

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Centre Universitaire d'Ain Temouchent

المركز الجامعي لعين تموشنت



Institut des Sciences et de la Technologie

Département science de la matière

Filière de physique

MEMOIRE DE PROJET DE FIN D'ETUDES
Pour l'obtention du diplôme de Master en :

Physique des matériaux et ces applications .

Thème

Analyse par la méthode des élément finis du
comportement vibratoire d'une barre en matériau FGM

Al_2O_3 - SuS304

Présenté Par :

* Nom & Prénom : abdelkrim chikh imane *

Présidente du jury : M^m Benyahia Karima

Examineur : M^m Fekih Zakia

Encadreur : M^r Assem Hacem

Date : 25 / 06 / 2019

Année universitaire 2018/2019

Dédicace :

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère **Aichouche**. Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon père Mohammed que dieu lui donne sante et courage .

A mes très chers frères **Ahmed** et **Abdelkader** Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage.

A ma grand-mère, mes oncles et ma tante. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A tous les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant. Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Sans oublier mon collègue **Abderezek** pour son soutien moral, et leurs conseils tout au long de mon travail.

Remercîment :



Avant tout, Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **ASSEM**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Mes sincères gratitudees à Mme **Benyahia** pour la qualité de son enseignement, et son intérêt incontestable qu'il porte à tous les étudiants.

Je remercie également mes professeurs pour la qualité de l'enseignement qu'ils m'ont prodigué au cours de ces cinq années passées à l'université.

Je remercie ma très chère mère, **Aichouche**, qui est toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier »

Je tiens à remercier **Wassila, Hiziya et Sarra**, pour leur amitié, leur soutien inconditionnel et leur encouragement

Un grand merci à mes collègues **Abderezek** et **Mohammed** pour les conseils concernant la base de données, ils ont grandement facilité mon travail.

Enfin ; Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues . qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche. . Parmi eux **Rahmouna , Houda** et ma préféré **Narimen**.

Résume :

Ce travail a pour Object d'étudié le comportement vibratoire des matériaux FGM et de la composition graduelle du mélange métal céramique constituant une barre cylindrique à protection externe en céramique et travaillant sous l'influence de la température, Pour modéliser cette structure Une Analyse numérique basée sur la méthode des éléments finis version p est appliquée, Une étude théorique et cinématique sur le model est faite pour l'établissement de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation du système nécessaires a la détermination des équations du mouvement par les équations de Lagrange. Un programme Mathcad est élaboré pour le calcul des fréquences propres du système en fonction de l'indice représentant la composition graduelle du volume fraction métal-céramique pour divers températures. L'interprétation des résultats obtenus montre l'exactitude et l'efficacité de la version p de la méthode des éléments finis utilisée pour cette analyse numérique.

Abstract:

This work aims to study the vibratory behavior of FGM materials and the gradual composition of the ceramic metal mixture constituting a cylindrical bar with external protection in ceramic and working under the influence of temperature, to model this structure. A numerical analysis based on the finite element method version p is applied. A theoretical and kinematical study on the model is made for the establishment of the kinetic energy and the strain energy of the system necessary for the determination of equations of motion by the equations of Lagrange. A Mathcad program is developed for calculating the frequencies of the system according to the index representing the gradual composition of the metal-ceramic fraction volume for various temperatures. The interpretation of the results obtained shows the accuracy and efficiency of the p version of the finite element method used for this numerical analysis.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة السلوك الاهتزازي لمواد والتكوين التدريجي لمزيج المعدن الخزفي الذي يشكل قضيب أسطواني مزود بحماية خارجية من السيراميك ويعمل تحت تأثير درجة الحرارة ، لتصميم هذا الهيكل. يتم تطبيق نسخة نظرية العنصر الحركي ، تم إجراء دراسة نظرية وحركية على النموذج لتكوين الطاقة الحركية وطاقة إجهاد النظام اللازمة لتحديد معادلات الحركة بواسطة لحساب التكرار الذاتي للنظام وفقاً للمؤشر الذي يمثل التكوين التدريجي لحجم الكسر Matlab المعادلات. لا غرانج. تم تطوير برنامج من طريقة العناصر المحددة p المعدني الخزفي لدرجات حرارة مختلفة. يوضح تفسير النتائج التي تم الحصول عليها بدقة وكفاءة النسخة المستخدمة في هذا التحليل العددي.

SOMMAIRE

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE :

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE :.....	2
Modélisation par la méthode des élément finis.....	4
Matériaux composites :.....	6
Inconvénient des matériaux composites:.....	7
Idée conceptuelle sur les FGM :.....	7
Applications des FGM :.....	9

Chapitre 1

Céramiques-Matériaux à gradients de propriété

1.Présentation et énumération des céramiques techniques :.....	11
1.1/.Céramique utilisée dans le domaine électrique :.....	12
1.2/. Les divers types de céramiques techniques :.....	14
1.3/. Matériaux a gradients de propriétés :	17
1.3.1/ Définition des matériaux à gradient de propriétés FGM :.....	18
1.3.2/ Intérêt des matériaux à gradient de propriétés :.....	19
1.4/ Propriétés effectives des matériaux à fonctionnel gradues.....	21
1.5/Propriété des matériaux FGM :.....	22
1.5.1/ Propriétés matérielles des structures P-FGM :.....	22
1.5.2/ Propriétés matérielles des structures S-FGM.....	25
1.5.3/ Propriétés matérielles des structures E-FGM.....	26
1.6/ Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :.....	27
1.6.1/Technique de dépôt de vapeur :.....	27

1.6.2/Métallurgie des poudres (PM) :.....	28
1.6.3/Méthode de la coulée centrifuge :.....	30
1.6.4/Méthode de fabrication en forme de Solid Freeform (SFF) :.....	30
1.7/ Domaines d'applications des FGM :.....	31
1.7.1/ Aérospatiale.....	31
1.7.2/ Médecine.....	31
1.7.3/ Défense.....	32
1.7.4/Énergie.....	32
1.7.5/ Optoélectronique.....	32
1.7.6/ Autres applications.....	32
1.7.7/ Conclusion.....	33
1.8/- Influence de la température :.....	34

Chapitre 2

Formulation par la méthode des éléments Finis

2.1/ Introduction générale :.....	37
2.2/ Théorie pratique :.....	37
2.3/ Équation aux dérivées partielles :.....	40
2.4/ Démarche générale.....	40
2.5/ Interpolation des fonctions.....	42
2.6/ Position du problème:.....	43
2.7/ Champs des déplacements :.....	45
2.8/ Fonctions de forme :.....	47
2.9/ Formulation par éléments finis de l'arbre :.....	48
2.10/ Détermination des matrices :.....	49
2.10.1/ Matrice masse $[M_A]$:.....	50
2.10.2/ Matrice raideur de l'arbre $[K_A]$:.....	50

2.11/ Equation du mouvement	51
2.12/ Forme des matrices	52
2.12.1/ La matrice raideur $[K_A]$ de l'arbre :.....	52
2.12.2/ Matrices masses de l'arbre $[M_A]$:.....	52
2.13/ Description du problème aux valeurs propres :.....	52

Chapitre 3

Résultats et interprétations

3.1/ Introduction :.....	55
3.2/ Organisation de la programmation :.....	55
3.2.1/ Rotor avec un disque au milieu :.....	56
3.2.2/ Arbre étagée :.....	56
3.3 Outils de programmation :.....	57
3.4 Programme principal :.....	57
3.5 Algorithme de Programmation :.....	57
3.6 Description du programme :.....	57
3-6-1. Données géométriques :.....	58
3-6-2 Lecture des données :.....	58
3.7 Paramètres de modélisation:.....	59
3.8 Lecture des fonctions de formes :	59
3.9 Dérivé des fonctions de formes :	59
3.10 Calcul de toutes les intégrales :.....	59
3.11 Formation des matrices :.....	59

3.12 Introduction des conditions aux limites :.....	60
3.13 Transformation du problème aux valeurs propres a un problème aux Valeurs standard.....	60
3.14 Propriétés structurelles et géométriques :.....	60
3.14.1- propriétés géométriques.....	60
3.14.2- Propriétés structureles.....	60
3.15 Affichage des résultats.	61
Conclusion.....	67

Liste des figures

Chapitre 1

Céramiques-Matériaux à gradients de propriété

Fig.1.1 : Graduation naturelle des matériaux constituant le Bambou.....	18.
Fig.1.2 : Graduation naturelle des matériaux constituant un os.....	19
Fig.1.3 : Fémure humain et prothese artificielle en materiaux FGM.....	19
Fig.1.4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à fonctionnel gradues FGM.....	22
Fig.1.5 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure P-FGM.....	24
Fig.1.6 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure S-FGM.....	26
Fig.1.7 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure E-FGM.....	27.
Fig.1.8 : Exemple de processus de fabrication typique de FGM par la méthode de la métallurgie des poudres. (Y. Watanabe, 2011).....	29
Fig.1.9 : Trois types de méthodes de fabrication des FGM sous la force centrifuge (A) Méthode centrifuge, (b) Méthode de bouillie centrifuge, (c) Méthode de pressurisation centrifuge (Y. Watanabe et al, 2011).....	30
Fig.1.10 : Les principaux domaines d'application des FGM. (Bessaim, 2014).....	33

Chapitre 2

Formulation par la méthode des éléments Finis

Fig.2.1 : Pièce volumique maillée par des tétraèdres.....	41
Fig.2.2 : Exemples d'éléments finis linéaires.....	41
Fig. 2.3 : Représentation d'un élément de poutre de type p.....	44
Fig. 2.4 : déformation de l'arbre dans le plan XOY	46

Fig.2.5 : déformation de l'arbre dans le plan <i>ZOY</i>	46
Fig 2.7 : Degrés de libertés d'un élément arbre.....	48

Chapitre 3

Résultats et interprétations

Fig 3.1 : Deux Eléments de références a étudier	55
Fig 3.2 : Arbre a deux éléments de références ayant les mêmes Caractéristiques physiques et géométriques.....	56
Fig 3.3 : Ligne d'arbre avec plusieurs éléments ayant des caractéristiques physiques et géométriques quelconques.....	56
Fig 3.4 : Variation des propriétés FGM en fonction de l'indice k du volume fraction.....	61
Fig 3.5 : Influence de la température sur la 1 ^{ère} fréquence propre du rotor FGM pour divers volumes fractions.....	62
Fig 3.6 : Influence de la température sur la 2 ^{ème} fréquence propre du rotor FGM pour divers volumes fractions.....	63
Fig 3.7 : Influence de la température sur la 8 ^{ème} fréquence propre du rotor FGM pour divers indices k de volumes fractions.....	64
Fig3.8 : Influence de Indice k du volume fraction sur les fréquences propres du rotor FGM pour divers températures (1 ^{ère} fréquence).....	65

Liste des tableaux

Chapitre 1

Céramiques-Matériaux à gradients de propriété

Tab 1.1 : Les céramiques Techniques pour l'électrotechnique	12
Tab 1.2 : Les céramiques Techniques pour le Thermique.....	13
Tab 1.3 : Les céramiques Techniques pour la Thermomécanique optique.....	13
Tab 1.4 : Les céramiques Techniques pour la biomédical et le nucléaire militaire.....	14
Tab 1.5 : Les composés d'oxyde d'aluminium et oxyde de beryllium.....	14
Tab 1.6 : Les composés d'oxyde de césium, cegrom et cobalt.....	15
Tab 1.7 : Les composés d'oxyde d'étain, de fer et d'euporium.....	15
Tab 1.8 : Les composés d'oxyde de Nickel, manganese et magnesium.....	16
Tab 1.9 : Les composés d'oxyde de zinc, de Titane et de vanadium.....	16
Tab 1.10 : Les composés d'oxyde de zirconium.....	16
Tab.1.11 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	21
Tab1.12 : les coefficients de température T pour l'oxyde d'aluminium.....	35

Chapitre 3

Résultats et interprétations

Tab 3-1 : conditions de compatibilités en déplacement et en rotation.....	59
Tab 3.2 : Propriétés des matériaux constituant la composition fgm du matériaux.....	60
Tab3.3 : Coefficients de Température des propriétés constituant la composition fgm du matériaux..	60

Liste des Notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
Z	la coordonnée suivant l'épaisseur
Z_{ms}	la coordonnée suivant l'épaisseur en surface du milieu de la structure
Z_{ns}	la coordonnée suivant l'épaisseur en surface neutre de la structure
V_C	La fraction volumique de la céramique
C	la distance entre la surface neutre et la surface médiane
P	propriétés matérielles non-homogènes de la structure
P_t	propriétés matérielles correspondantes à la surface supérieure de la nanostructure
P_b	propriétés matérielles correspondantes à la surface inférieure de la nanostructure
W	Déplacement transversal
u_0	Déplacement axial le long du plan médian de la nanostructure
ν	Coefficient de Poisson
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	La fraction volumique des matériaux FGM
k	Indice matériel
L	Longueur de la structure en FGM
b	Largeur de la structure en FGM
h	Epaisseur de la structure en FGM
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
w_b, w_s	Composante de déplacement transversal de flexion et de cisaillement
w_{st}	Composante de déplacement transversal d'étirement
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
ρ	Densité du matériau
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
U	Energie potentielle totale
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
Q_{ij}	Coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
q	Charge transversale
$\varphi(x, t)$	Déplacement supplémentaire due à l'effet de la contrainte normale
I_i, J_i, K_i	les inerties massiques
$U_m, W_{bm}, W_{sm}, \Phi_{stm}$	Paramètres arbitraires
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
μ	Paramètre non local
e_0	constante appropriée à chaque matériau
a	longueur caractéristique interne
w	flèche maximale non dimensionnelle
ω	Fréquence fondamentale non-dimensionnelle

INTRODUCTION
Revue Bibliographique

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE :

Les matériaux à gradients de propriétés appelés aussi FGM (Functionally graded materials) représentent un des derniers développements des scientifiques de la physique des matériaux, la révolution et la conception de ces matériaux définit au 21^{ème} siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications. Les matériaux composites à gradients de propriétés évolués offrent de nombreuses propriétés supérieures aux matériaux classiques, comme les grandes charges et la rigidité spécifique élevée, légèreté et la résistance aux hautes températures ou effets de barrières thermiques. Au début pour acquérir cette dernière propriété de barrières thermique, les concepteurs et les scientifiques utilisés des matériaux isotropes a traitement surfacique contre les hautes températures ou des carreaux ou des tuiles en céramiques collées a la surfaces des structures nécessitants une protection thermique externe dans l'aéronautique pour la construction des avions et dans l'aérospatiale pour la construction des navettes spatiales et des structures spatiales. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut être collée à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement jouant le rôle de barrière thermique dans des applications à haute température. Toutefois, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire et peut conduire à la déformation plastique ou de fissuration entraînant le décollement de ces protections surfaciques conduisant a des accidents graves et mortels cas de l'explosion de la navette spatiale Columbia en 1989 et de sa désintégration complète en plein espace. Pour surmonter ces effets nuisibles on doit utiliser les matériaux à gradient de propriétés évolués FGM qui sont des matériaux composites constitués généralement par au moins de deux matériaux présentant des propriétés différentes et recherchées. Par exemple, dans un FGM (métal / céramique), le premier matériau métal riche par sa dureté est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté ; doivent être élevée. En revanche, le céramique riche, avec une conductivité thermique faible peut résister aux températures plus élevées, et par conséquent il est utilisé dans les régions fortement exposées à la température.

Les FGM permettre l'adaptation de la composition du matériel de manière à en retirer le maximum d'avantages de leur hétérogénéité.

En outre, d'autres aspects d'exécution peuvent être améliorés en utilisant un FGM, par exemple, réduction de la température dans la phase de cuivre pour empêcher l'adoucissement

thermique excessif du matériel, d'autres applications de FGM incluent des composants utilisés la construction avionique et les navettes aérospatiales.

L'histoire du développement de notre société et de la culture scientifiques montre clairement que la physique des matériaux et la science des matériaux ont joué un rôle essentiel. L'utilisation scientifique des matériaux de base disponibles en divers composés inorganiques et organiques a fait le chemin pour le développement des polymères avancés, les alliages, les céramiques d'ingénierie structurelles, etc. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des matériaux de pointe dans la famille des matériaux composites d'ingénierie, constitués en deux ou plusieurs phases de composition continue et variable. Ces matériaux avancés avec des gradients de la composition, de la structure ou des propriétés spécifiques dans une direction préférée, sont caractéristiquement supérieurs aux matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la matière, varie en douceur et de façon continue dans des directions préférées dans les FGMs. Les FGM ont été développés en combinant les matériaux d'ingénierie de pointe sous la forme de particules, de fibres, ou des plaquettes. Dans le processus de continuité pour assurer toutes les performances structurelles recherchées. les FGM sont développés pour adapter l'architecture matérielle à l'échelle microscopique et pour optimiser certaines propriétés fonctionnelles des structures. Ces matériaux gagnent des larges applications dans diverses branches comme l'aérospatiale ; l'aéronautique et de l'ingénierie et de la technologie en vue d'en faire usage approprié dans la meilleure façon que possible. Les matériaux a structures composites ou graduelle sont de plus en plus utilisés dans les domaines de l'ingénierie de pointe, principalement en raison de leur rapport rigidité / légèreté particulièrement favorable. Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composite dénommés matériaux a gradient fonctionnels (FGM) a récemment été proposée. Ses diverses propriétés varient en continu dans le sens radial et dans l'épaisseur, ce qui évite les faiblesses de l'interface. La graduation des propriétés de ces matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les concentrations de contraintes. Une structure à niveaux fonctionnels est définie comme étant celle dans laquelle les fractions volumiques de deux matériaux ou plus varient continuellement en fonction de la position le long de certaines dimensions (typiquement le rayon et l'épaisseur) de la structure afin de réaliser une fonction

requis. Les FGM peuvent fournir aux concepteurs une réponse matérielle adaptée et des performances exceptionnelles dans les environnements thermiques.

En raison de leur résistance thermique élevée, de leur rigidité élevée et de leurs caractéristiques de faible densité, les arbres de rotor FGM ont été recherchés en tant que nouveaux candidats potentiels pour le remplacement des arbres métalliques conventionnels dans de nombreux domaines d'application pour la conception de composants mécaniques rotatifs, tels que l'arbre de transmission pour hélicoptères et voitures et moteurs à réaction, machines tournantes commerciales et militaires, véhicules aérospatiaux, véhicules spatiaux, etc. Dans les applications Rotor-dynamiques, les composites ont été démontrés à la fois numériquement et expérimentalement. Des chercheurs ont également développé des matériaux composites de pointe et divers modèles mathématiques pour l'étude du comportement physique des matériaux FGM dans l'ingénierie des arbres fixes et tournant tel que la méthode analytique de Rayleigh Ritz et la méthode des éléments finis (MEF) classique ou version H, version P, ou version HP, ces modèles mathématiques sont aussi appelés technique de Modélisation.

Modélisation par la méthode des éléments finis :

Le développement de calcul par éléments finis a incité beaucoup de scientifiques

à développer leurs recherches sur cet axe qui est connu par deux types de versions et leurs combinaisons qui sont :

Versión h : dans cette version le nombre de fonction de forme est fixé pour chaque élément et les fonctions de formes sont des polynômes linéaires.

Versión p : appelée aussi méthode des éléments finis hiérarchique –MEFH, les degrés des fonctions polynomiales peuvent être augmentés tout en gardant la taille de la maille constante, généralement le degré polynomiale est noté par "P" cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide .

Versión h-p : Une approximation d'éléments finis $U_h = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i$ est dite hiérarchique si le passage du nœud 'n' à celui 'n+1' n'altère pas les fonctions de formes N_i ($i=1,2,\dots,n$) , cette formulation présente plusieurs avantages [01] et beaucoup de chercheurs scientifiques se sont focalisés sur cet axe et ont donné naissance à plusieurs codes d'éléments finis on cite le

Probe [02] et le Fiesta [03] Szabo et Babuska [04] ont publié un manuel sur ces deux versions,

F.Cugnon et P.Beckers [05] ont donné une comparaison entre ces deux versions et leurs combinaisons pour donner la version h-p

V.Heuveline et Rannacher [06] ont travaillé sur la version h-p de la méthode des éléments finis

M.Suri [07] a utilisé la version h-p de la méthode des éléments finis pour les coques, pour cette étude, on utilise une modélisation type éléments finis hiérarchique trigonométriques [01] l'auteur montre l'avantage de ces fonctions par rapport aux fonctions polynomiales.

Ces recherches ont été accélérées surtout par les scientifiques. Wu et al. [10] ont utilisé la méthode semi-inverse pour trouver les solutions à l'équation dynamique d'un matériau FGM à graduation axiale d'une poutre. Aydogdu [11] a analysé les vibrations et le flambement des matériaux FGM à graduation axiale des poutres axialement simplement soutenu en utilisant la méthode semi-inverse. Huang et Li [12] ont présenté une nouvelle approche pour la vibration libre des poutres gradués axialement fonctionnellement non uniformes. Alshorbgy et Al. [13] ont étudié les caractéristiques dynamiques des poutres gradués non uniformes présentant une graduation du matériau axialement ou transversalement dans l'épaisseur. Shahba et al. [14] a étudié l'analyse de la vibration libre et de la stabilité des poutres coniques AFG Timoshenko en utilisant méthode des éléments finis. Hein et Feklistova [15] ont étudié les vibrations libres non uniformes des poutres axiale Functionally graded AFG utilisant des ondelettes de Haar. Şimşek et al. [16] ont étudié le comportement dynamique d'un AFG faisceau sous l'action d'une charge harmonique en mouvement. Shahba et Rajasekaran [17] ont étudié le comportement vibratoire en stabilité des poutres coniques AFG Euler-Bernoulli. Huang et al. [18] a présenté une nouvelle approche pour étudier le comportement vibratoire des poutres AFG Timoshenko avec non International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS) Vol.6, Issue 3 (2014) 37-5138 section uniforme. La vibration libre de faisceaux axialement inhomogènes est analysée par Li et al. [19] Rajasekaran [20,21] a étudié la vibration en flexion libre des poutres coniques et non uniformes AFG en utilisant le procédé de transformation différentielle et la méthode d'élément quadrature différentielle. Akgöz et

Civalek [22] ont étudié la réponse en vibration d'AFG conique microfaisceaux en association avec la théorie de la contrainte de couple de Bernoulli-Euler et modifiée utilisant la méthode

de la solution de Rayleigh-Ritz. Nguyen [23] c'est focalisé sur l'analyse des grands déplacements des poutres coniques cantilever AFG en utilisant la méthode des éléments finis. Babilio [24] a présenté la dynamique d'un faisceau AFG simplement supporté sous une charge axiale dépendant du temps. Rajasekaran et Norouzzadeh Tochaei [25] ont présenté les caractéristiques de vibration libre de coniques et AFG Poutres Timoshenko en utilisant la méthode des éléments de transformation différentielle méthode des éléments en quadrature du plus bas ordre. Dans cette étude, les caractéristiques de vibration libre d'un faisceau AFG en porte-à-faux soumis à des l'augmentation de la température sont étudiés sous l'effet des propriétés dépendantes de la température du matériau. Le problème considéré est étudié dans la théorie des faisceaux de Bernoulli-Euler en utilisant méthode des éléments finis basée sur l'énergie. Les propriétés matérielles du faisceau changent dans le sens direction axiale selon une fonction de loi de puissance. Dans l'étude, les effets du matériau les distributions et la température montante sur les trois premières fréquences propres et les formes de mode sont présenté pour faisceau AFG.

Matériaux composites :

Les matériaux composites sont formés en combinant deux matériaux ou plus sur une forme à l'échelle microscopique et leurs constituants ne se dissolvent pas et ne se fondent pas les uns dans les autres, pour obtenir des propriétés améliorées supérieures. Ceux-ci sont largement utilisés dans diverses structures, notamment les véhicules militaires et aérospatiaux, les navires de réacteur nucléaire, les pièces de turbines, les bâtiments et les autoroutes intelligentes (applications d'infrastructures civiles), ainsi que dans les équipements sportifs et les prothèses médicales. Les structures composites stratifiées sont constituées de plusieurs couches de différents stratifiés renforcés par des fibres liées entre elles pour obtenir les propriétés structurelles souhaitées (par exemple, rigidité, résistance, résistance à l'usure, CTE, conductivité thermique, amortissement, etc.). En variant l'épaisseur de la lamelle, les propriétés du matériau de la lamelle et la séquence d'empilement, il est possible d'obtenir les propriétés structurelles souhaitées. L'utilisation accrue de composites stratifiés dans divers types de structures a suscité un intérêt considérable dans leur analyse. Les matériaux composites présentent des rapports résistance / poids et rigidité / poids élevés, ce qui les rend idéaux pour une utilisation dans les environnements sensibles au poids.

Inconvénient des matériaux composites:

Bien que les composites stratifiés offrent de nombreux avantages par rapport aux matériaux conventionnels, leur principal inconvénient est toutefois représenté par les contraintes cycliques répétées, la charge d'impact, etc. (mécanismes de rupture des matériaux composites). Cela peut entraîner une défaillance de la structure. Des problèmes supplémentaires incluent la présence de contraintes résiduelles dues à la différence de coefficient de dilatation thermique et de coefficient de dilatation de la fibre et de la matrice. La constitution anisotrope de structures composites stratifiées entraîne souvent des concentrations de contraintes proches du matériau et de l'interface géométrique pouvant entraîner des dommages sous forme de délaminage, de fissuration de la matrice et de séparation par collage. Ces problèmes peuvent être réduits si le changement soudain des propriétés du matériau est empêché.

Idée conceptuelle sur les FGM :

Les premiers concepts de FGM sont venus du Japon en 1984 lors d'un projet d'avion spatial. Là, une combinaison de matériaux utilisés ferait office de barrière thermique capable de résister à une température de surface de 2 000 K et à un gradient de température de 1 000 K sur une section de 10 mm. Récemment, le concept des MGF est devenu plus populaire en Europe (Allemagne). Un centre de recherche collaboratif Transrégional (SFB Transrégional) est financé depuis 2006 afin d'exploiter le potentiel du calibrage de mono-matériaux, tels que l'acier, l'aluminium et le polypropylène, en utilisant des procédés de fabrication à couplage thermomécanique.

Les matériaux à classification fonctionnelle (FGM) sont des matériaux composites dans lesquels la composition ou la microstructure varie localement, de sorte qu'une certaine variation des propriétés du matériau local est obtenue. Les MGF sont également définies comme celles dans lesquelles la fraction volumique de deux matériaux ou plus est obtenue de manière continue en fonction de la position dans certaines directions de la structure pour atteindre une fonction requise (par exemple un mélange de céramique et de métal). Il est matériellement hétérogène, ce qui est défini pour les objets avec et / ou plusieurs objets matériels avec un domaine matériel clair. En classant les propriétés des matériaux de manière continue, l'effet des contraintes inter-laminaires développées aux interfaces du composite

stratifié en raison du changement brusque des propriétés des matériaux entre des laminas voisines est atténué.

Autant d'éléments à paroi mince, c'est-à-dire les plaques et les coques utilisées dans les cuves de réacteur, les turbines et autres pièces de machine, sont susceptibles de se rompre en raison du flambage, de déviations de grande amplitude ou de contraintes excessives induites par un chargement thermique ou thermo-mécanique combiné. Ainsi, les MGF sont principalement utilisées dans des structures soumises à des températures extrêmes ou à des gradients de température élevés. Elles sont principalement fabriquées à partir de composants isotropes tels que des métaux et des céramiques, le rôle de la partie métallique servant de support à la structure, tandis que les céramiques offrent une protection thermique dans les environnements à fortes gradients thermiques (par exemple, les cuves de réacteurs, le secteur des semi-conducteurs). résistance à la corrosion, tandis que le métal fournit la force et la ténacité.

Quels que soient les problèmes rencontrés lors de l'utilisation de matériaux composites, ces problèmes peuvent être considérablement réduits en utilisant des FGM au lieu de matériaux composites, car les FGM modifient les propriétés des matériaux d'une surface à l'autre ou d'une couche à l'autre. Les MGF sont de nouveaux composites multifonctionnels avancés dans lesquels les fractions volumiques de la ou des phases de renforcement varient régulièrement. De plus, les MGF permettent certaines propriétés supérieures et multiples sans aucune interface mécanique faible. Ce nouveau concept de matériaux repose sur la science des matériaux et la mécanique en raison de l'intégration des considérations relatives aux matériaux et à la structure dans la conception finale du composant structurel. De plus, le changement progressif de propriétés peut être adapté à différentes applications et environnements de service.

Applications des FGM :

En raison des progrès technologiques, il est nécessaire que les capacités avancées des matériaux deviennent une priorité dans le domaine de l'ingénierie pour les systèmes plus performants. Les MGF sont des matériaux relativement nouveaux et sont à l'étude pour une utilisation dans des applications à haute température. Les MGF constituent une vaste gamme d'applications dans les pratiques d'ingénierie qui exigent que les performances des matériaux varient en fonction de l'emplacement du composant. Les applications suivantes sont remarquables telles que,

- 1) Domaine aérospatial (plans spatiaux, structures spatiales, réacteurs nucléaires, isolants pour les structures de refroidissement, peaux aérospatiales, composants de moteurs de fusée, contrôle de vibration, structures adaptatives, etc.).
- 2) Domaine d'ingénierie (lame de turbine, arbre, outil de coupe, etc.)
- 3) champ optique (fibre optique, lentille, etc.)
- 4) Domaine de l'électronique (capteur, semi-conducteur à bande graduée, substrat, etc.)
- 5) Champ chimique (échangeur de chaleur, cuve de réacteur, caloduc, etc.)
- 6) Domaine des biomatériaux (peau artificielle, système d'administration du médicament, prothèses, etc.)
- 7) produits de base (matériaux de construction, articles de sport, carrosserie, etc.)
- 8) Conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermo-ionique, piles à combustible, cellules solaires, etc.)
- 9) optoélectronique
- 10) piézoélectricité

Chapitre I

Céramiques-Matériaux à gradients de propriété

1/.Présentation et énumération des céramiques techniques :

Technique millénaire, la *céramique* (du grec *keramikos*, « argile cuite ») est le premier matériau que l'homme ait fabriqué par transformation de matières premières. C'est l'art dont les procédés ont le moins changé : on façonne une pâte que l'on cuit dans un four pour effectuer la transmutation de matière qui aboutira à un objet de céramique. Les céramiques doivent leurs qualités distinctives tant à la composition de la pâte qu'aux modalités de cuisson. Les nuances de couleurs, les variétés d'aspect dépendent des composants de la pâte.

Les métalloïdes qu'ils contiennent provoquent des réactions colores différentes suivant que l'on opère la cuisson en atmosphère oxydante ou réductrice.

Les premières céramiques employées étaient les *silicates*. Elles étaient utilisées pour les poteries émaillées. Elles ont connu ensuite une utilisation plus étendue allant de la porcelaine aux appareils sanitaires. Les **oxydes** purs, les **carbures**, les **borures**, les **nitrures**, les **siliciures**, les **sulfures** ont été successivement inclus dans la catégorie des céramiques. Il faut, tout de même, distinguer deux types de matériaux :

- les *céramiques traditionnelles* (silico-alumineux), qui sont issues de matières premières naturelles (argile, feldspath, kaolin, quartz) et généralement mises en œuvre par coulée (barbotine),
- les *céramiques techniques* (associations métal-métalloïde), obtenues le plus souvent par **frittage** (traitement thermomécanique qui, dans un premier temps, provoque la cohésion de granules de poudre avec un « aggloméré » préparé par compression à froid, cette ébauche étant ensuite chauffée dans

des fours spéciaux) ou **électrofusion** (les oxydes sont coulés directement dans un moule).

Nous nous intéresserons à ces dernières. Elles sont apparues car les céramistes ont été sollicités pour développer de nouveaux matériaux très fiables, très performants et nécessitant l'utilisation de nouvelles technologies. Elles mettent à profit leurs propriétés électriques, isolantes, magnétiques, optiques, supraconductrices, thermiques, thermomécaniques...

Ces matériaux associent des liaisons covalentes et ioniques. Ce sont des solides Ionocovalents, mais qui peuvent avoir parfois un caractère métallique. Du point de vue de leur composition chimique, les composés céramiques sont des associations *métal-métalloïde*. Convient de faire la différence entre un métal et un composé métallique qui peut être une céramique.

Nous avons présenté ci-après un tableau récapitulatif sur les principales céramiques utilisées en les regroupant d'après leurs fonctions et leurs qualités.

1)-Céramique utilisée dans le domaine électrique :

Les céramiques techniques de part leurs propriétés innovatrices dans la science de la physique des matériaux on distingue :

1)- la propriété d'un isolant électrique utilisées surtout dans le domaine électrique et électronique comme un isolant, et de la propriété ferroélectricité utilisée dans la fabrication des condensateurs et de la propriétés d'un matériau intelligent piezo électrique utilisé comme matériau transducteur ou supraconductivité pour un matériau réfractaire à un champ magnétique.

Tab 1.1 : Les céramiques Techniques pour l'électrotechnique .

<i>Fonction</i>	<i>Qualités utilisées</i>	<i>Compositions</i>
Electriques	Isolant (substrats électronique)	Al_2O_3 , BeO , AlN
Electroniques	Ferroélectricité (condensateurs)	$BaTiO_3$, $SrTiO_3$
	Pièzo –électricité (filtres transducteur)	Pzt ($PbZrTiO$)
	Semiconductivité (thermistances varistances)	$BaTiO_3$, SiC , ZnO
	(oxygène)conductivité ionique (sondes	ZrO_2 , Al_2O_3
	Conductivité électronique	ReO_2 , ReO_3 , Cr_2O_3 , VO , TiO
	Supraconductivité	YBaCuO , LaSiCuO

2)-La propriété magnétique utilisée pour les têtes magnétiques et les capteurs, unité de mémoire et aimants, la propriété Thermique utilisée comme matériau réfractaire pour les radiateurs infrarouges ou échangeurs de chaleurs et smart matériaux ou matériau intelligent utilisée pour la détection des gaz.

Tab 1.2 :Les céramiques Techniques pour le Thermique

Magnétiques	Ferrites doux (têtes magnétiques capteurs)	Fe_3O_4 , ZnO , Fe_2O_3
	Ferrites durs (aimant unités de mémoire)	$(Pb \ Sr)O$, $6Fe_2O_3$
	(bandes et disques magnétiques)	Fe_2O_3 , CrO_2
Chimiques	(détecteurs de gaz)	ZnO , Fe_2O_3 , SnO_2
	(catalyseurs)	Cordierite, zéolithe
	(micro filtration membrane)	Al_2O_3 , ZrO_2
Thermiques	Réfractaire (radiateurs IR)	ZrO_2 , TiO_2
	Réfractaire (échangeurs de chaleur)	SiC

3)-La propriété de résistance mécanique et résistance à l'usure et au frottement utilisée respectivement pour les outils de coupe et les joints d'étanchéité, et la propriété thermomécanique et optique utilisée respectivement comme matériau résistant aux hautes températures et pour l'éclairage, la réflexion optique et pour l'optique des lasers (militaire, commerciale et médicale).

Tab 1.3 :Les céramiques Techniques pour la Thermomécanique optique.

Mécaniques	Tenue mécanique (outils de coupe filières)	WC , Co , TiC , TiN
	Bon comportement à l'usure et au frottement (joint d'étanchéité buses paliers roulements)	Al_2O_3 , ZrO_2 , Si_3N_4 , SiC, B_4C
	Tenue mécanique (abrasifs)	SiO_2 , Al_2O_3 , SiC
Thermomécaniques	Résistance à la contrainte à haute température (turbine moteur aubes soupapes tuyères)	Al_2O_3 ZrO_2 , Si_3N_4 , SiC composite
Optiques	(réflexion optique)	TiO_2
	(éclairage fenêtres transmission IR)	Mullite , Al_2O_3
	(lasers)	Y_2O_3 , ThO_2

4)- La propriété d'un ciment biocompatible utilisée en biomédicale comme ciment de prothèse dentaire et articulaire, ou combustible nucléaire pour les centrales nucléaires, et

résistance au choc mécanique et au choc thermique utilisée pour le blindage des engins militaires, têtes des missiles de bombardements et cette propriété est utilisée pour le blindage des véhicules terrestres ?

Tab 1.4 : Les céramiques Techniques pour la biomédical et le nucléaire militaire.

Biomédicales	Biocompatibilité (ciments prothèse dentaires et articulaires)	Al ₂ O ₃ ZrO ₂ C/C
	Biocompatibilité (comblement osseux)	Hydrox apatite HA
Nucléaires	(combustibles)	UO ₂ UO ₂ /PuO ₂
	(Protection)	Al ₂ O ₃ B ₄ C C Gd ₂ O ₃
	(dispositifs de contrôle)	BN EuO ₂ Gd ₂ O ₃
Militaires	Resistance au choc (blindage écrans thermiques détection)	Al ₂ O ₃ SiC

2/. Les divers types de céramiques techniques :

D'autres informations concernant les céramiques sont fournies dans l'Annexe 2.

Les céramiques techniques peuvent être classées en plusieurs familles que nous présentons dans ce chapitre sous forme de tableaux récapitulatifs. Les principales propriétés des céramiques seront présentées dans le chapitre suivant.

La famille des **oxydes métalliques** est la plus importante parmi les composés céramiques binaires. Cette première famille de céramiques est présente dans pratiquement tous les domaines. Nous avons réuni dans le tableau ci-dessous les principaux oxydes.

Tab 1.5 : Les composés d'oxyde d'aluminium et oxyde de béryllium.

Noms	Synonymes formules	Struct cristal couleurs	Densité (kg/dm ³)	Temps de fusion	Utilisations
Oxyde d'aluminium	Alumine Al ₂ O ₃	Hexagonale incolore	3,965	2072	Mécanique thermique thermomécanique électronique biomédicale chimique optique nucléaire militaire
	α- Alumine (corindon)	Rhombique incolore	3,97	2015 15	
	γ- alumine	Cristalline microscopique blanc	3,5- 3,9		
Oxyde de béryllium	(béryllie) BeO	Hexagonale blanc	3,01	2530 30	Electronique

Tab 1.6 : Les composés d'oxyde de césium, cegrom et cobalt..

Oxydes de cérium	Ce O ₂	Cubique Brun - blanc	7,13	2600	Mécanique
Oxyde de chrome	Cr O ₂	Poudre Brun-noir		300	Thermomécanique magnétique
	Cr O ₃	Hexagonale vert	5,21	2266 25	
Oxyde cobalt	Co ₂ O ₃	Hexagonale ou rhombique	5,18	895	

Tab 1.7 : Les composés d'oxyde d'étain, de fer et d'euporium...

Oxyde d'étain	(cassitérite) SnO ₂	Tétraédrique hexagonale ou rhombique blanc	6,95	1630	Electronique chimique
Oxyde d'euporium	Eu ₂ O ₃	Poudre rose pale	7,42		Nucléaire
Oxyde de fer	(wuestite) Fe O	Cubique noir	5,7	1369 1	Magnétique
	(magnétite) Fe ₂ O ₃	Cubique noir ou poudre rouge- noir	5,18	1594 5	Magnétique
	(hématite) Fe ₂ O ₃	Trigonale brun- rouge a noir	5,24	1565	Chimique
	Fe ₃ O ₄				Magnétique
Oxyde de gadolinium	Gd ₂ O ₃	Poudre amorphe	7,41	2330 20	Nucléaire

Tab 1.8 : Les composés d'oxyde de Nickel, manganese et magnesium...

Oxyde de magnésium	Magnésie (percluse) Mg O	Cubique incolore	3,58	2852	Thermique
Oxyde manganese	(manganosite) Mn O	Cubique ert	5,43- 5,46 (3,7- 3,9)		Magnétique
Oxyde de nickel	(bunsenti) Ni O	Cubique vert-noir	6,67	1984	Magnétique
Oxyde de plutonium	Pu O ₂	Cubique	11,46		Nucléaire
Oxyde de silicium	(quartz) Si O ₂	Hexagonale incolore	2,64- 2,66	1610	Electronique mécanique
	(tridymite) Si O ₂	Rhombique incolore	2,26	1703	
	(cristobalite) SiO ₂	Cubique ou tétraédrique incolore	2,32	1723 5	
Oxyde de tentale	Ta ₂ O ₅	Rhombique incolore	8,2	1872 10	Electronique

Tab 1.9 : Les composés d'oxyde de zinc, de Titane et de vanadium.

Oxyde de titane	Anatase (octaédrique) Ti O ₂	TETRAEDRIQUE BRUN – noir	3,84		Mécanique électronique thermique optique
	(brookite)	Rhombique blanc	4,17	1825	
	(rutile)	Tétraédrique incolore	4,26	1830 – 1850	
Oxyde d'uranium	U O ₂	Rhombique ou cubique brun-noir	10,96	2878 20	Nucléaire
Oxyde de vanadium	V ₂ O ₅	Rhombique Rouge- jaune	3,357	690	Electronique
Oxyde d'yttrium	(yttria) Y ₂ O ₃	Cubique ou poudre	5,01	2410	Additif de frittage
Oxyde de zinc	(zincite) Zn O	Hexagonale blanc	5,61	1975	Electronique chimique

Tab 1.10 : Les composés d'oxyde de zirconium.

Oxyde de zirconium	Zircone Zr O ₂ (HfO ₂ <2)	Monoclinique en dessous de 1000 °C et cubique au dessus blanc	5,6	2715	Thermomécanique thermique mécanique électrique électronique
--------------------	--	---	-----	------	---

3/. Matériaux a gradients de propriétés :

L'industrie moderne de la construction mécanique en passant par le génie civil et plus généralement le transport terrestre naval et aéronautique sont à la recherche des matériaux possédants des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Un matériau simple permettant de combiner toutes ces caractéristiques mécaniques, et pour atteindre cet objectif, il faut nécessairement utiliser des matériaux composites. Une variété de méthodes a été proposée dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui suscitent un intérêt particulier, il y a la réalisation des matériaux à gradient de fonction (FGMs, Functionally Graded Materials en anglais). En effet, les FGMs sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle sur l'épaisseur du matériau conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés (Shiota ,1996). Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels.

Les matériaux à fonctionnel gradues (FGM) peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux dans une direction prédéterminé. Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes ayant des propriétés qui varient graduellement sur une direction de l'épaisseur constituant ce matériau FGM ; ce type des matériaux sont conçu généralement pour les structures spatiales et aéronautiques pour optimiser les caractéristiques thermo mécaniques et évitant par la variation graduelle des propriétés le problème d'interface, se sont surtout des matériaux a gradients de propriétés a base de la céramique métallique.

Initialement, l'idée fut émise en 1984 par M. Niino et al. (National Aerospace Laboratory of Japan) (Niino, 1987) et présentée comme une tentative pour résoudre les problèmes posés par la préparation de matériaux de barrière thermique destinés aux structures spatiales et aux réacteurs de fusion. Cependant, l'aventure débute réellement autour de l'année 1985 lorsque d'autres pays (USA, Royaume-Uni) ressentent à leur tour la nécessité d'aborder l'ère spatiale en concevant chacun unilatéralement un avion ayant la possibilité de naviguer à la fois dans l'espace et transitoirement dans l'atmosphère terrestre (Wakashima, 1990).

3.1/ Définition des matériaux à gradient de propriétés FGM :

Les matériaux à fonctionnel gradues (FGM) sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Ce concept de FGM peut être appliqué à divers matériaux pour des utilisations structurelles et fonctionnelles. Il y a plusieurs années, ce concept a été évalué en premier lieu dans le développement de revêtement des barrières thermiques pour augmenter la résistance thermique des lames dans les moteurs de turbine à gaz pour divers applications telles que les systèmes de protection thermique, les matériaux à fonctionnel gradues FGM sont développés pour minimiser les contraintes thermiques qui conduisent à la rupture de la céramique. En effet ces matériaux existent dans la nature, par exemple, le bambou ; les os et même notre peau est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps.

Les constituants des FGMs modifiés par l'homme impliquent généralement deux phases de matériau isotrope, bien que tous les nombre de configurations chimiquement et spatialement compatibles soient possibles. Ces composants comprennent souvent des alliages d'ingénierie de magnésium, l'aluminium, le cuivre, le titane, le tungstène, l'acier, etc. et les céramiques structurelles avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et de carbure de tungstène.



Fig.1.1 Graduation naturelle des matériaux constituant le Bambou



Fig.1.2 Graduation naturelle des matériaux constituant un os



Fig1.3Fémure humain et prothese artificielle en materiaux FGM

3.2/ Intérêt des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux modernes tendent à devenir «multifonctionnels», même si leur objet premier permet en général de les classer en «Matériaux de structure »

Et en « matériaux fonctionnels ».Le problème du concepteur est qu'il demande non pas une propriété, mais un ensemble. (Sellai, 2011) Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut être collée à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans des applications à haute température. Toutefois, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire et peut conduire à la déformation plastique ou de fissuration. Pour surmonter ces effets nuisibles on doit utiliser les matériaux à gradient évalué FGM, sont des matériaux composites avancés. Par exemple, dans un matériau à fonctionnel gradues FGM (métal / céramique), le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté ; doivent être élevée. En revanche, la céramique riche, avec une conductivité thermique faible peut résister aux températures plus élevées, et

par conséquent il est utilisé dans les régions fortement exposées à la température. Les matériaux à fonctionnel gradues FGM permettent l'adaptation de la composition du matériel de manière à en retirer le maximum d'avantages de leur hétérogénéité. En outre, d'autres aspects d'exécution peuvent être améliorés en utilisant un matériau à fonctionnel gradues FGM, par exemple, réduction de la température dans la phase de cuivre pour empêcher l'adoucissement thermique excessif du matériel, d'autres applications de matériaux à fonctionnel gradues FGM incluent des composants trouvés sur l'Avion et les véhicules aérospatiaux.

Certains des avantages des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont :

- FGM en tant que couche d'interface pour connecter deux matériaux incompatibles peut améliorer considérablement la résistance de liaison.
- Le revêtement et l'interface FGM peuvent être utilisés pour réduire la contrainte résiduelle et la contrainte thermique.
- Le FGM non seulement améliore la résistance des connexions, mais peut également réduire la force de la fissure.
- Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont la capacité de contrôler la déformation, la réponse dynamique, l'usure, la corrosion, etc.
- FGM offre également les opportunités de profiter des avantages de différents systèmes matériels, par exemple, des céramiques et des métaux. La partie céramique présente une bonne résistance thermique, une résistance à l'usure et à l'oxydation (rouille), alors que la partie métallique a une résistance à la rupture supérieure, une résistance élevée et une capacité de liaison.
- Résistance à la rupture, haute résistance et capacité de liaison.
- FGM a une large gamme d'application dans les applications dentaires et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os.
- Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtements protecteurs sur des pales de turbine dans un moteur à turbine à gaz (N.Tejaswini et al. 2015)

Tab.1.11 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	– Bonne résistance thermique ; – Bonne résistance à l'oxydation ; Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires	FGM (Céramique / Métal)	– Élimination des problèmes de l'interface ; – Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	– Conductivité thermique élevée, – Très bonne ténacité.

4/ Propriétés effectives des matériaux à fonctionnel gradues

Généralement les matériaux à fonctionnel gradues FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des matériaux à fonctionnel gradues FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le matériau à fonctionnel gradues FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (**Figure .4 (a)**) ;

2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (**Figure .4 (b)**), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z)

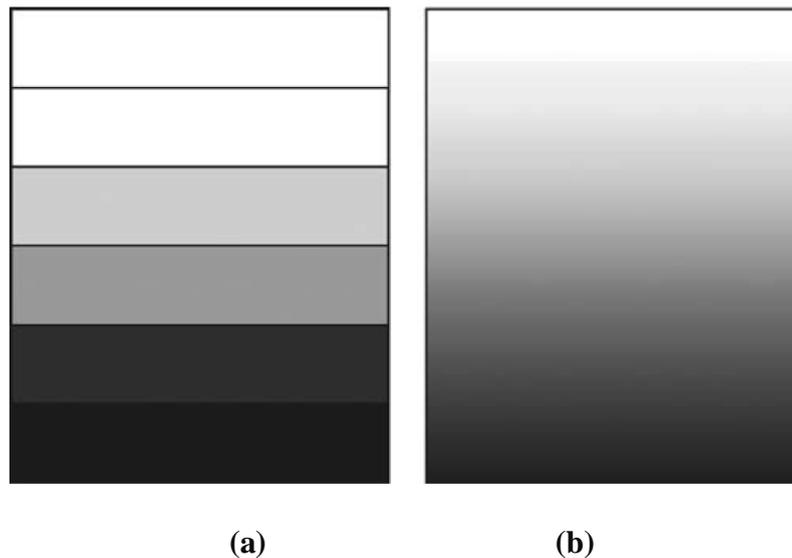


Fig.1.4 Modèle analytique pour une couche d'un matériau à fonctionnel gradues FGM

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal. avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite.

5/Propriété des matériaux FGM :

Les matériaux FGM sont modélisés selon trois types de modèles mathématique :

5.1/ Propriétés matérielles des structures P-FGM :

La fraction volumique des structures P-FGM est assurée par la loi de puissance Power Law, pour cela la variation continue du volume fraction entraîne des variations sur les propriétés de la composition FGM, et le volume fraction du métal (Hui-Shen Shen 2009) est défini par :

$$V_f = \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^k \quad (1.1)$$

Avec : r_o Rayon de l'épaisseur externe.

r_i Rayon de l'épaisseur interne.

k Indice de graduation Power Law du volume fraction.

Et la somme des volumes fractions est toujours égale à 1 pour une position radiale comprise entre les deux surfaces extrêmes

$$V_m + V_c = 1 \quad (1.2)$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \rho_m \quad (1.3)$$

Les propriétés du matériau FGM sont données selon la loi Power Law en fonction de la graduation fonctionnelle du volume fraction pour la masse volumique (Débabrata G 2013).

$$P(z) = [P_c - P_m] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + P_m \quad (1.4)$$

$$P(z,T) = [P_c(T) - P_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + P_m(T) \quad (1.5)$$

$$E(z,T) = [E_c(T) - E_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + E_m(T) \quad (1.6)$$

$$\nu(z,T) = [\nu_c(T) - \nu_m(T)] \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \nu_m(T) \quad (1.7)$$

Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E , la densité ρ et le coefficient de poisson ν sont alors exprimées par :

$$S = \sum S_j V_j \quad (1.8)$$

S_j et V_j sont respectivement les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j , et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum V_i = 1 \quad (1.9)$$

La fraction volumique des structures P-FGM est assurée par la loi de puissance :

$$V(Z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (1.10)$$

k représente l'indice matériel, h l'épaisseur de la structure et z la coordonnée suivant l'épaisseur.

Ainsi, le module de Young de ces structures est exprimé par :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1-V(z)]E_2 \quad (1.11)$$

E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young des matériaux constituant la structure P-FGM pour

$$z = \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad z = -\frac{h}{2}$$

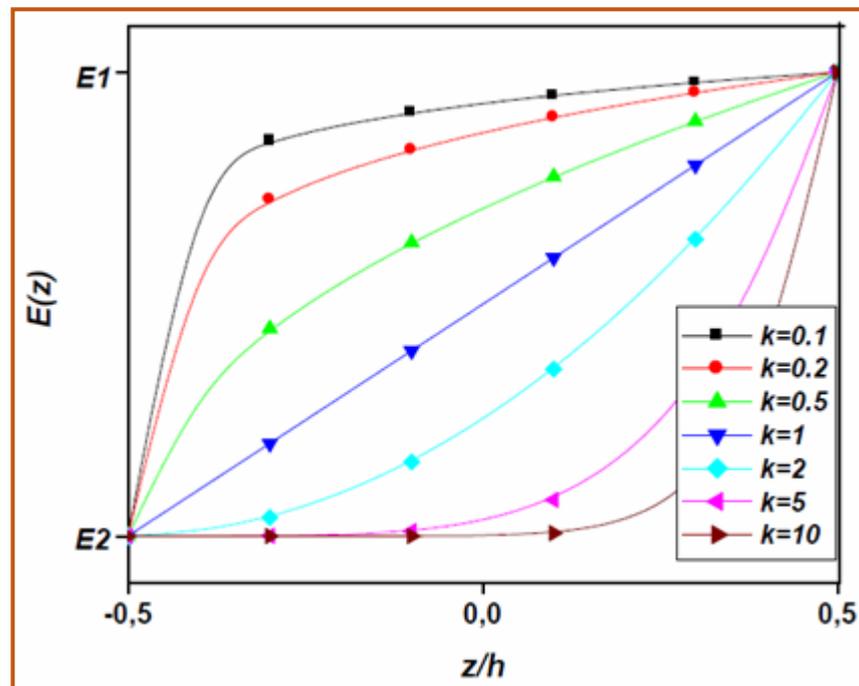


Fig.1.5 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure P-FGM

On remarque d'après la **Figure.1.5** que le module de Young décroît dans la direction de l'extrémité inférieure de la plaque ($k > 1$), et s'accroît en allant vers l'extrémité supérieure ($k < 1$) et pour $k = 1$, la variation du module de Young devient linéaire. On constate aussi que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque, et vis versa : la plaque devient de moins résistance si son module de Young est faible, et ceci est dû à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal. Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E , la densité ρ et le coefficient de poisson ν sont alors exprimées par

$$S = \sum_{j=1}^n S_j V_j \quad (1.12)$$

S_j et V_j sont respectivement les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j , et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} V_j = 1 \quad (1.13)$$

5.2/ Propriétés matérielles des structures S-FGM

Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la structure FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z/h - z}{z/h} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.14.a)$$

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z/h + z}{z/h} \right)^k \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.14.b)$$

En utilisant la loi de mélange, le module de Young de la structure S-FGM est calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.15.a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_2 + [1 - V_2(z)]E_1 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.15.b)$$

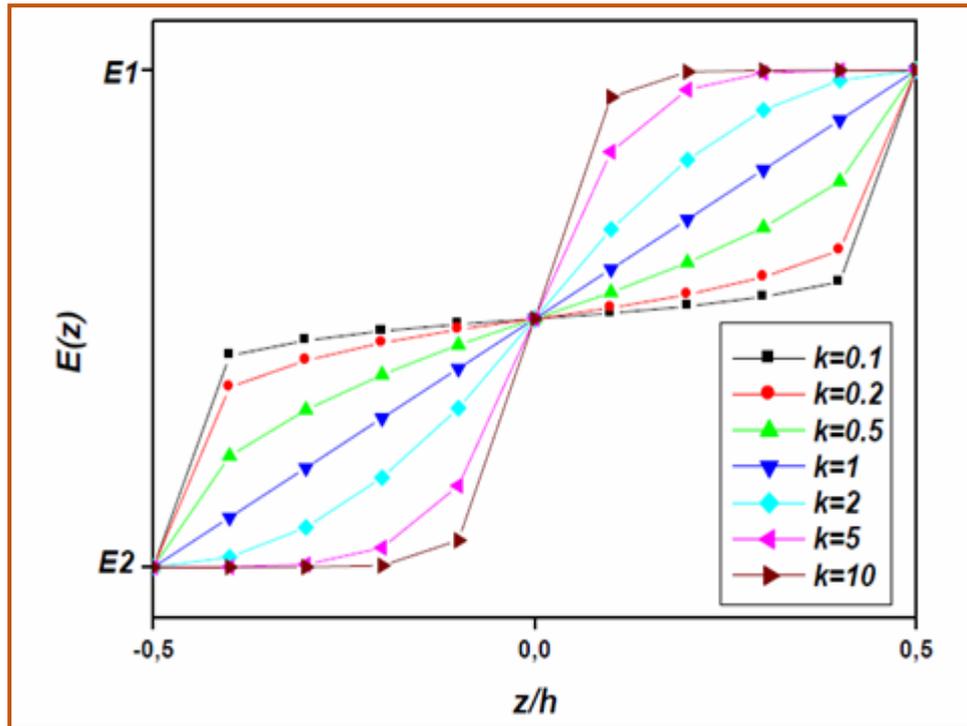


Fig.1.6 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure S-FGM

La **Figure.1 .6** montre que la variation du module de Young définie par les équations (1.15-a) et (1.15-b) représente les distributions sigmoïdes.

5.3/ Propriétés matérielles des structures E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par :

$$E(z) = Ae^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (1.16.a)$$

$$A=E_2 \quad (1.16.b)$$

$$B=\frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (1.16.c)$$

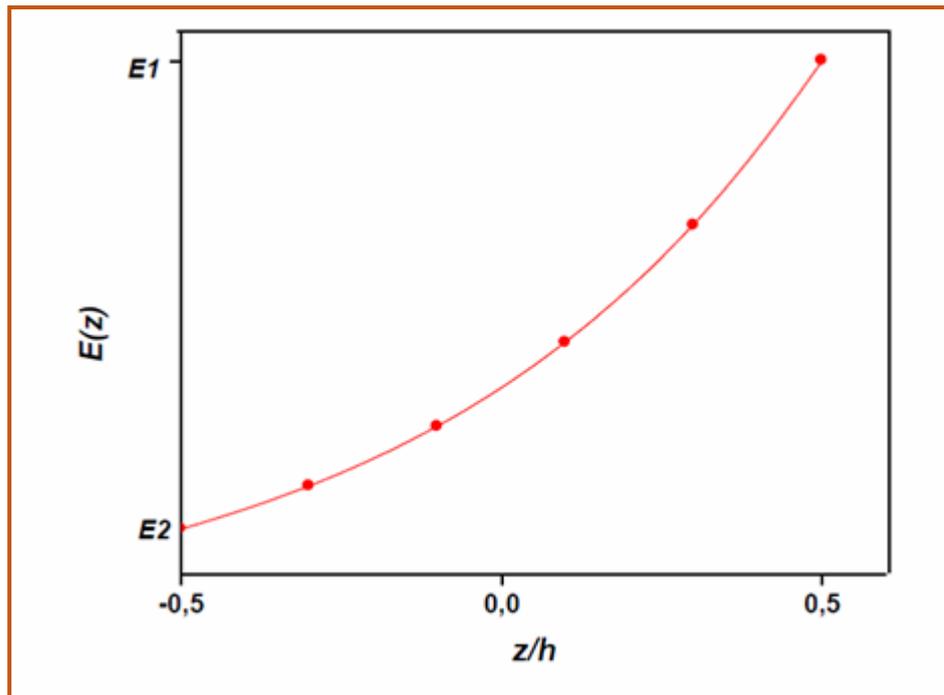


Fig.1.7 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure E-FGM

D'après **Figure.1.7**, on remarque que l'augmentation du module de Young est proportionnelle à l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal (Al) tout en allant vers l'extrémité supérieure de la structure.

6/ Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

6.1/Technique de dépôt de vapeur :

Il existe différents types de techniques de dépôt en phase vapeur, on peut citer : dépôt par pulvérisation cathodique, dépôt de vapeur chimique (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Ces méthodes de dépôt en phase vapeur sont utilisées pour déposer des revêtements de surface fonctionnellement gradués et ils donnent microstructure excellents, mais ils ne peuvent être utilisés pour le dépôt de revêtement de surface mince. Ils

Consomment beaucoup d'énergie et produisent des gaz toxiques que leurs sous-produits (J.F.Groves ,1997).

D'autres méthodes utilisées dans la production de revêtement fonctionnel graduée comprennent : projection plasma, l'électrodéposition, électrophorétique, Déposition assistée par faisceau d'ions (IBAD), auto-propagation synthèse à haute température (SHS), etc. (R. Knoppers, 2003). Tous les procédés mentionnés ci-dessus ne peuvent pas être utilisés pour produire des MGF gros, car ils sont généralement lents et consommatrices d'énergie, par conséquent, ils ne sont pas rentables pour être utilisé dans la production de masse FGM.

6.2/Métallurgie des poudres (PM) :

Métallurgie des poudres (PM) est utilisée pour produire du matériel fonctionnel classé (M. Nemat-Alla et al, 2011) à travers trois étapes de base à savoir : pesée et de mélange de poudre en fonction de la préconçus distribution spatiale comme dicté par l'exigence fonctionnelle, l'empilage et la condensation de la pré-mélangé des poudres, et enfin le frittage (J. Zhu et all ,1995). PM technique donne lieu à une structure échelonnée..

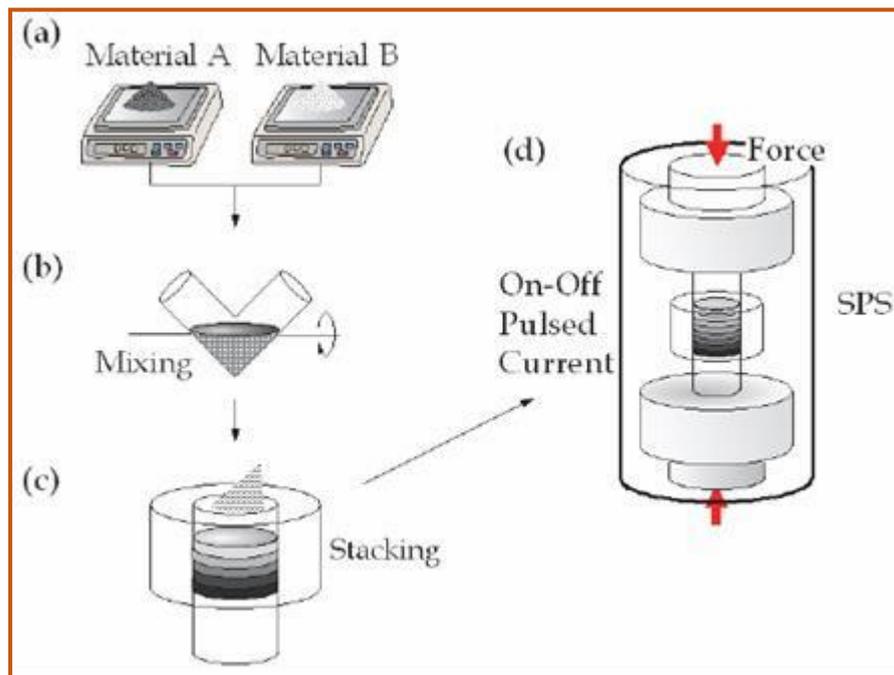


Fig.1.8 : Exemple de processus de fabrication typique de FGM par la méthode de la métallurgie des poudres. (Y. Watanabe, 2011)

6.3/Méthode de la coulée centrifuge :

Procédé centrifuge est similaire à la coulée centrifuge, où la force de gravité est utilisée par filature de moule pour former le matériau en vrac à gradation fonctionnelle (Y. Watanabe et al, 2009). Le matériau à gradient est produit de cette manière en raison de la différence des densités des matériaux et le filage de la moule. Il existe d'autres processus similaires comme méthode centrifuge dans la littérature (méthode par gravité, par exemple, etc.) Bien que le classement en continu peut être réalisé en utilisant la méthode centrifuge mais seulement des formes cylindriques peuvent être formés. Un autre problème de la méthode centrifuge, c'est qu'il n'y a pas de limite à quel type de gradient peut être produit (B. Kieback et al, 2003) car la pente est formée par un processus naturel (force centrifuge et de la différence de densité). Pour résoudre ces problèmes, les chercheurs utilisent la méthode de fabrication alternative connue sous le nom de forme libre solide.

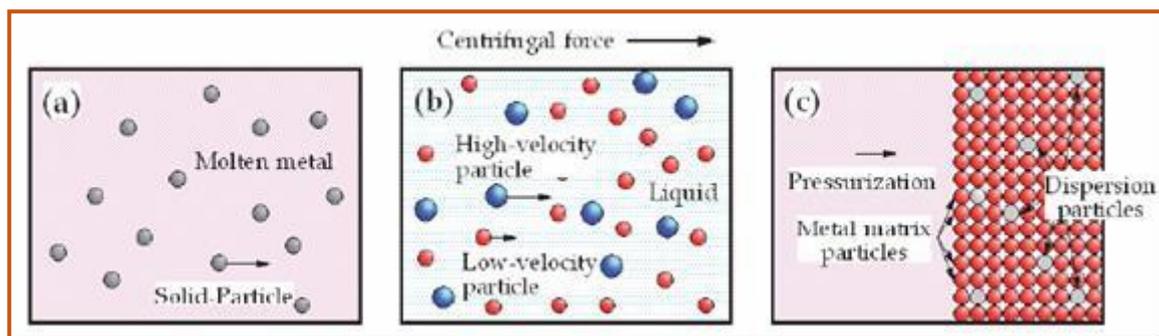


Fig.1.9 : Trois types de méthodes de fabrication des FGM sous la force centrifuge (A) Méthode centrifuge, (b) Méthode de bouillie centrifuge, (c) Méthode de pressurisation centrifuge (Y. Watanabe et al, 2011).

6.4/Méthode de fabrication en forme de Solid Freeform (SFF) :

Solide de forme libre est un procédé de fabrication d'additifs qui offre de nombreux avantages, notamment : une vitesse plus élevée de la production, moins d'énergie, l'utilisation maximale du matériau, la capacité à produire des formes complexes et de la liberté de conception en tant que pièces sont produites directement à partir de CAD (AutoCAD), par exemple des données (X. Lin ,2005). SFF comporte cinq étapes de base (M. Nemat et al, 2011): la génération des données de CAO à partir du logiciel comme AutoCAD, etc Solid Edge, la conversion des données CAO à la langue Triangulation STL (Standard) fichier, le tranchage de la STL en deux dimensions des profils en travers, la construction de la couche de composant de couche, et enfin l'enlèvement et de finition. Il existe différents types de technologies SFF, les processus à base de laser sont surtout

employés dans la fabrication de matériaux à gradient fonctionnel (D.Hutmacher et al ,2004). Laser processus basé sur SFF pour les matériaux à gradient fonctionnel (W. Jiang et al ,2005) sont : laser méthode de revêtement à base de (A. Atai et al, 2012), frittage sélectif par laser (SLS) (M. Erdalet al, 2009), d'impression 3-D (3-DP) (D. Dimitrov et al ,2006) fusion laser, et Sélective (SLM) (A. Mumtaz, 2007). Revêtement à base de laser et le système de fusion sélective au laser sont capables de produire des composants entièrement denses. Solide freeform fabrication de flexibilité entre autres avantages, mais la technologie est caractérisée par mauvais état de surface qui rend nécessaire de procéder à une opération de finition secondaire. Il y a beaucoup des efforts de recherche dans ce sens pour améliorer la finition de surface, la précision dimensionnelle etc.

7/ Domaines d'applications des FGM :

Maintenant, l'utilisation de matériaux fonctionnellement gradués est très populaire, en raison de la souplesse nécessaire pour rendre le matériau composite selon l'exigence de l'application et l'adéquation fonctionnelle. Nous pouvons voir différents domaines d'application de la FGM dans la **Figure.1.10**. Généralement, le domaine d'application du matériel fonctionnel est très grand, mais les domaines d'application principaux sont les projets aérospatiaux, la médecine, les projets nucléaires, le secteur de l'énergie, le domaine de la communication et d'autres utilisations diverses.

7.1/ Aérospatiale

Matériaux à gradient fonctionnel peut résister à très haut gradient thermique, ce qui rend approprié pour une utilisation dans les structures et le corps plan de l'espace, élément moteur de fusée, etc. (B.Kieback, 2003). Si la technique de traitement est améliorée, les FGM sont prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

7.2/ Médecine

Tissus vivants comme les os et les dents sont caractérisés comme matériau à gradient fonctionnel de la nature, pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire, qui servent à l'original bio-tissu. Le candidat idéal pour cette application est matériaux à gradient fonctionnel. Les FGM ont trouvé large éventail d'applications dans les soins dentaires des applications orthopédiques et pour les dents et les os

deremplacement.

7.3/ Défense

Une des caractéristiques les plus importantes de matériau à gradient fonctionnel est la capacité d'inhiber la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application de la défense, en tant que matériaux résistants à la pénétration utilisée pour les plaques d'armures et gilets pare balle

7.4/Énergie

FGM sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également de barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur les aubes de turbine à turbine à gaz.

7.5/ Optoélectronique

FGM trouve aussi son application en optoélectronique des matériaux classés comme indice de réfraction et de l'audio-vidéo disque supports de stockage magnétiques. D'autres domaines d'application sont : coupe de revêtement plaquette d'outil, composants de moteurs d'automobiles, de composants de réacteurs nucléaires, lame turbine, échangeur de chaleur, tribologie, des capteurs, des portes ignifuges, etc. La liste est infinie et une application plus est surgissent comme les techniques de traitement, des coûts de production et améliorent les propriétés de FMG.

7.6/ Autres applications

Le téléphone cellulaire est l'un des outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. La technologie des FGM est applicable dans ce domaine. Afin de minimiser la taille et l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, les FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faites de polymère fluoré ont été développées. En outre, de nouvelles recherches ont permis de développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions et ce à l'aide de nanotechnologies des niveaux de classification.

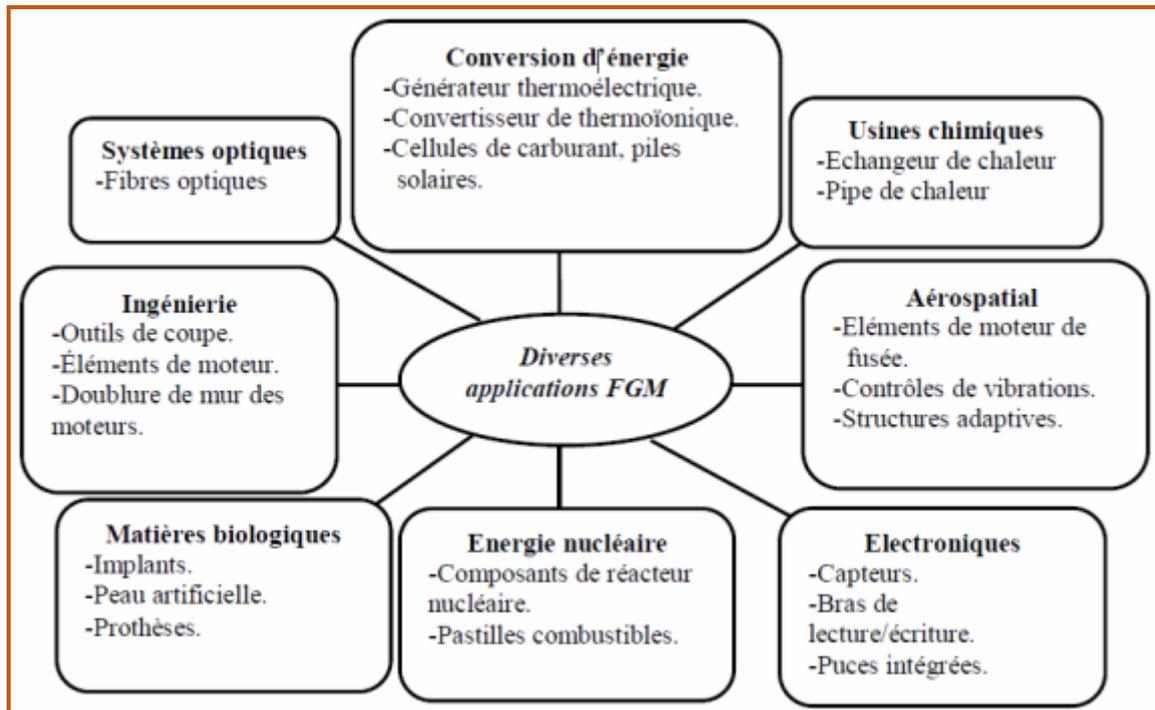


Fig.1.10 : Les principaux domaines d'application des FGM. (Bessaim, 2014)

7.7/ Conclusion

Les matériaux FGM ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie de pointe sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes. Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures. Ces matériaux avancés avec des gradients de composition de la structure et des propriétés spécifiques dans la direction préférée ou de l'orientation, sont meilleurs que les matériaux homogènes constitués de différents composants similaires. Ces matériaux acquièrent de nombreuses applications dans divers domaines d'ingénierie en vue d'utiliser leurs propriétés potentielles de manière optimale.

Le matériel à gradation fonctionnelle est un excellent matériau avancé qui va révolutionner le monde de la fabrication. Il existe un certain nombre d'obstacles pour réaliser cet objectif. Beaucoup d'études ont été menées sur le comportement des matériaux fonctionnellement classés et la littérature est très riche en raison des vastes domaines d'application de ce nouveau matériau.

8/- Influence de la température :

L'influence de la température sur les solides fabriqués en matériaux fgm ou matériaux conçus à bases d'un mélange constitué de deux matériaux de propriétés différentes est un paramètre essentiel et indispensable pour l'analyse et la stabilité des variations des propriétés sur une direction bien définie de ces deux matériaux. Pour un matériau constituant un solide exposé a une température très intense et très variables et nécessitant une durée de vie longue et raisonnable surtout pour les navettes spatiales ou l'aéronautique comme les rotors des réacteurs d'avions ou les turbines de propulsions aéronautiques ou dans le militaire les turbines a gaz ou les centrifugeuses nucléaires. Au paravent les recherches scientifiques étaient basées sur l'utilisation d'une protection surfacique des matériaux constituant ces solides contre toutes les variations de la température induisant des dommages non souhaités a ces solides cette solution est valide pour les basses et moyennes températures et pour les hautes températures est néfaste et dangereuse, on cite l'exemple de la navette spatiale Américaine Columbia fabriquée par un matériaux a protection surfacique utilisant des tuiles de céramique colées a la surface de la navette jouant le rôle d'une barrière thermique contre les frottements et les rayonnement solaire qui sont très grands et très intense et qui ont provoquées le décollement de ces dernières tuiles induisant par suite l'explosion et la désintégration de la navette spatiales et de ses occupants avec la mort des neufs astronautes en 1989, ce décollement est due a une variation brutale des propriétés physiques et mécaniques sur l'interface des deux matériaux et a partir de cette date la dangerosité de cette solution était prouvée et cette solution éliminée et changée par l'utilisation des matériaux FGM ou matériaux a gradient de propriétés ou matériaux dont les propriétés mécaniques et physiques qui varient graduellement évitant ainsi le changement brutal des propriétés par suite le problème d'interfaces.

La fonction de la température agissant sur les paramètres des propriétés constituant la composition FGM est définie selon le modèle mathématique suivant [30]:

$$P_j = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1.17)$$

où P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température T (en K) pour chaque type de matériau constituant le volume fraction de la graduation FGM (Functionally graded materials)

. La distribution de la température le long de la direction radiale du rotor peut être exprimée par la résolution de l'équation de transfert thermique suivante:

$$-\frac{d}{dz} \left(Kt \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (1.18)$$

La solution de cette équation différentielle qui est fonction de la température est obtenue en posant les conditions aux limites de la température T_m sur la face du métal pur et T_c sur la face de la céramique pure du rotor FGM donnée par la relation suivante : (Functionally graded materials).

$$T(Z) = T_m + (T_c - T_m)\mu(Z). \quad (1.19)$$

Avec

$$\mu(Z) = \frac{1}{C} \left[\left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^k - \frac{K_{cm}}{(k+1)K_c} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{k+1} + \frac{K_{cm}^2}{(2k+1)K_c^2} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{2k+1} - \frac{K_{cm}^3}{(2k+1)K_c^3} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{3k+1} + \frac{K_{cm}^4}{(2k+1)K_c^4} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{4k+1} - \frac{K_{cm}^5}{(2k+1)K_c^5} \left(\frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^{5k+1} \right]$$

K_{cm} et c des constantes . (1.20)

Tab1.12: les coefficients de température T pour l'oxyde d'aluminium

Propriété d'un matériau	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Coefficient DE Dilatation Thermique	$6,8269 * 10^{-6}$	0	$1,8388 * 10^{-4}$	0	0
Module de Young E	$349,55 * 10^9$	0	$-3,853 * 10^{-4}$	$4,027 * 10^{-7}$	$-1,673 * 10^{-10}$
Rapport DE Poisson n	0,26	0	0	0	0
La densité de masse	2700	0	0	0	0

Chapitre II

Formulation par la méthode des

éléments Finis Hiérarchiques

Trigonométriques -version p-

1/ Introduction générale :

La **méthode des éléments finis (MÉF)** est une méthode numérique pour résoudre certains problèmes de la physique mécanique de la physique des matériaux ou de la physique des fluides ou de transfert de la chaleurs (volume finis) . C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial bien défini, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions aux limites imposées. La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments appelé un élément de référence , cette procédure est appelée le maillage, , c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires d'un élément de référence. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice définissant les propriétés des matériaux de l'élément de référence, Et la matrice globale représentant les propriétés de tous les éléments est obtenus par la technique d'assemblage des matrices imposées aux conditions aux limites nodales, la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème et La quantité de calculs nécessite l'emploi d'un ordinateur.

2/ Théorie pratique :

Les logiciels modernes utilisant la méthode des éléments finis bénéficient d'une interface graphique rendant leur utilisation relativement simple. Par ailleurs, un certain nombre de tâches sont automatisables. On peut donc quasiment lancer un calcul sur ordinateur sans connaître la méthode.

Cependant, le modèle utilisé risque d'être inadapté au problème, on aura donc un résultat très éloigné de la réalité. L'utilisateur doit avoir des connaissances suffisantes pour être en mesure de :

- maîtriser le modèle, c'est-à-dire utiliser les options permettant de représenter le plus fidèlement possible la réalité ;
- contrôler la qualité du résultat, détecter les résultats manifestement erronés ;
- interpréter les résultats, et éventuellement les post-traiter, c'est-à-dire utiliser les résultats pour faire d'autres calculs.

D'autre part, les premières versions de ces logiciels utilisaient un langage de programmation (langage DMAP pour Nostrand, MAPDL pour Ansys, Code Aster). Si les fonctions principales les plus couramment utilisées ont été intégrées dans l'interface graphique, certaines opérations ne sont possible qu'en entrant des instructions. Dans le cas d'une utilisation avancée du logiciel, il faut donc s'intéresser au langage de programmation.

L'utilisation d'un logiciel de résolution par la méthode des éléments finis nécessite des connaissances approfondies pour la maîtrise et l'interprétation des résultats, l'utilisation de plus en plus fréquente de ce genre de technologie par des personnels non spécialistes ou inadéquatement formés commence à être une source d'inquiétude très sérieuse, compte tenu des enjeux de sécurité sous-jacents. De manière générale, utiliser un logiciel quelconque pour résoudre un problème d'ingénierie sans en comprendre le fonctionnement est très dangereux[31]

On peut essayer de déterminer des compétences minimales requises en fonction de l'utilisation. Définissons trois niveaux d'utilisation en mécanique (le niveau 2 inclut le niveau 1, le niveau 3 inclut le niveau 2) :

1. Élémentaire :
 - calcul sur une structure de poutres (p. ex. treillis) ;
 - calcul volumique sur une pièce isolée.
2. Avancé : résolution de problèmes linéaires, surfaciques et volumiques impliquant plusieurs pièces en contact.
3. Expert : mécanique non linéaire (contact pouvant adhérer ou glisser, grandes déformations, écrouissage, viscosité, ...), problèmes multi physiques (recouvrant plusieurs domaines d'application à partir de la même géométrie), développement de méthodes de post-traitement automatisée, méthodes d'optimisation de formes, ...

Les compétences requises recommandées sont :

1-Élémentaire :

- statique : connaissance des liaisons mécaniques (degrés de liberté, efforts transmissibles), résolution de problèmes isostatiques (graphique et analytique), représentation des efforts par les torseurs ;
- résistance des matériaux, théorie des poutres (Euler-Bernoulli) : courbe de traction uni axiale, courbes des efforts de cohésion, contraintes et déformations en sollicitations simples (traction/compression, cisaillement, torsion, flexion simple), utilisation des formulaires de flexion, contraintes en sollicitations composées (traction/compression-flexion, flexion déviée, flexion-torsion), concentrations de contraintes, matage, flambage ;
- mécanique des milieux continus, théorie de l'élasticité : principe de Barré de Saint Venant, contraintes équivalentes de Von Mises et de Tresca ;
- dessin assisté par ordinateur : manipulation du logiciel pour simplifier la géométrie (édition des esquisses, des fonctions d'extrusion, de révolution) ;
- mathématiques : repère (géométrie analytique), similitudes (rotations, translations, homothéties), équations différentielles simples, intégration de fonctions polynomiales ;
- éléments finis : choix des éléments de maillage, contrôle de la qualité du maillage, contrôle de la cohérence des résultats.

2 Avancé :

- statique et résistance des matériaux : travaux virtuels, résolution de problèmes hyperstatiques, pression de Hertz, essais mécaniques, théorie des poutres épaisses (Timoshenko), éléments de théorie des plaques et des coques ;
- mécanique des milieux continus : tenseurs des contraintes et des déformations, contraintes principales, coefficients élastiques, énergie de déformation, critères de ruine ;
- mathématiques : matrices, changement de repère, intégration par partie, interpolation polynomiale, équations aux dérivées partielles ;

- éléments finis : connaissance des différents types d'éléments et de leurs degrés de liberté, notions de matrice de rigidité et de points de Gauss.
- 3 Expert :
- mathématiques : théorème de Green, méthode de Gauss-Legendre ;
 - éléments finis : formes intégrales forte et faible, connaissance des langages sous-jacents du logiciel utilisé (DMAP, MAPDL, Code-Aster).

3/ Équation aux dérivées partielles :

Un certain nombre de problèmes physiques sont décrits par des équations aux dérivées partielles (ÉDP) sur un domaine spatial, un volume. Il s'agit d'une généralisation des équations différentielles aux fonctions de plusieurs variables. Par exemple, si l'on a une fonction de trois variables $f(x_1, x_2, x_3)$, l'équation suivante :

est une équation aux dérivées partielles. Cette équation est assortie à des conditions aux limites : valeurs de la fonction ou de ses dérivées partielles en certains points.

Notons que :

- la fonction f peut être une fonction vectorielle,
- l'équation fait souvent intervenir des dérivées secondes $\partial^2 f / \partial x_i^2$ ou $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ (voire d'ordres plus élevés),

La résolution exacte, analytique, de telles équations devient vite impossible manuellement. Par contre, si l'on découpe le domaine spatial en petites cellules, appelées « éléments finis » (ÉF), on peut résoudre simplement l'ÉDP sur chaque élément.

4/ Démarche générale

La méthode des éléments finis (MÉF) consiste donc à :

- découper le modèle spatial en éléments finis : c'est le maillage.
- écrire une version simplifiée de l'ÉDP sur chaque élément fini ; notons que les conditions limites d'un élément ne sont pas connues, on ne connaît que les conditions globales.
- rassembler les expressions des ÉDP locales pour appliquer les conditions aux limites du problème.

On retrouve la démarche générale analyse-synthèse.

D'un point de vue pratique, la mise en œuvre de la méthode comporte les étapes suivantes :

1. Analyse du problème : définition de l'objectif du calcul, recherche des zones pouvant poser problème, éventuellement calcul manuel avec un modèle très simplifié pour avoir un ordre de grandeur du résultat.
2. Définition du modèle de calcul : la géométrie du système est dessinée avec un logiciel de dessin assisté par ordinateur (DAO). Si le modèle numérique (= sur ordinateur) existe déjà (par exemple pièce dessinée par un bureau d'étude), il faut simplifier la géométrie afin d'avoir un calcul :
 - plus rapide (modèle « léger ») ;
 - ne présentant pas de singularités : les singularités sont des points particuliers se comportant mal vis-à-vis de l'algorithme de calcul ; en ces point-là, les résultats sont en général éloignés de la réalité.
3. Maillage : découpage du modèle en éléments finis ; il convient de choisir des formes d'éléments adaptés, permettant d'avoir un maillage régulier, et de vérifier la qualité du maillage. Le maillage est fait par l'ordinateur suivant les paramètres définis par l'utilisateur.
4. Calcul, fait par l'ordinateur.
5. Affichage des résultats, vérification de leur cohérence et post-traitement.

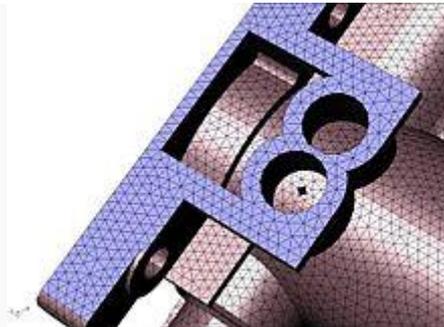


Fig.2.1 Pièce volumique maillée par des tétraèdres

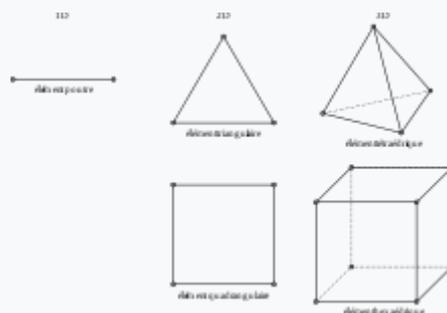


Fig.2.2 Exemples d'éléments finis linéaires

Le maillage (*meshing*) consiste donc à découper l'espace en petits domaines appelés éléments finis. Dans le cas général, on utilise des éléments volumiques (3D), mais on peut :

- utiliser des éléments surfaciques (2D) si la pièce étudiée est une coque (*shell*), c'est-à-dire si l'épaisseur est petite devant les autres dimensions (typiquement un rapport 1/10) ;
- utiliser des éléments linéiques (1D) si la pièce étudiée est une poutre (*beam*), c'est-à-dire si ses dimensions transverses sont petites devant la longueur (typiquement un rapport 1/10).

On utilise plusieurs types d'éléments finis. Dans un premier temps, retenons qu'il y a principalement deux types d'éléments pour les coques et les volumes :

- les éléments carrés (coques) ou cubiques (volumes) : ils permettent un maillage régulier et efficace (on a une bonne précision avec peu d'éléments) ; comme il n'y a pas de raison que les formes soient régulières (en particulier que des côtés/arêtes soient parallèles), on parle plutôt de quadrilatères ou d'hexaèdres ;
- les éléments triangulaires (coques) ou tétraédriques (volumes) : ils permettent de s'adapter aux formes complexes.

Un élément fini est une maille ; il est défini par ses nœuds, c'est-à-dire les sommets pour un polygone ou un polyèdre.

La MÉF consiste à calculer les valeurs de la fonction f solution des ÉDP — aux nœuds ; on ne recherche pas la valeur en tout point de l'espace, mais uniquement en certains points.

La MÉF est donc une discrétisation du problème. La fonction f est une fonction vectorielle de dimension d . En chaque nœud, il faut donc déterminer d valeurs. On dit que le nœud a « degrés de liberté ».

5/ Interpolation des fonctions

Donc, on s'intéresse aux valeurs de la fonction f uniquement aux nœud du maillage. La valeur aux autres points est ensuite déduite par interpolation polynomiale. Sauf cas exceptionnel, dans une interpolation, plus on s'éloigne des points connus, plus l'écart avec la valeur théorique est important. Donc, plus le maillage est grossier, plus l'erreur commise en dehors des nœuds est grande.

Considérons un élément donné dont les nœuds sont numérotés de 1 à n ; on note f_i la valeur de la fonction de forme au nœud i . Ce sont ces valeurs f_i que l'on veut déterminer par la MÉF. Au sein de l'élément, on remplace donc la fonction par N_i son interpolation, où les N_i sont des fonction qui ne dépendent que de la forme de l'élément fini.

On utilise différents types d'éléments finis ; pour chaque type, on a un élément de référence, qui est l'élément fini dont les coordonnées des nœuds valent 0, 1 ou -1. On peut dire en quelque sorte que l'élément fini réel est l'élément fini de référence déformé et placé dans l'espace. Les fonctions N_i sont tabulées pour les éléments de référence ; on applique ensuite un changement de repère.

La MÉF consiste à remplacer la fonction recherchée par son interpolation entre les nœuds. Les fonctions d'interpolation pour les éléments de référence sont connues

6/ Position du problème:

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations. La structure est caractérisée par sa géométrie, le ou les matériaux qui la constituent..Elle est soumise à des sollicitations : des efforts, des déplacements, des flux de chaleurs et des vitesses.

Pour un dimensionnement optimal de la structure il faut connaître :

- Les déplacements en tous points
- Les déformations, les contraintes.
- Les températures
- Les fréquences propres ...etc.....

La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel, la méthode généralement utilisée est La méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis a un champ d'application très vaste en construction-mécanique tel que : L'automobile, La construction navale et La construction aéronautique.

La caractéristique particulière de la méthode des élément finis est que le domaine dans lequel la solution est recherchée, est divisé en sous domaine appelé '*élément fini* '. La quantité inconnue tel que le déplacement est représentée dans chaque élément par des

fonctions simples, Appelées ''fonctions de formes. Pour de tels formulation le choix des subdivisions appelé '' *maillage*'' détermine la précision de l'approximation.

Pour la version h le principe consiste à raffiner le maillage en augmentant le nombre des subdivisions.

Pour la version p le principe consiste à raffiner le maillage en augmentant le degré de la fonction trigonométrique tout en gardant le nombre des subdivisions initial fixe.

L'avantage de la version p par rapport a la version h est que le maillage raffiné est obtenu en augmentant le degrés de la fonction trigonométrique a tout instant sans faire varier la modélisation initiale.

Pour cette étude, on utilise une modélisation type éléments finis hiérarchiques trigonométriques ,[09] l'arbre est modélisé par un seul élément fini hiérarchique représenté sur la fig2.3. par deux nœuds



Fig. 2.3 Représentation d'un élément de poutre de type p

La coordonnée adimensionnelle ξ est reliée au système d'axes globales $(0, x, y)$ par la relation

$$\xi = y / L \quad (2.1)$$

Avec : $0 \leq \xi \leq 1$

Afin d'aborder cette étude nous fixons les hypothèses suivantes, qui supposent que les sections initialement planes et perpendiculaires à la fibre moyenne restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne pendant et après la déformation (cisaillement nul)

On se place dans le cadre de petites perturbations de déplacement de rotation et de déformation linéaire.

Les degrés de liberté de chaque nœuds sont choisis de façon à représenter les hypothèses cinématiques d'Euler Bernoulli [08] .

7/ Champs des déplacements :

Le champ de déplacement d'un point M de la section droite de l'arbre est défini suivant les hypothèses posées ci dessus.

$$\begin{cases} u(X, Y, Z) = u_0(Y) \\ v(X, Y, Z) = v_0(Y) + Z\psi(Y) + X\theta(Y) \\ w(X, Y, Z) = w_0(Y) \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec :

$u_0(Y)$: Déplacement transversal dans le plan XOY .

$v_0(Y)$: Déplacement longitudinal OY .

$w_0(Y)$: Déplacement transversal dans le plan ZOY .

$\psi(Y)$: Rotation de la section droite dans le plan (ZOY) .

$\theta(Y)$: Rotation de la section droite dans le plan (XOY) .

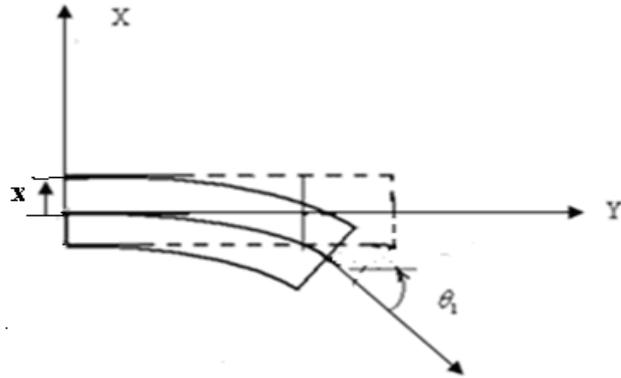


Fig. 2.4 déformation de l'arbre dans le plan XOY

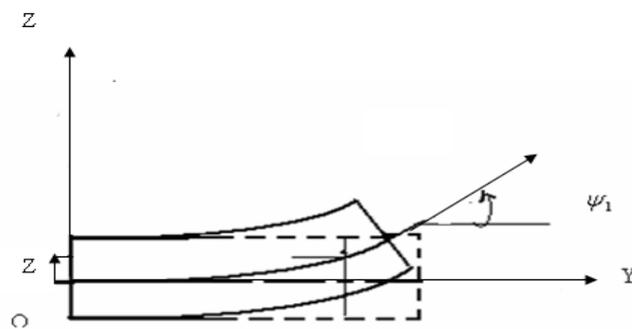


Fig2.5 déformation de l'arbre dans le plan ZOY

Dans le cas des hypothèses d'Euler Bernoulli, les rotations θ et ψ s'expriment en fonction de u_0 et w_0

$$\theta(Y) = u_{0,Y} \quad (2.3)$$

$$\psi(Y) = -w_{0,Y} \quad (2.4)$$

Pour une flexion dominante ($v_0 = 0$), le déplacement s'exprime par :

$$v(X, Y, Z) = -Z w_{0,Y} + X u_{0,Y} \quad (2.5)$$

8/ Fonctions de forme :

Les fonctions de forme utilisées sont des fonctions de forme hiérarchique trigonométrique définies par[29] :

$$N : \begin{cases} f_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ f_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ f_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ f_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \\ f_{r+4}(\xi) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$f_{r+4}(\xi) = \delta r \left[-\xi + (2 + (-1)^r) \xi^2 - (1 + (-1)^r) \xi^3 \right] + \sin \delta r \xi \quad (2.7)$$

$$\delta r = r \pi$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

Les fonctions de forme qui agissent aux deux nœuds sont :

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi) \quad (2.8)$$

Les fonctions de forme qui agissent à l'intérieur de l'élément arbre (entre les nœuds) sont :

$$f_{r+4}(\xi) \quad (2.9)$$

Les déplacements $u_0(\xi)$ et $w_0(\xi)$ peuvent s'écrire[29]:

$$u_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} X_i f_i(\xi) = [N] \{q_x\} \quad (2.10)$$

$$q_x = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_{P_x}\}$$

$$w_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} Z_i f_i(\xi) = [N] \{q_z\} \quad (2.11)$$

$$q_z = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{P_z}\}$$

9/ Formulation par éléments finis de l'arbre :

La modélisation par élément finis concerne un arbre symétrique et déformable. a deux nœuds figure 2.7 et pour chaque nœud quatre degrés de liberté

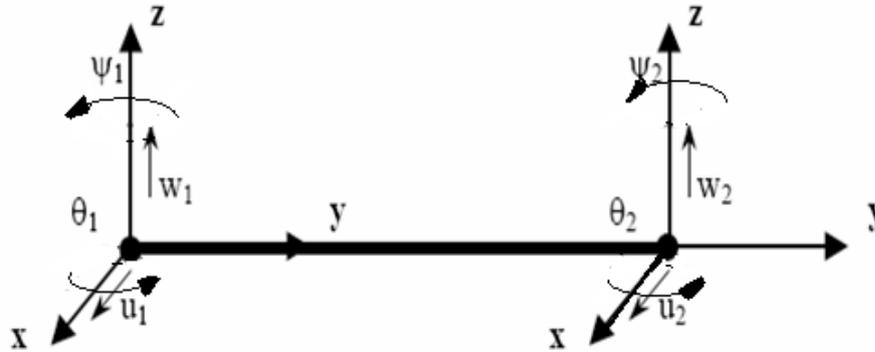


fig2.7 : Degrés de libertés d'un élément arbre

Soit q le vecteur des déplacements aux noeuds:

$$q = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (2.12)$$

Pour deux déplacements u et w dans deux directions on a :

$$q_1 = [u_1, \theta_1, w_1, \psi_1]^T \quad (2.13)$$

$$q_2 = [u_2, \theta_2, w_2, \psi_2]^T \quad (2.14)$$

Soit B le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de formes.

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N(y) q(t) \quad (2.15)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\{B\} = [N] \{q\} = \begin{bmatrix} [N_x] & 0 \\ 0 & [N_z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$u_0 = N_x(y) q_x \quad (2.17)$$

$$\theta_0 = \frac{\partial N_x}{\partial y} q_x \quad (2.18)$$

$$w_0 = N_z(y) q_z \quad (2.19)$$

$$\psi_0 = \frac{\partial N_z}{\partial y} q_z \quad (2.20)$$

N_x et N_z sont les fonctions de formes des poutres en flexion suivant deux directions.

10/ Détermination des matrices :

La détermination de la matrices masse est déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation [28]

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv. \quad (2.21)$$

Pour un cylindre plein

$$dv = r.dr.d\theta.dy$$

L'expression de l'énergie cinétique en fonction de la coordonnée adimensionnelle

$$E_{CA} = \pi L \int_0^r \rho(r) r dr \int_0^1 \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} d\xi. \quad (2.22)$$

Avec B le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de formes

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N(y) q(t) \quad (2.23)$$

Et q le vecteur des déplacements nodaux :

$$q = [u_1, \theta_1, w_1, \psi_1, u_2, \theta_2, w_2, \psi_2]^T \quad (2.24)$$

En substituant le vecteurs déplacement $\{B\}$ par les matrices des fonctions de formes dans la relation de l'énergie cinétique on obtient :

$$E_{CA} = \pi L \int_0^r \rho(r) r dr \int_0^L \{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}\} d\xi. \quad (2.25)$$

10.1/ Matrice masse $[M_A]$:

Le deuxième terme de la relation de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse :

$$E_C(M_A) = \pi L \int_0^r \rho(r) r dr \int_0^L \{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}\} d\xi. \quad (2.26)$$

$$E_C(M_A) = \pi L \int_0^r \rho(r) r dr \int_0^L \{\dot{q}\}^T [M_A] \{\dot{q}\} d\xi. \quad (2.27)$$

$$E_C(M_A) = \pi L \int_0^r \rho(r) r dr \left(\int_0^L \{q_u\}^T [M_{Au}] \{q_u\} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^L \{q_w\}^T [M_{Aw}] \{q_w\} d\xi \right) \quad (2.28)$$

Et la matrice masse peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[M_A] = \pi L \int_0^r \rho(r) r dr \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix}$$

10.2/ Matrice raideur de l'arbre $[K_A]$:

La matrice raideur de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation [28]

$$E_{dA} = \pi \int_0^r E(r) r dr \int_0^L \left[I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy. \quad (2.29)$$

Par substitution du champ de déplacement en terme des fonctions de formes et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \pi L \int_0^r E(r) r dr \int_0^L \left(\{q_u\}^T [N_u] [N_u] \{q_u\} + \{q_w\}^T [N_w] [N_w] \{q_w\} \right) d\xi \quad (2.30)$$

Avec

$$N'' = \frac{\partial^2 N}{\partial^2 \xi} \quad (2.31)$$

L'énergie de déformation (2.32) obtenu par les fonctions de formes, contribue a la formation de la matrice de rigidité de l'arbre $[K_{Au}]$.et $[K_{Aw}]$ des deux plans.

$$E_{dA} = \pi.L \int_0^r E(r).rdr \int_0^L \left(\{q_u\}^T [K_u] \{q_u\} + \{q_w\}^T [K_w] \{q_w\} \right) d\xi \quad (2.32)$$

Ecriture matricielle de la rigidité de l'arbre :

$$[K_A] = \pi.L \int_0^r E(r).rdr \begin{bmatrix} [K_{Au}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{Aw}] \end{bmatrix}$$

11/ Equation du mouvement :

Les équations de Lagrange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis, le vecteur des déplacements aux nœuds de l'arbre est noté $\{q\}$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{cA}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cA}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{dA}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.33)$$

On obtient l'équation finale du mouvement de l'arbre[28].

$$[M] \ddot{q} + [K_A] q = 0 \quad (2.35)$$

$[M]$: Matrice masse.

$[K_A]$: Matrice de raideur de l'arbre.

12/ Forme des matrices

12.1/ La matrice raideur $[K_A]$ de l'arbre :

C'est une matrice symétrique composée des sous matrices $[K_{Au}]$ matrice raideur du premier plan et $[K_{Aw}]$ matrice raideur du deuxième plan. La matrice globale $[K_A]$ est :

$$[K_A] = \pi.L \int_0^r E(r).rdr \begin{bmatrix} [K_{Au}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{Aw}] \end{bmatrix}$$

12.2/ Matrices masses de l'arbre $[M_A]$:

C'est une matrice symétrique composée respectivement des sous matrices $[M_{Au}]$ du premier plan horizontal, et $[M_{Aw}]$ du deuxième plan vertical:

$$[M_A] = \pi L \int_0^r \rho(r).rdr \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix}$$

13/ Description du problème aux valeurs propres :

La solution générale de l'équation différentielle représentant le mouvement vibratoire de l'arbre est du type exponentiel :

$$q(t) = e^{\lambda t} \quad (2.36)$$

λ : facteur scalaire

Par substitution de la relation (2.36) dans l'équation différentielle on aboutit au problème aux valeurs propres généralisées :

$$[\lambda^2 M + K] = 0 \quad (2.37)$$

Vu la nature quadratique de cette dernière équation, le système homogène de n équations linéaires admet 2n solutions non triviales définissant les fréquences propres de vibration

de la structure [26]. Selon une adaptation de DUNCAN [27] pour les systèmes amortis, il est possible d'ajouter a

L'équation (2.37) l'identité auxiliaire d'ordre n , afin de ramener le problème aux valeurs propres quadratique de dimension n en un problème linéaire de dimension $2n$ par l'adjonction de l'équation Suivante :

$$(K + i\eta K_A) \dot{q}(t) = (K + i\eta K_A) \dot{q}(t) \quad (2.38)$$

L'expression du régime libre régi par n équation différentielle du deuxième ordre peut être remplacé par un système de $2n$ équation du premier ordre.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Ou encore :

$$\theta = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$$

$$AR \dot{\theta} + BR \theta = \{0\}$$

La solution est du type :

$$\theta = e^{\lambda t}$$

En injectant cette expression dans la relation (2,39), on abouti finalement a établir le problème

Aux valeurs propres généralisées du mouvement vibratoire de la barre cylindrique.

$$[\lambda (AR) + (BR)] = \{0\}$$

Dans laquelle BR et AR jouent respectivement le rôle de la matrice masse et la matrice de rigidité, La solution du système est donnée par le calcul du déterminant.

$$\det[\lambda (AR) + (BR)] = 0$$

Le système admet donc $2n$ vecteurs propres associés aux valeurs propres λ qui sont les racines de l'équation caractéristique et qui représentent les fréquences vibratoires propres [27]recherchées.

Chapitre III
Résultats et interprétations

3.1/ Introduction :

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont les résultats qui découlent de l'étude d'une structure par la méthode des éléments finis version p appliquée a cette structure en utilisant directement quelques résultats données par des formulations par la mécanique des solides par des recherches scientifiques se trouvant dans la littératures.

3.2/ Organisation de la programmation :

Pour la résolution des problèmes par la méthode des éléments finis en physique des matériaux ou de dynamique des structures, une série de supposition et d'approximation est faite afin de transformer la structure réelle en un modèle mathématique.

La discrétisation ainsi obtenue définie par des subdivisions appelée maillage qui lui-même détermine la précision de l'approximation des éléments constituant la structure.

La difficulté majeur est de pouvoir discrétiser et d'assembler tous ces éléments constituant cette structure tout en assurant leur connectivité et leurs conditions d'assemblage.

Un programme en mathcad 13 de la version p de la méthode des elemnts fini a été réalisé. Il permet de faire la lecture de toutes les données physiques et géométriques de la structure, des fonctions de formes choisies pour sa discrétisation et aux calculs des fréquences propres avec diverses conditions aux limites.

Cette étude est faite en deux étapes pour un arbre s ou solide étagé a deux étages :

- Pour la première étape : on a étudier le 1^o élément d' une barre cylindrique Appele élément de référence .
- Deuxième étape : on a étudier le 2^o élément de d'une barre cylindrique voir fig.3.1



Fig 3.1 :Deux Eléments de références a étudier

l'étude par la méthode des éléments finis exige de faire l'assemblage de deux éléments de références pour obtenir l'élément global voir fig3.2 :

- Le premier élément de référence est un arbre avec un diamètre de dimension petite.
- Le deuxième élément de référence est un arbre avec diamètre plus grand que le 1°.

Dans le programme, il suffit de donner à 'e' l'affectation (1...n) pour fixer le nombre d'élément ou de disque formant le rotor à étudier.

1/ Rotor avec un disque au milieu :

Assemblage de deux éléments ayant des discontinuités physiques et géométriques



*Fig 3.2 Arbre à deux éléments de références ayant les mêmes
Caractéristiques physiques et géométriques.*

2/ Arbre étagée :

Assemblage des éléments de caractéristique physique et géométriques différentes

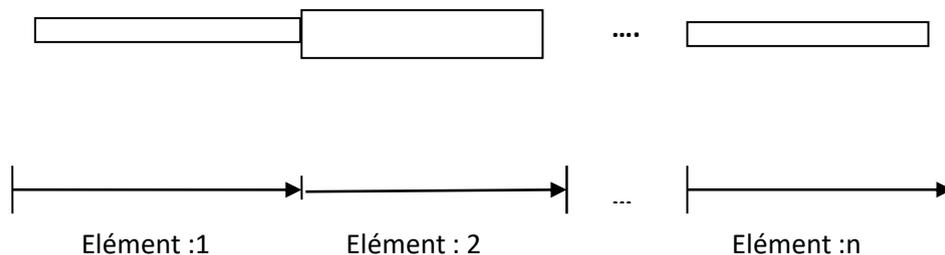


Fig 3.3 Ligne d'arbre avec plusieurs éléments ayant des caractéristiques physiques et géométriques quelconques

3.3 Outils de programmation :

Le matériel utilisé pour l'exécution de ce travail est un micro-ordinateur P IV CPU2.66, 256 RAM, le langage employé est **LE MATHCAD 13**.

3.4 Programme principal :

La réalisation du programme principal pour la résolution de l'équation différentielle donnée les différentes étapes compatibles avec le logiciel utilisé **LE MATH-CAD 13**, sont décrites dans l'Algorithme de programmation.

3.5 Algorithme de Programmation :

L'Algorithme de calcul des fréquences propres d'un Arbre en rotation comprend les étapes suivantes :

1°Etape : Lecture des données physiques et géométriques de l'Arbre.

2°Etape : Calculs de toutes les constantes données dans l'équation différentielle.

3°Etape : Lecture des Fonctions de formes.

4°Etape : Dérivées des fonctions de formes

5°Etape : Calcule de tous les intégrales

6°Etape : Formation des matrices :

7°Etape Réduction des matrices par l'Introduction des conditions aux limites.

8°Etape : Transformation du problème aux valeurs propre a un problème aux valeurs standard.

9°Etape : Calcul et tri des valeurs propres

3.6 Description du programme :

On a grouper tout les paramètres utilisés par la méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométriques **-MEFHT-** et toutes les données physiques et géométriques décrivant l'arbre, le disque et les paliers en question dans un fichier appelé fichier d'entrer.

3-6-1. Données géométriques :

Les données physiques et géométriques du rotor en mouvement et les paramètres de la méthode des éléments finis hiérarchiques-MEFHT-sont définis comme suites :

P : nombre des fonctions hiérarchiques.

N mode : nombre de mode propre.

Ω : vitesse de rotation de l'arbre nulle [tr/mm]

E : module d'Elasticité [Pa]

ρ : masse volumique [Kg/m³]

S : section droite de l'arbre [m²]

a : rayon intérieur de l'arbre [m]

b : rayon extérieur de l'arbre [m]

L : longueur de l'arbre [m].

3-6-2 Lecture des données :

PF=10 nombre de fonction de forme

Ω . Rotation de l'arbre qui est nulle.

ν : Coefficient de poisson

ρ : masse volumique

e : nombre d'élément de référence .(NBE).

3.7 Paramètres de modélisation:

L'Arbre en question est modélisée par un seul élément à deux nœuds -1-et-2-, dans l'état plan de déformation on a pour chaque nœud deux degrés de liberté U_1, θ_1 (Déplacement, rotation au nœud 1) et U_2, θ_2 (déplacement, rotation au nœud 2).

Tab 3-1 : conditions de compatibilités en déplacement et en rotation.

	Valeur en $U(\mathbf{0})$	Valeur en $U(\mathbf{1})$	Dérivée en $U(\mathbf{0})$	Dérivée en $U(\mathbf{1})$
U_1	1	0	0	0
U_2	0	1	0	0
θ_1	0	0	1	0
θ_2	0	0	0	1

3.8 Lecture des fonctions de formes :

La lecture des fonctions de forme pour la méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométrique pour un arbre en flexion est définie par les relations (2.37) et (2.38)

3.9 Dérivé des fonctions de formes :

on dérive les fonctions de formes pour le calcul des intégrales.

3.10 Calcul de toutes les intégrales :

On calcul toutes les intégrales nécessaires pour la formation des matrices.

3.11 Formation des matrices :

Détermination des matrices : $[M]$ matrice masse, $[K]$.

3.12 Introduction des conditions aux limites :

On se fixe une condition aux limites appliquées aux deux nœuds de l'élément étudié pour la réduction de la dimension des deux matrices.

3.13 Transformation du problème aux valeurs propres a un problème aux Valeurs standard.

3.14 Propriétés structurelles et géométriques :

1)- propriétés géométriques

La structure étudiée, c'est une poutre ou arbre cylindrique de rayon r et de longueur L tel que :

$$r=0.05\text{m et }L=0.70\text{m}$$

2)- Propriétés structurelles

Les propriétés constituant le mélange de la composition FGM

Tab 3.2 : Propriétés des matériaux constituant la composition fgm du matériaux

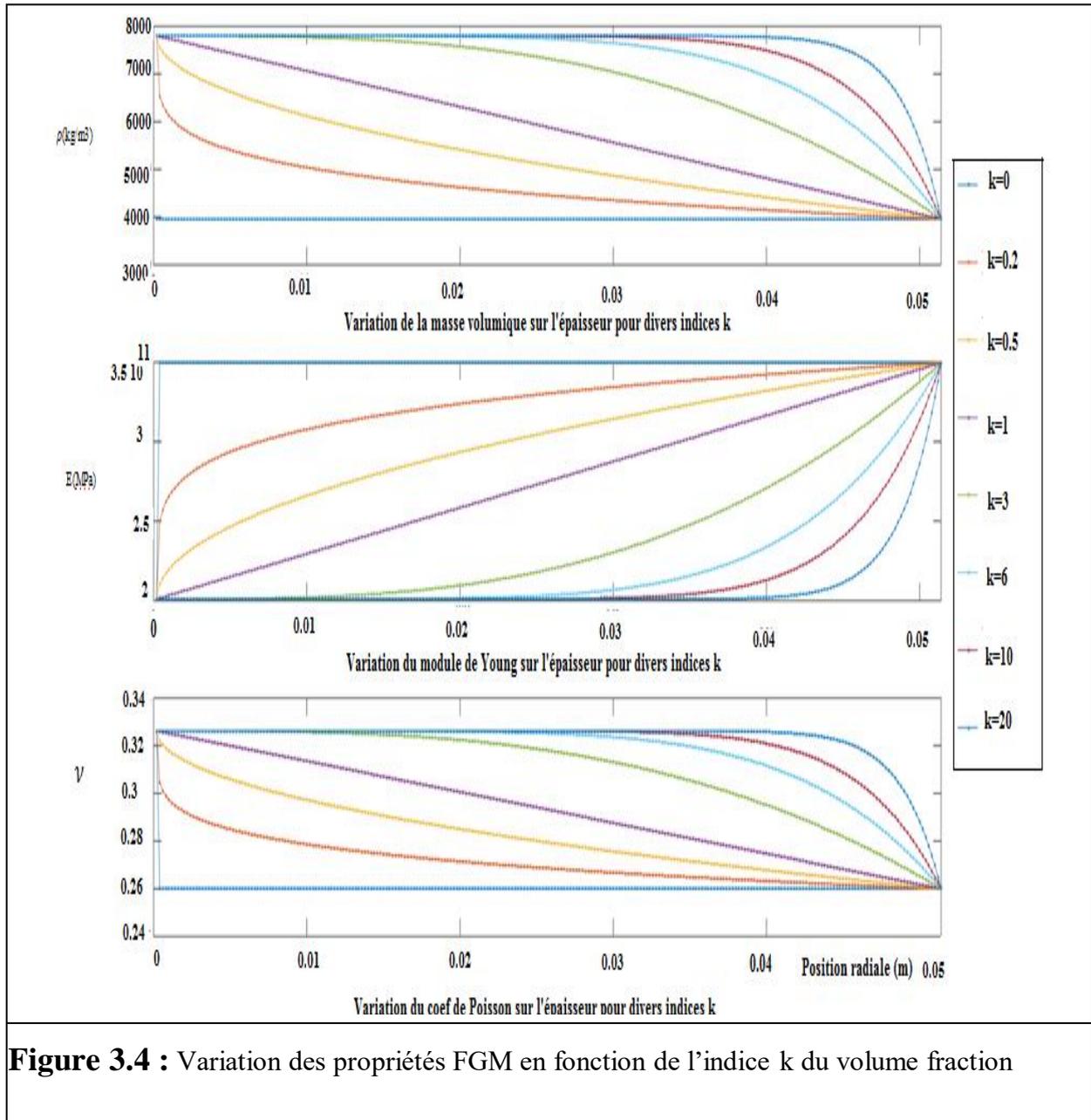
Propriétés	Acier inoxydable SUS304	Oxyde Aluminium $Al_2 O_3$
Module de Young en (GPa)	210	390
Masse volumique en (kg/m ³)	7800	3960
Coefficient de Poisson	0.3	0.26

Tab3.3: Coefficients de Température des propriétés constituant la composition fgm du matériaux

Propriété	Matériau x	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
E(Pa)	SUS304	0	201.0354e9	3.079296e-4	-6533971e-7	0
Mo.Young	Al_2O_3	0	349.5486e9	-3853206e-4	4.026993e-7	-16734e-10
K(W/mK)	SUS304	0	15.37895	-0.001264	0.20923e-5	
Coef Cond	Al_2O_3	-1123.6	-14.087	0.00044	0	0
α (1/K)	SUS304	0	12.33e-6	0.0008	0	0
Coef.dilat	Al_2O_3	0	6.827e-5	0.00018	0	0
ν :Coe Poisson	SUS304	0	0.32623351	-2.001822e-4	3.797358-7	0
	Al_2O_3	0		0	0	0

3.15 Affichage des résultats.

Les résultats obtenus sont stockés dans un fichier de sortie et classés dans ordre croissant. Ou sous forme d'un graphe.



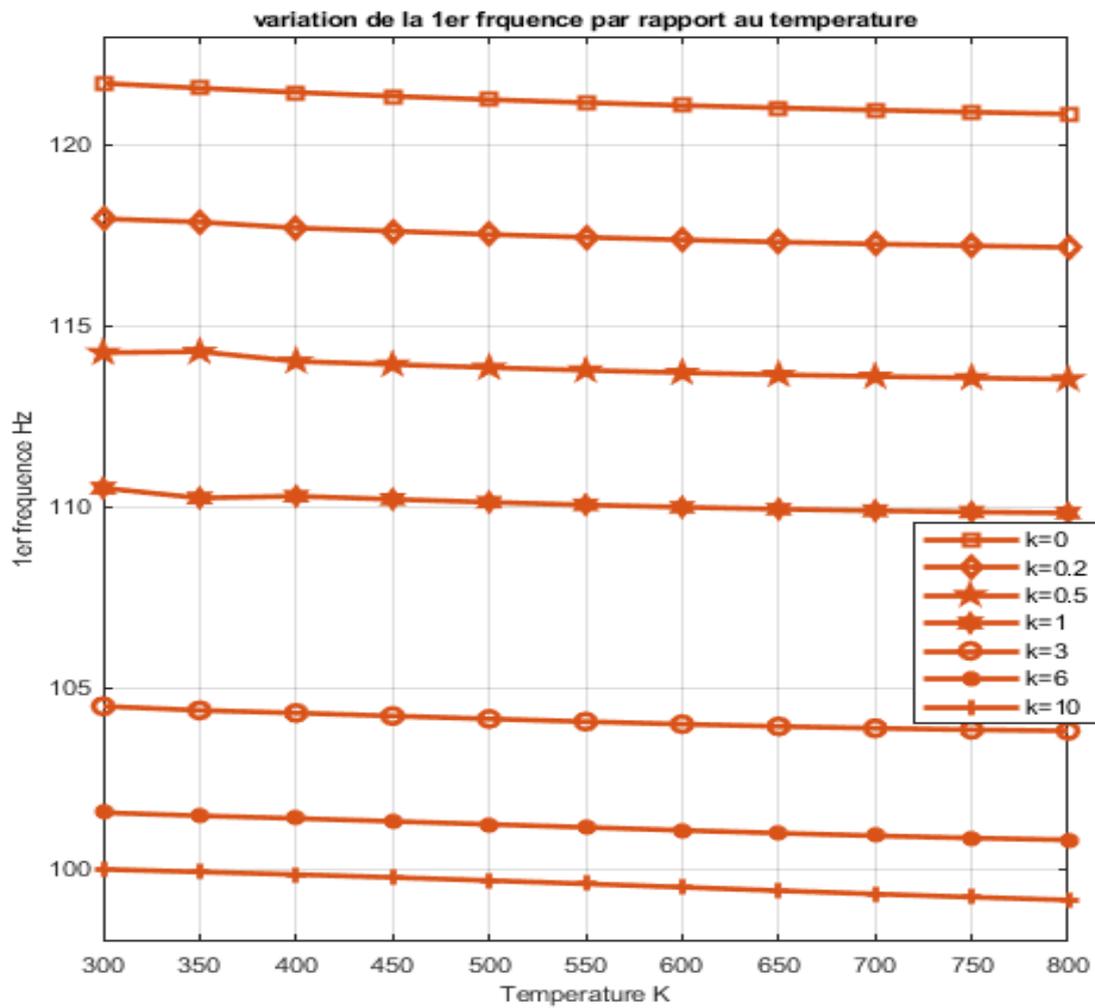


Figure 3.5 : Influence de la température sur la 1^{ère} fréquence propre de la barre cylindrique FGM pour divers volumes fractions

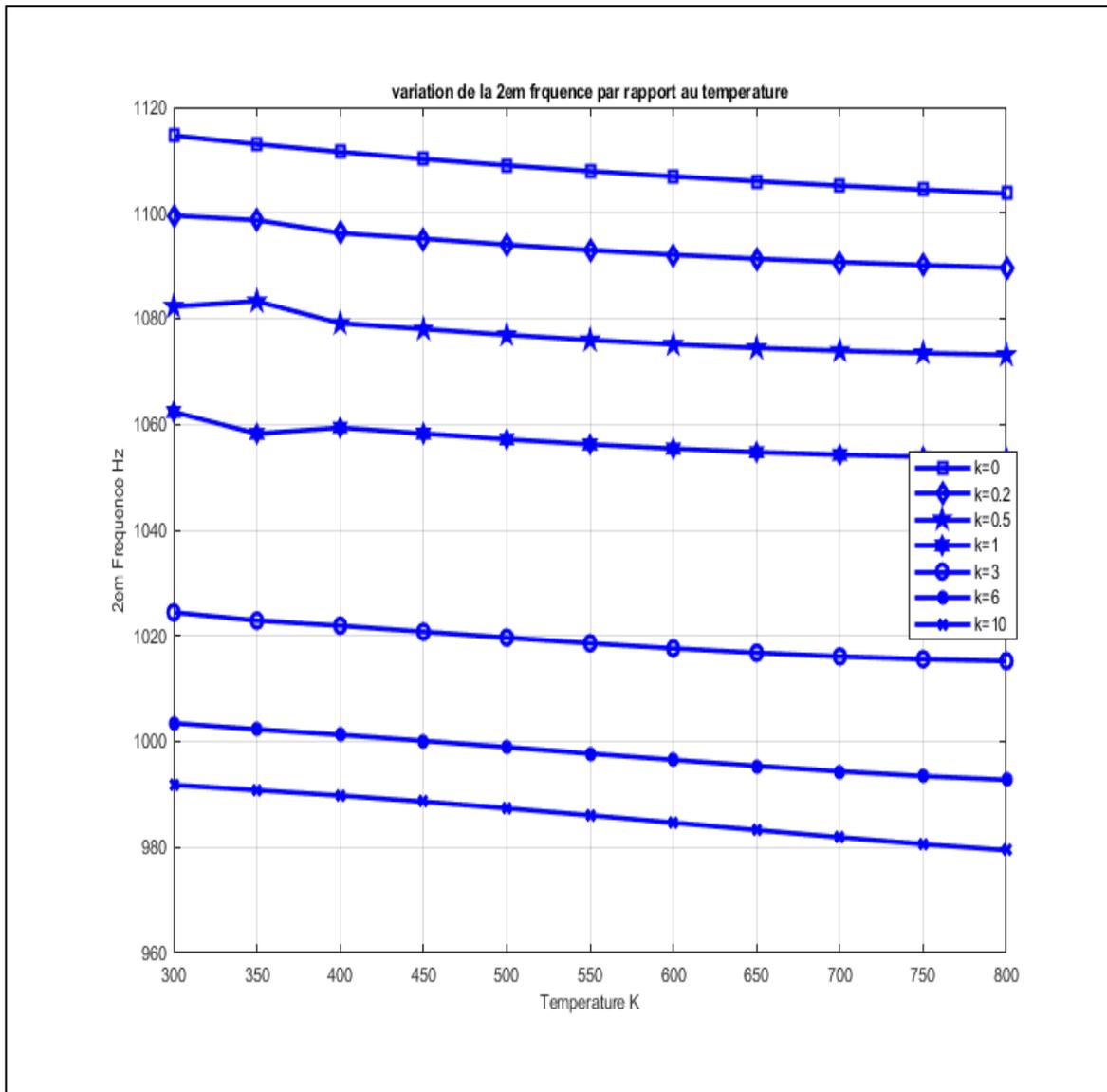


Figure 3.6 : Influence de la température sur la 2^{ème} fréquence propre de la barre cylindrique FGM pour divers volumes fractions

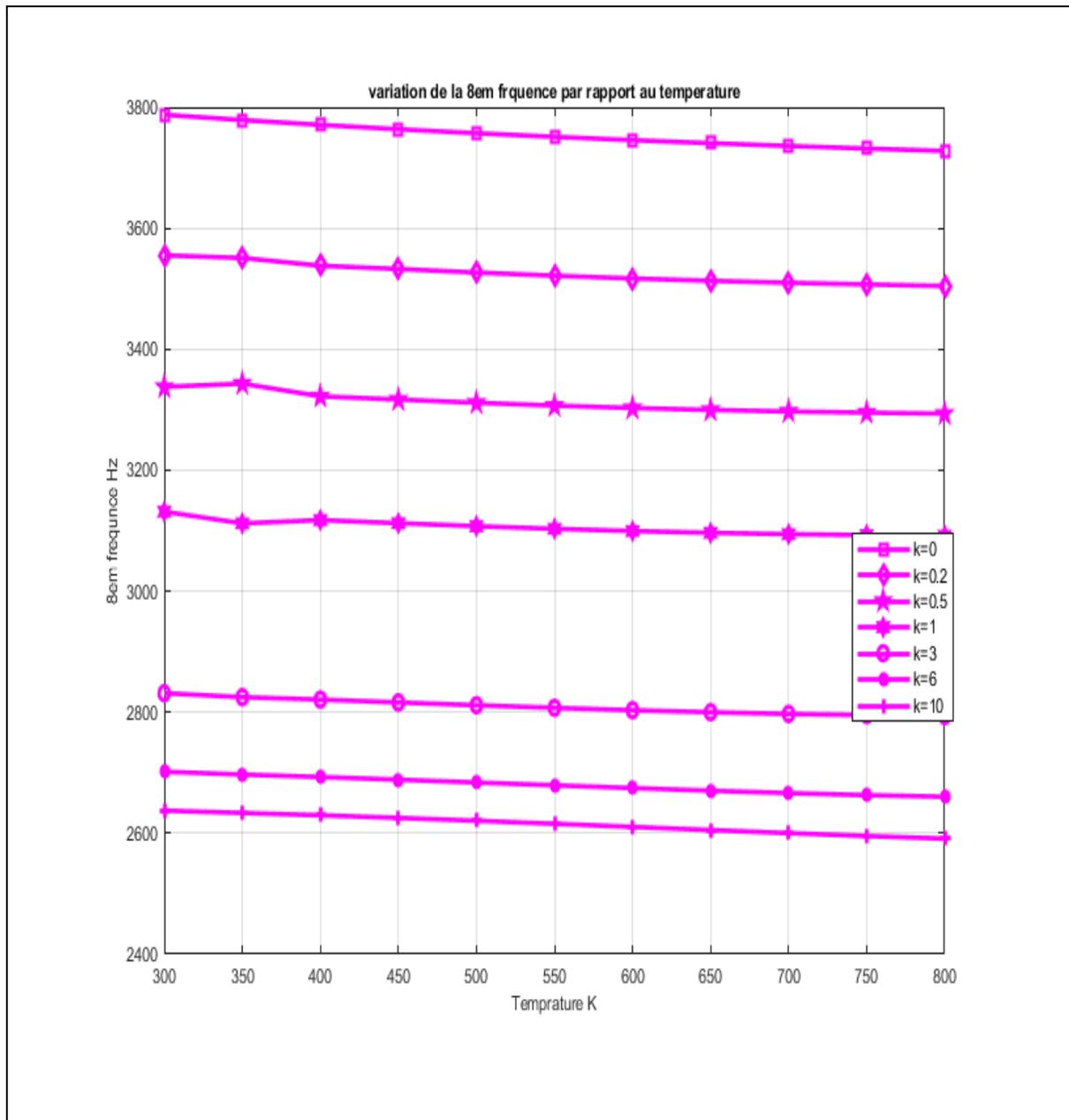
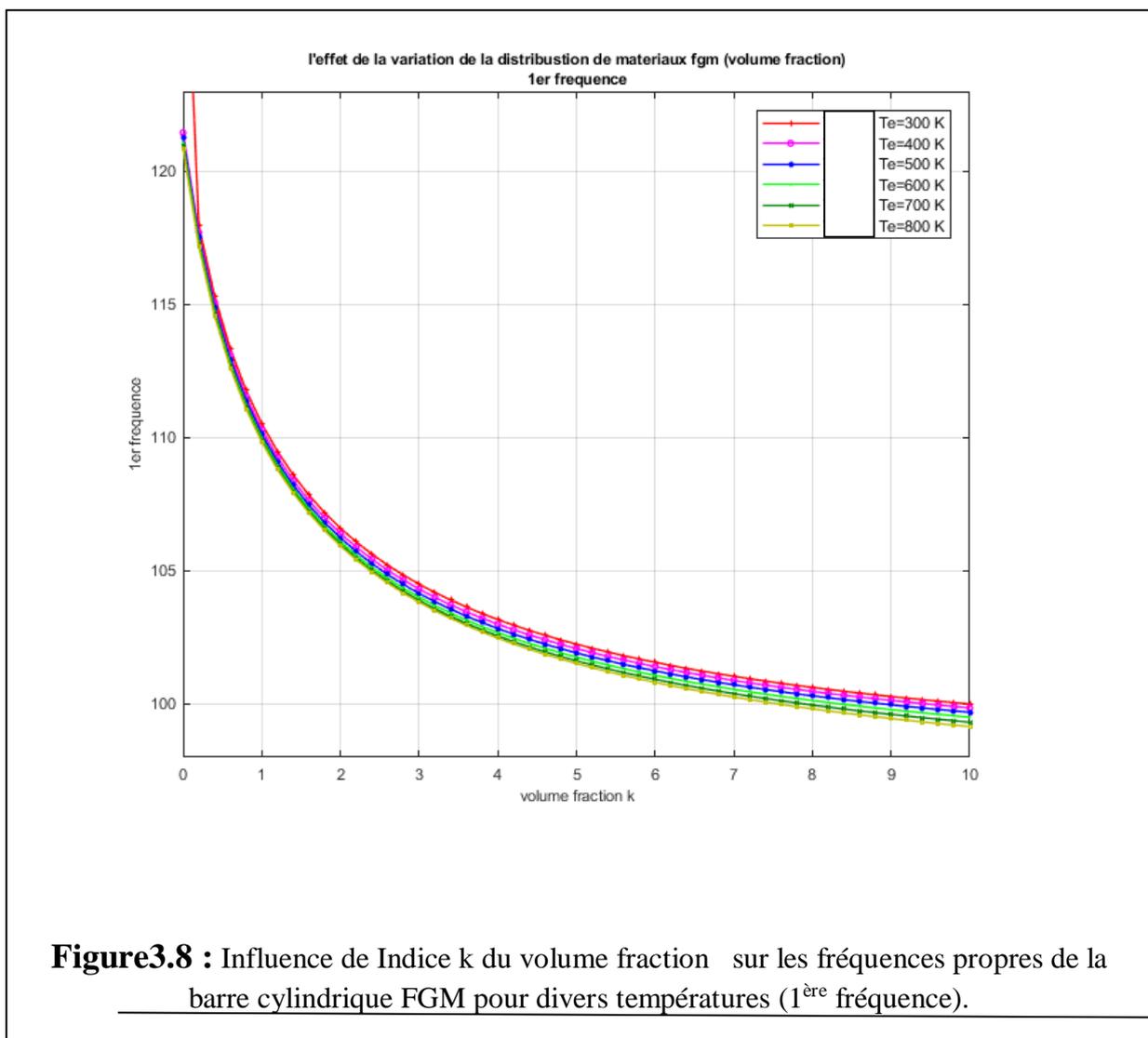


Figure 3.7 : Influence de la température sur la 8^{ème} fréquence propre de la barre cylindrique FGM pour divers indices k de volumes fractions

La fig 3.6 Montre aussi que la 8^o fréquence décroît pour une barre cylindrique travaillant dans un milieu ou la température varie de 300°K a 800°k .cela veut dire que lorsque la structure chauffe les distances intermoléculaires augmentent impliquant que les forces d'attractions intermoléculaires diminuent est la structuré tournante devient souple et flexible.

Pour les trois courbes précédentes on peut dire que : **Pour l'influence du volume fraction k sur les fréquences vibratoires, on constate que plus on augmente k l'indice de graduation métal-céramique et plus les fréquences diminuent cela veut dire que la céramique seul ($k=0$) rend la barre cylindrique plus rigide et les fréquences vibratoires sont aux maximumes et plus le mélange métal-céramique augmente pour divers indices de k La barre cylindrique devient plus flexibles. **Pour l'influence de la température sur les fréquences vibratoires, on constate que plus la température augmente et plus les fréquences vibratoires diminuent cela veut dire que la température rend la barre cylindrique plus souple et flexible. Et cette flexibilité d'une barre cylindrique est observée surtout quand l'indice k du volume fraction est grand.



l'indice k du volume fraction de la composition graduelle métal-céramique augmente les fréquences diminuent car la graduation du mélange sera composée avec plus du métal que de la céramique en respectant la loi de la graduation Power Law. On constate aussi que si l'indice k du volume fraction augmente considérablement et tend vers l'infini les fréquences vibratoires du système tournant diminuent encore plus et demeurent constantes pour une valeur minimale.

Conclusion :

L'arbre étudié est fabriqué en matériaux FGM ou en une composition graduelle métal-céramique avec une protection externe en céramique, les propriétés constituant cet arbre varie continuellement sur l'épaisseur du rayon de cet arbre pour éviter les problèmes d'interfaces. Pour l'étude de l'influence de la température et de l'indice du volume fraction sur les fréquences vibratoires de cet arbre FGM, les résultats obtenus montrent clairement que plus l'indice de volume fraction augmente et plus le mélange constituant la composition graduelle du matériaux FGM de la poutre sera un mélange graduelle constitué majoritairement par le métal dont le module de Young est plus faible et plus souple que celui de la céramique et plus la température augmente et plus la structure du matériaux devient plus souple cela veut dire que lorsque la température augmente la structure du matériaux fgm chauffe et se dilate donc les distances inters-moléculaires grandissent et les forces d'attraction inters-moléculaires diminuent par suite la structure de la poutre FGM devient flexible et souple ainsi les fréquences vibratoires diminuent.

Reference bibliographiques

- [01] **A.Houmat**, An alternative hierarchical Finite element Formulation Applied to Plate vibrations *Journal of Sound and Vibration*.1997, 206 (2) 201-215 .
- [02] **Szabo B.A** *PROB* Theoretical manual release1. Technologies Corp, St Louis, MO, 1985
- [03] **Szabo B.A** *FIESTA*Theoretical manual Release1. Technologies Corp, St Louis, MO, 1985
- [04] **Szabo et Babuska** The p-version of the finite element method *SIAM J Numeric*, 1981, Volume 18
- [05] **Frederic .Cugnion et Pierre .B.** Comparaison entre la méthode des éléments finis h_p et la version hp et leurs avantages Université de Liège
- [06] **V.Heuvline, R Rannacher**, Duality-based adaptivity in the hp - finite element method 2003
- [07] **Manil Suri**, La version HP de la méthode des éléments finis aux problèmes de mécanique des vibrations
- [08] **Wei D, Liu Y and Xiang Z**, An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 331(7), 1686–1700, 2012.
- [09] **Akbaş ŞD**, Geometrically Nonlinear Static Analysis of Edge Cracked Timoshenko Beams Composed of Functionally Graded Material. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, doi: 10.1155/2013/871815, 2013.
- [10] **Wu L, Wang Q and Elishakoff I**, Semi-inverse method for axially functionally graded beams with an anti-symmetric vibration mode, *J Sound Vib*, 284:1190–202, 2005.
- [11] **Aydogdu M**, Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams. *J Reinf Plast Compos*, 27:683–91, 2008.
- [12] **Huang Y and Li XF**. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *J Sound Vib*, 329:2291–303, 2010.

- [13] **Alshorbgy AE**, Eltahir MA and Mahmoud FF. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *App Math Model*, 35:412–25, 2011
- [14] **Shahba A, Attarnejad R, Marvi MT and Hajilar S**. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites Part B*, 42:801–8, 2011
- [15] **Hein H and Feklistova L**, Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Engineering Structures*, 33 (12), 3696-3701, 2011.
- [16] **Şimşek M, Kocatürk T, Akbaş ŞD**, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*, 94 (8), 2358-2364, 2012.
- [17] **Shahba A.,and Rajasekaran S**, Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 36 (7), 3094-3111, 2012.
- [18] **Huang Y, Yang LE and Luo QZ**, Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites Part B: Engineering*, 45 (1), 1493-1498, 2013.
- [19] **Li XF, Kang YA and Wu JX**, Exact frequency equations of free vibration of 51 exponentially functionally graded beams. *Applied Acoustics*, 74 (3), 413-420, 2013.
- [20] **Rajasekaran S**, Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature. *Applied Mathematical Modelling*, 37 (6), 4440-4463, 2013.
- [21] **Rajasekaran S**, Buckling and vibration of axially functionally graded nonuniform beams using differential transformation based dynamic stiffness approach. *Meccanica*, 48 (5), 1053-1070, 2013.
- [22] **Akgöz B and Civalek Ö**, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory. *Composite Structures*, 98, 314-322, 2013.

- [23] **Nguyen DK**, Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material. *Composites Part B: Engineering*, 55, 298-305, 2013.
- [24] **Babilio E**, Dynamics of an axially functionally graded beam under axial load. *European Physical Journal: Special Topics*, 222(7),1519-1539, 2013.
- [25] **Rajasekaran S and Norouzzadeh Tochaei E**, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. *Meccanica*, 49(4), 995-1009, 2014
- [26] **Thomas Gmur** *Problemes Dynamique des structures Analyse modale numerique Presses polytechniques et universitaires romandes Lausanne 1997*
- [27] **Duncan W, R. Collar** *Elémentary Matrice and Some Application to Dynamics and Differential Equation* , Cambridge Universty Press.
- [28] **H. Assem**. Influence de la force axiale sur les vibrations des arbres tournants en presence de l'amortissement structurelle. These de magistere universite abou bekr belkaid 21-07-200 N°1661 MAG.GM44/02.
- [29] **A. Houmat**, An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibration *journal of sound and vibration*. 1997, 206(2)201-215.
- [30] **hin schen schen** . *Functionally Graded Materials*, print in the united states of America on acid-free paper 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1.
- [31] **Jean-Christophe Cuillère**, *Introduction à la méthode des éléments finis*, Paris, Dunod, 2011 (ISBN 978-2-10-056438-5), p. 3-4

