CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB
INSTITUT DES SCIENCES DÉPARTEMENT DE
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mathématiques à l'université

Polycopié

Les séries numériques, les séries de fonctions, les séries entières et les séries de Fourier

Cours et exercices

Niveau L2

Présenté Par

Dr. Belattar Zokha

Année Universitaire 2018 - 2019

Table des Matières

Préface

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de la deuxième année LMD sciences. Il illustre le programme d'analyse 3 de la deuxième année Mathématiques (domaine Mathématiques et informatique). Il peut être utilisé par les étudiants de différentes filières telle que : Biologie, sciences et techniques et sciences économiques ou autres.
Il sera composé de cinq chapitres à savoir: le développement limité, les séries numériques, les séries de fonctions, les séries entières et les séries de Fourier.
Chaque chapitre comprend des énoncés, des définitions de principe et des résultats sous forme de théorèmes ou de propositions, suivis parfois de corollaires. On trouve aussi des exemples illustratifs, des remarques pertinentes ainsi qu'une série d'exercices résolus de façon détaillée visant l'assimilation du cours et l'acquisition des techniques de résolution. Dans ce contexte, nous conseillons l'étudiant d'essayer de résoudre les exercices avant de regarder la solution. Nous trouverons aussi des exercices sans solutions proposés dans le but de stimuler l'étudiant pour fournir un effort personnel.
Les différentes illustrations insérées dans le cours, aideront l'apprenant à mieux saisir le concept ou la notion dont il est question.
L'objectif principal de notre travail est de fusionner et d'étudier les séries, dont les applications sont assez nombreuses dans d'autres domaines de mathématiques (notamment les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles). Les concepts correspondant au programme de la première année sont supposés connus.
Dans ce travail, nous cherchons à prendre en compte les réserves impérativement imposées par un volume horaire souvent insuffisant, afin de pourvoir l'étudiant d'un support pédagogique répondant aux exigences du programme en vigueur. Ce polycopié n'a pas été conçu pour exempter les étudiants de leurs cours, nous serons trés attentifs à toute suggestions.
Le but de la première partie est d'introduire la notion de développement limité, de connaitre ses propriétés et surtout de savoir les manipuler de manière à rendre accessible certaines situations compliquées en analyse.
L'objectif de la deuxième partie est de mettre en exergue les principaux outils qui interviennent dans l'étude de la nature des séries numériques, plus exactement leur convergence

ou divergence.
Le but de la troisième partie du cours est d'étudier les suites et les séries de fonctions et leurs propriétés.
Le quatrième chapitre est dédié aux séries entières et leurs applications aux équations différentielles.
L'objectif du dernier chapitre est d'examiner les séries de Fourier qui sont un outil trés important pour les ingénieurs.
Intitulé de la matière: Analyse3, niveau L2.

Chapitre 1

Développement limité

Ce chapitre s'intéresse à l'étude du développement limité qui permet d'approcher des fonctions par des applications polynomiales, de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non. Cela nous servira dans les prochains chapitres (voir [4]).

1.1 Comparaison locale des fonctions

1.1.1 Fonction négligeable devant une autre fonction

Définition 1.1.1 *Soient I une partie de $\mathbb{R}$, a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux applications de I vers $\mathbb{R}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement s'il existe une application $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall\ x \in I,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. On écrit $f \underset{a}{=} o(g)$. C'est la notation de Landau.*

Remarques 1.1.1 *1) On peut écrire lorsqu'il n'y pas de confusion $f = o(g)$ quand $x \to a$ au lieu de $f \underset{a}{=} o(g)$ sans oublier que c'est relatif à a.*
2) Si g ne s'annule pas au voisinage de a alors $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemples:
1)$f(x) \underset{a}{=} o(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x) = 0$.
2) $x^2 \underset{0}{=} o(x) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x} = 0$.
3) $x^2 \underset{\infty}{=} o(x^3) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3} = 0$.
4) $\sin x \underset{0}{=} o(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1} = 0$.
5) $\ln x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{e^x} = 0$.

Propriétés:

1) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ alors ceci n'implique pas que $f = h$.
2) **Transitivité**: Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
3) **Somme**: Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_1)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g_1)$.
4) **Produit**:

i) Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f_1.f_2 \underset{a}{=} o(g_1.g_2)$.

ii) Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et f_2 est une fonction bornée dans un voisinage de a, alors

$$f_1.f_2 \underset{a}{=} o(g_1).$$

Cas particuliers:

1) $o(x-a)^n + o(x-a)^n = o(x-a)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.
En particulier, au voisinage de 0, on a $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.
2) si $p \leq n$ alors $o(x^n) + o(x^p) = o(x^n) \;\; p \in \mathbb{N}$.
3) $o(x^n).o(x^p) = o(x^{n+p}) \;\; \forall p \in \mathbb{N}$.
4) $o(x^n) = o(x^p), \qquad \forall p \leq n$.
5) $\lambda.o(x^n) = o(x^n), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
6) $o(\lambda.x^n) = o(x^n), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{\star}$.
7) $x^n.o(x^p) = o(x^{n+p})$.
8) $\dfrac{1}{x^n}.o(x^p) = o(x^{p-n})$.

Exemples:

1) $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$.
2) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \Longleftrightarrow \alpha < \beta$.
3) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta) \Longleftrightarrow \alpha > \beta$.

1.1.2 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Définition 1.1.2 *Soient I une partie de $\mathbb{R}$, a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et on note $f \underset{a}{\sim} g$.*

Exemples:

1) $\sin x \underset{0}{\sim} (x)$ car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
2) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} (x)$ car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Remarques 1.1.2 *1) La relation $\sim$ est une relation d'équivalence définit sur l'ensemle des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point a.*
2) $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f - g \underset{a}{=} o(g)$ ou $f - g \underset{a}{=} o(f)$.

Propriétés:
1) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(x) = g(x)(\lambda(x) + \varepsilon(x))$, avec $\lim\limits_{x\to a}\lambda(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.
2) Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.
3) Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2, g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a, alors

$$\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}.$$

4) Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1.f_2 \underset{a}{\sim} g_1.g_2$.
5) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
6) Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} (g)$.

Proposition 1.1.1

- *Une fonction polynôme non nulle équivaut au voisinage de $\pm\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.*
- *Une fonction polynôme non nulle équivaut au voisinage de 0 à son terme non nul de plus bas degré.*
- *Une fonction rationnelle équivaut en $\pm\infty$ au rapport des termes non nuls de plus haut degré.*
- *Une fonction rationnelle non nulle équivaut au voisinage de 0 au rapport de ses termes non nuls de plus bas degré.*

Exemples:
1)
$$6x^7 + 8x^5 \underset{+\infty}{\sim} 6x^7 + 5x^3 + 5$$
2)
$$4x^5 + 9x + 8 \underset{0}{\sim} 6x^7 + 5x^3 + 8$$
3)
$$\frac{5x^2 + 3x + 6}{9x^6 + 3x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{5x^2 + 1}{9x^6 + 3x^2 + 5x + 8}$$
4)
$$\frac{5x^7 + 3x^4 + 6x}{9x^6 + 3x^7 + 2} \underset{0}{\sim} \frac{5x^2 + 6x}{4x^9 + 4x^7 + 4x + 2}$$

Remarques 1.1.3 *Si* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ *alors ceci n'entraine pas forcément que* $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.
Cependant nous avons l'exception suivante:
Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ *et* f_1 *et* f_2 *sont strictement positives ou strictement négatives au voisinage de* a *alors* $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.
En effet, $1 + x \underset{0}{\sim} 1$ *et* $x - 1 \underset{0}{\sim} -1$ *mais* $1 + x + x - 1 = 2x \underset{0}{\nsim} 0$.

Exemples: Equivalents usuels au voisinage de 0

1) $\sin x \sim x$.
2) $\tan x \sim x$.
3) $\arcsin x \sim x$.
4) $\arctan x \sim x$.
5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.
6) $\sinh x \sim x$.
7) $\tanh x \sim x$.
8) $\cosh(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$.
9) $\ln(1 + x) \sim x$.
10) $exp(x) - 1 \sim x$.

1.1.3 Applications des équivalents usuels dans le calcul des limites

L'usage correct des équivalents usuels nous permet de lever sans difficulté l'indétermination des formes. Dans le cas d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chaque fonction par sa fonction équivalente.

Exemples:

1) On veut calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + 2\tan x)}{\sin x}$. On a

$$\ln(1 + 2\tan x) \underset{0}{\sim} 2\tan x \underset{0}{\sim} 2x,$$

et

$$\sin x \underset{0}{\sim} x,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2\tan x)}{\sin x} = 2.$$

2) On veut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. On a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

car au voisinage de $+\infty$, on a $1+\dfrac{1}{x}>0$. Puisque x est au voisinage de $+\infty$ donc $\dfrac{1}{x}$ est au voisinage de 0. On obtient

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{x}\underset{+\infty}{\sim} 1.$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

1.2 Développement de Taylor

Théorème 1.2.1 ***(Formule de Taylor-Lagrange)***
Si f est une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ ($f^{(n+1)}$ existe) sur $]a,b[$, alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que:

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

où $f', f'', ..., f^{(n)}, f^{(n+1)}$ sont les dérivées successives de f.

Remarques 1.2.1 *1) Le terme $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ est appelé le reste de Lagrange.*
2) Pour $n=0$, on retrouve la formule des accroissements finis:

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a).$$

Corollaire 1.2.1 *Si f est une fonction de classe C^n sur $[a,a+h]$ avec $h>0$ et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,a+h[$, alors il existe $\theta\in\,]0,1[$ tel que:*

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

Théorème 1.2.2 ***(Formule de Mac-Laurin)***
Si f est une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ avec $0\in[a,b]$ et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ sur $]a,b[$, alors pour tout $x\in]a,b[$, on a

$$f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i!}f^{(i)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $\theta\in]0,1[$.

Cette formule est un cas particulier de la formule de Taylor dans laquelle on prend $a=0$ et $b=x>0$.
Exemple:

Trouver le développement de Mac-Laurin de $f(x) = \ln(1+x)$.
En effet,

$$f^{'}(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f^{'}(0) = 1.$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

ce qui donne

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Donc

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

1.3 Applications

1.3.1 Recherche la limite d'une suite

L'utilisation du développement peut être trés utile dans le calcul des limites, en particulier pour lever des formes indéterminées, en effet si f admet un DL_n au voisinage du point x_0 donné par l'exemple suivant:

Exemple: Trouver à l'aide du developpement de Mac-Laurin de la fonction exponentielle, la limite de la suite

$$u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

En effet, le développement de Mac-Laurin d'ordre n de la fonction exponentielle donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

avec $0 < \theta < 1$.
Donc,

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta},$$

ce qui donne que

$$u_n = e^{-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta},$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-1}.$$

1.3.2 Inégalités

Les inégalités s'obtiennent en majorant et en minorant le reste.
Exemple: Le développement de Mac-Laurin d'ordre 4 de la fonction $\cos x$ est :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}(-\sin \theta x).$$

Puisque $-1 \leq \sin \theta x \leq 1$, Donc

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

1.4 Développement limité

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un voisinage V de $x_0 \in I$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n (en abrégé DL_n au $V(x_0)$), si et seulement s'il existe un polynôme $P(x - x_0)$ en $(x - x_0)$ de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x - x_0) + o(x - x_0)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + o(x - x_0)^n \end{aligned}$$

où a_i sont les coéfficients du polynôme $P(x - x_0)$.
$P(x - x_0)$ est appelé la partie régulière du DL_n de f au $V(x_0)$.

1.4.1 Conséquences immédiates

Proposition 1.4.1 *Si une fonction f admet un DL_n au voisinage de x_0, alors ce développement est unique.*

Proposition 1.4.2 *Si f admet un DL_n au voisinage de x_0, alors pour tout $m \leq n$, elle admet un DL à l'ordre m en x_0, obtenu par troncature*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i (x - x_0)^i + o((x - x_0)^m).$$

Proposition 1.4.3 *Si une fonction f admet un DL_n au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe est fini et est égale à a_0.*

Remarque 1.4.1 *Cette proposition sert généralement à calculer une limite. Sa contraposée est surtout utile pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de DL.*

Exemple:
La fonction $\ln x$ n'admet pas de DL en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = +\infty$.

Proposition 1.4.4 *Si f est définie et continue au point x_0, alors $a_0 = f(x_0)$ et* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0) = a_1$.

1.4.2 Développement limité déduit de la formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young permet de calculer les coéfficients de la partie régulière du développement limité d'ordre n au voisinage d'un point pour les fonctions de classe C^n au voisinage de ce point.

Théorème 1.4.1 *Soient $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et f une fonction de classe C^{n-1} sur $I =]x_0 - h, x_0 + h[$ et admettant une dérivée d'ordre n au point x_0, alors la fonction f admet un DL_n au voisinage de x_0 donné par:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n,$$

pour tout $x \in I$.

Ce qui n'est autre que le développement d'ordre n de f au voisinage de x_0 avec $a_i = \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$ pour $i = 0, ..., n$.

Développements limités de quelques fonctions usuelles

La formule de Taylor-Young reste une puissante méthode du calcul des développements limités. Elle nous a permis d'établir les développements limités usuels à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$.
2) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
ou $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$.
4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
ou $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.
5) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
6) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
7) Si $\alpha \in \mathbb{R}$:
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$.
Exemples:

1) Le DL_2 de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 est donné par

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

2) Le DL_2 de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ au voisinage de 0 est

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{\frac{-1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Remarques 1.4.1 *1) Pour calculer le DL_n de f au voisinage de $x_0 \neq 0$, on effectue un changement de variable en posant $X = x - x_0$ qui nous ramène en 0, c'est-à-dire on calcule le DL_n en 0 de la fonction $g(X) = f(X + x_0)$ puis on remplace X par $x - x_0$.*
2) Pour calculer le DL_n de f au voisinage de ∞, on effectue un changement de variable en posant $X = \dfrac{1}{x}$ qui nous ramène en 0, c'est-à-dire on calcule le DL_n en 0 de la fonction $g(X) = f(\dfrac{1}{x})$ puis on remplace X par $\dfrac{1}{x}$.
3) Le DL_n d'une fonction impaire contient uniquement des monômes à puissances impaires.
4) Le DL_n d'une fonction paire contient uniquement des monômes à puissances paires.

Exemples:
1) Trouvons le DL_3 de $f(x) = e^{x-2}$ au voisinage du point $x_0 = 2$. On pose $X = x - 2$, on obtient :

$$g(X) = f(X+2) = e^{(X+2)-2} = e^X$$

Le DL_3 de $g(X) = e^X$ au voisinage de 0 est:

$$e^X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$$

d'où, pour $X = x - 2$

$$e^{x-2} = 1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + o((x-2)^3).$$

2) Déterminons le développement limité de $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.
On pose $X = \dfrac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, on a $X \to 0$ et à l'aide d'un DL_2 au voisinage de $X = 0$ de e^X, on obtient:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{X}e^X = \frac{1}{X}\left[1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + o(X^2)\right] \\ &= \frac{1}{X} + 1 + \frac{1}{2}X + o(X) \\ &= x + 1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}). \end{aligned}$$

3) Trouvons le DL_4 de $f(x) = \sin x$ au voisinage du point $x_0 = 0$. En effet, on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Remarquons que la fonction $\sin x$ étant impaire, son développement limité contient uniquement des monômes à puissances impaires.
4) Trouvons le DL_5 de $f(x) = \cos x$ au voisinage du point $x_0 = 0$. En effet, on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

Remarquons que la fonction $\cos x$ étant paire, son développement limité contient uniquement des monômes à puissances paires.

1.4.3 Opérations sur les développements limités

Somme:

Si f et g admettent deux DL_n au voisinage d'un point x_0 de parties régulières respectives P et Q. Alors $f + g$ admet un DL_n au voisinage de x_0 qui s'obtient en effectuant la somme des deux polynômes P et Q. On a

$$f(x) = P(x - x_0) + o(x - x_0)^n,$$

$$g(x) = Q(x - x_0) + o(x - x_0)^n,$$

alors

$$f(x) + g(x) = P(x - x_0) + Q(x - x_0) + o(x - x_0)^n.$$

Exemple:
Soient $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$. Trouvons le DL_4 de $f(x) + g(x)$ au voisinage du point $x_0 = 0$. On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \text{ et } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4). \end{aligned}$$

Multiplication par un scalaire :

Si f admet un DL_n au voisinage de x_0 alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet un DL_n au voisinage de x_0 qui s'obtient en multipliant le DL_n de f par λ.
Exemple: Trouvons le DL_5 de $f(x) = \dfrac{6}{1-x}$ au voisinage du point $x_0 = 0$. On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

D'où

$$\frac{6}{1-x} = 6 + 6x + 6x^2 + 6x^3 + 6x^4 + 6x^5 + o(x^5).$$

Quotient :

Si f et g admettent deux DL_n au voisinage d'un point x_0 de parties régulières respectives P et Q et si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un DL_n au voisinage de x_0 qui s'obtient en effectuant une division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de P par Q.

Exemple:
On veut calculer le DL_5 au voisinage de 0 de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Comme $\lim_{x\to 0} \cos x \neq 0$ et vu que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$

on applique la division suivant les puissances croissantes :

$$\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Ainsi, on obtient

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Remarque 1.4.2 *Le critère précédent affirme que $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ est une condition suffisante pour que le développement limité de $\frac{f}{g}$ existe, cependant cette condition n'est pas nécessaire. L'exemple qui suit montre qu'il peut arriver que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et que $\frac{f}{g}$ admette un développement limité.*

Exemple:
La fonction $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ admet un développement limité d'ordre n en 0, alors que $\lim_{x\to 0} x = 0$.
En effet, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

D'une façon générale

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - ... + (-1)^n\frac{1}{n+1}x^n + o(x^n).$$

Composition :

Supposons que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 et si g admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $f(x_0)$, alors $g \circ f$ possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 dont la partie régulière s'obtient en composant la partie régulière de g par celle de f et en éliminant les monômes dont le degré est supérieur ou égal à $n+1$.

Exemples:

1) Trouvons le DL_2 de $\dfrac{1}{e^x}$ au voisinage du point $x_0 = 0$. Constatons que :

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1-(1-e^x)}.$$

On pose $f(x) = 1 - e^x$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et le DL_2 de $f(x) = 1 - e^x$ au voisinage du point $x_0 = 0$ est :

$$\begin{aligned} 1 - e^x &= 1 - \Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\Big) \\ &= -x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-(1-e^x)} &= \frac{1}{1-(-x-\frac{1}{2}x^2)} \\ &= 1 + (-x - \frac{1}{2}x^2) + (-x - \frac{1}{2}x^2)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

On ne tient compte que des puissances inférieures ou égale à 2.

2) Déterminons le DL_6 au voisinage de 0 de $\sqrt{\cos x}$.

On utilisons le DL_n de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ au voisinage de 0, on pose $g(u) = \sqrt{u+1}$ et $f(x) = \cos x - 1$. Le DL_3 de g au voisinage de 0 est

$$g(u) = 1 + \frac{u}{2} - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3),$$

et le DL_6 de f au voisinage de 0 est

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6).$$

donc

$$(g\circ f)(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + o(x^6).$$

3) Trouvons le DL_2 au voisinage de 0 de $e^{\frac{1}{1-x}}$. Posons que $e^{\frac{1}{1-x}} = (g\circ f)(x)$ où

$$g(u) = e^u \text{ et } f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$, pour contourner ce problème écrivons:

$$e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x}+1-1} = e e^{\frac{1}{1-x}-1}.$$

A présent, considérons $e^{\frac{1}{1-x}-1} = (g_1 \circ f_1)(x)$ où

$$g_1(u) = e^u \text{ et } u = f_1(x) = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Là on a bien $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ et les DL_2 au voisinage de 0 de $g_1(u) = e^u$ et $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$, sont:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + o(u^2)$$

et

$$u = \frac{1}{1-x} - 1 = x + x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-x}} &= e\left[1 + \frac{(x+x^2)}{1!} + \frac{(x+x^2)^2}{2!} + o(x^2)\right] \\ &= e\left[1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right]. \end{aligned}$$

Intégration :

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage du point x_0, alors toute primitive F de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de x_0 c'est-à-dire, si

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + o(x - x_0)^n,$$

alors

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(x - x_0)^{i+1} + o(x - x_0)^{n+1}.$$

Exemples:

1) On veut calculer le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $F(x) = \ln|1+x|$ qui est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Nous savons que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n).$$

En remplaçant x par $-x$, on retrouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

il en résulte que :

$$F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x3}{3} - \frac{x4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Par conséquent

$$\ln|1+x| = \ln|1+0| + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x3}{3} - \frac{x4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}),$$

ainsi, on obtient

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x3}{3} - \frac{x4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

2) On veut calculer le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $F(x) = \arctan x$ qui est une primitive de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Nous savons que:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + o(x^{2n-2}),$$

il en résulte que :

$$F(x) = \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x5}{5} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}).$$

Par conséquent

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x5}{5} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}).$$

1.4.4 Développement limité et fonctions dérivables

Proposition 1.4.5 *(Dérivation d'un développement limité)*
Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et f est $(n+1)$-fois dérivable au voisinage de x_0, alors f' admet un DL_n au voisinage de 0 obtenu en dérivant le DL_{n+1} au voisinage de x_0 de f.

Exemple:
Trouvons le DL_3 de $\frac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage du point $x_0 = 0$.
On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4),$$

comme $\frac{1}{(1-x)^2}$ est de classe C^4 au voisinage de 0, et en constatant que $\frac{1}{(1-x)^2}$ est la dérivée de $\frac{1}{1-x}$, alors en dérivant le DL_4 de $\frac{1}{1-x}$, on obtient le DL_3 de $\frac{1}{(1-x)^2}$. Il en résulte

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3).$$

Remarque 1.4.3 *Le fait qu'une fonction admette un DL_n en x_0 n'implique pas qu'elle soit n fois dérivable en x_0 .*

Exemple: La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

qui est le prolongement par continuité en 0 de la fonction: $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.
La fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ admet le DL_2 suivant :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Il s'en suit que f est dérivable en 0 et que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} \sin x + \dfrac{1}{x} \cos x & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \qquad x = 0. \end{cases}$$

car on a

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$

Cependant, f' n'est pas dérivable en 0, en effet

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^3} \sin x + \frac{1}{x^2} \cos x \text{ n'existe pas.}$$

On conclut que f admet un DL_2 au voisinage de 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

1.4.5 Calcul des limites

L'utilisation de DL_n peut être trés utile dans le calcul des limites en particulier pour lever des formes indéterminées, en effet si f admet un DL_n au voisinage du point x_0 donné par:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^n + ... + a_n(x - x_0)^n + o\Big((x - x_0)^n\Big),$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \Big[a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^n + ... + a_n(x - x_0)^n + o\Big((x - x_0)^n\Big)\Big] = a_0.$$

Exemple:
On veut calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée. En utilisant le DL_2 en $x_0 = 0$ de $\ln(x+1)$, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x + o(x^2)}$$

on simplifie par x, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right]}{x\left[1 + o(x)\right]} \\ &= \lim_{x \to 0} 1 - \frac{1}{2}x + o(x) = 1. \end{aligned}$$

1.4.6 Exercices

Exercice 1:

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^p} = 0$.

En déduire que $e^{\frac{-1}{x^2}} = o(x^p)$.

Exercice 2:

En utilisant l'équivalence des fonctions, calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x \ln(1+x)}{x(\sqrt{x+1}-1)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$.

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$.

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3:

1) Soit la fonction $f(x) = 2 + x + 7x^3 + x^5$.

Donner le DL_n de f au voisinage de 0 à l'ordre suivant:

a) $n = 3$. b) $n = 4$. c) $n = 7$.

2) Soit la fonction $f(x) = \ln(1 + 3x)$.

Donner le DL_n de f au voisinage de 0 à l'ordre suivant:

a) $n = 2$. b) $n = 3$.

3) Soit la fonction $f(x) = e^{2x}$.

Donner le DL_n de f au voisinage de 0 à l'ordre suivant:

a) $n = 3$. b) $n = 5$.

Exercice 4:

Donner le DL_n de f au voisinage de 0 à l'ordre n indiqué:

1) $f(x) = \cos(\sin x), n = 5$.

2) $f(x) = \ln(2\cos x + \sin x), n = 4$.

3) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}, n = 3$.

4) $f(x) = x \tan x, n = 5$.

5) $f(x) = \sin x \ln(1 + x), n = 3$.

6) $f(x) = e^{\sin x}, n = 4$.

7) $f(x) = \sin x + \cos 3x, n = 5$.

Exercice 5:

Soit la fonction définie pour $x > 0$, par: $f(x) = x\left[\ln(e + \frac{1}{x}) - \cos \frac{1}{x}\right]$.

Donner le DL_2 de f au voisinage de $+\infty$.

En déduire que la suite $U_n = n\left[\ln(e+\frac{1}{n}) - \cos\frac{1}{n}\right]$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6:

1) Donner le DL_n de f au voisinage de 0 à l'ordre n indiqué:

a) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}, n = 3$.

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}, n = 4$.

c) $f(x) = e^{\cos x}, n = 3$.

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^3}, n = 2$.

e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\ln(1+x)}, n = 3$.

f) $f(x) = \ln\dfrac{1}{\cos x}, n = 3$.

2) Donner le DL_4 de $f(x) = \cos x$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 7:

Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\sin^2 2x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x - x^2}{(\cos x - 1)(e^x-1)^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{x^2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$.

Chapitre 2

Séries numériques

La théorie des séries a pour but de donner si possible un sens à la somme d'une infinité de nombres. L'objectif de ce chapitre est de mettre en exergue les principaux outils qui interviennent dans l'étude de la nature des séries numériques, plus exactement leur convergence ou divergence (voir [6], [7], [14]).

2.1 Séries dans un espace vectoriel normé

2.1.1 Séries dans un espace vectoriel normé

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ représente indifféremment le corps des réels $\mathbb{R}$, ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.*
On appelle série de terme général u_n ou série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et on la note $\displaystyle\sum_{n} u_n$.
$\forall n \geq 0, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_n u_n$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n} u_n$.
On note $\mathbf{S}(E)$ l'ensemble des séries de E.

Remarques 2.1.1

- *Les séries de E sont dites numériques si $E = \mathbb{K}$, réelles si $E = \mathbb{R}$ et complexes si $E = \mathbb{C}$.*
- *Le terme général de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est donné en fonction des termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles par $u_0 = S_0$ et $\forall n \geq 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$.*

- *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geq n_0} \in E^{\mathbb{N}}$. *On peut prolonger cette suite en une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *en convenant d'écrire*

$$\begin{cases} v_n = 0 & \textit{pour } n \leq n_0, \\ v_n = u_n & \textit{pour } n \geq n_0. \end{cases}$$

- *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n \in \mathbf{S}(E)$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$. *La série* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *s'appelle la série déduite de* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *par troncature au rang* n_0.

Proposition 2.1.1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. L'ensemble* $\mathbf{S}(E)$ *est muni des opérations*

- $\forall \sum_n u_n, \sum_n v_n \in \mathbf{S}(E)$, *on a* $\sum_n u_n + \sum_n v_n = \sum_n (u_n + v_n)$.
- $\forall \sum_n u_n \in \mathbf{S}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, *on a* $\lambda \sum_n u_n = \sum_n \lambda u_n$.

2.1.2 Séries convergentes dans un espace vectoriel normé

Définition 2.1.2 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\sum_n u_n \in \mathbf{S}(E)$.
On dit que $\sum_n u_n$ *converge si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles de* $\sum_n u_n$ *converge.*
Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ *s'appelle la somme de* $\sum_n u_n$ *et on la note* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *s'appelle le reste d'ordre* n *de la série* $\sum_n u_n$ *et* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle la suite des restes de la série* $\sum_n u_n$.
Dans le cas contraire, une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarques 2.1.2 1) *Soit* $\sum_n u_n \in \mathbf{S}(E)$ *une série convergente.*

- $\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$.
- $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

2) *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* $\sum_{n\geq 0} u_n \in \mathbf{S}(E)$. *Les séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *sont de même nature.*

Exemples:
1) Etudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = 1.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme $S = 1$.

2) On veut examiner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Pour $n \geq 1$, $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

Donc

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.$$

D'où, la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$ est divergente.

Proposition 2.1.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\sum_n u_n \in \mathbf{S}(E)$. Si la série $\sum_n u_n$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.*
La réciproque est fausse.

Preuve
On a $S_n - S_{n-1} = u_n$. Puisque $\sum_n u_n$ converge alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S.
Donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Exemples:
1) La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente pourtant son terme général tend vers 0.
2) La série $\sum_{n \geq 0} 3^n$ diverge car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} 3^n = +\infty \neq 0$.

Proposition 2.1.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\sum_n u_n, \sum_n v_n$ des séries convergentes. Alors*

1. $\sum_n (u_n + v_n)$ *converge et on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sum_n (\lambda u_n)$ *converge et on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

En particulier, l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{S}(E)$.

Remarques 2.1.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et* $\sum\limits_n u_n, \sum\limits_n v_n \in \mathbf{S}(E)$.

- *Si la série* $\sum\limits_n (u_n + v_n)$ *converge, alors les séries* $\sum\limits_n u_n$ *et* $\sum\limits_n v_n$ *sont de même nature.*
- $\sum\limits_n u_n$ *et* $\sum\limits_n v_n$ *deux séries de* $\mathbf{S}(E)$ *de natures différentes, alors la série* $\sum\limits_n (u_n+v_n)$ *diverge.*
- *Si* $\lambda \in \mathbb{K}$ *non nul alors les séries* $\sum\limits_n u_n$ *et* $\sum\limits_n (\lambda u_n)$ *sont de même nature.*

Exemples:
1) $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^{n+1}$ sont deux séries divergentes puisque leurs termes généraux ne tendent pas vers 0, cependant la série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n + \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^{n+1}$ est convergente car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 0$.
2) $\sum\limits_{n\geq 0} n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n^2$ sont deux séries divergentes et $\sum\limits_{n\geq 0} n + \sum\limits_{n\geq 0} n^2$ est divergente car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty$.

Proposition 2.1.4 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application linéaire continue de E vers F. Si la série* $\sum\limits_n u_n$ *converge alors la la série* $\sum\limits_n f(u_n)$ *est convergente et a pour somme* $f\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)$.

2.1.3 Critère de Cauchy

Définition 2.1.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.*

i) *On dit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ est de Cauchy si et seulement si*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \text{ on a } \|S_{n+p} - S_n\| \leq \varepsilon.$$

ii) *On dit que la série* $\sum\limits_n u_n$ *est de Cauchy si et seulement si*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p \geq N(\varepsilon),\ \forall q \geq p, \text{ on a } \|\sum_{n=p}^{q} u_n\| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est de Cauchy si et seulement si la suite associée* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *est une suite de Cauchy.*

Proposition 2.1.5 **i)** *Toute série de Cauchy dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E complet est convergente.*

ii) *Toute série convergente est de Cauchy.*

Preuve

i) Puisque $\sum_n u_n$ est de Cauchy, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans un espace complet. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Ainsi, $\sum_n u_n$ est convergente.

ii) Le fait que $\sum_n u_n$ est convergente alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc elle est de Cauchy. D'où $\sum_n u_n$ est de Cauchy.

Exemple:

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car elle n'est pas de Cauchy, le fait que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

2.1.4 Séries absolument convergentes

Définition 2.1.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet et $\sum_n u_n \in \mathbf{S}(E)$.*
On dit que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente si $\sum_n \|u_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 2.1.6 *Toute série absolument convergente dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet est convergente et on a*

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

2.2 Séries à termes positifs

La partie qui suit est consacrée aux séries à termes positifs, on y met en évidence leur particularité à disposer de plusieurs critères de convergence. A priori, on va introduire les séries de référence (série géométrique et série de Riemann), on verra comment déduire d'emblée leur nature sans avoir à la démontrer et à postériori, comment on ramène, moyennant des critères appropriés, l'étude de la nature d'une série à termes positifs à celle d'une série de référence.

Définition 2.2.1 *Une série $\sum_n u_n$ est dite à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geq 0$.*

2.2.1 Critère de monotonie

Théorème 2.2.1 *Une série à termes réels positifs* $\sum_n u_n$ *converge si et seulement si la suite associée* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée et dans ce cas la somme de la série est la borne supérieure de la suite associée.*

Preuve
Le fait que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, alors la suite $(S_n)_n$ est croissante.
i) Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, alors $(S_n)_n$ converge et de plus croissante, donc elle est majorée.
ii) Nous avons $(S_n)_n$ est majorée et croissante, alors $(S_n)_n$ est convergente, donc la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Corollaire 2.2.1 *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries à termes positifs. Alors la série somme* $\sum_n (u_n + v_n)$ *converge si et seulement si les deux séries* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *convergent.*

2.2.2 Critère de comparaison

Définition 2.2.2 *On dit que* $u_n = o(v_n)$ *s'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* n*, on a* $u_n \leq M v_n$*.*

Théorème 2.2.2 ***(Comparaison par o)***
Soient $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries à termes positifs tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = o(v_n)$*. Alors*

i) $\sum_n v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_n u_n$ *converge.*

ii) $\sum_n u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum_n v_n$ *diverge.*

Preuve
i) Le fait que $u_n = o(v_n)$, alors

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \text{on a } u_n \leq M v_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + ... + u_{N-1} + \sum_{i\geq N} u_i \\ &\leq u_0 + ... + u_{N-1} + M \sum_{i\geq N} v_i. \end{aligned}$$

Ce qui donne que la suite $(S_n)_n$ est majorée et elle est croissante, donc elle converge. Ainsi $\sum_n u_n$ converge.

ii) On a

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 0} v_i &= v_0 + ... + v_{N-1} + \sum_{i\geq N} v_i \\ &\geq v_0 + ... + v_{N-1} + \frac{1}{M}\sum_{i\geq N} u_i\end{aligned}$$

Or la série $\sum_n u_n$ diverge, donc la série $\sum_n v_n$ diverge.

Exemple: **(Série géométrique)**

Toute série complexe de la forme $\sum_{n\geq 0} aq^n$ avec $q \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, est dite série géométrique.

La suite associée des sommes partielles s'écrit

$$S_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Suivant la valeur de q, on obtient les deux cas suivants:

i) Si $|q| < 1$, alors la série est convergente car on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Autrement dit,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

ii) Si $|q| \geq 1$, alors la série est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} aq^n = \lim_{n\to+\infty} a|q|^n e^{in\theta} = +\infty \neq 0,$$

où θ désigne l'argument du nombre complexe q.

Exemple:

Donnons la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

En effet,

$$|u_n| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = v_n,$$

or $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge. Ainsi $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Corollaire 2.2.2 ***(Critère d'équivalence)***

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Preuve

Le fait que

$$\begin{aligned} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(\varepsilon), \text{on a } \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(\varepsilon), \text{on a } (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(\varepsilon), \text{on a } mv_n \leq u_n \leq Mv_n. \end{aligned}$$

D'une part, le fait que $mv_n \leq u_n$, alors $v_n = o(u_n)$.
D'autre part, le fait que $u_n \leq Mv_n$, alors $u_n = o(v_n)$.
Donc, d'aprés le théorème 2.2.2, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Corollaire 2.2.3 *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k.$$

1. *Si k est fini non nul, $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.*
2. *Si $k = 0$ et $\sum_n v_n$ est convergente alors $\sum_n u_n$ est convergente.*
3. *Si $k = +\infty$ et $\sum_n v_n$ est divergente alors $\sum_n u_n$ est divergente.*

Preuve

1) Posons $w_n = kv_n$.
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$ implique que $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, ce qui nous permet de conclure grâce au critère d'équivalence que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.
2) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On déduit qu'à partir d'un certain rang que $u_n = o(v_n)$ et puisque $\sum_n v_n$ est convergente alors d'aprés le critère de comparaison $\sum_n u_n$ est convergente.
3) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$. On déduit qu'à partir d'un certain rang que $v_n = o(u_n)$ et puisque $\sum_n v_n$ est divergente alors d'aprés le critère de comparaison $\sum_n u_n$ est divergente.

Exemple: **(Série de Riemann)**
On appelle série de Riemann, toute série dont le terme général est de la forme $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$.
En effet, pour $\alpha \leq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, alors que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Pour $\alpha>1$, étudions la série de terme général $u_n=\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ avec $n\geq 1$.

D'un coté, la somme $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ converge vers $S=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=1$. Donc la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge.

De l'autre coté, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big(1-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1-\alpha}\Big), \end{aligned}$$

au voisinage de $+\infty$, on a

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1-\alpha}\underset{+\infty}{\sim}1+\frac{1-\alpha}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\alpha-1}}\Big[1-\Big(1+\frac{1-\alpha}{n}\Big)\Big]\\ &= \lim_{n\to+\infty}n\Big(\frac{\alpha-1}{n}\Big)\\ &= \alpha-1\neq 0. \end{aligned}$$

Puisque, la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge. D'aprés le corollaire 2.2.3, la série $\sum_{n\geq 1}v_n$ converge.

Exercice:

Etudier la nature des séries $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n^5}$, $\sum_{n\geq 1}\ln(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}})$.

1) La série $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n^5}$ converge car $\sin\frac{1}{n^5}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^5}$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^5}$ est une série de Riemann convergente, d'où le résultat.

2) La série $\sum_{n\geq 1}\ln(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}})$ diverge car $\ln(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}})\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ est une série de Riemann divergente, d'où le résultat.

Remarque 2.2.1 *Les critéres cités plus haut sont d'application très générale et variée. La comparaison d'une série avec une série géométrique ou une autre dont la nature est connue est un outil brut mais très efficace. Cette comparaison est au coeur des bien connus critères de la racine et du rapport présentés dans ce chapitre.*

Corollaire 2.2.4 ***(Règle du*** n^α***)*** *Soient* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs et* $\alpha\in\mathbb{R}$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha u_n=k.$$

1) Si k est fini non nul et $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ est convergente.

2) Si k est fini non nul et $\alpha \leq 1$, alors $\sum_n u_n$ est divergente.

3) Si $k = 0$ et $\alpha > 1$, alors $\sum_n u_n$ est convergente.

4) Si $k = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, alors $\sum_n u_n$ est divergente.

Remarque 2.2.2 *Ce corollaire est un cas particulier du corollaire* 2.2.3 *(on prend $v_n = n^{-\alpha}$).*

2.2.3 Critère de comparaison d'une série avec son intégrale

Théorème 2.2.3 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante.*

$i)$ $\sum_n f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

$ii)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n \geq k+1} f(n) \leq \int_k^{+\infty} f(x)dx$.

Preuve

$i)$ Pour $x \in [n, n+1]$, le fait que f est décroissante, alors

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n),$$

Nous intégrons, on trouve

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

$$\sum_{n \geq 0} f(n+1) \leq \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n \geq 0} f(n)$$

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n \geq 0} f(n).$$

D'une part, si la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

D'autre part, si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.

$ii)$ On a $n \leq x \leq n+1 \leq x+1$, le fait que f est décroissante, alors

$$f(x+1) \leq f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

Passant à l'intégrale, on a

$$\int_{n}^{n+1} f(x+1)dx \leq \int_{n}^{n+1} f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f(x) \leq \int_{n}^{n+1} f(n),$$

par changement de variables (en changeant $x+1$ par x), on trouve

$$\int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \leq f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f(x)dx,$$

Donc

$$\sum_{n\geq k} \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \leq \sum_{n\geq k} f(n+1) \leq \sum_{n\geq k} \int_{n}^{n+1} f(x)dx,$$

Ainsi

$$\int_{k+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n\geq k+1} f(n) \leq \int_{k}^{+\infty} f(x)dx.$$

Exemple:
Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+}$ une fonction continue positive et décroissante définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Pour $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \Big[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big]_{1}^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{pour } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{pour } \alpha > 1. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \Big[\ln x\Big]_{1}^{+\infty} = +\infty.$$

Donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $0 < \alpha \leq 1$.

D'aprés le théorème prècèdent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $0 < \alpha \leq 1$.

2.2.4 Critère de comparaison indirect

Théorème 2.2.4 *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *et* $\sum_n v_n$ *converge. Alors* $\sum_n u_n$ *converge.*

Preuve
On a
$$\frac{u_1}{u_0} \leq \frac{v_1}{v_0} \Rightarrow u_1 \leq \frac{u_0}{v_0} v_1.$$
Par récurrence, nous trouvons
$$u_n \leq \frac{u_0}{v_0} v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Le fait que $\sum_n v_n$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente.

2.2.5 Critère de d'Alembert

Théorème 2.2.5 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs.*
i) S'il existe $q > 0$ *telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \forall n \in \mathbb{N}$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *converge.*
ii) S'il existe $q > 0$ *telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q > 1, \forall n \in \mathbb{N}$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *diverge.*

Preuve
i) On a
$$\frac{u_1}{u_0} \leq q \Rightarrow u_1 \leq q u_0.$$
$$\frac{u_2}{u_1} \leq q \Rightarrow u_2 \leq q^2 u_0.$$
Par récurrence, nous trouvons
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \Rightarrow u_{n+1} \leq q^{n+1} u_0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
$(q^n u_0)$ est le terme général de la série géométrique de raison q avec $0 < q < 1$. Donc la série $\sum_n u_n$ converge.
ii) on a
$$\frac{u_1}{u_0} \geq q \Rightarrow u_1 \geq q u_0.$$
Par récurrence, nous trouvons
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq q^n u_0.$$
Puisque $q \geq 1$, alors la série $\sum_n q^n u_0$ est divergente. Donc $\sum_n u_n$ diverge.

Corollaire 2.2.5 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k.$$

1) Si $k < 1$, *alors* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

2) Si $k > 1$, *alors* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

3) Si $k = 1$, *alors on ne peut rien conclure à propos de la nature de la série* $\sum_n u_n$.

Remarque 2.2.3 *La règle de d'Alembert est aussi dite règle du quotient. Elle est sollicitée lorsqu'il s'agit d'étudier la nature d'une série dont le terme général est sous forme de quotient contenant des produits, des factoriels ou des puissances.*

Exemples:

1) Etudions la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge.

2) Appliquons le critère de d'Alembert à la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)}\frac{n}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

3) Examinons la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, donc elle converge.

2.2.6 Critère de Raab-Duhamel

Théorème 2.2.6 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs.*

i) S'il existe $q > 0$ *telle que* $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) \geq q > 1, \forall n \in \mathbb{N}^\star$, *alors la série* $\sum_n u_n$ *converge.*

ii) S'il existe $q > 0$ *telle que* $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) \leq q < 1, \forall n \in \mathbb{N}^\star$, *alors la série* $\sum_n u_n$ *diverge.*

Preuve *i*) On a

$$\begin{aligned} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)\geq q>1 &\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{1}{n}+1\\ &\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n}{n+1}<1. \end{aligned}$$

D'aprés le critère de d'Alembert, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

ii) On a

$$\begin{aligned} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)\leq q<1 &\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\\ &\Rightarrow u_{n+1}>\frac{n}{n+1}u_n. \end{aligned}$$

Par récurrence, on montre que

$$u_n>\frac{1}{n}u_1,$$

or $\frac{1}{n}u_1$ est le terme général d'une série de Riemann qui diverge. Par suite, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Corollaire 2.2.6 *Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=k.$$

1) Si $k>1$, alors $\sum_n n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$ est convergente.

2) Si $k<1$, alors $\sum_n n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$ est divergente.

3) Si $k=1$, alors on ne peut rien conclure à propos de la nature de la série $\sum_n n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$.

Remarque 2.2.4 *En général la règle de Raab-Duhamel est utilisée lorsque la règle de d'Alembert ne fournit aucun résultat plus précisément quand $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. L'exemple qui suit est illustratif.*

Exemple:

On veut étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1.3.5.....(2n+1)}{2.4.6....(2n+2)}.\frac{2.4...(2n)}{1.3....(2n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1.$$

La règle de d'Alembert ne fournit aucun résultat, pensons à celle de Raab-Duhamel. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\lim_{n\to+\infty} n(\frac{2n+2}{2n+1}-1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Donc la série est divergente.

Corollaire 2.2.7 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\mu}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

1) Si $\mu > 1$*, alors* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

2) Si $\mu < 1$*, alors* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

3) Si $\mu = 1$*, alors on ne peut rien conclure à propos de la nature de la série* $\sum_n u_n$*.*

Preuve

1) Prenons $1 < \alpha < \mu$. Posons $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^\alpha \\ &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-\alpha} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \\ &> 1 - \frac{\mu}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{u_{n+1}}{u_n}. \end{aligned}$$

En plus, le fait que $\alpha > 1$, alors la série $\sum_n v_n$ est convergente. D'aprés le théorème 2.2.4, la série $\sum_n v_n$ est convergente.

2) Pour $\mu < 1$. Posons $v_n = \dfrac{1}{n}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n}{n+1} \\ &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \\ &\leq 1 - \frac{\mu}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{u_{n+1}}{u_n}. \end{aligned}$$

En plus, le fait que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est divergente, d'aprés le critère de comparaison indirect la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est aussi divergente.

2.2.7 Critère de Gauss

Théorème 2.2.7 *Soit* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *une série à termes positifs telle que*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{c_n}{n^2} \ \textit{ou}\ \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

avec $(c_n)_n$ *une suite bornée.*

1. *Si* $\lambda > 1$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *converge, pour tout* μ.

2. *Si* $\lambda < 1$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *diverge, pour tout* μ.

3. *Si* $\lambda = 1$, *on distingue deux cas:*

   a) *Si* $\mu \leq 1$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *diverge.*

   b) *Si* $\mu > 1$, *alors* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *converge.*

Preuve
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\lambda}$.

1. Pour $\lambda > 1$, d'aprés le théorème de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.

2. Pour $\lambda < 1$, d'aprés le théorème de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

3. **a)** Pour $\lambda = 1$ et $\mu > 1$, prenons $\alpha \in]1, \mu[$. Posons $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha}\\ &= \frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}]+o(\frac{1}{n^2})}\\ &\geq \frac{1}{1+\frac{\mu}{n}+\frac{c_n}{n^2}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.\end{aligned}$$

   Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge. D'aprés le critère de comparaison indirect, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.

   b) Pour $\lambda = 1$ et $\mu \leq 1$. Posons $v_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, avec $n \geq 2$.
   D'une part, en utilisant le critère de comparaison d'une série avec son intégral, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$ est positive, continue et décroissante. Passant à l'intégrale, nous trouvons

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_2^\alpha f(x)dx = \lim_{\alpha\to+\infty} \ln(\ln\alpha) - \ln(\ln 2) = +\infty.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ est divergente.
D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} \\
&= \frac{\ln n}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\ln\Big(n(1+\frac{1}{n})\Big)} \\
&= \frac{\ln n}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})\Big)} \\
&= \frac{\ln n}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(\ln n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Big)} \\
&= \frac{\ln n}{\ln n+\frac{1}{n}(1+\ln n)+o(\frac{1}{n^2})} \\
&= \frac{1}{1+[\frac{1}{n}(1+\ln n)+o(\frac{1}{n^2})]\frac{1}{\ln n}}.
\end{aligned}$$

Posons $\mu^{'}=1+\ln n>1$, donc

$$1+\frac{\mu^{'}}{n}+o(\frac{1}{n^2})\geq 1+\frac{\mu}{n}+o(\frac{1}{n^2}),$$

ce qui donne

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}\leq\frac{1}{1+\frac{\mu}{n}+o(\frac{1}{n^2})}=\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Ainsi, d'aprés le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Remarque 2.2.5 *En général la règle de Gauss est utilisée lorsque les règles de d'Alembert et Raab-Duhamel ne fournissent aucun résultat. L'exemple qui suit est illustratif.*

Exemple:
Etudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\Big[\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\Big]^2$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{1.3.5.....(2n+1)}{2.4.6....(2n+2)}.\frac{2.4...(2n)}{1.3....(2n-1)}\Big]^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}=1.$$

La règle de d'Alembert ne fournit aucun résultat, pensons à celle de Raab-Duhamel. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}-1\Big)=\lim_{n\to+\infty} n\frac{4n+3}{(2n+1)^2}=1.$$

Même chose, cette règle ne fournit aucun résultat, pensons à celle de Gauss. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} \\
&= 1+\frac{1}{n}-\frac{1+\frac{1}{n}}{4n^2+4n+1}.
\end{aligned}$$

La suite $c_n = 1 + \frac{1}{n}$ est bornée. Donc on a $\lambda = 1$ et $\mu = 1$. D'aprés le critère de Gauss la série $\sum_{n\geq 1} \left[\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\right]^2$ diverge.

2.2.8 Critère de Cauchy

Théorème 2.2.8 *Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.*

i) S'il existe $q > 0$ telle que $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.

ii) S'il existe $q > 0$ telle que $\sqrt[n]{u_n} \geq q > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Preuve

i) On a $u_n \leq q^n = v_n$ où v_n est le terme général de la série géométrique de raison q avec $0 < q < 1$. Donc $\sum_n v_n$ converge. Ainsi la série $\sum_n u_n$ converge.

ii) Pour $q > 1$, $\sum_n v_n$ diverge. Donc la série $\sum_n u_n$ diverge.

Corollaire 2.2.8 *Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k.$$

1) Si $k < 1$, alors $\sum_n u_n$ est convergente.

2) Si $k > 1$, alors $\sum_n u_n$ est divergente.

3) Si $k = 1$, alors on ne peut rien conclure à propos de la nature de la série $\sum_n u_n$.

Remarque 2.2.6 *La règle de Cauchy est appelée règle de la racine nième. Elle intervient quand le terme général de la série contient une puissance en fonction de n.*

Exemple:

On utilise la règle de Cauchy pour déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. En effet

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

D'où la série $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

Remarque 2.2.7 *Lorsque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ n'existe pas, on utilise le corollaire suivant.*

Corollaire 2.2.9 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs telle que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k.$$

1) Si $k < 1$*, alors* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

2) Si $k > 1$*, alors* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

3) Si $k = 1$*, alors on ne peut rien conclure à propos de la nature de la série* $\sum_n u_n$.

Exemple:

Etudions la nature de la série de terme général

$$u_n = \left|\sin\frac{2n\pi}{3}\right|^n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 3k, \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & \text{pour } n = 3k+1,\ n = 3k+2, \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ n'existe pas, on utilise le corollaire 2.2.9, on trouve $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Proposition 2.2.1 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

si elles existent.

Remarques 2.2.1

- *Si l'on constate que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*, alors il est inutil d'appliquer la règle de Cauchy (car* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$*).*
- *La règle de Cauchy est plus général que celle de d'Alembert.*
- *Si la divergence resulte de la règle de Cauchy ou de d'Alembert, alors ceci signifie que le terme général de la série ne tend pas vers* 0.

2.2.9 Critère de logarithme

Théorème 2.2.9 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs.*

i) S'il existe $\alpha > 0$ *telle que* $\dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geq \alpha > 1$*, à partir d'un certain rang, alors la série* $\sum_n u_n$ *converge.*

ii) S'il existe $\alpha > 0$ *telle que* $\dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \leq \alpha \leq 1$*, à partir d'un certain rang, alors la série* $\sum_n u_n$ *diverge.*

Preuve

$i)$ On a

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geq \alpha \quad &\Rightarrow \quad \frac{-\ln(u_n)}{\ln n} \geq \alpha \\ &\Rightarrow \quad \ln(u_n) \leq \ln \frac{1}{n^\alpha} \\ &\Rightarrow \quad u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Le fait que $\alpha > 1$, on a la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. Donc, d'aprés le critère de comparaison la série $\sum_n u_n$ converge.

$ii)$ Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente où le même calcul qu'en $i)$ conduit à $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$. Donc, d'aprés le critère de comparaison la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Corollaire 2.2.10 *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs telle que,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = k.$$

1) Si $k > 1$*, alors* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

2) Si $k < 1$*, alors* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

3) Si $k = 1$*, alors on ne peut rien conclure à propos de la nature de la série* $\sum_n u_n$*.*

Exemple:

Examinons la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\alpha + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.
Pour $\alpha < 1$, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.
Pour $\alpha = 1$, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente (voir la preuve du théorème 2.2.7).

2.3 Séries à termes quelconques

Dans ce qui suit, nous allons affirmer que la convergence absolue est une propriété plus forte que la convergence, plus explicitement la convergence absolue entraine la convergence. A l'issue de ce cours, on sera en mesure de transposer la question d'étudier la nature d'une série quelconque vers une série à termes positifs en introduisant la valeur absolue.

2.3.1 Convergence absolue

Définition 2.3.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels de signe quelconque ou à termes complexes. On dit que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum_n |u_n|$ est convergente où $|u_n|$ désigne soit la valeur absolue de u_n si $u_n \in \mathbb{R}$ ou module de u_n si $u_n \in \mathbb{C}$.*

Exemples:
Etudions la convergence absolue des séries suivantes de terme général respectif $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ et $v_n = \left(\frac{i-1}{2}\right)^n$.
i) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^3} \Rightarrow |u_n| = \frac{1}{n^3}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ converge absolument.
ii) On a

$$|v_n| = \left|\left(\frac{i-1}{2}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Or, $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{i-1}{2}\right)^n$ converge absolument.

Théorème 2.3.1 *Toute série absolument convergente est convergente simplement.*

Remarque 2.3.1 *Une série convergente n'est pas forcément absolument convergente. Dans ce cas, elle est dite semi convergente.*

En effet, on peut considérer la série alternée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

cette série est convergente mais n'est pas absolument convergente. Nous verrons ultérieurement le critère concernant ce type de séries et qui nous permettra de conclure aisément sa convergence. En revanche, la série

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

est divergente.

Proposition 2.3.1 ***(Convergence absolue d'une série complexe)***
Une série complexe converge absolument si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire toutes les deux convergent absolument.

Remarque 2.3.2 *Les critères de convergence absolue sont ceux des séries à termes positifs appliqués à* $\sum_n |u_n|$.

Dans le cas où la série $\sum_n |u_n|$ diverge la recherche de la nature de $\sum_n u_n$ peut se faire en utilisant l'une des méthodes suivantes.

2.3.2 Critère de Dirichlet ou d'Abel

Théorème 2.3.2 ***(Critère de Dirichlet ou d'Abel)*** *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes quelconques et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs telles que*

1. $\exists M > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |S_p| = |\sum_{k=0}^{p} u_k| \leq M.$
2. *La suite* $(v_n)_n$ *est décroissante et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors, la série $\sum_n u_n v_n$ *est convergente.*

Preuve
Soit T_n la somme partielle de $\sum_n u_n v_n$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k.$$

Montrons que $(T_n)_n$ est une suite de Cauchy. Soient $\varepsilon > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|T_{p+q} - T_p| &= \Big|\sum_{n=0}^{p+q} u_n v_n - \sum_{n=0}^{p} u_n v_n\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=p+1}^{p+q} u_n v_n\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=p+1}^{p+q} (S_n - S_{n-1}) v_n\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=p+1}^{p+q} S_n v_n - \sum_{n=p}^{p+q-1} S_n v_{n+1}\Big| \\
&= \Big|S_{p+q} v_{p+q} + \sum_{n=p+1}^{p+q-1} S_n v_n - \sum_{n=p+1}^{p+q-1} S_n v_{n+1} - S_p v_{p+1}\Big| \\
&= \Big|S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{p+q-1} S_n (v_n - v_{n+1})\Big| \\
&\leq \Big|S_{p+q} v_{p+q}\Big| + \Big|S_p v_{p+1}\Big| + \Big|\sum_{n=p+1}^{p+q-1} S_n (v_n - v_{n+1})\Big| \\
&\leq M v_{p+q} + M v_{p+1} + M \sum_{n=p+1}^{p+q-1} (v_n - v_{n+1}) \\
&\leq M(v_{p+q} + v_{p+1} + v_{p+1} - v_{p+q}) \\
&\leq 2M v_{p+1}.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{p \to +\infty} v_p = 0$, alors il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $p \geq N(\varepsilon)$ telle que $v_p \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
Donc $(T_n)_n$ est de Cauchy, ainsi $\sum\limits_n u_n v_n$ est convergente.

Exemple:

Etudions la nature de $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

En effet, $|w_n| = \Big|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, alors $\sum\limits_{n \geq 1} |w_n|$ diverge, donc on ne peut rien dire pour $\sum\limits_{n \geq 1} w_n$.

En utilisant le critère d'Abel, soient $u_n = (-1)^n$, alors la somme parielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ paire} \\ 0 & \text{pour } n \text{ impaire.} \end{cases}$$

Donc

$$|S_n| \leq 1.$$

Prenons $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, cette suite est décroissante et converge vers 0.

Ainsi, d'aprés le critère d'Abel $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

Corollaire 2.3.1 *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs décroissante telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, *alors la série* $\sum\limits_n v_n Z^n$ *est convergente si* $|Z| = 1$ *et* $Z \neq 1$.

Preuve

Soit $u_n = Z^n$, la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} Z^k = \dfrac{1 - Z^{n+1}}{1 - Z}$.

Donc

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \frac{1 + |Z|^{n+1}}{|1 - Z|} \\ &\leq \frac{2}{|1 - Z|}. \end{aligned}$$

D'aprés le critère d'Abel $\sum\limits_n v_n Z^n$ est convergente.

Remarque 2.3.3 *Pour* $Z \in \mathbb{C}$, *on a* $Z = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Si $|Z| = 1$ *et* $Z \neq 1$, *alors* $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ *avec* $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 2.3.2 *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs décroissante telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, *alors la série* $\sum\limits_n v_n e^{in\theta}$ *converge pour* $\theta \neq 2k\pi$.

Corollaire 2.3.3 *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs décroissante telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, *alors les séries* $\sum\limits_n v_n \cos n\theta$ *et* $\sum\limits_n v_n \sin n\theta$ *convergent pour* $\theta \neq 2k\pi$.

Exemple:
Etudions la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{\cos 3\theta}{n\ln n}$. En effet, la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geq 2$ est décroissante qui converge vers 0 et on a $\theta = 3 \neq 2k\pi$. D'aprés le corollaire 2.3.3 la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{\cos 3\theta}{n\ln n}$ est convergente.

2.3.3 Séries alternées

Définition 2.3.2 *La série* $\sum\limits_n u_n$ *est dite série alternée si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le signe de* u_{n+1} *est opposé au signe de* u_n.

La définition précédente est équivalente à la suivante.

Définition 2.3.3 *On dit que* $\sum\limits_n u_n$ *est une série alternée si* $u_n = (-1)^n v_n$ *avec* v_n *est une suite à termes positifs.*

Remarques 2.3.1 *Attention les séries dont les termes généraux contiennent* $(-1)^n$ *ne sont pas toutes des séries alternées. Par exemple la série* $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \cos n$ *n'est pas une série*

alternée car $\cos n$ *ne garde pas un signe constant pour tout* $n \geq 0$.
Par contre, il y a des séries altérnées dans les quelles le terme $(-1)^n$ *n'apparait pas explicitement. Par exemple* $\sum_{n\geq 1} \cos n\pi \ln n$ *est une série alternée, car pour tout* $n \geq 1$, $\ln n \geq 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\cos n\pi = \sin(2n+1)\pi = (-1)^n.$$

Théorème 2.3.3 ***(Théorème de Leibniz)*** *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs décroissante qui converge vers* 0. *Alors la série* $\sum_n (-1)^n v_n$ *est convergente. De plus on a*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n v_n\Big| \leq v_{n+1}.$$

Exemple:
Etudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
Il est clair que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est à termes positifs décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc d'après le théorème 2.3.3, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

2.4 Séries produit

Définition 2.4.1 *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries. La série*

$$\sum_n w_n = \sum_n u_n . \sum_n v_n$$

est appelée série produit des séries $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *où* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 2.4.1 *Si les deux séries* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *sont absolument convergentes, alors la série produit est absolument convergente et a pour somme le produit des deux sommes*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big).$$

Exemple:
Déterminons la série $\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)^2$, en effet

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)^2 &= \Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big).\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\\
&= \sum_{n\geq 0} x^n.\sum_{k=0}^{n} 1\\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n.
\end{aligned}$$

2.5 Exercices résolus

Exercice 1:
Soient $u_n \geq 0$ et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.
Solution:
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{-(u_n)^2}{1+u_n} \leq 0$$

donc

$$0 \leq v_n \leq u_n.$$

Par conséquent, si $\sum_n u_n$ est convergente, alors $\sum_n v_n$ est convergente.
Supposons à présent que $\sum_n u_n$ est divergente. On distingue deux cas différents à savoir:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0.$$

1) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, mais cela ne suffit pas pour conclure.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(1+u_n) = 1\\
&\Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n\ ,
\end{aligned}$$

alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature donc $\sum_n v_n$ est divergente.
2) On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n \neq 0$$

d'où la divergence de la série $\sum_n v_n$.
Exercice 2:

Donner la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

3) $\sum_{n\geq 1} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

Solution:

1) Posons

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \end{aligned}$$

cette suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} < 1$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, donc $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ est convergente.

Calculons la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{-1}{2}\Big)^k \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\Big(\frac{-1}{2}\Big)^{n+1}}{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

la somme $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

2) Posons $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Alors $\forall n \geq 1$, $u_n < \frac{1}{n^3}$.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente, donc d'aprés le critère de comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente.

Calculons sa somme, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} \\ &= \Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\Big) + \Big(\frac{1}{2}\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\Big), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$2u_n = \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) + \Big(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\Big).$$

Posons
$$v_n = \frac{1}{n}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$
Alors
$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(v_{k+2} - v_{k+1}) \\
&= v_1 - v_{n+1} + v_{n+2} - v_2 \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2},
\end{aligned}$$
d'où
$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}.$$
Par conséquent,
$$S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$
3) Posons $u_n = \arctan \dfrac{1}{2n^2}$, on a
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n = \frac{1}{2n^2}.$$
Or, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente, ainsi $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
Calculons sa somme
$$\begin{aligned}
u_n &= \arctan \frac{1}{2n^2} \\
&= \arctan \frac{2}{4n^2} \\
&= \arctan \frac{2}{4n^2 - 1 + 1} \\
&= \arctan \frac{2}{1 + (2n-1)(2n+1)} \\
&= \arctan \frac{-(2n-1) + (2n+1)}{1 + (2n-1)(2n+1)} \\
&= \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1).
\end{aligned}$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k) \\
&= v_{n+1} - v_1.
\end{aligned}$$
où $v_k = \arctan(2k-1)$. Il en résulte que
$$S_n = -\frac{\pi}{4} + \arctan(2n+1),$$

et

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3:

Dire si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-n}}}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\exp(\cos\frac{1}{n}-1)$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$,

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(na)^n}{n!}$ avec $a\in\mathbb{R}$,

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, avec $a>0$,

7) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}$ avec $a\in\mathbb{R}$.

8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Solution:

1) Posons $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-n}}}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-n}}}=1\neq 0.$$

La condition nécéssaire de convergence d'une série n'étant pas satisfaite, on conclut que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-n}}}$ est divergente.

2) On a

$$\cos\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2n^2}+\circ(\frac{1}{n^2}),$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\exp(\cos\frac{1}{n}-1)=\exp(\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{n}-1)=1.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\exp(\cos\frac{1}{n}-1)$ diverge.

3) Posons $u_n=\sin^3\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On sait que $\sin x\backsim x$ au voisinage de 0, par conséquent $\sin\dfrac{1}{n}\backsim\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$ et

par suite
$$\sin^3\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$
D'après le critère d'équivalence, les deux séries sont de même nature et puisque $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente alors la série $\sum_{n\geq 1}\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

4) Soit $u_n = \sum_{n\geq 1}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} a+\frac{1}{n} = a > 0.$$
D'aprés le critère de Cauchy, on a

Si $a > 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Si $a < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Si $a = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

5) Posons $u_n = \frac{(na)^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Appliquons le critère de d'Alembert, on a
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)a)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(na)^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)a)^n}{(na)^n}\frac{(n+1)a}{n+1}\\ &= \lim_{n\to+\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae.\end{aligned}$$
Nous discuterons trois différents cas:

a) Si $ae < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{e}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

b) Si $ae > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{e}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

c) Si $ae = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{e}$, alors $u_n = \frac{n^n}{e^n n!}$. En utilisant la formule de Stirling
$$\frac{1}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}}$$
Donc
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$
cette dernière est une série de Riemann qui est divergente. Ainsi $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

6) Soit $u_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp n^2\Big(\ln(n\sin\frac{1}{n})\Big)$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$n\sin\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{6n^2} + \circ(\frac{1}{n^2}),$$

Donc

$$\ln(n\sin\frac{1}{n}) = -\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{72n^4} + \circ(\frac{1}{n^4}),$$

ce qui donne

$$n^2\ln(n\sin\frac{1}{n}) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{72n^2} + \circ(\frac{1}{n^2}),$$

Passant à la limite, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \exp n^2\Big(\ln(n\sin\frac{1}{n})\Big) = \exp(-\frac{1}{6}) \neq 0.$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

7) $u_n = \dfrac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Utilisons le critère de d'Alembert pour la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(a+n+1)}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

On ne peut rien conclure à propos de la nature de cette série.

Appliquons à présent le critère de Raab-Duhamel:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) &= \lim_{n\to+\infty} n(\frac{n+1}{a+n+1} - 1) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n(\frac{-a}{a+n+1}) = -a.
\end{aligned}$$

a) Si $a < -1$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

b) Si $a > -1$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

c) Si $a = -1$, alors $u_n = 0$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

8) $u_n = \dfrac{\exp^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Calculons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Donc, on ne peut rien conclure. Posons

$$f(x) = \frac{\exp^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

f est une fonction continue et positive sur $[1, +\infty[$.
En plus,

$$f^{'}(x) = \frac{\exp(-\sqrt{x})(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}})}{x} < 0.$$

d'où f est décroissante.
Passant à l'intégrale

$$\int_1^\alpha f(x)dx \quad = \quad \int_1^\alpha \frac{\exp^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Posons $y = \sqrt{x}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_1^\alpha f(x)dx &= \int_1^{\sqrt{\alpha}} 2\exp(-y)dy \\ &= -2\exp(-\sqrt{\alpha}) + 2\exp(-1) \end{aligned}$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_1^\alpha f(x)dx = \frac{2}{e}.$$

D'aprés le théorème 2.2.3, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\exp^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

2.6 Exercices non résolus

Exercice 1:
Etudier la nature de la série hypergéométrique qui est donnée par

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1).\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{n!.\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}x^n,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, x \in \mathbb{R}^+$.
Exercice 2:
Donner la nature des séries de termes généraux suivants
1) $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, α et β sont des constantes réelles données.
2) $\dfrac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}$.
3) $\ln \dfrac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}$, a et b sont des constantes réelles.
4) $\dfrac{1}{n\cos^2 n}$.
5) $\arcsin \dfrac{2n}{4n^2+1}$.

6) $\dfrac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}.\cos\frac{1}{n+1}}$.

7) $\dfrac{\arg shn}{n(\ln n)^2}$.

Exercice 3:

Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ soient convergentes.

1) Montrer que $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ est une série convergente.

2) Montre que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4:

Donner la nature des séries de termes généraux suivants:

$\dfrac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, $\dfrac{(1+i)^n}{(n^2+1)a^n}$ (a est une constante positive), $\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$.

Exercice 5:

1) On considère la série harmonique alternée:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ...$$

Vérifier que cette série est convergente sans l'être-absolument. A l'aide de la formule de Mac-Laurin appliquée à $\ln(1+x)$, pour $x = 0$ et pour $x = 1$, trouver la valeur de la somme de cette série.

2) On considère maintenant la série dont les termes sont ceux de la série précédente écrits dans l'ordre suivant:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + ...$$

Établir que cette série est convergente et que sa somme est la moitié de la somme de la série alternée précédente.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Les suites et les séries jouent un rôle essentiel en analyse mathématique, avec la notion de convergence qui leur est étroitement liée. Plusieurs fonctions fondamentales sont obtenues comme limite de suites de fonctions ou comme somme d'une série de fonctions. L'étude de la continuité et de la dérivabilité de telles fonctions conduit nécessairement à la notion de convergence uniforme (voir $[7], [10-12]$).

3.1 Suites de fonctions

Définition 3.1.1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un corps réel ou complexe.*
On appelle suite de fonctions sur I, toute application f telle que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ n &\longmapsto f(n) := f_n \end{aligned}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telle que

$$\begin{aligned} f_n : \ I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto f_n(x). \end{aligned}$$

3.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 3.1.2 *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (en abrégé C.S) vers f sur I si et seulement si*

$$\forall x \in I, \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ceci se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \ \exists \eta(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq \eta(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemples:

a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Pour $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

- Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

b) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = nxe^{-nx^2} + x.$$

Pour chaque x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3.1.3 ***(Norme de convergence uniforme)***
On appelle norme de convergence uniforme sur I l'application notée par $\|.\|$ définie par:

$$\begin{array}{rcl} \|.\| : \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \|f\| = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|. \end{array}$$

Définition 3.1.4 ***(Convergence uniforme d'une suite de fonctions)***
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (en abrégé C.U) vers f sur I et on note:

$$f_n \rightrightarrows f \quad sur\ I \quad ou \quad f_n \overrightarrow{c.u} f \quad sur\ I,$$

si et seulement si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *indépendant de $x \in I$, tel que*

$$n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon,$$

ou

$$n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ou

$$n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemples:
Etudions la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0, 1]$,
$I = [0, a],\ 0 < a < 1$. En effet,
i) Sur $I = [0, 1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1, \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

Calculons $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, on a

- Si $0 \leq x < 1$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| = x^n$, donc

$$\sup_{0\leq x<1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\leq x<1} x^n = 1.$$

- Si $x = 1$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

  Ainsi

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

  Par conséquent, f_n ne converge pas uniformement vers f sur $I = [0, 1]$.

On déduit que f_n ne converge pas uniformement vers f même si $I = [0, 1[$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 1 \neq 0.$$

ii) Si $I = [0, a]$, avec $0 < a < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Par conséquent, f_n converge uniformement vers f sur $I = [0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Proposition 3.1.1 *Si la suite f_n converge uniformement vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.*

3.1.3 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

1) Critère de Cauchy

Théorème 3.1.1 *La suite f_n converge uniformément vers f sur I si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq \eta(\varepsilon), m \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon.$$

Preuve

Montrons l'implication directe. On a f_n converge uniformement vers f sur I, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

Soit $m \geq \eta(\varepsilon)$, On a

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \|f_n - f + f - f_m\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Prouvons l'implication réciproque, le fait que la suite f_n est de Cauchy, alors elle est convergente. Posons

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in I.$$

C'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} n \geq \eta(\varepsilon) &\Rightarrow \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \\ &\Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

2) Critère de Continuité

Théorème 3.1.2 *Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I et $f_n(x)$ est continue au point $x = x_0$, avec $x_0 \in I$. Alors, $f(x)$ est continue au point $x = x_0$.*

Preuve

Par hypothèse, on a $f_n(x)$ est continue au point $x = x_0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_n(x_0),$$

c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

et on a $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Montrons que $f(x)$ continue au point $x = x_0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, tel que

$$\begin{aligned}
|x - x_0| < \alpha \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|,\\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,\\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3},\\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.1 *Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I et $f_n(x)$ continue sur I. Alors $f(x)$ est continue sur I.*

Remarque 3.1.1 *Si les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur I et $f(x)$ n'est pas continue sur I, alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur I.*

Exemples:
Etudions la convergence uniforme de $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ sur
$a)I = [0, +\infty[$.
$b)I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.
$c)I =]0, +\infty[$.
Solution:
a) Sur $I = [0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ n'est pas continue au point $x = 0$. Donc elle n'est pas continue sur $[0, +\infty[$.
En plus, les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur $[0, +\infty[$. Ainsi, f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.
b) Sur $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Donc

$$\sup_{[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+an}.$$

Passant à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+an} = 0.$$

Ainsi, f_n converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.
c) Sur $I =]0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Donc,

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} \frac{1}{1+nx} = 1 \not\to 0.$$

Par conséquent, f_n ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

3) Critère d'intégration

Théorème 3.1.3 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *telle que* $f_n \rightrightarrows f$ *sur* I*. Alors*

i) f *est intégrable sur* I*.*

ii) $\forall \alpha, \beta \in I, \ \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

iii) $\forall \alpha \in I, \ F_n(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} f_n(t)dt$ *converge uniformément sur* I *vers* $F(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} f(t)dt.$

Preuve

i) Par Hypothèse, on a $f_n(x)$ est continue sur I et $f_n \rightrightarrows f$ sur I, alors d'aprés le théorème 3.1.2, f est continue sur I, donc f est intégrable sur I.

ii) Soient $\alpha, \beta \in I$, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq \Big| \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \Big| &= \Big| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(f_n(x) - f(x)\Big)dx \Big| \\
&\leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f_n(x) - f(x)|dx \\
&\leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|dx \\
&\leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|f_n - f\|dx \\
&\leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$

Donc, quand $n \to +\infty$, on trouve $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \to 0.$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

iii)

$$\begin{aligned}
\|F_n(x) - F(x)\| &= \sup_{x\in I} |F_n(x) - F(x)| \\
&= \sup_{x\in I} \Big| \int_{\alpha}^{x} f_n(t)dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)dt \Big| \\
&\leq \sup_{x\in I} \int_{\alpha}^{x} |f_n(t) - f(t)|dt \\
&\leq \|f_n - f\| \sup_{x\in I}(x-\alpha) \\
&\leq (b-a)\|f_n - f\|.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|F_n - F\| = 0.$$

Remarque 3.1.2 *La compacité de l'intervalle I est nécéssaire pour le théorème précédent. Dans le cas contraire même si les autres conditions sont vérifiées le résultat n'est pas toujours vrai.*

Exemple:

Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x(n-x)}{n^3} \text{ si } 0 \leq x < n, \\ 0 \text{ si } x \geq n. \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur $I = [0, +\infty[$, et $\forall x \in I$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(n-x)}{n^3} = f(x) = 0.$$

Cherchons le $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, en effet

$$f_n'(x) = \frac{n-2x}{n^3}.$$

D'aprés le tableau de variation de $f_n(x)$, on trouve

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,n]} \frac{x(n-x)}{n^3} = \frac{1}{4n}.$$

Passant à la limite, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|f_n - f\| \to 0.$$

Donc f_n converge uniformément sur I vers $f \equiv 0$.

D'un coté

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{n} \frac{x(n-x)}{n^3} dx = \frac{1}{6}.$$

D'autre coté

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

4) Critère de dérivation

Théorème 3.1.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur $I = [a, b]$ telle que*

a) *La suite $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g.*

b) *$\exists x_0 \in I$, tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$ avec l fini.*

Alors

i) *f_n converge uniformément sur I vers la foncion f définie par*

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

ii) *f est de classe C^1 sur I et l'on a $f^{'} = g$.*

Preuve

i) Posons $G_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt = f_n(x) - f_n(x_0)$ et $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

On a

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\| &= \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \\
&= \sup_{x\in I} |f_n(x) - l - G(x)| \\
&= \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - l - G(x)| \\
&= \sup_{x\in I} |G_n(x) - G(x) + f_n(x_0) - l| \\
&\leq \|G_n - G\| + |f_n(x_0) - l|.
\end{aligned}$$

D'une part, le fait que $f_n^{'} \rightrightarrows g$ sur I, alors d'aprés le théorème 3.1.3, on a $G_n(x)$ converge uniformément sur I vers G, c'est-à-dire, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|G_n - G\| \to 0.$$

D'autre part, quand $n \to +\infty$, on a par hypothèse

$$|f_n(x_0) - l| \to 0.$$

Donc

$$f_n \rightrightarrows f, \quad \text{sur } I.$$

ii) On a

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt \Rightarrow f^{'}(x) = g(x).$$

Par hypothèse, $f_n^{'} \rightrightarrows g$ sur I et $f_n^{'}$ est continue, donc d'aprés le théorème 3.1.2, on trouve que $g = f^{'}$ est continue. Ainsi, f est de classe C^1 sur I.

Remarques 3.1.1 *1. Pour montrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, en général le calcul du $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ n'est pas toujours facile, alors il suffit de trouver une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que*

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon_n.$$

2. Si une suite ne converge pas uniformément vers $f \equiv 0$ sur I, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ telle que $f_n(x_n)$ ne converge pas vers 0.

Exemples:
Etudions la convergence uniforme de $f_n(x) = e^{-(x+1)n} \sin x$ avec $x \geq 0$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1 + n^2x^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
i) $\forall x \geq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-(x+1)n} \sin x = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= e^{-(x+1)n}|\sin x| \\ &\leq e^{-n} = \varepsilon_n, \end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$, on a $\varepsilon_n = e^{-n}$ qui converge vers 0.
Ainsi,

$$f_n \rightrightarrows f, \text{ sur } I.$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{1 + n^2x^2} = 0.$$

Soit $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$, on a $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ et quand $n \to +\infty$, on a

$$g_n(x_n) = g_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \not\to 0.$$

Ainsi,

$$f_n \not\rightrightarrows f \equiv 0, \text{ sur } I.$$

3.2 Séries de fonctions

3.2.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 3.2.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On pose*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x),$$

la somme partielle de rang n de la série $\sum_n f_n(x)$.

Si la suite $(S_n(x))_n$ converge simplement vers sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, on dit que la série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement vers sa somme $S(x)$.

Définition 3.2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. L'ensemble*

$$D = \{x \in I \ \ \textit{tel que} \ \sum_n f_n(x) \ \textit{converge}\},$$

s'appelle domaine de convergence de la série $\sum_n f_n(x)$.

Exemples:

Déterminons le domaine de convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+2)^n}{n}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument sur $\mathbb{R}$. Ainsi, le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ est

$$D = \mathbb{R}.$$

ii) On a $f_n(x) = \frac{(x+2)^n}{n}$, appliquons la règle de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+2)^n}{n}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x+2)}{n^{\frac{1}{n}}}\right| \\ &= |x+2|.\end{aligned}$$

- Si $|x+2| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument.
- Si $|x+2| > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est divergente.
- Si $|x+2| = 1$, on distingue deux cas

- Soit $x+2=1$, alors $f_n(x)=\dfrac{1}{n}$, donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est divergente.

- Soit $x+2=-1$, alors $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}$, donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente.

Ainsi, le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(x+2)^n}{n}$ est

$$D=[-3,-1[.$$

Lemme 3.2.1 *La série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement vers $S(x)$ si et seulement si $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ converge simplement vers 0.*

3.2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 3.2.3 *On dit que la série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément vers sa somme lorsque la suite $(S_n(x))_n$ des sommes partielles converge uniformément vers sa somme $S(x)$.*

Théorème 3.2.1 *La série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si $\forall\varepsilon>0, \exists\eta(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que*

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow \forall x\in I,\ |S_n(x)-S(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow \sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow \sup_{x\in I}|R_n(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$n\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow \|R_n\|\leq\varepsilon.$$

Corollaire 3.2.1 *La série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si $R_n \rightrightarrows 0$ sur I.*

Théorème 3.2.2 ***(Critère de Cauchy)***
La série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si
$\forall\varepsilon>0, \exists\eta(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que

$$p\geq\eta(\varepsilon), q\geq\eta(\varepsilon)\Rightarrow \forall x\in I,\ |S_{p+q}(x)-S_p(x)|\leq\varepsilon,$$

ou bien

$$p \geq \eta(\varepsilon), q \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in I} |\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

ou bien

$$p \geq \eta(\varepsilon), q \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \| \sum_{k=p+1}^{p+q} f_k\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 3.2.3 *Si la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformément sur* I*, alors la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge simplement sur* I*. La réciproque est fausse.*

3.2.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 3.2.4 *On dit que la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge normalement sur* I *si et seulement si* $\sum_n \|f_n\|$ *converge sur* I*.*

Exemples:
Etudions la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$, avec $x \geq a > 0$.
i) On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge. Donc, $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|$ converge.
ii) Le fait que $f_n(x) = e^{-nx}$ est une suite décroissante, donc

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = e^{-na} = (e^{-a})^n.$$

Or, $\sum_{n\geq 0}(e^{-a})^n$ est une série géométrique de raison $q = e^{-a} < 1$ qui converge, donc $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ converge.
Remarquons que si $x \geq 0$, on a

$$\|f_n\| = \sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} |e^{-nx}| = 1.$$

Donc, $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ ne converge pas.

Théorème 3.2.4 ***(Critère de Weierstrass)***
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions sur* I *et* $(v_n)_n$ *une suite numérique réelle telle que*

- *La série* $\sum_n v_n$ *est convergente.*

- $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq v_n$.

Alors, la série $\sum_n f_n(x)$ *converge normalement.*

Preuve

On a
$$\|f_n\| = \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq v_n,$$
avec $\sum_n v_n$ converge. D'aprés le critère de comparaison on a $\sum_n \|f_n\|$ converge.

Exemple:

Montrons que la série de terme général $f_n(x) = \sin a^n x$ avec $0 < a < 1$ et $x \in I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ converge normalement. En effet,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\sin a^n x| \\ &\leq a^n |x| \\ &\leq a^n \sup(|\alpha|, |\beta|) \\ &\leq K a^n = v_n \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série géométrique convergente, donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur I.

Théorème 3.2.5 *Si la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge normalement sur* I*, alors la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformément sur* I*.*

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$, le fait que $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur I, alors $\exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq \eta(\varepsilon), q \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{p+q} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

Donc, $\forall x \in I$, on a
$$\sup_{x\in I} \Big| \sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur I.

3.2.4 Règles d'Abel uniformes

Théorème 3.2.6 ***(Théorème d'Abel)***

Soient $(f_n(x))_n$ *et* $(g_n(x))_n$ *deux suites de fonctions sur* I *telle que*

i) $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \|S_n\| \leq M,$ *avec* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$

ii) *La série* $\sum_n \|g_{n+1} - g_n\|$ *est convergente et* $\lim_{n \to +\infty} \|g_n\| = 0.$

Alors la série $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformément sur* I*.*

Preuve

En utilisant le critère de convergence uniforme de Cauchy, Soit $\varepsilon > 0$, $\forall x \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)g_k(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} \Big(S_k(x) - S_{k-1}(x)\Big)g_k(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k(x)g_k(x) - \sum_{k=p+1}^{p+q} S_{k-1}(x)g_k(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k(x)g_k(x) - \sum_{k=p}^{p+q-1} S_k(x)g_{k+1}(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k(x)\Big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\Big) + S_{p+q}(x)g_{p+q}(x) - S_p(x)g_{p+1}(x)\Big| \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{p+q} |S_k(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)| + |S_{p+q}(x)||g_{p+q}(x)| + |S_p(x)||g_{p+1}(x)| \\
&\leq M\Big(\sum_{k=p+1}^{p+q} \|g_k(x) - g_{k+1}(x)\| + \|g_{p+q}\| + \|g_{p+1}\|\Big).
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (ii), on trouve

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)g_k(x)\Big| \leq \varepsilon.$$

Donc, quand $n \to +\infty$, on a

$$\sup_{x \in I}\Big|\sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x)g_k(x)\Big| \longrightarrow 0.$$

Alors, $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur I.

Exemple:

Déterminons la nature de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ avec $x \geq a > 0$.

On pose $g_n(x) = \dfrac{1}{n+1}$, donc, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|g_n\| = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

En plus,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\Big\|g_{n+1}-g_n\Big\| &= \sum_{n\geq 0}\Big|\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\Big|\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &\sim \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Or, $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge. Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\|g_{n+1}-g_n\|$ converge.
Prenons $f_n(x)=e^{-nx}$, calculons la somme partielle

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}e^{-kx}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^k\\ &= \frac{1-e^{-x(n+1)}}{1-e^{-x}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|S_n\| &= \sup_{x\in[a,+\infty[}\Big|\frac{1-e^{-x(n+1)}}{1-e^{-x}}\Big|\\ &\leq \frac{1}{1-e^{-a}}=M,\end{aligned}$$

avec $M>0$. Ainsi d'aprés le théorème d'Abel la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Théorème 3.2.7 *Soient $(f_n(x))_n$ et $(g_n(x))_n$ deux suites de fonctions sur I telle que*

i) $\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N},\ \|S_n\|\leq M,$ *avec* $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}f_k(x)$.

ii) $\forall x\in I$, $(g_n(x))_n$ *est monotone et* $g_n\rightrightarrows 0$ *sur* I.

Alors la série $\sum\limits_{n}f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformément sur* I.

Exemple:
Etudions la nature de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$, avec $|x|\leq R<1$, en effet

Posons $g_n(x)=\frac{1}{n}$, cette suite est décroissante et elle converge uniformément vers 0 sur $I=[-R,R]$.

Prenons $f_n(x) = x^n$, on a

$$\begin{aligned}
|S_n(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} x^k\Big| \\
&= \Big|\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\Big| \\
&\leq \frac{|x| + |x|^{n+1}}{|1-x|} \\
&\leq \frac{2}{1-R} = M,
\end{aligned}$$

avec $M > 0$. Ainsi d'aprés le théorème 3.2.7 la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur I.

3.2.5 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

1) Critère de Continuité

Théorème 3.2.8 *Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions uniformément convergente vers sa somme sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ est continue en $x_0 \in I$, alors sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue en x_0.*

Corollaire 3.2.2 *Soit $\sum_n f_n(x)$ une suite de fonctions uniformément convergente vers sa somme sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ est continue sur I, alors sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur I.*

2) Critère d'intégration

Théorème 3.2.9 *Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions continues qui converge uniformément vers sa somme S sur I, alors*

- *S est intégrable sur I.*
- *La série de terme général $u_n = \int_\alpha^\beta f_n(t)dt$ est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)dt = \int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \int_\alpha^\beta S(t)dt.$$

- *Si* $F_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ *alors* $\sum\limits_n F_n(x)$ *converge uniformément sur* I *vers sa somme* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ *et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt.$$

3) Critère de dérivation

Théorème 3.2.10 *Soit* $\sum\limits_n f_n(x)$ *une série de fonctions dérivables telles que*

- $\forall n, f_n^{'}$ *est définie et continue sur* I.
- *La série* $\sum\limits_n f_n^{'}(x)$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de* I.
- $\exists x_0 \in I$, *tel que la série* $\sum\limits_n f_n(x_0)$ *converge.*

Alors

i) *La série* $\sum\limits_n f_n(x)$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de* I.

ii) $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *est continuement dérivable sur* I *et l'on a*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)^{'} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{'}(x).$$

Exemple:
Montrons que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$, avec $x \in [-R, R]$, $0 < R < 1$, converge uniformément sur I et calculons sa somme. En effet
On a $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leq R^n$, $\forall x \in I$ et $\sum\limits_{n\geq 1} R^n$ est une série géométrique qui converge. Donc d'aprés le théorème de Weierstrass, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge normalement sur I. Ainsi elle converge uniformément sur I.
Calculons sa somme, $\forall n \geq 1$, on a $f_n^{'}(x) = x^{n-1}$ qui est définie et continue sur I.
En plus, $\sum\limits_{n\geq 1} x^{n-1}$ est une série qui converge uniformément sur I.

Donc, d'aprés le théorème 3.2.10 on a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Nous intégrons, on trouve

$$\begin{aligned} S(x)-S(0) &= \int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\ &= -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Le fait que $S(0)=0$, alors

$$S(x) = -\ln(1-x).$$

3.3 Exercices résolus

Exercice1:

Etudier la nature de convergence de chaque suite de fonctions suivantes

1)$f_n(x) = \dfrac{1}{1+n(nx-1)^2}$, pour $x \in I = [0,1]$.

2)$f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1-x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

3)$f_n(x) = e^{-nx}\cos x^2$, pour $x > 0$.

Solution:

1) $\forall x \in I = [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Donc f_n converge simplement vers 0. Cherchons le $\sup_{x\in I}|f_n(x)|$, en effet

$$f_n'(x) = \frac{-2n^3x+2n^2}{(1+n(nx-1)^2)^2}.$$

Etudions le signe de $f_n'(x)$, on a

- $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{n}$,
- $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{n}$.

D'aprés le tableau de variation de la fonction $f_n(x)$, nous trouvons que

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)| = 1.$$

Donc f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I.
2) Appliquons le critère de continuité, montrons que $f_n(x)$ est continue sur $I = [0,1]$. on a

$$\lim_{x\to<\frac{1}{n}} f_n(x) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{x\to>\frac{1}{n}} f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc $\forall n$, $f_n(x)$ est continue sur I.
En plus

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x = 0, \\ 1-x \ \text{ si } x \in]0,1]. \end{cases}$$

Donc f n'est pas continue au point 0. D'aprés le théorème 3.1.2, f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I.
3) On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Soit $x_n = \dfrac{1}{n}$, on a $(x_n)_n \subset]0,+\infty[$ et quand $n \to +\infty$, on a

$$f_n(x_n) = e^{-1}\cos\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{e} \not\to 0.$$

Ainsi, f_n ne converge pas uniformément vers 0 sur I.
Exercice2:
On considère la suite de fonction $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = e^{-nx^2}\sin nx + \sqrt{1-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions f_n converge simplement sur $I = [-1,1]$ vers une fonction f, que l'on déterminera.
2) Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $[\omega,1], \omega$ étant une constante positive.
3) Montrer que f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
Solution:
1) Pour chaque x fixé, quand $n \to +\infty$, on a $e^{-nx^2}\sin nx \to 0$
(puisque $|\sin nx|e^{-nx^2} \le e^{-nx^2}$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$), donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} \text{ pour } \ x \neq 0, \\ 0 \qquad \text{pour } \ x = 0. \end{cases}$$

2) Pour $x \in [\omega, 1]$, on a

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f(x)| & = & e^{-nx^2}|\sin nx| \\ & \leq & e^{-nx^2} \\ & \leq & e^{-n\omega^2} \end{array}$$

Donc

$$\sup_{x\in[\omega,1]} |f_n(x) - f(x)| = e^{-n\omega^2},$$

Passant à la limite, quand $n \to +\infty$, on a

$$\|f_n - f\| \to 0.$$

Ainsi, f_n converge uniformément vers $f = \sqrt{1-x^2}$ sur $I = [\omega, 1]$.

3) Supposons que l'on ait la convergence uniforme sur $[0, 1]$. Alors, on a aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } n \geq \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $x = \dfrac{1}{n}$, on a

$$\left| f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) \right| = e^{-\frac{1}{n}} \sin 1 \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq \eta(\varepsilon).$$

Ceci ètant impossible, on ne pourra donc avoir la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice3:

Déterminer le domaine de convergence D de chaque série

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n!}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(z-n)^2}$.

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left| \sin\frac{x^2}{n} - \tan\frac{x^2}{n} \right|^{\frac{1}{2}}$.

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!(x-3)^{2n}}{n^{n+1}}$.

Solution:

1) Nous avons

$$\left|\frac{\cos nx}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est convergente, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n!}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Ainsi $D = \mathbb{R}$.

2) On a $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-n)^2}$. Le domaine de définition de cette suite est

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z \neq n,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C} \setminus \{n\}.$$

Maintenant, déterminons le domaine de convergence, on a

$$|f_n(z)| = \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ converge absolument sur D_f. Ainsi $D = D_f$.

3) On a $f_n(x) = \left|\sin\frac{x^2}{n} - \tan\frac{x^2}{n}\right|^{\frac{1}{2}}$, étudions les développements limités de

$$\sin\frac{x^2}{n} = \frac{x^2}{n} - \frac{1}{3!}(\frac{x^6}{n^3}) + \circ(\frac{x^6}{n^3}).$$

$$\tan\frac{x^2}{n} = \frac{x^2}{n} + \frac{x^6}{3n^3} + \circ(\frac{x^6}{n^3}).$$

Donc

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left|\frac{-1}{2}\frac{x^6}{n^3} + \circ(\frac{x^6}{n^3})\right|^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \left|\frac{1}{2}\frac{x^6}{n^3}\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{|x|^3}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^3}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann qui converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où $D = \mathbb{R}$.

4) On a $f_n(x) = \frac{n!(x-3)^{2n}}{n^{n+1}}$, nous appliquons le critère de d'Alembert pour $x \neq 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= \lim_{n\to+\infty} (x-3)^2\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) \\ &= \frac{(x-3)^2}{e}. \end{aligned}$$

Nous distinguons trois cas

- Si $\frac{(x-3)^2}{e} < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge pour $x \in]3-\sqrt{e}, 3+\sqrt{e}[$.

- Si $\frac{(x-3)^2}{e} > 1$, alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge pour $x \in]-\infty, 3-\sqrt{e}[\cup]3+\sqrt{e}, +\infty[$.

- Si $\frac{(x-3)^2}{e} = 1$, alors $f_n(x) = \frac{n!e^n}{n^{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$ (formule de Stirling).
  Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente. Ainsi $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.

Pour $x = 3$, on a $f_n(3) = 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(3)$ converge.

Le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est $D =]3-\sqrt{e}, 3+\sqrt{e}[$.

Exercice4:

On considère la série de fonctions suivante

$$\frac{\sin x}{x^2+1} + \frac{\sin 2x}{x^2+2^2} + ... + \frac{\sin nx}{x^2+n^2} + ...$$

Déterminer le domaine de convergence D et étudier la convergence uniforme sur D.

Solution:

Nous avons

$$\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge. D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}$ converge normalement sur $D = \mathbb{R}$ et par suite cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice5:

On considère la série de fonctions de terme général

$$\begin{aligned} f_n(x) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{nx+x}{1+n^2x^2+2n^2x+x^2}. \end{aligned}$$

1) Déterminer le domaine de convergence D.

2) Calculer la somme de la série.

3) Quelle est la nature de convergence de cette série sur D.

4) Déterminer la nature de convergence de cette série sur $I =]0, +\infty[$ et $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Solution:

1) La somme partielle $S_n(x)$ de cette série est donnée par

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k(x) - a_{k+1}(x) \\ &= a_1(x) - a_{n+1}(x) \\ &= \frac{x}{1+x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}, \end{aligned}$$

avec $a_k(x) = \frac{kx}{1+k^2x^2}$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, le domaine de convergence de cette série est $D = \mathbb{R}$.

2) La somme de cette série est

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

3) Le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est donné par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}.$$

Déterminons le $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)|$. on a

$$R_n^{'}(x) = \frac{(n+1)[1-(n+1)^2x^2]}{1+(n+1)^2x^2}.$$

D'aprés le tableau de variation de la fonction $R_n(x)$, nous trouvons

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc

$$R_n \not\rightrightarrows 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

4) Pour $x \in I_1 =]0, +\infty[$, d'aprés le tableau de variation de $R_n(x)$, on trouve

$$\sup_{x\in I_1} |R_n(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Pour $x \in I_2 = [a, +\infty[$, quand $n \to +\infty$, on a

$$\sup_{x\in I_2} |R_n(x)| = \frac{(n+1)a}{1+(n+1)^2a^2} \to 0.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice6: On considère la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (\sin x)^\alpha (\cos x)^n.$$

1) Déterminer la somme et le domaine de convergence de cette série.

2) Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout compact $[a, b]$ inclu dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Solution:

1) La somme partielle S_n est donnée par

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} (\sin x)^\alpha (\cos x)^i \\ &= (\sin x)^\alpha (1 + \cos x + (\cos x)^2 + ... + (\cos x)^n) \\ &= (\sin x)^\alpha \frac{1-(\cos x)^{n+1}}{1-\cos x}, \end{aligned}$$

avec $x \neq 2k\pi$. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} (\sin x)^\alpha \frac{1-(\cos x)^{n+1}}{1-\cos x} \\ &= \frac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x}.\end{aligned}$$

Pour $x = 2k\pi$, on a

$$S_n(2k\pi) = (n+1)(\sin 2k\pi)^\alpha = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(2k\pi) = 0.$$

Ainsi

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x} & \text{pour } x \neq 2k\pi \\ 0 \qquad \text{pour } x = 2k\pi. \end{cases}$$

Le domaine de convergence de cette série $D = \mathbb{R}$.
2) Soit $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est donné par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{pour } x = 0 \\ \dfrac{(\sin x)^\alpha (\cos x)^{n+1}}{1-\cos x} \quad \text{pour } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Donc d'aprés les graphes des fonctions circulaires $\cos x$ et $\sin x$, on a

$$\sup_{x\in[a,b]} R_n(x) \leq \frac{(\sin b)^\alpha}{1-\cos a}(\cos a)^{n+1}, \quad \forall x \in [a,b] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Passant à la limite, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sin b)^\alpha}{1-\cos a}(\cos a)^{n+1} = 0.$$

Ainsi, R_n converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a,b] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.4 Exercices non résolus

Exercice1:

1) Montrer que la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} + 1 \quad \text{pour } x \neq 0, \\ 1 \quad \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

converge uniformément vers $f : x \mapsto f(x) = 1$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2) A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice2:

On considère la suite de fonctions $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = nxe^{-nx} + \sin(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Quel est le domaine de convergence D de la suite de fonctions $(f_n)_n$?

2) Quelle est la nature de la convergence sur les intervalles I inclus dans D?

Exercice3:

On considère la suite de fonctions $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = n^2x(1-x)^n + \arcsin(x-1), \quad n \text{ entier positif.}$$

1) Quel est le domaine de convergence D de la suite de fonctions $(f_n)_n$?

2) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[\alpha, 2-\alpha]$ (α constante positive) vers sa fonction limite f.

3) Évaluer $\int\limits_0^1 [f_n(x) - f(x)]dx$ et en déduire que l'on ne peut avoir convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice4:

On considère la série de fonctions de terme général f_n,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}, \quad f_0(x) = 1.$$

1) Déterminer le domaine de convergence D.

2) Montrer que la série converge uniformément sur D.

Exercice5:

1) a) Quel est le domaine de définition D de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}?$$

b) Montrer que f est continue sur D.

2) c) Quel est le domaine de définition D_1 de la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}?$$

d) Montrer que g est de class C^1 sur D_1.

Exercice6:

On considère la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1) Pour quelles valeurs de x cette série est-elle convergente; absolument convergente?

2) Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^x}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}$ lorsque la série est convergente. Montrer que l'on a

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{(n+1)^x},$$

et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[x_0, +\infty[$ (x_0 étant une constante positive).

En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.

Chapitre 4

Séries entières d'une variable réelle ou complexe

Les séries entières ont une grande importance car elles sont à la base de la théorie des fonctions analytiques. Elles possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide de leurs rayon de convergence (voir [2], [5], [7], [8]) .

4.1 Propriétés générales

Définition 4.1.1 *On appelle série entière réelle (respéctivement complexe), la série* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ *(respéctivement* $\sum_n a_n(z-z_0)^n$*), où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres réelles et* x_0 *est un nombre réel fixé,* $x \in \mathbb{R}$ *(respéctivement* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes).*

Remarques 4.1.1

- *Les polynômes de degré p sont des séries entières d'un type particulier* $a_n = 0, \quad \forall n > p$.
- *Si on pose* $Z = z - z_0$*, donc* $\sum_n a_n(z-z_0)^n = \sum_n a_n Z^n$.

Dans la suite, nous étudions les séries de la forme $\sum_n a_n Z^n$.

4.1.1 Domaine de convergence d'une série entière

Définition 4.1.2 *Le domaine de convergence d'une série entière est*

$$D = \{Z \in \mathbb{C} \ \ \textit{tel que} \ \ \sum_n a_n Z^n \ \ \textit{converge}\}.$$

Remarque 4.1.1 *Si $Z = 0$, alors $a_n Z^n = 0$, donc $\sum_n a_n Z^n$ converge, ce qui donne que $0 \in D$. D'où*

$$D \neq \emptyset.$$

Donc, le domaine de convergence d'une série entière n'est jamais vide.

Exemples:

1) Déterminons le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{(n+1)!}$. Nous appliquons le critère de d'Alembert, on trouve

- Pour $x \neq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star.$$

- Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge.

Ainsi

$$D = \mathbb{R}.$$

2) Déterminons le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$.

Posons $u_n(z) = z^n$. Nous appliquons le critère de Cauchy, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to+\infty} |z| = |z|.$$

Donc

- Si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge.
- Si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge.
- Si $|z| = 1 \not\to 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge.

Ainsi $D = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1\}$ = disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

4.1.2 Convergence absolue et convergence normale d'une série entière

Lemme 4.1.1 ***(Lemme d'Abel)*** *Si une série entière $\sum_n a_n Z^n$ converge pour $Z = Z_0 \neq 0$. alors elle converge absolument en tout point Z tel que $|Z| < |Z_0|$.*

Preuve
Le fait que $\sum_n a_n Z_0^n$ converge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n Z_0^n = 0.$$

Donc

$$\exists M > 0 \ \text{ tel que } |a_n Z_0^n| < M.$$

Montrons que la série $\sum_n a_n Z^n$ converge absolument, on a

$$\begin{aligned}\sum_n |a_n Z^n| &= \sum_n |a_n Z_0^n| \left|\frac{Z^n}{Z_0^n}\right|; \quad Z_0 \neq 0\\ &< M \sum_n \left|\frac{Z}{Z_0}\right|^n.\end{aligned}$$

Or $\left|\frac{Z}{Z_0}\right| = \frac{|Z|}{|Z_0|} < 1$, donc la série $\sum_n \left|\frac{Z}{Z_0}\right|^n$ converge.
Ainsi la série $\sum_n a_n Z^n$ converge absolument.

Corollaire 4.1.1 *Si une série entière $\sum_n a_n Z^n$ diverge pour $Z = Z_0 \neq 0$. alors elle diverge en tout point Z tel que $|Z| \geq |Z_0|$.*

Corollaire 4.1.2 *Si la série $\sum_n a_n x^n$ converge dans $D =]-a, a[$, avec $a > 0$, alors elle converge normalement dans tout intervalle $[-r, r]$, avec $0 < r < a$.*

Preuve
Posons $u_n(x) = a_n x^n$, donc

$$|u_n(x)| = |a_n||x^n| \leq |a_n| r^n.$$

En plus, la série $\sum_n a_n r^n$ converge car $|r| < a$. Ainsi, $\sum_n u_n(x)$ converge normalement sur $[-r, r]$.

4.1.3 Rayon de convergence d'une série entière

Définition 4.1.3 *Soit D le domaine de convergence de la série $\sum_n a_n Z^n$, le nombre $R = \sup_{Z\in D}\{|Z|\}$ est appelé rayon de convergence de la série avec $R \geq 0$.*

Remarque 4.1.2 *R peut être nul ou égal à $+\infty$.*

Proposition 4.1.1 *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n a_n x^n$ alors*

i) $R = 0 \Leftrightarrow D = \{0\}$.

ii) $R = +\infty \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

iii) *Si la série* $\sum_n |a_n x^n|$ *converge pour* $|x| < \lambda$ *et si elle diverge pour* $|x| > \lambda$*, alors* $R = \lambda$.

Remarque 4.1.3 *Si* $|x| = R$*, on ne peut rien dire.*

Exemples:

1) Le domaine et le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ est $D =]-1, 1[$ et $R = \sup_{x\in]-1,1[} \{|x|\} = 1$.

2) Le domaine et le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est $D = \mathbb{R}$ et $R = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|x|\} = +\infty$.

3) Déterminons le domaine et le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} n! x^n$.

Posons $u_n(x) = n! x^n$. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$. Donc $\sum_{n\geq 0} u_n(0)$ converge.

Pour $x \neq 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$. Donc $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ diverge.

Ainsi, $D = \{0\}$ ce qui nous donne que $R = 0$.

Techniques de calcul de rayon de convergence R:

Lemme 4.1.2 ***(Lemme d'Hadamard)***

Soit $\sum_n a_n x^n$ *une série entière. on a*

a) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$*, alors le rayon de convergence* $R = \frac{1}{l}$.

b) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$*, alors le rayon de convergence* $R = \frac{1}{l}$.

Remarque 4.1.4 *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *n'existe pas, on prend* $\lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Exemples:

Trouvons les rayons et les domaines de convergence des séries entières

1) $\sum_{n\geq 0} \cosh n \; x^n$, on a $a_n = \cosh n$ et $x_0 = 0$.

On veut déterminer le rayon de convergence, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\cosh n}{\cosh(n+1)}\right| = e.$$

Donc
$$R = \frac{1}{e}.$$
Etudions le domaine de convergence, on distingue trois cas

a) Si $|x| < \frac{1}{e}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \cosh n x^n$ est convergente.

b) Si $|x| > \frac{1}{e}$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \cosh n x^n$ est divergente.

c) Si $|x| = \frac{1}{e}$, on a
$$\sum_{n\geq 0} \cosh n x^n = \sum_{n\geq 0} \cosh n \frac{1}{e^n}.$$
Or, quand $n \to +\infty$, on a $\cosh n \frac{1}{e^n} \not\to 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \cosh n x^n$ est divergente pour $x = \pm\frac{1}{e}$.

Ainsi
$$D = \{x \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ |x| < \frac{1}{e}\} = \left] -\frac{1}{e}, +\frac{1}{e} \right[.$$
2) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}(z-i)^n$, on a $a_n = \sin \frac{1}{n}$ et $z_0 = i$.

Déterminons le rayon de convergence, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$
Donc
$$R = 1.$$
Etudions le domaine de convergence, on distingue trois cas

a) Si $|z-i| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}(z-i)^n$ converge.

b) Si $|z-i| > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}(z-i)^n$ diverge.

c) Si $|z-i| = 1$, on a $z - i = |z-i|e^{i\theta}$, où $\theta = Arg(z-i)$. Donc
$$\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}(z-i)^n = \sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n} e^{in\theta}.$$
Posons $v_n = \sin \frac{1}{n}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est à termes positifs décroissante qui converge vers 0. D'aprés le corollaire 2.3.1 la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n} e^{in\theta}$ converge pour $\theta \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $\theta = 2k\pi$, on a
$$\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}(z-i)^n = \sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n},$$

cette dernière est une série divergente donc $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}(z-i)^n$ est divergente.

Ainsi son domaine de convergence est

$$D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z-i| < 1 \text{ et } z = i + e^{i\theta},\ \text{avec } \theta \neq 2k\pi\}.$$

Remarque 4.1.5 *Soit $\varphi(n)$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La série $\sum_n a_n x^{\varphi(n)}$ est une série entière. Déterminons le domaine et le rayon de convergence de cette série.*
On commence par calculer directement la limite suivante

$$l = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \lim_{n\to+\infty}|x|^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

puis chercher le domaine de x où $l < 1$. Le rayon de convergence $R = \sup\{l \in \mathbb{R}^+\}$ où la série converge.

Exemple:
Trouvons le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} 3^n x^{2n+5}$. Dans notre cas $\varphi(n) = 2n+5$.
Calculons la limite

$$l = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}}\right| = 3|x|^2.$$

La série converge si $3|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où le rayon de convergence $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente pour $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.1.4 Propriétés des séries entières réelles

Théorème 4.1.1 *Soit $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ une série entière qui converge vers sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sur $D =]x_0 - R, x_0 + R[$ avec R son rayon de convergence. Alors*

i) *S est continue dans D.*

ii) $\forall x \in D,\ \int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$

iii) *Les séries $\sum_n na_n(x-x_0)^{n-1}$ et $\sum_n \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ obtenues par dérivation et intégration terme à terme de la série $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ admettent le même rayon de convergence R.*

iv) $\forall x \in D,\ S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

Exemple:

Calculons la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$, On a $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$ et $x_0 = 0$.

Cherchons le rayon de convergence de cette série,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n-1}{n+1}\right| = 1.$$

Donc

$$R = 1.$$

Déterminons le domaine de convergence de cette série. Nous caractérisons trois cas:

a) Si $|x| < 1$, alors $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge.

b) Si $|x| > 1$, alors $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ diverge.

c) Si $|x| = 1$, on a

$$\left|\frac{x^n}{n(n-1)}\right| = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Donc $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge absolument pour $|x| = 1$. D'où $D = [-1, 1]$.

Calculons la somme de cette série. Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

Dérivons deux fois nous trouvons

$$S^{'}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)}.$$

$$S^{''}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour } |x| \leq 1.$$

Nous intégrons la première fois, on obtient

$$\begin{aligned} S^{'}(x) - S^{'}(0) &= \int_0^x S^{''}(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} \\ &= -\ln(1-x). \end{aligned}$$

Donc

$$S^{'}(x) = -\ln(1-x).$$

Nous intégrons la deuxième fois, on obtient

$$\begin{aligned} S(x) - S(0) &= \int_0^x S^{'}(t)dt \\ &= \int_0^x -\ln(1-t)dt. \end{aligned}$$

Par partie, on trouve

$$S(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

Corollaire 4.1.3 *La somme S de la série $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ est de classe C^∞ sur D et*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Corollaire 4.1.4 *Si $\sum_n a_n(x-x_0)^n = \sum_n b_n(x-x_0)^n, \quad \forall x \in D$. Alors*

$$a_n = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.1.5 Etude de la somme sur la frontière du domaine de convergence

Théorème 4.1.2 ***(Deuxième lemme d'Abel)***
Soit R, $0 < R < +\infty$ le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ qui converge vers sa somme $S(x)$ pour tout $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. Si $\sum_n a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_n a_n R^n = \lim_{x \to x_0 + R} S(x).$$

Exemple:
Calculons $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, alors le rayon et le domaine de convergence de cette série sont

$$R = 1, \ D = [-1, 1].$$

Dérivons $S(x)$, nous obtient

$$S^{'}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Donc

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x) \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Alors
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{x\to -1}S(x)=\ln\frac{1}{2}.$$

4.2 Opérations algébriques sur les séries entières

Définition 4.2.1 • *La somme de deux séries entières* $\sum_n a_nZ^n$ *et* $\sum_n b_nZ^n$ *est la série* $\sum_n (a_n+b_n)Z^n$.

• *Le produit de deux séries entières* $\sum_n a_nZ^n$ *et* $\sum_n b_nZ^n$ *est la série* $\sum_n c_nZ^n$*, où* $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

Théorème 4.2.1 *Soit deux séries* $\sum_n a_nZ^n$ *et* $\sum_n b_nZ^n$ *ayant respectivement* R_1 *et* R_2 *pour rayons de convergence. Alors*

i) *La série somme* $\sum_n (a_n+b_n)Z^n$ *a un rayon de convergence* R *qui satisfait aux relations suivantes:*
$$R=\inf(R_1,R_2)\quad si \quad R_1\neq R_2,$$
$$R\geq R_1=R_2\quad si \quad R_1=R_2$$
et l'on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)Z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nZ^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nZ^n,\quad \forall Z \ \ tel\ que\ |Z|<\inf(R_1,R_2).$$

ii) *La série produit* $\sum_n c_nZ^n$ *a un rayon de convergence* R' *qui satisfait à la relation suivante:*
$$R'\geq \inf(R_1,R_2)$$
et l'on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nZ^n=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nZ^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_nZ^n\Big),\quad \forall Z\ \ tel\ que\ |Z|<R'.$$

Exemples:

1) Déterminons la série somme de $\sum_{n\geq 0}x^n$ et $\sum_{n\geq 0}2^nx^n$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n$ est $R_1 = 1$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$ est $R_2 = \frac{1}{2}$. Donc la série somme de $\sum_{n\geq 0} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$ est

$$\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} 2^n x^n = \sum_{n\geq 0} (1+2^n) x^n,$$

ayant pour rayon de convergence

$$R = \inf(R_1, R_2) = \frac{1}{2}.$$

2) Déterminons la série somme de $\sum_{n\geq 0}(1+2^n)x^n$ et $\sum_{n\geq 0}(1-2^n)x^n$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(1+2^n)x^n$ est $R_1 = \frac{1}{2}$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(1-2^n)x^n$ est $R_2 = \frac{1}{2}$. Donc la série somme de $\sum_{n\geq 0}(1+2^n)x^n$ et $\sum_{n\geq 0}(1-2^n)x^n$ est

$$\sum_{n\geq 0}(1+2^n)x^n + \sum_{n\geq 0}(1-2^n)x^n = -\sum_{n\geq 0} 2x^n,$$

ayant pour rayon de convergence

$$R = 1 \geq R_1 = R_2 = \frac{1}{2}.$$

3) Déterminons la série produit de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ où
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1$ et $b_0 = 1, b_1 = -1$ et $\forall n \geq 2, b_n = 0$.
Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est $R_1 = 1$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est $R_2 = +\infty$.
Donc la série produit de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est

$$\Big(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\Big) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

où $c_0 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ c_n = 0$. Le rayon de de convergence de cette séries

$$R' = +\infty \geq \inf(R_1, R_2).$$

4.3 Fonctions développables en série entière

4.3.1 Série de Taylor

Définition 4.3.1 *Soit f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de point x_0. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ s'appelle série de Taylor de f au voisinage de x_0.*
Si $x_0 = 0$, cette série s'appelle aussi série de Mac-Laurin.

Proposition 4.3.1 *Toute série entière* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ *est la série de Taylor de sa somme* S *au voisinage de* x_0.

Preuve
Il suffit de remarquer $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, d'aprés le corollaire 4.1.3 on a S est dérivable et $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

qui est la série de Taylor de S au voisinage de x_0 où $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.
Problème: Est-ce-qu'une fonction de classe C^∞ définie dans un voisinage de x_0 peut être représentée par une série entière?

Définition 4.3.2 *On dit qu'une fonction* f *définie dans un voisinage de* x_0 *peut être développée en série de Taylor au voisinage de* x_0 *s'il existe* $R > 0$ *tel que*

$$\forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Remarque 4.3.1 *Si* f *est développable en série de Taylor en tout point de l'intervalle* $]a, b[$, *on dit que* f *est une fonction analytique sur* $]a, b[$ *et on note* $f \in C^\infty(]a, b[)$.

Remarque 4.3.2 *Généralement une fonction de classe* C^∞ *n'admet pas un développement en série entière au voisinage de* x_0.

Exemple:
Considérons la fonction $f(x)$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que $f(x)$ est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$, en particulier au voisinage de 0, en effet
La fonction f est dérivable au point 0, donc

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

On dérive la premiére fois, nous trouvons que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction $f^{'}(x)$ est dérivable au point 0. Donc

$$f^{''}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{'}(x) - f^{'}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

On dérive la deuxiéme fois, nous trouvons que

$$f^{''}(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Le fait que la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe C^∞ pour $x \neq 0$. alors la fonction $f(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x).$$

Théorème 4.3.1 *Soit f une fonction de classe C^∞ dans l'intervalle $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$. Pour que l'on ait $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ dans I il faut et il suffit que*

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

où $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\Big(x_0 + \theta(x - x_0)\Big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ avec $0 < \theta < 1$ (le reste de Taylor-Lagrange)

Théorème 4.3.2 *Soit f une fonction de classe C^∞ dans l'intervalle $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$. S'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \textit{on a } |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Preuve

Le développement de Taylor de f d'ordre n au voisinage de x_0 est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}\Big(x_0 + \theta(x - x_0)\Big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}\Big(x_0 + \theta(x - x_0)\Big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0.$$

En effet, soit $x \in I$, on a

$$\begin{array}{rcl} |R_n(x)| & = & \left|\dfrac{f^{(n+1)}\Big(x_0+\theta(x-x_0)\Big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \\ & \leq & \dfrac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

Or la série de terme général $u_n = \dfrac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente car

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\delta}{n+1} = 0,$$

et par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

Remarque 4.3.3 *Cette condition est suffisante non nécessaire. En effet, Pour la fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{a^n}{n!}x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$, *avec* $a > 1$. *On a*

$$f^{(n)}(0) = a^n.$$

Cette suite n'est pas bornée, et donc la condition du théorème n'est pas vérifiée.

4.3.2 Méthodes d'obtention du développement

Parmi les méthodes utlisées pour obtenir un développement, on a

a) Méthode directe: Formule de Taylor ou Mac-Laurin (voir ci-dessus).

Exemples:

1) **La fonction exponentielle:** $f(x) = e^x$.

Cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = e^x$. Le reste de Taylor

$$R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la fonction e^x est développable en série entière et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Son rayon de convergence $R = +\infty$.

2) **Les fonctions hyperboliques:**

Les fonctions cosinushyperboliques et sinushyperboliques ont même rayon de convergence que la fonction exponentielle $R = +\infty$.

- La fonction cosinushyperbolique $f(x) = \cosh x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[1 + (-1)^n\Big]\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... \end{aligned}.$$

- La fonction sinushyperbolique $f(x) = \sinh x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[1 - (-1)^n\Big]\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... \end{aligned},$$

3) **La fonction circulaire** $f(x) = \sin x$**:**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f^{'}(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

Donc

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2k \\ (-1)^k \text{ si } n = 2k+1. \end{cases}$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les dérivées d'ordre n sont majorées, c'est-à-dire

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \forall n.$$

Alors f est développable en série de Taylor au voisinage de $x \in \mathbb{R}$.
Ce qui donne

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\frac{\pi}{2}\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}.$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$.

b) Par dérivation et intégration: si l'on sait développer la fonction dérivée.

Exemples:

1) **La fonction circulaire** $f(x) = \cos x$**:**

La fonction cosinus: $f(x) = \cos x$

$$f(x) = \cos x = (\sin x)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$.

2) La fonction $f(x) = \ln(1 + x)$

On remarque que pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Donc

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{pour } |x| < 1.$$

On déduit par intégration:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int \frac{dx}{1+x} \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{pour } |x| < 1.
\end{aligned}$$

La constante de l'intégration est nulle car $\ln 1 = 0$.

On a de même

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad |x| < 1.$$

Les séries précédentes ont le même rayon de convergence $R = 1$.

3) La fonction $f(x) = \arctan x$

Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Par intégration, on trouve

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pour } \ |x| < 1.$$

Le rayon de convergence de cette série $R = 1$.

c) Utilisation d'une équation différentielle.

Exemples:

1) **(La série de binôme)**

Considérons la fonction $x \mapsto f(x) = y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

On remarque qu'il y a une relation entre la fonction f et sa dérivée, c'est-à-dire pour $y = (1+x)^\alpha$, on a $y^{'} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, d'où l'équation différentielle

$$y^{'}(1+x) = \alpha y \tag{4.1}$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y = C(1+x)^\alpha$, où C est une constante arbitraire.

Cherchons s'il existe une fonction f développable en série entière au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui est solution de (4.1). Pour qu'une telle fonction existe, il est nécessaire d'avoir les relations suivantes:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x)f^{'}(x) - \alpha f(x) \\ &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n\Big] x^n. \end{aligned}$$

On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n = 0 \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n.$$

Ceci permet d'avoir une relation par récurrence qui donne

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} a_0.$$

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$. Le rayon de convergence de cette série R est donné par

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right|} = 1.$$

Par construction, la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} a_0 x^n$ est solution de l'équation (4.1), elle est donc de la forme $C(1+x)^\alpha$.

Puisque $f(0) = a_0 = C = 1$, alors pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

2) La fonction $f(x) = argshx$, on a

$$f^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \Big(1+x^2\Big)^{-\dfrac{1}{2}}.$$

D'aprés l'exemple précédent ($\alpha = -\dfrac{1}{2}$), on a

$$\Big(1+x^2\Big)^{-\dfrac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n.n!)^2} x^{2n}.$$

On déduit par intégration

$$argshx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n.n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

Son rayon de convergence $R = 1$.

d) Cas des fractions rationnelles: décomposition en éléments simples, puis sommation des séries entières obtenues.

Exemple:

Sommer la série suivante

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)(n+1)(n+3)}.$$

Son rayon de convergence $R = 1$.

La décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{1}{15(n-2)} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{10(n+3)}.$$

En utilisant la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, nous trouvons que

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)} = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x^2 \log(1-x).$
- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)} = \frac{1}{x} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}\Big(-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big).$
- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^3}\Big(-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big).$

Ainsi, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{1800x^3}\Big[(-120x^5 + 300x^2 - 180)\log(1-x) + 64x^5 + 105x^4 + 24x^3 - 90x^2 - 180x\Big].$$

4.3.3 Fonctions complexes développables en série entière

1) Fonction exponentielle complexe

Définition 4.3.3 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on pose*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

cette série est absolument convergente $\forall z \in \mathbb{C}$*. Son rayon de convergence* $R = \infty$*.*
L'application de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $x \mapsto e^x$ *est donc la réstriction à* $\mathbb{R}$ *de* $z \mapsto e^z$*.*

Remarque 4.3.4 $\forall z, z' \in \mathbb{C}$*, on a*

$$e^{z+z'} = e^z.e^{z'}.$$

En particulier, pour $x, y \in \mathbb{R}$*, on a*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$$

où

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n y^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos x + i \sin y. \end{aligned}$$

Définition 4.3.4 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \in \mathbb{C}.$$

De même, on définit

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \in \mathbb{C}.$$

Remarques 4.3.1 *On a*

- *Les fonctions* $\sin z$ *et* $\cos z$ *ne sont pas nécessairement bornées dans* $\mathbb{C}$*.*
- *les formules telles que*

$$\sin iz = i \sinh z, \qquad \cos iz = \cosh z,$$

permettent le passage de trigonométrie circulaire à la trigonométrie hyperbolique.

2) Fonction logarithmique complexe

Définition 4.3.5 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \textit{pour} \ \ |z| < 1,$$

et

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}, \quad \textit{pour} \ \ |z| < 1.$$

4.4 Applications

4.4.1 Résolution des équations différentielles

On cherche une solution sous forme d'une série entière à coéfficients indéterminés. Par identification, on obtient ces coéfficients. Il suffit d'étudier la convergence de cette série pour obtenir une solution de l'équation dans l'intervalle de convergence.

Exemple:

Soit l'équation différentielle

$$4xy^{''} + 2y^{'} - y = 0. \tag{4.2}$$

telle que $y(0) = 1$. On cherche une solution de (4.2) sous la forme d'une série entière $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où les coefficients a_n sont à déterminer. On a

$$y^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y^{''}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

En remplaçant dans l'équation (4.2)

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad &\Rightarrow \quad 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 4n(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\Big(4n(n+1) + 2(n+1)\Big)a_{n+1} - a_n\Big] x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n\Big] x^n = 0.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$(2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc
$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
On a $a_0 = y(0) = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{(2n)(2n-1)} a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
D'où
$$a_n = \frac{1}{(2n)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Le domaine et le rayon de convergence de cette série sont $R = +\infty$ et $D = \mathbb{R}$. Ainsi, la solution de l'équation (4.2) est donnée par
$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4.4.2 Calcul approché de la valeur d'une intégrale définie

Exemple:

Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ avec une approximation à 0.01 prés.

Nous avons
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + ...$$
Donc
$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} + ... + \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + ...$$
Soit
$$S_n = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} + ... + \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$
Alors
$$|R_n| = |I - S_n| \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!}$$
Pour avoir l'approximation à 0.01 prés il suffit de choisir n tel que
$$\frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!} \leq 0.01$$
On trouve $n = 3$, donc
$$|I - S_3| \leq \frac{\pi^9}{9.9!} \leq 0,00912.$$
Comme
$$S_3 = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} - \frac{\pi^7}{35280} = 1,843250.$$
On a $1,834123 < I < 1.852378$. Ainsi, $I = 1.85$ avec une erreur inférieure à 0.01.

4.5 Exercices résolus

Exercice1: Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries entières réelles suivantes

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$, 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} x^n$, 3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} x^n$, 4. $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^{n^2}$.

Solution:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\cos(\frac{1}{n+1})}{\cos(\frac{1}{n})}\right| = \frac{\cos(0)}{\cos(0)} = 1.$$

Donc $R = 1$ et

- Si $|x| < 1$, alors la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$, alors la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ diverge.
- Si $|x| = 1$, posons $U_n(x) = \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |U_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} \left|\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 \neq 0,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n(x) \neq 0$ et la série diverge.
Ainsi le domaine de convergence est $D =]-1, 1[$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} x^n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1+\dfrac{\arctan(n)}{n}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\arctan(n+1)}{n}} = 2.$$

Donc $R = \frac{1}{2}$ et

- Si $|x| < \frac{1}{2}$, alors la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > \frac{1}{2}$, alors la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} x^n$ diverge absolument.
- Si $|x| = \frac{1}{2}$, on distingue deux cas

– Si $x = \frac{1}{2}$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\arctan(n)}$ est une série numérique alternée convergente.

– Si $x = -\frac{1}{2}$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\arctan(n)}$ est une série numérique divergente $\left(\text{car } \frac{1}{n+\arctan(n)} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}\right)$

Ainsi le domaine de convergence est $D = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} x^n$.

on a $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n! \leq n^n$ donc $\ln(n!) \leq n \ln n \leq n^2$, ainsi pour $n > 2$, on a

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq 1.$$

Ceci donne

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n!)}} \leq 1,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = 1.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n!)}} = 1,$$

et par suite $R = 1$.

- Si $|x| < 1$, alors la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$, alors la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} x^n$ diverge.
- Si $|x| = 1$, on distingue deux cas

  – Si $x = 1$, alors $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}$ est une une série numérique divergente (car $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln(n)}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ est une série divergente.)

  – Si $x = -1$, alors $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n!}$ est une série numérique alternée convergente.

Ainsi le domaine de convergence est $D = [-1, 1[$.

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^{n^2}$.

Posons $U_n(x) = n! x^{n^2}$ et appliquons la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} (n+1)x^{2n+1}.$$

On distingue trois cas

- Si $|x| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = 0 < 1$ et la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^{n^2}$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = +\infty$ et la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^{n^2}$ diverge.
- Si $|x| = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \Big|U_n(x)\Big| = \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty \neq 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} U_n(x) \neq 0$ et la série diverge.

Ainsi $R = 1$ et le domaine de convergence de cette série est $D =]-1, 1[$.

Exercice2: Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$, 2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$, 3. $\sum_{n\geq 0} (-2)^n \frac{z^{3n+1}}{n+1}$, 4. $\sum_{n\geq 0} a^n z^{2n+1}$,

(a est une constante appartenant à $\mathbb{C}$).

Solution:

Déterminons le rayon de convergence des séries entières suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Donc $R = \frac{1}{e}$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc $R = +\infty$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{z^{3n+1}}{n+1}$.

On remarque que

$$a_n = \begin{cases} 0 \ \text{ pour } \ n = 3k \text{ ou } n = 3k+2, \\ \dfrac{(-2)^k}{k+1} \ \text{ pour } \ n = 3k+1, \end{cases}$$

Posons $V_n(z) = (-2)^n \dfrac{z^{3n+1}}{n+1}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{V_{n+1}(z)}{V_n(z)}\right| = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{n+1}{n+2}|z|^3 = 2|z|^3.$$

d'où l'on déduit que

- Si $2|z|^3 < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n \frac{z^{3n+1}}{n+1}$ converge absolument pour $|z| < \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$.
- Si $2|z|^3 > 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n \frac{z^{3n+1}}{n+1}$ est divergente pour $|z| > \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$.

Donc $R = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{2n+1}$.

On remarque

$$a_n = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ n = 2p, \\ a^p \ \text{ si } \ n = 2p+1. \end{cases}$$

Soit alors $V_n(z) = a^n z^{2n+1}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{V_{n+1}(z)}{V_n(z)}\right| = \lim_{n\to+\infty} |a||z|^2.$$

On déduit que

- Si $|a||z|^2 < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{2n+1}$ converge absolument pour $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}$.
- Si $|a||z|^2 > 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{2n+1}$ est divergente pour $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}$.

Donc $R = \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}$.

Exercice3: Trouver le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$. 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$. 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$. 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+a^n)}{n} x^n$.

Solution:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$.

Trouvons le rayon de convergence R, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Ainsi $R = 1$. On distingue trois cas

- Si $|x| < 1$, alors la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ converge absolument.

- Si $|x| > 1$, alors la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ diverge.

- Si $|x| = 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left|\frac{1}{n(n+1)} x^n\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

Le domaine de convergence de la série est $D = [-1, 1]$.

Maintenant, calculons la somme. Si $x \neq 0$, on a

$$\begin{array}{rcl}
S(x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n \\
& = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\
& = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\
& = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\
& = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - x \Big) \\
& = & -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \Big(\ln(1-x) - x \Big) \\
& = & \dfrac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x}.
\end{array}$$

De plus $S(0) = 0$ et par le théorème 4.1.2, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1^+} S(x) = 1 - 2\ln(2).$$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$.

Trouvons le rayon de convergence R. Posons $U_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1} x^2\right| = x^2.$$

On distingue trois cas

- Si $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, alors la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$ converge absolument.

- Si $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$, alors la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}x^{2n}$ diverge.
- Si $x^2 = 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ est convergente (série alternée).

Ainsi $R = 1$ et le domaine de convergence de la série entière est $D = [-1, 1]$.
Calculons la somme. Si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}x^{2n} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(-1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}x^{2m+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(-1 + x\arctan(x) - \frac{1}{x}\arctan(x)\Big).
\end{aligned}$$

De plus $S(0) = 0$ et par le théorème 4.1.2, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \lim_{|x|\to 1} S(x) = -\frac{1}{2}.$$

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n$.

Trouvons le rayon de convergence R.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^3}\right| = 0.$$

Ainsi $R = +\infty$ et le domaine de convergence de la série entière est $D = \mathbb{R}$.
Remarquons que $n^3 = A_1 n(n-1)(n-2) + A_2 n(n-1) + A_3 n + A_0$. Par identification, on obtient

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 3, \quad A_3 = 1, \quad A_4 = 0.$$

Donc

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}, \quad \forall n \geq 0,$$

et par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} = x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} = x^3 e^x.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = x^2 e^x.$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x e^x.$$

Ainsi
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n = (x^3 + 3x^2 + x)e^x.$$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(1+a^n)}{n} x^n.$

Trouvons le rayon de convergence R.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ admet $R_1 = 1$ pour rayon de convergence et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n x^n}{n}$ admet $R_2 = \frac{1}{|a|}$. Puisque $R_1 \neq R_2$, la série somme $\sum_{n\geq 1} \frac{(1+a^n)}{n} x^n$ aura pour rayon de convergence
$$R = \inf(R_1, R_2) = \inf(1, \frac{1}{|a|}),$$
et le domaine de convergence de cette série est $D =]-R, R[$.

Calculons la somme. Pour $x \in]-R, R[$, on a
$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+a^n)}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) - \ln(1-ax) \\ &= -\ln(1-x)(1-ax). \end{aligned}$$

Exercice4: Développer en série entière autour de l'origine, les fonctions suivantes en prècisant le domaine de convergence.

1.$(2x+3)^{-2}$, 2.$(x+1)\ln(x+1)$, 3. $\int_0 x \frac{e^t - 1}{t} dt.$

Solution:

1. $f(x) = (2x+3)^{-2}$. On a
$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{2}{3}x + 1} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Big(\frac{2}{3}x\Big)^n$$

Dérivons on trouve
$$\Big(\frac{1}{2x+3}\Big)' = \Big(\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Big(\frac{2}{3}\Big)^n x^n\Big)'$$

Or
$$\Big(\frac{1}{2x+3}\Big)' = \frac{-2}{(2x+3)^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Big(\frac{2}{3}\Big)^n n x^{n-1}.$$

Donc
$$\frac{1}{(2x+3)^2}=\frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n\Big(\frac{2}{3}\Big)^n x^{n-1},\quad \forall x\in\Big]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\Big[.$$
2. $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$.
$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x\\
&= x+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)x^n\\
&= x+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n},\qquad \forall x\in[-1,1].
\end{aligned}$$

3. $f(x)=\int\limits_0^x\frac{e^t-1}{t}dt$.
On sait que
$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
Donc
$$\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
On déduit alors que l'on a
$$\int\limits_0^x\frac{e^t-1}{t}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n.n!}.$$
Exercice5: Chercher la série entière solution de l'équation différentielle
$$xy^{''}+xy^{'}+y=0, \tag{4.3}$$
vérifiant les conditions $y(0)=0$ et $y^{'}(0)=2$.
Solution:
Posons $y=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, on a donc $y^{'}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $y^{''}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$.

En remplaçant dans l'équation (4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad &\Rightarrow \quad x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[n(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n \Big] x^n = 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$n(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n = 0 \Rightarrow n(n+1)a_{n+1} = (1-n)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, on a

$$y(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$

$$y^{'}(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Donc par récurrence, on trouve

$$a_n = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Ainsi la solution de (4.3) est $y = 2x$.

4.6 Exercices non résolus

Exercice1: Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z^p$ avec p un nombre premier.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2p}}{2-\sin pa}$ où a est une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (p - e^{\sin pa}) z^{p+1}$.

Exercice2: Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(p\theta) x^p$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\theta)}{p} x^p$ où θ est une constante réelle différente de $k\pi$.

Exercice3: Trouver le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$, 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$, 4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n$.

Exercice4: 1) Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$ peut être développée en série entière autour de l'origine.

2) Déterminer le terme général de cette série ainsi que son rayon de convergence.

Exercice5: Montrer que les fonctions suivantes

1. $\ln \frac{x+1}{1-x}$, 2. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, 3. $\arcsin x$, 4. $\frac{x^2}{(x-1)(2-x)^2}$, 5. $\arctan x$.

sont développables en série entière autour de l'origine.

Déterminer leur développement, ainsi que le rayon de convergence correspondant.

Exercice6:

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $f^{(n)}(0)$, puis déterminer la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ engendrée par f.

3) f est-elle développable en série entière autour de l'origine?

Exercice7:

1) Chercher les solutions de l'équation différentielle

$$(1+x)y' + \alpha y = 0, \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante réelle.} \tag{4.4}$$

qui sont développables en série entière autour de l'origine.

2) Intégrer (4.4).

3) En déduire que la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ est développable en série entière.

Déterminer son développement ainsi que le rayon de convergence correspondant.

Chapitre 5

Séries de Fourier

Dans ce chapitre, nous étudions les séries de Fourier qui sont un outil fondamental dans l'ètude des fonctions périodiques, dont les applications sont assez nombreuses dans d'autres domaines des mathématiques (notamment les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles) (voir [2], [5], [7]).

5.1 Série trigonométrique

5.1.1 Notions générales relatives aux séries trigonométriques

Définition 5.1.1 *On appelle série trigonométrique, toute série de fonctions de la forme*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \tag{5.1}$$

où les coéfficients a_n et b_n, (on posera $b_0 = 0$), sont des nombres complexes et ω un nombre réel positif.

Remarque 5.1.1 *On a*

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) &= a_n\Big(\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}\Big) + b_n\Big(\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\Big) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n))e^{in\omega x} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n))e^{-in\omega x} \\ &= C_n e^{in\omega x} + C_{-n}e^{-in\omega x}, \end{aligned}$$

avec $C_{-n} := \overline{C_n}$ (conjugué de C_n).
Donc les séries trigonométriques sont aussi les séries de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}. \tag{5.2}$$

5.1.2 Fonctions périodiques

Définition 5.1.2 *Une fonction $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite périodique s'il existe un nombre T tel que $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$f(x+T) = f(x) \tag{5.3}$$

si la relation (5.3) *est vérifiée, on a*

$$f(x+kT) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Définition 5.1.3 *Si $f(x)$ est périodique, on appelle période de $f(x)$ le plus petit nombre $T > 0$ tel que*

$$f(x+T) = f(x).$$

Remarque 5.1.2 *Si la série trigonométrique* (5.1) *converge en tout point d'un intervalle $\left[\alpha, \alpha + \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, elle converge pour toute valeur de x, et sa somme est une fonction périodique $f(x)$ de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.*

$$\cos[n\omega(x+T)] = \cos(n\omega x + 2\pi n) = \cos(n\omega x),$$

$$\sin[n\omega(x+T)] = \sin(n\omega x + 2\pi n) = \sin(n\omega x),$$

où $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est le plus petit nombre positif pour lequel ces deux relations sont vraies quelque soit n.

Remarque 5.1.3 *Si f est T-périodique et intégrable sur $[0, T]$, alors*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

5.1.3 Convergence d'une série trigonométrique

Théorème 5.1.1 *Si les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} |b_n|$ sont convergentes alors la série trigonométrique* (5.1) *est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ donc absolument convergente et uniformément sur $\mathbb{R}$. Sa somme $f(x)$ est une fonction continue, de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.*

Preuve

Cela découle directement de l'inégalité

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \cos(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Théorème 5.1.2 *Si la série des modules* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|$ *est convergente, la série trigonométrique* (5.2) *converge absolument et uniformément sur* $\mathbb{R}$. *Sa somme* $f(x)$ *est une fonction continue, de période* $\frac{2\pi}{\omega}$.

Théorème 5.1.3 *Si* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *sont des suites numériques décroissantes de nombres réels positifs et tendent vers* 0, *alors la série trigonométrique* (5.1) *est convergente pour tout* $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

5.1.4 Relation entre les coéfficients et la somme d'une série trigonométrique

Théorème 5.1.4 *Soit*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

la convergence étant supposée uniforme dans tout intervalle. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos(n\omega x)dx, \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin(n\omega x)dx. \end{cases}$$

Remarque 5.1.4 *Soit*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x},$$

la convergence étant supposée uniforme dans tout intervalle. Alors

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)e^{-in\omega x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

5.2 Série de Fourier

Dans cette partie, nous considérons les fonctions périodiques de période $T = 2\pi$.

5.2.1 Notions générales relatives aux séries de Fourier

Définition 5.2.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application périodique de période* $T = 2\pi$ *et intégrable sur* $I = (\alpha, \alpha + 2\pi)$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.
On appelle série de fourier associée à f, *la série trigonométrique*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$$

dont les coéfficients appelés coéfficients de Fourier de f, sont donnés par les formules

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symboliquement, on écrira

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)].$$

Remarques 5.2.1

- *Les coéfficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont indépendants du choix de α.*
- *Si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (car $f(x)\cos(nx)$ est impaire).*
- *Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ (car $f(x)\sin(nx)$ est impaire).*

5.2.2 Recherche de fonctions développables en série de Fourier

Définition 5.2.2 *Une fonction f périodique de période $T = 2\pi$ et intégrable dans un intervalle $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ est dite développable en série de Fourier lorsque f est la somme de la série de Fourier qu'elle engendre, c'est-à-dire*

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 5.2.1 *Soit*

$$\frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)], \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

une série trigonométrique qui converge uniformément vers sa somme $S(x)$ dans $\mathbb{R}$. Alors $S(x)$ est développable en série de Fourier et l'on a $a_n(S) = \alpha_n$ et $b_n(S) = \beta_n$.

Remarque 5.2.1 *Toute fonction g monotone sur $[a, b]$ n'admet que des discontinuités de première espèce, c'est-à-dire*

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = g(x_0^-) = g(x_0 - 0),$$

$$\lim_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0^+) = g(x_0 + 0).$$

celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité.
De plus, l'ensemble des points de discontnuités est dénombrable.

Définition 5.2.3 *Une fonction g est dite régulière lorsqu'on a $g(x_0) = \dfrac{g(x_0^+) + g(x_0^-)}{2}$ en tout point x_0 de discontinuité. On a alors*

$$g(x) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Théorème 5.2.2 ***(Théorème de Jordan)***

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période 2π et est la différence de deux fonctions non décroissantes dans $[\alpha, \alpha + 2\pi]$, sa série de Fourier converge pour tout x et on a pour sa somme

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En outre, la convergence vers $f(x)$ est uniformément sur tout segment sur lequel f est continue, éxtrémités comprises.

Corollaire 5.2.1 *Si f satisfait aux hypothèses du théorème de Jordan et si elle est régulière, alors elle est développable en série de Fourier.*

Remarques 5.2.2

- *La fonction f n'admet évidemment que des discontinuités de première espèce, puisque $f = g_1 - g_2$, où g_1 et g_2 sont monotones dans $[\alpha, \alpha + 2\pi]$.*
- *Toute fonction f, différence de deux fonctions non décroissantes sur $[a, b]$, est dite variation bornée sur $[a, b]$.*

Théorème 5.2.3 ***(Théorème de Dirichlet)***

Soit f une fonction périodique de période 2π satisfaisant

1. *$\exists M > 0$ telle que $|f(x)| \leq M$.*
2. *Il existe un nombre fini de points de subdivision de l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ $(\alpha = \alpha_1 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < \alpha_{i+1} < ... < \alpha_n = \alpha + 2\pi)$ de façon que f soit monotone et continue dans chaque ouvert $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.*

Alors la série de Fourier associée à f converge pour tout x et on a pour sa somme

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

De plus, la convergence vers $f(x)$ est uniforme sur tout segment sur lequel $f(x)$ est continue, extrimités comprises.

Corollaire 5.2.2 *Si f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet et si elle est régulière, alors elle est développable en série de Fourier.*

Proposition 5.2.1 *Les théorèmes (5.2.2) et (5.2.3) sont équivalents.*

Exemple:
Considérons la fonction f de période 2π et qui est définie dans $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| < \pi \\ 0 & \text{si } x = -\pi \end{cases}$$

Montrons que f est développable en série de Fourier et déterminons cette série. En effet, on remarque que f n'admet que $-\pi$ comme point de discontinuité dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et on a

$$\frac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0 = f(-\pi),$$

donc f est régulière.
1) Déterminons la série de Fourier associée à f.
f est une fonction impaire donc $a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) \rightsquigarrow 2\{\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + ...\}.$$

2) Montrons que f est développable en série de Fourier, il suffit d'assurer les conditions du théorème de Dirichlet. On a

$$|f(x)| \leq \pi, \quad \forall x \in [-\pi, \pi[.$$

De plus, f est croissante et continue sur $]-\pi, \pi[$.
Ainsi, f est développable en série de Fourier,

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.2.3 Fonction de période $T \neq 2\pi$

Soit f une fonction complexe définie et intègrable sur tout intervalle borné $[a, a+T]$ inclu dans $\mathbb{R}$ de période T.
1) On peut lui associer la série de Fourier suivante

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)],$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, où

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int\limits_a^{a+T} f(x)\cos(n\omega x)dx,$$

et

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int\limits_a^{a+T} f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) On peut aussi lui associer sa série de Fourier écrite sous forme complexe:

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)e^{in\omega x},$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, où

$$C_n(f) = \frac{1}{T} \int\limits_a^{a+T} f(x)e^{-in\omega x}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pour $T = 2\pi$, on a

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)e^{inx},$$

et lorsque f est développable en série de Fourier, on aura donc

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f)e^{inx}.$$

5.2.4 Égalité de Parseval

Théorème 5.2.4 *Soit $f(x)$ la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente de période T. Alors $f(x)$ est de carrée sommable sur tout intervalle I de longueur T et les coéfficients de Fourier de $f(x)$ vérifient l'égalité dite de Parseval:*

$$\frac{2}{T} \int\limits_I |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

ou encore

$$\frac{1}{T} \int\limits_I |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2.$$

5.3 Exercices résolus

Exercice1: Soit f une fonction définie par $f(x) = \sup(\sin x, 0)$.

1) Déterminer la série de Fourier associée à cette fonction.

2) Montrer que f est développable en série de Fourier, cette série convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

3) Calculer

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^{2-1}}.$$

Solution:

1) La fonction f est évidemment de période 2π et continue $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ici

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Déterminons la série de Fourier associée à cette fonction. On a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \cos(nx) dx \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1 + (-1)^n}{1 - n^2}, & \text{si } n \neq 1, \\ 0, & \text{si } n = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \sin(nx) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } n = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \Big\{ \frac{\cos 2x}{4-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + ... + \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} + ... \Big\}.$$

2) Montrons que f est développable en série de Fourier. On a f est régulière puisque f est continue pour tout x.

i) Vérifions les conditions de théorème de Dirichlet, on a

$$|f(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii) Considérons maintenant l'intervalle $[-\pi,\pi[$ que l'on peut partager en trois intervalles $[-\pi,0[$, $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $[\frac{\pi}{2},\pi[$.
Dans chacun des ouverts $]-\pi,0[$, $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $]\frac{\pi}{2},\pi[$, la fonction f est bien continue et monotone.
D'aprés le théorème de Dirichlet, cette fonction sera développable en série de Fourier. Donc

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5.4}$$

De plus $f(x)$ étant continue sur $[0,2\pi]$, éxtrémités comprises (puisque elle est continue pour tout x), on est assuré que la série de Fourier converge uniformément vers sa somme $f(x)$ sur $[0,2\pi]$. Ceci entraine la convergence uniforme pour tout x.
3) Pour calculer $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, il suffit de faire $x=\frac{\pi}{2}$ dans (5.4), on trouve

$$f(\frac{\pi}{2})=1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

Ainsi

$$S=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

Exercice2: 1) Montrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de période 2π, définie dans $[0,2\pi[$ par

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\pi}{2} & \text{si } \ x\in]0,2\pi[,\\ 0 \quad \text{si} \ \ x=0.\end{cases}$$

est développable en série de Fourier. Déterminer cette série ainsi que les domaines de convergence uniforme.
2) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de période 2π, intégrable sur $[0,2\pi]$, nulle au voisinage de 0 et de 2π.
A f on associe sa série de Fourier

$$\frac{a_0(f)}{2}+a_1(f)\cos x+b_1(f)\sin x+...$$

Montrer que l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\pi-t}{2}dt.$$

Solution:
1) La fontion F est régulière. En effet, elle n'admet que 0 comme point de discontinuité dans $[0,2\pi[$, et l'on a

$$\frac{F(0^+)+F(0^-)}{2}=\frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}=0=F(0).$$

De plus, elle satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet, car
i) $|F(x)| \leq \frac{\pi}{2}$,
ii) $F(x)$ est monotone et continue dans $]0, 2\pi[$.
donc elle est développable en série de Fourier. On a alors

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \forall x,$$

avec $a_n = 0$, car F est impaire et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{n}.$$

Donc

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x,$$

avec convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}$ sur tout fermé $[\alpha_k, \beta_k]$ inclus dans $]2k\pi, (2k+2)\pi[$, $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Soit $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx$. Puisque f est nulle au voisinage de 0 et de 2π, alors il est clair que l'on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{n} &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}\Big)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha_0} f(x)\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}\Big)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x)\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}\Big)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\beta_0}^{2\pi} f(x)\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}\Big)dx \ . \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x)\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}\Big)dx
\end{aligned}$$

En raison de convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ sur $[\alpha_0, \beta_0]$, on aura

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\Big)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x)\frac{\pi - x}{2}dx.$$

f étant nul sur $[0, \alpha_0]$ et $[\beta_0, 2\pi]$, on peut encore écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\frac{\pi - x}{2}dx.$$

Exercice3: Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = x^2.$$

1) Calculer les coéfficients de Fourier de f.
2) Écrire le developpement en série de Fourier de f.
3) En déduire la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution:

1) La fonction f est paire donc $b_n = 0, \quad \forall n \geq 1$. Donc

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

2) Le fait que f est continue $\forall x$, alors elle est régulière et satisfait aux hypothèses du théoréme de Dirichlet. Elle est donc développable en série de Fourier.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

3) a) S'il on fait $x = \pi$, on obtient

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) La fonction f est intégrable et bornée, on peut donc appliquer l'égalité de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}.$$

Ce qui implique que

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5.4 Exercices non résolus

Exercice1: On considère la fonction f de période 2π et qui est définie dans $[-\pi, \pi[$ par

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & si\ |x| < \pi, \\ 0 & si\ x = -\pi. \end{cases}$$

1) Montrer que f est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

2) a) Montrer que cette série converge uniformément dans tout fermé $[\alpha, \beta]$ inclus dans $]-\pi, \pi[$.

b) Montrer que l'on ne peut avoir la convergence uniforme sur $[-\pi, \pi[$.

Exercice2: On considère la série de terme général

$$\frac{\sin^3 nx}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1) Vérifier que cette série est convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. Soit S sa somme.

Montrer que S est de classe C^∞.

b) Montrer que S est développable en série de Fourier et trouver son développement.

c) Expliciter S.

Exercice3: Soit α un réel, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ et f la fonction de période 2π définie dans $[-\pi, \pi[$ par

$$x \mapsto f(x) = \cos \alpha x.$$

1) Vérifier que f est continue pour tout x. Montrer qu'elle est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

2) Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, en utilisant

a) Une étude directe.

b) Le théorème de Dirichlet.

3) Vérifier que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

4) Déterminer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - b_n \frac{\cos nx}{n} \right),$$

où a_n et b_n sont les coéfficients de Fourier de f, et en donner une représentation graphique.

Exercice4: On considère une fonction définie, continue et à variation bornée sur $[0, \pi]$.

1) Montrer que l'on peut trouver de plusieurs façons deux suites numériques réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \forall x \in [0, \pi],$$

la série étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$.

2) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une seule telle que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx, \quad \forall x \in [0, \pi],$$

la série étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$.

3) Montrer qu'on ne peut, en général, trouver une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx, \quad \forall x \in [0, \pi],$$

la série étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi?

Bibliographie

[1] K.Allab, *Eléments d'Analyse: fonction d'une variable réelle*, O.P.U, 2002.

[2] J.Arnaudiès, *Séries entières, séries de Puiseux, séries de Fourier - Et compléments sur les fonctions presque-périodiques, 2e cycle universitaire, agrégations de mathématiques*, ellipses Marketing, 1999.

[3] S.Balac, L.Chupin, *Analyse et algèbre: Cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple*, PPUR presses polytechniques, 2008.

[4] J.Colin, J.Morvan, R.Morvan, *Formules de Taylor, Développement limité: Exercices corrigés avec rappels de cours*, Cépaduès, 2008.

[5] R.Dupont, *Mathématiques. Séries, séries entières, séries de Fourier, 64 exercices corrigés, rappels de cours, formulaires pratiques*, Vuibert, 1991.

[6] M.El-Amrani, *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions*, ellipses, 2011.

[7] J.Genet, G.Pupion, *Analyse Moderne: Résumé de cours et exercices corrigés*, Tome 1, Edition Vuibert, 1972.

[8] S.Guerre-Delabrière, *Suites, séries, intégrales: Cours et exercices corrigés niveau L2*, ellipses, 2009

[9] F.Liret, D.Martinais, *Mathématiques à l'université-Analyse 2ème année: Cours et exercices avec solutions*, Licence 2ème année MIAS, MASS et SM, Dunod, 2004.

[10] J.p.Marco, P.Thieullen, J.A Weil, *Mathématiques L2: Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*, Pearson, 2007.

[11] F.Monna, G.Monna, *suites et séries de fonctions: Exercices corrigés avec rappels de cours*, Cépaduès, 2013.

[12] N.Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1 et 2, Editions Mir, Moscou 1980 ou Edition Ellipses 1993.

[13] D.Prochasson, *Analyse 2ème année: Exercices corrigés*, Dunod, 2000.

[14] M.De Segonzac, G.Monna, R.Morvan, *Séries numériques: Exercices corrigés avec rappels de cours*, Cépaduès, 2010.

[15] M.R.Spiegel, *Analyse: Cours et Problèmes- 925 problèmes résolus*, Edition Schaum, 1993.