(66\)90045-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(66)90045-X)
- [14] Whitney, J. M., & Pagano, N. J. (1970). Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *ASME, TRANSACTIONS, SERIES E-JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, 37, 1031-1036. <https://doi.org/10.1115/1.3408654>
- [15] Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015). A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates. *Thin-Walled Structures*, 90, 150-158. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.015>
- [16] Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 51, 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>
- [17] Lee, K. H., Senthilnathan, N. R., Lim, S. P., and Chow, S. T. (1989). A simple Higher Order Nonlinear Shear Deformation Plate Theory. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 24 (2), 127–137. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(89\)90004-8](https://doi.org/10.1016/0020-7462(89)90004-8)
- [18] Hanna, N. F., & Leissa, A. W. (1994). A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, 170(4), 545-555. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1083>
- [19] Levy, M. (1877). Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 30, 219-306.
- [20] Stein, M. (1986). Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA journal*, 24(9), 1537-1544. <https://doi.org/10.2514/3.9477>
- [21] Stein, M. (1989). Vibration of beams and plate strips with three-dimensional flexibility. *ASME Journal of Applied Mechanics, Brief Notes*, 56(1), 228–231. <https://doi.org/10.1115/1.3176054>

- [22] Stein, M., Sydow, P. D., & Librescu, L. (1990). Postbuckling of long thick plates in compression including higher order transverse shearing effects. In *Studies in Applied Mechanics*, (24), 63-86. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-88366-7.50008-7>
- [23] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)
- [24] Shimpi, R. P. (2002). Refined plate theory and its variants. *AIAA journal*, 40(1), 137-146. <https://doi.org/10.2514/2.1622>
- [25] Ghugal, Y. M., & Sayyad, A. S. (2011). Free vibration of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8, 229-243. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252011000300002>
- [26] Ghugal, Y. M., & Pawar, M. D. (2011). Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory. *Journal of Aerospace Engineering and Technology*, 1(1), 1-12.
- [27] Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2012). Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational mechanics*, 6(1).
- [28] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A. (2011). Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory. *J. Mech. Sci. Technol.*, 25(9), 2195-2209.
- [29] Viswanathan, K.K., Javed, S. and Abdul Aziz, Z. (2013). Free vibration of symmetric angle-ply layered conical shell frusta of variable thickness under shear deformation theory. *Struct. Eng. Mech.*, Int. J., 45(2), 259-275
- [30] Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T. (2014). Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 47, 349-361. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.06.003>
- [31] Avcar, M. (2019). Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615.
- [32] Madenci, E. (2019). A refined functional and mixed formulation to static analyses of fgm beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 69(4), 427-437.

- [33] Zouatnia, N., and Hadji, L. (2019). Static and free vibration behavior of functionally graded sandwich plates using a simple higher order shear deformation theory. *Advances in Materials Research, An International Journal*, 8(4),313-335.  
<https://doi.org/10.12989/amr.2019.8.4.313>
- [34] Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H., & Adda Bedia, E. A. (2020). Buckling of carbon nanotube reinforced composite plates supported by Kerr foundation using Hamilton's energy principle. *Structural Engineering and Mechanics*, 73(2), 209-223.
- [35] Ghodrati, B. , Yaghootian, A. , Ghanbar Zadeh, A. , & Sedighi, H. M. (2018). Lamb wave extraction of dispersion curves in micro/nano-plates using couple stress theories. *Waves in Random and Complex Media*, 28 (1), 15–34.  
<https://doi.org/10.1080/17455030.2017.1308582>
- [36] Ton T. H. L. (2020). A novel quadrilateral element for dynamic response of plate structures subjected to blast loading. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6, 1314-1323.  
<https://doi.org/10.22055/JACM.2020.33959.2314>
- [37] Pinto, V. T., Oliveira Rocha, L. A., Fragassa, C., Domingues Dos Santos, E., & Isoldi, L. A. (2020). Multiobjective Geometric Analysis of Stiffened Plates under Bending through Constructal Design Method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6(Special Issue), 1438-1449. <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35248.2608>
- [38] Khatir, S., Tiachacht, S., Thanh, C. L., Bui, T. Q., & Wahab, M. A. (2019). Damage assessment in composite laminates using ANN-PSO-IGA and Cornwell indicator. *Composite Structures*, 230, 111509. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111509>
- [39] Zenzen, R., Khatir, S., Belaidi, I., Le Thanh, C., & Wahab, M. A. (2020). A modified transmissibility indicator and Artificial Neural Network for damage identification and quantification in laminated composite structures. *Composite Structures*, 248, 112497.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112497>
- [40] Tran-Ngoc, H., Khatir, S., Ho-Khac, H., De Roeck, G., Bui-Tien, T., & Wahab, M. A. (2021). Efficient Artificial neural networks based on a hybrid metaheuristic optimization algorithm for damage detection in laminated composite structures. *Composite Structures*, 262, 113339. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113339>

- [41] Khatir, S., Tiachacht, S., Le Thanh, C., Ghandourah, E., Mirjalili, S., & Wahab, M. A. (2021). An improved Artificial Neural Network using Arithmetic Optimization Algorithm for damage assessment in FGM composite plates. *Composite Structures*, 273, 114287. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114287>
- [42] Cuong-Le, T., Nguyen, K. D., Nguyen-Trong, N., Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., & Abdel-Wahab, M. (2021). A three-dimensional solution for free vibration and buckling of annular plate, conical, cylinder and cylindrical shell of FG porous-cellular materials using IGA. *Composite Structures*, 259, 113216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113216>
- [43] Saadatmorad, M., Jafari-Talookolaei, R. A., Pashaei, M. H., & Khatir, S. (2021). Damage detection on rectangular laminated composite plates using wavelet based convolutional neural network technique. *Composite Structures*, 278, 114656. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114656>
- [44] Pindera, M.-J., Arnold, S. M., Aboud, J., and Hui, D. (1994). Use of composite in Functionally Graded Materials, *composites Eng*, 4, 1-145
- [45] A. Kumre, R.S. Rana, R. Purohit, (2017). A Review on mechanical property of sisal glass fiber reinforced polymer composites. *Mater. Today Proc*, 4 (2), 3466-3476. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.02.236>
- [46] Banakar, P., Shivanand, H. K., & Niranjana, H. B. (2012). Mechanical properties of angle ply laminated composites-A review. *International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology*, 9(2), 127.
- [47] Kundachira Subramani, N. (2015). Opto-electrical characteristics of poly (vinyl alcohol)/cesium zincate nanodielectrics. *The Journal of Physical Chemistry C*, 119(35), 20244-20255. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.5b03652>
- [48] Prashanth, S., Subbaya, K. M., Nithin, K., & Sachidananda, S. (2017). Fiber reinforced composites-a review. *J. Mater. Sci. Eng*, 6(03), 2-6.
- [49] Suresh, S., Mortensen, A., (1998). Fundamentals of Functionally Graded Materials. Barnes and Noble, New York. <https://doi.org/10.4172/2169-0022.1000341>
- [50] JONES, R. (1975). Mechanics of composite materials (Book). Mc Graw-Hill Company. <https://doi.org/10.1201/9781498711067>

- [51] Berreur, L., de Maillard, B., & Nösperger, S. (2002). L'industrie française des matériaux composites. *Etude stratégique (Rapport de synthèse) réalisée par Nodal consultants pour le compte de la Digitip/SIM, 14.*
- [52] Ledru, Y. (2009). *Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques* (Doctoral dissertation).
- [53] Ahmadijokani, F., Shojaei, A., Dordanihaghighi, S., Jafarpour, E., Mohammadi, S., & Arjmand, M. (2020). Effects of hybrid carbon-aramid fiber on performance of non-asbestos organic brake friction composites. *Wear, 452*, 203280.  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2020.203280> [Get rights and content](#)
- [54] Hsissou, R., Benhiba, F., Abbout, S., Dagdag, O., Benkhaya, S., Berisha, A., ... & Elharfi, A. (2020). Trifunctional epoxy polymer as corrosion inhibition material for carbon steel in 1.0 M HCl: MD simulations, DFT and complexation computations. *Inorganic Chemistry Communications, 115*, 107858. <https://doi.org/10.1016/j.inoche.2020.107858>
- [55] Mehra, N., Mu, L., Ji, T., Yang, X., Kong, J., Gu, J., & Zhu, J. (2018). Thermal transport in polymeric materials and across composite interfaces. *Applied Materials Today, 12*, 92-130. <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2018.04.004>
- [56] Okafor, P. A., Singh-Beemat, J., & Iroh, J. O. (2015). Thermomechanical and corrosion inhibition properties of graphene/epoxy ester–siloxane–urea hybrid polymer nanocomposites. *Progress in Organic Coatings, 88*, 237-244.  
<https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2015.07.005>
- [57] Arroub, H., Hsissou, R., & Elharfi, A. (2020). Investigation of modified chitosan as potential polyelectrolyte polymer and eco-friendly for the treatment of galvanization wastewater using novel hybrid process. *Results in Chemistry, 2*, 100047.  
<https://doi.org/10.1016/j.rechem.2020.100047>
- [58] Bołtryk, M., Krupa, A., & Pawluczuk, E. (2018). Modification of the properties of the cement composites with the organic filler. *Construction and Building Materials, 167*, 143-153. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.02.025>
- [59] Sauer, M., Shiozawa, H., Ayala, P., Ruiz-Soria, G., Liu, X., Chernov, A., ... & Pichler, T. (2013). Internal charge transfer in metallicity sorted ferrocene filled carbon nanotube hybrids. *Carbon, 59*, 237-245. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2013.03.014>

- [60] Sijercic, E., & Leung, P. T. (2016). Effects of surface charge on the anomalous light extinction from metallic nanoparticles. *Optics Communications*, 370, 198-202.  
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2016.02.065>
- [61] Benzekri, Z., Sibous, S., Hsissou, R., Boukhris, S., & Souizi, A. (2021). Investigation of snail shell waste as potential and eco-friendly heterogeneous catalyst for synthesis of 1-(benzothiazolylamino) methyl-2-naphthols derivatives. *Chemical Data Collections*, 31, 100599. <https://doi.org/10.1016/j.cdc.2020.100599>
- [62] Hsissou, R., Seghiri, R., Benzekri, Z., Hilali, M., Rafik, M., & Elharfi, A. (2021). Polymer composite materials: A comprehensive review. *Composite structures*, 262, 113640.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113640>
- [63] Arabpour, A., Shockravi, A., Rezaia, H., & Farahati, R. (2020). Investigation of anticorrosive properties of novel silane-functionalized polyamide/GO nanocomposite as steel coatings. *Surfaces and Interfaces*, 18, 100453.  
<https://doi.org/10.1016/j.surfin.2020.100453>
- [64] Zheng, S., Bellido-Aguilar, D. A., Hu, J., Huang, Y., Zhao, X., Wang, Z., ... & Chen, Z. (2019). Waterborne bio-based epoxy coatings for the corrosion protection of metallic substrates. *Progress in Organic Coatings*, 136, 105265.  
<https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2019.105265>
- [65] Saba, N., & Jawaid, M. (2018). A review on thermomechanical properties of polymers and fibers reinforced polymer composites. *Journal of industrial and engineering chemistry*, 67, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.jiec.2018.06.018>
- [66] Dong, Z. J., Zhou, T., Luan, H., Williams, R. C., Wang, P., & Leng, Z. (2019). Composite modification mechanism of blended bio-asphalt combining styrene-butadiene-styrene with crumb rubber: A sustainable and environmental-friendly solution for wastes. *Journal of cleaner production*, 214, 593-605. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.01.004>
- [67] Gurjar, D., Sharma, S., & Sarkar, M. (2018). A Review on testing methods of recycled Acrylonitrile Butadiene-Styrene. *Materials Today: Proceedings*, 5(14), 28296-28304.  
<https://doi.org/10.1016/j.matpr.2018.10.113>
- [68] Qian, C., Fan, W., Yang, G., Han, L., Xing, B., & Lv, X. (2020). Influence of crumb rubber particle size and SBS structure on properties of CR/SBS composite modified asphalt. *Construction and Building Materials*, 235, 117517.

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117517>

- [69] Thuong, N. T., Dung, T. A., Yusof, N. H., & Kawahara, S. (2020). Controlling the size of silica nanoparticles in filler nanomatrix structure of natural rubber. *Polymer*, *195*, 122444. <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2020.122444>
- [70] El Aaad, H., Benzekri, Z., Boukhris, S., & Chahine, A. (2020). Synthesis, characterization of polystyrene-phosphate films and their application as heterogeneous catalyst for Knoevenagel condensation in solvent-free conditions. *Journal of Chemical Sciences*, *132*(1), 1-13.
- [71] Yuan, H., Zhang, S., Lu, C., He, S., & An, F. (2013). Improved interfacial adhesion in carbon fiber/polyether sulfone composites through an organic solvent-free polyamic acid sizing. *Applied Surface Science*, *279*, 279-284. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2013.04.085>
- [72] Siakeng, R., Jawaid, M., Ariffin, H., Sapuan, S. M., Asim, M., & Saba, N. (2019). Natural fiber reinforced polylactic acid composites: A review. *Polymer Composites*, *40*(2), 446-463. <https://doi.org/10.1002/pc.24747>
- [73] Chee, S. S., Jawaid, M., Sultan, M. T. H., Alothman, O. Y., & Abdullah, L. C. (2019). Thermomechanical and dynamic mechanical properties of bamboo/woven kenaf mat reinforced epoxy hybrid composites. *Composites Part B: Engineering*, *163*, 165-174. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.039>
- [74] Zhu, S., Qian, Y., Hassan, E. A., Shi, R., Yang, L., Cao, H., ... & Yu, M. (2020). Enhanced interfacial interactions by PEEK-grafting and coupling of acylated CNT for GF/PEEK composites. *Composites Communications*, *18*, 43-48. <https://doi.org/10.1016/j.coco.2020.01.008>
- [75] De, S., Fulmali, A. O., Shivangi, P. N., Choudhury, S., Prusty, R. K., & Ray, B. C. (2020). Interface modification of carbon fiber reinforced epoxy composite by hydroxyl/carboxyl functionalized carbon nanotube. *Materials Today: Proceedings*, *27*, 1473-1478. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.02.970>
- [76] Wang, G., Gao, M., Yang, B., & Chen, Q. (2020). The morphological effect of carbon fibers on the thermal conductive composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *152*, 119477. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119477>

- [77] Santulli, C. (2019). Mechanical and impact damage analysis on carbon/natural fibers hybrid composites: a review. *Materials*, 12(3), 517. <https://doi.org/10.3390/ma12030517>
- [78] Ismail KI, Sultan MTH, Shah AUM, Jawaid M, Safri SNA. (2019). Low velocity impact and compression after impact properties of hybrid bio-composites modified with multi-walled carbon nanotubes. *Compos B Eng*;163,455–463.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.01.026>
- [79] Hart-Smith LJ (1987) Engineered Materials Handbook (Vol. 1). ASM International, Ohio 479-495.
- [80] Donnet JB, Bansal RC (1998) Carbon fibers. CRC Press.
- [81] Allred RE (2005) .Carbon-reinforced composite recycling: process and business development. In Global Outlook for Carbon Fibers. Intertech Conferences, San Diego, CA.
- [82] Hajduk F (2005) Carbon fibres overview; global outlook for carbon fibres 2005. In: Intertech conferences. San Diego: CA.
- [83] Carolin, A. (2003). *Carbon fibre reinforced polymers for strengthening of structural elements* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).
- [84] Li, H., Xu, Y., Zhang, T., Niu, K., Wang, Y., Zhao, Y., et al. (2020). Interfacial adhesion and shear behaviors of aramid fiber/polyamide 6 composites under different thermal treatments. *Polymer Testing*, 81, 106209.  
<https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.106209>
- [85] Cheng, Z., Liu, Y., Meng, C., Dai, Y., Luo, L., & Liu, X. (2019). Constructing a weaving structure for aramid fiber by carbon nanotube-based network to simultaneously improve composites interfacial properties and compressive properties. *Composites Science and Technology*, 182, 107721. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2019.107721>
- [86] Rosato, D. V., & Rosato, D. V. (2004). *Reinforced plastics handbook*. Elsevier.
- [87] Menczel JD. (2020). 17 - Polybenzimidazole fiber. In: Jaffe M, Menczel JD, editors. Thermal analysis of textiles and fibers. Woodhead Publishing, 291–5.
- [88] Shanmugavel, P. G. B. B., Bhaskar, G. B., Chandrasekaran, M., Mani, P. S., & Srinivasan, S. P. (2012). An overview of fracture analysis in functionally graded materials. *European Journal of Scientific Research*, 68(3), 412-439.

- [89] Atai, A. A., Nikranjbar, A., & Kasiri, R. (2012). Buckling and post-buckling behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 226(3), 607-614. <https://doi.org/10.1177/0954406211416179>
- [90] Wang, S. S. (1983). Fracture mechanics for delamination problems in composite materials. *Journal of composite materials*, 17(3), 210-223. <https://doi.org/10.1177/002199838301700302>
- [91] M. Niino, T. Hirai and R. Watanabe. The functionally gradient materials. *J Jap Soc Compos Mat*,13, 257-264.
- [92] Report on “Fundamental study on relaxation of thermal stress for high temperature material by tailoring the graded structure”, Department of Science and Technology Agency, (1992).
- [93] Rajan, T. P. D., & Pai, B. C. (2014). Developments in processing of functionally gradient metals and metal–ceramic composites: a review. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*, 27(5), 825-838.
- [94] Dalal R. (2016) Thermal Analysis of Functionally Graded Material (FGM) Plate Using Finite Element Method (FEM). Tech. Murthal: Mechanical Engineering, Deenbandhu Chhotu Ram University of Science and Technology.
- [95] R. Knoppers, J. W. Gunnink, J. Van den Hout, and W. Van Vliet. The reality of functionally graded material products. *TNO Science and Industry, The Netherlands*,38-43.
- [96] Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R. (2014). Functionally graded materials: A critical review. *International Journal of Research*, 1(4), 289-301.
- [97] Vijayaram, T., (Ed.). (2018). Advanced Casting Technologies. IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.68254>
- [98] Saleh, B., Jiang, J., Fathi, R., Al-hababi, T., Xu, Q., Wang, L., ... & Ma, A. (2020). 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges. *Composites Part B: Engineering*, 201, 108376. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
- [99] Miteva, A. (2014). An overview of the functionally graded materials. *Machines. Technologies. Materials.*, 8(3), 13-16

- [100] Houari, M. S. A. (2011). *Analyse des contraintes thermo-élastiques : Lois des puissances* [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- [101] Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures*, 96, 833-849.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.001>
- [102] Sam, M., Jojith, R., & Radhika, N. (2021). Progression in manufacturing of functionally graded materials and impact of thermal treatment—A critical review. *Journal of Manufacturing Processes*, 68, 1339–1377. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.06.062>
- [103] Sam, M., & Radhika, N. (2022). Influence of carbide ceramic reinforcements in improving tribological properties of A333 graded hybrid composites. *Defence Technology*, 18(7), 1107-1123. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2021.06.005>
- [104] El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 1(11), 1-23. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
- [105] Adefemi O. Owoputi<sup>1</sup>, Freddie L. Inambao<sup>2</sup>, William S. Ebhota. (2018). A Review of Functionally Graded Materials: Fabrication Processes and Applications. *International Journal of Applied Engineering Research*, 13(23), 16141-16151
- [106] Ebhota, W. S., Karun, A. S., & Inambao, F. L. (2016). Principles and baseline knowledge of functionally graded aluminium matrix materials (FGAMMs): Fabrication techniques and applications. In *International Journal of Engineering Research in Africa* (Vol. 26, pp. 47-67). Trans Tech Publications Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/JERA.26.47>
- [107] Mumtaz, K. A., & Hopkinson, N. (2007). Laser melting functionally graded composition of Waspaloy® and Zirconia powders. *Journal of materials science*, 42(18), 7647-7656.  
<https://doi.org/10.1007/s10853-007-1661-3>
- [108] Bever, M. B., & Duwez, P. E. (1972). Gradients in composite materials. *Materials Science and Engineering*, 10, 1-8. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(72\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(72)90059-6)
- [109] Bever, M. B., & Duwez, P. E. (1970, July). On gradient composites. In *Preliminary Reports, Memoranda and Technical Notes of the ARPA Materials Summer Conference* (pp. 117-140).

- [110] Shen, M., & Bever, M. B. (1972). Gradients in polymeric materials. *Journal of Materials science*, 7(7), 741-746. <https://doi.org/10.1007/BF00549902>
- [111] Niino M, Kumakawa A, Watanabe R, Doi Y. (1986). Fabrication of a High Pressure Thrust Chamber by CIP Forming Method Metal powder report 41, 663, 9. <https://doi.org/10.2514/6.1984-1227>
- [112] Ichikawa, K. (Ed.). (2001). *Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts*. Springer Science & Business Media.
- [113] Ankit BM, Khushbu CP. (2014). A review of stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, 3. <https://doi.org/10.17577/IJERTV3IS031576>
- [114] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (1999). *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. 161-245. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
- [115] Mahinzare, M., Alipour, M. J., Sadatsakkak, S. A., & Ghadiri, M. (2019). A nonlocal strain gradient theory for dynamic modeling of a rotary thermo piezo electrically actuated nano FG circular plate. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 115, 323-337. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.043>
- [116] Malik, P., & Kadoli, R. (2018). Nonlinear bending and free vibration response of SUS316-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> functionally graded plasma sprayed beams: theoretical and experimental study. *Journal of Vibration and Control*, 24(6), 1171-1184. <https://doi.org/10.1177/1077546316659422>
- [117] Gupta, K. M. (2015). *Engineering materials: research, applications and advances*. CRC Press, New York.
- [118] Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y., Lin, Y., Liu, W., Chen, B., Shen, Q., Zhang, L., & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of functionally graded materials : A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209.
- [119] Mahmoud, D., & Elbestawi, M. A. (2017). Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2), 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>

- [120] Popoola, P., Farotade, G., Fatoba, O., & Popoola, O. (2016). Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications-a review. *Fiber Laser*, 2, 64. <https://doi.org/10.5772/61711>
- [121] Popovich, V. A., Borisov, E. V., Popovich, A. A., Sufiiarov, V. S., Masaylo, D. V., & Alzina, L. (2017). Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing: Crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties. *Materials & Design*, 114, 441-449. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.10.075>
- [122] Mohammadi, M., Rajabi, M., & Ghadiri, M. (2021). Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications. *Processing and Application of Ceramics*, 15(4), 319-343. <https://doi.org/10.2298/PAC2104319M>
- [123] Miao, X., & Sun, D. (2009). Graded/gradient porous biomaterials. *Materials*, 3(1), 26-47. <https://doi.org/10.3390/ma3010026>
- [124] Lee, B. T., Kang, I. C., Gain, A. K., Kim, K. H., & Song, H. Y. (2006). Fabrication of pore-gradient Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-ZrO<sub>2</sub> sintered bodies by fibrous monolithic process. *Journal of the European Ceramic Society*, 26(16), 3525-3530. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2005.12.017>
- [125] Harley, B. A., Hastings, A. Z., Yannas, I. V., & Sannino, A. (2006). Fabricating tubular scaffolds with a radial pore size gradient by a spinning technique. *Biomaterials*, 27(6), 866-874. <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2005.07.012>
- [126] Parthasarathy, J., Starly, B., & Raman, S. (2011). A design for the additive manufacture of functionally graded porous structures with tailored mechanical properties for biomedical applications. *Journal of Manufacturing Processes*, 13(2), 160-170. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2011.01.004>
- [127] Bretcanu, O., Samaille, C., & Boccaccini, A. R. (2008). Simple methods to fabricate Bioglass®-derived glass-ceramic scaffolds exhibiting porosity gradient. *Journal of Materials Science*, 43(12), 4127-4134. <https://doi.org/10.1007/s10853-008-2536-y>
- [128] Li, R., Liu, J., Shi, Y., Du, M., & Xie, Z. (2010). 316L stainless steel with gradient porosity fabricated by selective laser melting. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 19(5), 666-671. <https://doi.org/10.1007/s11665-009-9535-2>

- [129] Muthutantri, A., Huang, J., & Edirisinghe, M. (2008). Novel preparation of graded porous structures for medical engineering. *Journal of the royal society interface*, 5(29), 1459-1467. <https://doi.org/10.1098/rsif.2008.0092>
- [130] Yılmaz, E., Kabataş, F., Gökçe, A., & Findık, F. (2020). Production and characterization of a bone-like porous Ti/Ti-hydroxyapatite functionally graded material. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 29(10), 6455-6467. <https://doi.org/10.1007/s11665-020-05165-2>
- [131] Kawasaki, A., & Watanabe, R. (1997). Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics international*, 23(1), 73-83. [https://doi.org/10.1016/0272-8842\(95\)00143-3](https://doi.org/10.1016/0272-8842(95)00143-3)
- [132] Gasik, M., Kawasaki, A., & Ueda, S. (2000). Design and powder metallurgy processing of functionally graded materials. *Materials Development and Processing -Bulk Amorphous Materials, Undercooling and Powder Metallurgy*, 8, 258-264. <https://doi.org/10.1002/3527607277.ch41>
- [133] Kırmızı, G., Arık, H., & Çinici, H. (2019). Experimental study on mechanical and ballistic behaviours of silicon carbide reinforced functionally graded aluminum foam composites. *Composites Part B: Engineering*, 164, 345-357. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.076>
- [134] Strojny-Nędzza, A., Pietrzak, K., & Węglewski, W. (2016). The influence of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> powder morphology on the properties of Cu-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites designed for functionally graded materials (FGM). *Journal of Materials Engineering and Performance*, 25(8), 3173-3184. <https://doi.org/10.1007/s11665-016-2204-3>
- [135] Watanabe Y, Sato H, Miura-fujiwara E. (2015). Functionally graded metallic biomaterials. In: Niinomi M, Narushima TNM, editors. *Adv. Met. Biomater.* Springer ser. Biomater. Sci. Eng. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46842-5>.
- [136] Surya, M. S., & Prasanthi, G. (2018). Tribological behaviour of aluminum silicon carbide functionally graded material. *Tribology in Industry*, 40(2), 247. <https://doi.org/10.24874/ti.2018.40.02.08>

- [137] Saxena, A., Gupta, S., Singh, B., & Dubey, A. K. (2019). Improved functional response of spark plasma sintered hydroxyapatite based functionally graded materials: An impedance spectroscopy perspective. *Ceramics International*, 45(6), 6673-6683.  
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2018.12.156>
- [138] Pai BC, Rajan TPD. (2009). Development in manufacturing processes of functionally graded materials. *IJAEA*, 2, 64–74.
- [139] Chao, Z. L., Jiang, L. T., Chen, G. Q., Qiao, J., Yu, Z. H., Cao, Y. F., & Wu, G. H. (2019). The microstructure and ballistic performance of B4C/AA2024 functionally graded composites with wide range B4C volume fraction. *Composites Part B: Engineering*, 161, 627-638. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.147>
- [140] Watanabe, Y., Eryu, H., & Matsuura, K. (2001). Evaluation of three-dimensional orientation of Al<sub>3</sub>Ti platelet in Al-based functionally graded materials fabricated by a centrifugal casting technique. *Acta Materialia*, 49(5), 775-783.  
[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(00\)00384-0](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00384-0)
- [141] Fukui, Y., & Watanabe, Y. (1996). Analysis of thermal residual stress in a thick-walled ring of duralcan-base Al-SiC functionally graded material. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 27(12), 4145-4151. <https://doi.org/10.1007/BF02595662>
- [142] Watanabe, Y., & Sato, H. (2011). Review fabrication of functionally graded materials under a centrifugal force. *Nanocomposites with unique properties and applications in medicine and industry*, 133-150. <https://doi.org/10.5772/20988>
- [143] Andertová, J., Tláškal, R., Maryška, M., & Havrda, J. (2007). Functional gradient alumina ceramic materials—Heat treatment of bodies prepared by slip casting method. *Journal of the European Ceramic Society*, 27(2-3), 1325-1331.  
<https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2006.04.088>
- [144] Bulatova, R., Bahl, C., Andersen, K., Kuhn, L. T., & Pryds, N. (2015). Functionally Graded Ceramics Fabricated with Side-by-Side Tape Casting for Use in Magnetic Refrigeration. *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 12(4), 891-898.  
<https://doi.org/10.1111/ijac.12298>
- [145] Cheng, L., Sun, M., Ye, F., Bai, Y., Li, M., Fan, S., & Zhang, L. (2018). Structure design, fabrication, properties of laminated ceramics: A review. *International Journal of Lightweight Materials and Manufacture*, 1(3), 126-141.

<https://doi.org/10.1016/j.jjlm.2018.08.002>

- [146] Nishihora, R. K., Rachadel, P. L., Quadri, M. G. N., & Hotza, D. (2018). Manufacturing porous ceramic materials by tape casting—A review. *Journal of the European Ceramic Society*, 38(4), 988-1001. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2017.11.047>
- [147] Jabbari, M., Bulatova, R., Tok, A. I. Y., Bahl, C. R. H., Mitsoulis, E., & Hattel, J. H. (2016). Ceramic tape casting: A review of current methods and trends with emphasis on rheological behaviour and flow analysis. *Materials Science and Engineering: B*, 212, 39-61. <https://doi.org/10.1016/j.mseb.2016.07.011>
- [148] Preparation of advanced ceramics: tape casting. (s.d.). Récupéré sur <https://www.britannica.com/technology/advanced-ceramics/Spray-roasting>.
- [149] Chmielewski, M., & Pietrzak, K. (2016). Metal-ceramic functionally graded materials—manufacturing, characterization, application. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 64(1), 151-160. <https://doi.org/10.1515/bpasts-2016-0017>
- [150] Ramanathan, A., Krishnan, P. K., & Muraliraja, R. (2019). A review on the production of metal matrix composites through stir casting—Furnace design, properties, challenges, and research opportunities. *Journal of Manufacturing processes*, 42, 213-245. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2019.04.017>
- [151] Langmuir–Blodgett method. (s.d.). Récupéré sur <https://eng.thesaurus.rusnano.com/wiki/article1797>.
- [152] Lian, Y., Liu, X., Xu, Z., Song, J., & Yu, Y. (2013). Preparation and properties of CVD-W coated W/Cu FGM mock-ups. *Fusion Engineering and Design*, 88(9-10), 1694-1698. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2013.02.155>
- [153] Shinohara Y. (2013). Functionally graded materials. Handb. Adv. Ceram. Mater. Appl. Process. Prop. second ed. Elsevier, 1179–87. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385469-8.00061-7>
- [154] Rao, G. M., & Gopal, A. V. (2021). Effect of physical vapour deposition coated and uncoated carbide tools in turning aluminium alloy-AA6063. *Materials Today: Proceedings*, 41, 1212-1219. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.752>

- [155] Rajak, D. K., Wagh, P. H., Menezes, P. L., Chaudhary, A., & Kumar, R. (2020). Critical overview of coatings technology for metal matrix composites. *Journal of Bio-and Tribo-Corrosion*, 6(1), 1-18. <https://doi.org/10.1007/s40735-019-0305-x>
- [156] Selvakumar, N., & Barshilia, H. C. (2012). Review of physical vapor deposited (PVD) spectrally selective coatings for mid-and high-temperature solar thermal applications. *Solar energy materials and solar cells*, 98, 1-23. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2011.10.028>
- [157] Shahidi, S., Moazzenchi, B., & Ghoranneviss, M. (2015). A review-application of physical vapor deposition (PVD) and related methods in the textile industry. *The European Physical Journal Applied Physics*, 71(3), 31302. <https://doi.org/10.1051/epjap/2015140439>
- [158] Faraji, G., Kim, H. S., & Kashi, H. T. (2018). *Severe plastic deformation: methods, processing and properties*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813518-1.00020-5>
- [159] Abegunde, O. O., Akinlabi, E. T., Oladijo, O. P., Akinlabi, S., & Ude, A. U. (2019). Overview of thin film deposition techniques. *AIMS Materials Science*, 6(2), 174-199. <https://doi.org/10.3934/matersci.2019.2.174>
- [160] Choy, K. L. (2003). Chemical vapour deposition of coatings. *Progress in materials science*, 48(2), 57-170. [https://doi.org/10.1016/S0079-6425\(01\)00009-3](https://doi.org/10.1016/S0079-6425(01)00009-3)
- [161] Majumdar, J. D., & Manna, I. (2015). Development of Functionally Graded Coating by Thermal Spray Deposition. In *Thermal Sprayed Coatings and their Tribological Performances* (pp. 121-162). IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-4666-7489-9.ch005>
- [162] mekto, o. (may 2022). *An Introduction to Thermal Spray*. Récupéré sur [https://www.oerlikon.com/ecoma/files/BRO-0005.7\\_Thermal\\_Spray\\_Brochure\\_EN.pdf?download=true](https://www.oerlikon.com/ecoma/files/BRO-0005.7_Thermal_Spray_Brochure_EN.pdf?download=true)
- [163] Espallargas N. (2015). Introduction to thermal spray coatings. *Futur. Dev. Therm. Spray Coatings*. Elsevier Ltd, 1–13. <https://doi.org/10.1016/B978-0-85709-769-9.00001-4>
- [164] Bostani, B., Parvini Ahmadi, N., Yazdani, S., & Arghavanian, R. (2018). Synthesis and characterization of functionally gradient Ni-ZrO<sub>2</sub> composite coating. *Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces*, 54(2), 222-229. <https://doi.org/10.1134/S2070205118020156>

- [165] Gayen, D., Tiwari, R., & Chakraborty, D. (2019). Static and dynamic analyses of cracked functionally graded structural components: a review. *Composites Part B: Engineering*, 173, 106982. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106982>
- [166] Udupa, G., Rao, S. S., & Gangadharan, K. V. (2014). Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299. <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.442>
- [167] Akbari, M. K., Baharvandi, H. R., & Mirzaee, O. (2013). Fabrication of nano-sized Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> reinforced casting aluminum composite focusing on preparation process of reinforcement powders and evaluation of its properties. *Composites Part B: Engineering*, 55, 426-432. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.07.008>
- [168] Zhao, P., Wang, S., Guo, S., Chen, Y., Ling, Y., & Li, J. (2012). Bonding W and W–Cu composite with an amorphous W–Fe coated copper foil through hot pressing method. *Materials & Design*, 42, 21-24. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.05.057>
- [169] Kumar, S., Reddy, K. M., Kumar, A., & Devi, G. R. (2013). Development and characterization of polymer–ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2012.04.002>
- [170] Udupa, G., & Gangadharan, K. V. (2012, March). Future applications of carbon nanotube reinforced functionally graded composite materials. In *IEEE-international conference on advances in engineering, science and management (ICAESM-2012)* (pp. 399-404). IEEE.
- [171] Rong Kimberly, F., Oo, Z., & Debnath, S. (2015). Microstructure analysis, physical and thermal properties of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Al<sub>2</sub>TiO<sub>5</sub> functionally graded ceramics for the application of car brake rot. *Pertanika Journal of Science and Technology*, 23(1), 153-161. <http://hdl.handle.net/20.500.11937/14478>
- [172] Lengauer, W., & Dreyer, K. (2002). Functionally graded hardmetals. *Journal of alloys and compounds*, 338(1-2), 194-212. [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(02\)00232-3](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(02)00232-3).
- [173] Konyashin, I., Zaitsev, A. A., Sidorenko, D., Levashov, E. A., Konischev, S. N., Sorokin, M., ... & Kleebe, H. J. (2017). On the mechanism of obtaining functionally graded hardmetals. *Materials Letters*, 186, 142-145. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2016.09.130>

- [174] Li, L., & Li, Y. (2017, November). Development and trend of ceramic cutting tools from the perspective of mechanical processing. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* (Vol. 94, No. 1, p. 012062). IOP Publishing.  
<https://doi.org/10.1016/j.matlet.2016.09.130>
- [175] Eso, O., Fang, Z., & Griffo, A. (2005). Liquid phase sintering of functionally graded WC–Co composites. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 23(4-6), 233-241. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmhm.2005.04.017>
- [176] Suk, M. J., Choi, S. I., Kim, J. S., Kim, Y. D., & Kwon, Y. S. (2003). Fabrication of a porous material with a porosity gradient by a pulsed electric current sintering process. *Metals and Materials International*, 9(6), 599-603. <https://doi.org/10.1007/BF03027261>
- [177] Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., ... & Schulte, K. J. M. S. (2003). Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 40-60.  
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X)
- [178] Anné, G., Vanmeensel, K., Vleugels, J., & Van der Biest, O. (2006). Electrophoretic Deposition as a Novel Near Net Shaping Technique for Functionally Graded Biomaterials. *Key Engineering Materials*, 314, 213–218.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KE M.314.213>
- [179] Abedi, G., Sotoudeh, A., Soleymani, M., Shafiee, A., Mortazavi, P., & Aflatoonian, M. R. (2011). A collagen–poly (vinyl alcohol) nanofiber scaffold for cartilage repair. *Journal of Biomaterials Science, Polymer Edition*, 22(18), 2445-2455.  
<https://doi.org/10.1163/092050610X540503>
- [180] Thieme, M., Wieters, K. P., Bergner, F., Scharnweber, D., Worch, H., Ndop, J., ... & Grill, W. (2001). Titanium powder sintering for preparation of a porous functionally graded material destined for orthopaedic implants. *Journal of materials science: materials in medicine*, 12(3), 225-231. <https://doi.org/10.1023/A:1008958914818>
- [181] Chin, E. S. (1999). Army focused research team on functionally graded armor composites. *Materials Science and Engineering: A*, 259(2), 155-161.  
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(98\)00883-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(98)00883-1)
- [182] Chen, W. W., Rajendran, A. M., Song, B., & Nie, X. (2007). Dynamic fracture of ceramics in armor applications. *Journal of the American Ceramic Society*, 90(4), 1005-1018.

<https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2007.01515.x>

- [183] Huang, C. Y., & Chen, Y. L. (2016). Design and impact resistant analysis of functionally graded Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–ZrO<sub>2</sub> ceramic composite. *Materials & Design*, 91, 294-305.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.11.091>
- [184] Mueller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 17-39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1)
- [185] Niino, M., Kisara, K., & Mori, M. (2005). Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SSPS). In *Materials Science Forum* (Vol. 492, pp. 163-170). Trans Tech Publications Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.492-493.163>
- [186] Bharti, I., Gupta, N., & Gupta, K. M. (2013). Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelectric materials. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 1(3), 221-224. <https://doi.org/10.7763/IJMMM.2013.V1.47>
- [187] SAID, A. (2016). *Etude et Analyse des Plaque FGM en Génie Civil* (Doctoral dissertation).
- [188] Bao, G., & Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853-2871.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00267-Z](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00267-Z)
- [189] Jin, Z. H., & Paulino, G. H. (2001). Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture*, 107(1), 73-98.  
<https://doi.org/10.1023/A:1026583903046>
- [190] Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME J Appl Mech*, 50 (3), 609-614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>
- [191] Erdogan, F., & Chen, Y. F. (1998). Interfacial cracking of FGM/metal bonds. *Ceramic coating*, 29-37.
- [192] Chung, Y. L., & Chi, S. H. (2001). The residual stress of functionally graded materials. *Journal of Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 1–9.
- [193] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2002). Cracking in sigmoid functionally graded coating. *J Mech*, 18(2002), 41-53.

- [194] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1227-1243.  
[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00114-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00114-5)
- [195] Nye, J. F. (1985). *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford university press.
- [196] Kollar, L. P., & Springer, G. S. (2003). *Mechanics of composite structures*. Cambridge university press.
- [197] Staab, George H. (2015). *Laminar Composites // A review of stress–strain and material behavior*. 17–36.
- [198] Reis, A. J., & Pedro, J. J. O. (2019). *Bridge design: concepts and analysis*. John Wiley & Sons.
- [199] Les Ponts Lycée du B.T.P. Gaudier Brzeska – Orléans. (s.d). Récupéré sur [http://www.cours-genie-civil.com/wp-content/uploads/LES\\_PONTS-APMBTP08.pdf](http://www.cours-genie-civil.com/wp-content/uploads/LES_PONTS-APMBTP08.pdf).
- [200] Les ponts – Généralités. (2016) Récupéré sur <http://forum-btp.blogspot.com/2016/11/les-ponts-generalites.html>.
- [201] Thomas. G. (2021). Basic Types of Bridge Decks & Applications. Récupéré sur <https://engineeringcivil.org/articles/basic-types-of-bridge-decks-applications/>.
- [202] Kassir, M. K., & Ghosn, M. (2002). Chloride-induced corrosion of reinforced concrete bridge decks. *Cement and Concrete Research*, 32(1), 139-143.  
[https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(01\)00644-5](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(01)00644-5).
- [203] Ubani.O. (2022).voided slab bridge decks: design and construction. Récupéré sur <https://structville.com/design-of-voided-slab-bridge-decks>.
- [204] Steel Bridge Construction | Bridge Design Company. (s.d). Récupéré sur <https://www.steel-bridges.com/composite-beam-bridge.html>.
- [205] Schollmayer, M. (2009). Through-thickness performance of adhesive connections between FRP bridge decks and steel main girders (No. THESIS). EPFL.  
<https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-4300>.
- [206] Zara, F. (2017). Modèle mécanique d'une plaque mince. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01520287>

- [207] Carrera, E., Fazzolari, F. A., & Cinefra, M. (2016). *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications*. Academic Press.
- [208] Reissner, E., & Stavsky, Y. (1961). Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. *J. of Appl. Mechanics*, 28, 402-408.  
<https://doi.org/10.1115/1.3641719>
- [209] Reddy, J. N. (1997). *Mechanics of laminated composite plates- Theory and analysis (Book)*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [210] Feldman, E., & Aboudi, J. (1997). Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Composite Structures*, 38(1-4), 29-36.  
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00038-X](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00038-X)
- [211] Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA journal*, 40(1), 162-169. <https://doi.org/10.2514/2.1626>
- [212] Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002). Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*, 82(4), 277-283.  
[https://doi.org/10.1002/1521-4001\(200204\)82:4<277::AID-ZAMM277>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/1521-4001(200204)82:4<277::AID-ZAMM277>3.0.CO;2-Y)
- [213] Ghannadpour, S. A. M., Ovesy, H. R., & Nassirnia, M. (2012). Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Computers & structures*, 108–109, 93-99. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.011>
- [214] Mahdavian, M. (2009). Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *Journal of Solid Mechanics*, 1(3), 213-225.
- [215] Mohammadi, M., Saidi, A. R., & Jomehzadeh, E. (2010). Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Applied Composite Materials*, 17(2), 81-93. <https://doi.org/10.1007/s10443-009-9100-z>
- [216] Yanga, J., & Shen, H. S. (2003). Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(4), 467-482. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00070-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00070-1)

- [217] Alinia, M. M., & Ghannadpour, S. A. M. (2009). Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates. *Composite Structures*, 88(3), 354-359.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.04.013>
- [218] Ma, L. S., & Wang, T. J. (2003). Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14), 3311-3330.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00118-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00118-5)
- [219] Li, S. R., Zhang, J. H., & Zhao, Y. G. (2007). Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection. *Thin-Walled Structures*, 45(5), 528-536.  
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.04.002>
- [220] Du, C., Li, Y., & Jin, X. (2014). Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Structures*, 78, 26-36.  
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2013.12.010>
- [221] Du, C., & Li, Y. (2013). Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*, 102, 164-174.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.028>
- [222] Shen, H. S. (2002). Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composites Science and Technology*, 62(7-8), 977-987. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(02\)00029-5](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(02)00029-5)
- [223] Shen, H. S. (2003). Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Engineering Structures*, 25(4), 487-497.  
[https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(02\)00191-8](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(02)00191-8)
- [224] Shen, H. S. (2004). Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties. *International Journal of Solids and Structures*, 41(7), 1961-1974. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.10.023>
- [225] Woo, J., Meguid, S. A., & Liew, K. M. (2003). Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 165(1), 99-115. <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0035-4>
- [226] Cheng, W., Wang, Z. G., & Long, S. C. (2014). Theory analysis of functionally graded materials cylindrical shell buckling under pure bending. In *Applied Mechanics and Materials* , 580, 2928-2931.

<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.580-583.2928>

- [227] Woo, J., & Meguid, S. A. (2001). Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *International Journal of Solids and structures*, 38(42-43), 7409-7421.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00048-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00048-8)
- [228] Reissner, E. (1947). On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1), 55-68.
- [229] Praveen, G. N., & Reddy, J. N. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International journal of solids and structures*, 35(33), 4457-4476. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00253-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00253-9)
- [230] Della Croce, L., & Venini, P. (2004). Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9-11), 705-725. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.09.014>
- [231] Chen, C. S. (2005). Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. *Composite Structures*, 68(3), 295-302.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.03.022>
- [232] Alijani, F., Bakhtiari-Nejad, F., & Amabili, M. (2011). Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments. *Nonlinear Dynamics*, 66(3), 251-270.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-011-0049-8>
- [233] Fallah, A., Aghdam, M. M., & Kargarnovin, M. H. (2013). Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method. *Archive of Applied Mechanics*, 83(2), 177-191.  
<https://doi.org/10.1007/s00419-012-0645-1>
- [234] Lanhe, W. (2004). Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Composite Structures*, 64(2), 211-218.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.08.004>
- [235] Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, E. A., & Megueni, A. (2010). Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Computational Materials Science*, 49(4), 865-870. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.06.038>

- [236] Yaghoobi, H., & Yaghoobi, P. (2013). Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*, 48(8), 2019-2035. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9720-0>
- [237] Park, J. S., & Kim, J. H. (2006). Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 289(1-2), 77-93. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.031>
- [238] Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2012). Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 82(7), 891-905. <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0599-8>
- [239] Thai, C. H., Tran, L. V., Tran, D. T., Nguyen-Thoi, T., & Nguyen-Xuan, H. (2012). Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method. *Applied Mathematical Modelling*, 36(11), 5657-5677. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.01.003>
- [240] Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures*, 40(6), 1525-1546. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9)
- [241] Ambartsumyan, S. A. (1969). Theory of Anisotropic Plates, translated from Russian by T. Cheron and edited by JE Ashton. *Lancaster, Pennsylvania: Technomic Publishing Co.*
- [242] Reissner, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *Int J Solids Struct*, 25, 495–502.
- [243] Soldatos, K. P., & Timarci, T. (1993). A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(93\)90162-J](https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90162-J)
- [244] Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 89(1), 94-101. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.008>
- [245] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations

- using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(2), 113-121. <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9110-x>
- [246] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., & Mechab, I. (2011). A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237-247. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004>
- [247] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., & Bedia, E. A. A. (2014). New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(2), 374-383.
- [248] Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M., & Jorge, R. M. N. (2007). A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5), 1048-1070. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.08.037>
- [249] Pandya, B. N., & Kant, T. (1988). Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—Finite element evaluations. *international Journal of Solids and Structures*, 24(12), 1267-1286. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90090-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90090-X)
- [250] Matsunaga, H. (2009). Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 90(1), 76-86. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.02.004>
- [251] Matsunaga, H. (2009). Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Composite Structures*, 87(4), 344-357. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.02.002>
- [252] Chen, C. S., Hsu, C. Y., & Tzou, G. J. (2009). Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory. *Journal of reinforced plastics and composites*, 28(10), 1215-1234.
- [253] Xiang, S., Jin, Y. X., Bi, Z. Y., Jiang, S. X., & Yang, M. S. (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93(11), 2826-2832. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.05.022>

- [254] Xiang, S., & Kang, G. W. (2013). A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 37, 336-343. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.08.005>
- [255] Xiang, S., Kang, G. W., & Xing, B. (2012). A nth-order shear deformation theory for the free vibration analysis on the isotropic plates. *Meccanica*, 47(8), 1913-1921. <https://doi.org/10.1007/s11012-012-9563-0>
- [256] Xiang, S., Kang, G. W., Yang, M. S., & Zhao, Y. (2013). Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Composite Structures*, 96, 226-231. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.003>
- [257] Xiang, S., Kang, G. W., & Liu, Y. Q. (2014). A nth-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures*, 111, 224-231. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.004>
- [258] Xiang, S., & Kang, G. W. (2013). Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory. *Composite Structures*, 99, 224-230. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.021>
- [259] Sobhy, M. (2013). Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*, 99, 76-87. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.018>
- [260] Wattanasakulpong, N., Prusty, G. B., & Kelly, D. W. (2013). Free and forced vibration analysis using improved third-order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(5), 583-606. <https://doi.org/10.1177/1099636213495751>
- [261] Shi, G. (2007). A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures*, 44(13), 4399-4417. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.11.031>
- [262] Nguyen-Xuan, H., Thai, C. H., & Nguyen-Thoi, T. (2013). Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 55, 558-574. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.044>

- [263] Zenkour, A. M. (2004). Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mechanica*, 171(3), 171-187. <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0145-7>
- [264] Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., & Jorge, R. M. N. (2005). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers & structures*, 83(27), 2225-2237. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.04.002>
- [265] Zenkour, A. M. (2004). Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *Journal of Engineering Mathematics*, 50(1), 75-93. <https://doi.org/10.1023/B:ENGI.0000042123.94111.35>
- [266] Zenkour, A. M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses. *International journal of solids and structures*, 42(18-19), 5224-5242. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.015>
- [267] Zenkour, A. M., & Alghamdi, N. A. (2010). Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17(6), 419-432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
- [268] Zenkour, A. M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5243-5258. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>
- [269] Zenkour, A. M., & Sobhy, M. (2010). Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures*, 93(1), 93-102. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.012>
- [270] Zenkour, A. M. (2005). On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 5(02), 279-297. <https://doi.org/10.1142/S0219455405001581>
- [271] Zenkour, A. M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 30(1), 67-84. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009>
- [272] Zenkour, A. M. (2009). The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *International journal of mechanical sciences*, 51(11-12), 869-880.

<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2009.09.026>

- [273] Zenkour, A. M., & Sobhy, M. (2011). Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory. *Journal of Thermal Stresses*, 34(11), 1119-1138. <https://doi.org/10.1080/01495739.2011.606017>
- [274] Thai, H. T., & Vo, T. P. (2012). A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 54, 58-66. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.01.009>
- [275] Thai, H. T., Vo, T. P., Nguyen, T. K., & Lee, J. (2014). A nonlocal sinusoidal plate model for micro/nanoscale plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(14), 2652-2660. <https://doi.org/10.1177/0954406214521391>
- [276] Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3), 195-220. <https://doi.org/10.1007/BF01176650>
- [277] Akavci, S. S. (2010). Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. *Mechanics of Composite Materials*, 46(2), 215-226. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9140-3>
- [278] Akavci, S. S. (2014). An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures*, 108, 667-676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.019>
- [279] Grover, N., Maiti, D. K., & Singh, B. N. (2013). A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures*, 95, 667-675. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.012>
- [280] Mahi, A., El Abbas, A. B., Tounsi, A. (2015). A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling*, 39(9), 2489–2508. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045>
- [281] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2011). Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Composite structures*, 94(1), 37-49.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.020>

- [282] Mantari, J. L., & Soares, C. G. (2014). Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 60-71. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.020>
- [283] Mantari, J. L., Granados, E. V., & Soares, C. G. (2014). Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 66, 407-419. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.026>
- [284] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1), 43-53. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.09.008>
- [285] Mantari, J. L., & Soares, C. G. (2012). Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(6), 1991-2000. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.01.005>
- [286] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017>
- [287] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(2), 714-723. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.007>
- [288] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 43(8), 3348-3360. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.062>
- [289] Mantari, J. L., & Soares, C. G. (2012). Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94(8), 2640-2656. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.03.018>
- [290] Mantari, J. L., & Soares, C. G. (2013). Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Composite Structures*, 96, 545-553. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.004>

- [291] Mantari, J. L., Bonilla, E. M., & Soares, C. G. (2014). A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Composites Part B: Engineering*, 60, 319-328. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.001>
- [292] Nguyen, V. H., Nguyen, T. K., Thai, H. T., & Vo, T. P. (2014). A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233-246. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.012>
- [293] Thai, C. H., Ferreira, A. J. M., Bordas, S. P. A., Rabczuk, T., & Nguyen-Xuan, H. (2014). Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 43, 89-108. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.09.001>
- [294] Thai, C. H., Kulasegaram, S., Tran, L. V., & Nguyen-Xuan, H. (2014). Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Computers & Structures*, 141, 94-112. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.04.003>
- [295] Kirchhoff, G. (1850). Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. *Annalen der Physik und Chemie*, 81, 258-264. <https://doi.org/10.1002/andp.18501571005>
- [296] Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4(1), 20-34. <https://doi.org/10.1177/002199837000400102>