République algérienne démocratique et populaire

وزارة التـعليـم العالـي و البحـث العلمـــي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

المركز الجامعي لعين تموشنت

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Ain-Temouchent

Institut des Sciences

Département des sciences de la matière

Domaine : SCIENCES DE LA MATIERE

POLYCOPIE

MECANIQUE ANALYTIQUE: COURS ET EXERCICES

Filière : Physique

Module : Mécanique analytique

Niveau : 2ème Année Licence (S3)

Année universitaire 2017/2018

"بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ"

MECANIQUE ANALYTIQUE

COURS ET EXERCICES

NOTATIONS

- $\vec{r}$**:** Vecteur position
- $\vec{V}$ **:** Vecteur vitesse
- $\vec{a}$ **:** Vecteur accélération
- q_i **:** Coordonnée généralisée
- **T ou** E_c **:** Energie cinétique
- **Vou** E_p **:** Energie potentiel
- **E :** Energie mécanique
- **W :** Travail
- **L :** Moment cinétique
- P_i **:** Le moment ou quantité de mouvement P=mv
- **m :** La masse
- **M :** La masse totale
- $\vec{R}$ **:** position au centre de masse
- $\vec{F}$: la force
- **L :** Lagrangien
- **H :** L'Hamiltonien
- Q_i **:** Coordonnées d'une transformation canonique.
- P_i **:** Moment d'une transformation canonique.
- **L' :** Lagrangien d'une transformation canonique.
- **H' :** Hamiltonien d'une transformation canonique.
- θ, φ, Ψ **:** angle d'Euler
- $r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$: Coordonnées sphérique
- Ω **:** Vecteur de rotation
- $\dot{q}$ **:** Dérivé d'une position
- $\dot{p}$ **:** Dérivé d'un moment
- δ **:** delta de Kronecker
- δ:dalta de variation
- I: Moment d'inertie
- α: trajectoire ou constante d'intégration

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS

Ce polycopié de **la mécanique analytique** du socle commun du domaine **sciences de la matière** contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours. Elle s'adresse aux étudiants de troisième semestre licence nouveau régime (**LMD**). Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné dans le département des sciences de la matière (Filière physique) de **C.U.B.B.A.T**. il est rédigé sous forme de cours détaillés, avec des applications résolus et des exercices supplémentaires non résolus.

La **“ mécanique analytique ”** ou **“ mécanique classique ”** est une théorie physique fondamentale qui permet de décrire le mouvement des “ corps ” lorsqu'ils interagissent entre eux (particules, corps solides, ondes électromagnétiques, fluides, milieux continus), valable de l'échelle des molécules à l'échelle des planètes. Cette théorie a été développée principalement par:

1. **Newton** (1684): formulation en terme de forces.
2. **Lagrange** (1787) et **Hamilton** (1827): formulation variationnelle: le mouvement effectué est celui qui optimise une certaine “ action ” (comme le chemin le plus court entre deux points). C'est une formulation aussi très géométrique qui permet de comprendre et résoudre des problèmes plus compliqués.
3. **Maxwell** (1865): dynamique des ondes électromagnétiques et des corps chargés en interaction. Les équations de Maxwell s'expriment aussi avec la formulation de Lagrange et Hamilton.
4. **Einstein** (1905, 1917): “ théorie relativiste ”: modification de la théorie précédente, en “ unifiant“ l'espace et le temps, et en fournissant une expression géométrique de la gravitation.

Dans ce cours on étudiera essentiellement les formulations (chapitre 2) et (chapitre 3) de Lagrange et Hamilton. On apprendra des techniques pour résoudre des problèmes précis. On fera des rappels sur (1).

Chapitre I.

Rappels de mécanique classique.

1.1.Cinématique d'une particule :

Selon la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : **cartésiennes, cylindriques ou sphériques**. Soient R_0 $(O,x_0y_0z_0)$ un repère direct orthonormé de base (i, j, k) et M la particule à repérer.

-L'objet de la cinématique est de décrire les mouvements d'une particule sans tenir compte des causes qui les produisent.

- La description du mouvement d'une particule met en œuvre trois vecteurs :

- le vecteur position :

$$\overrightarrow{x_i} = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

- le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}(t) = \frac{d}{dt}x_i(t) \equiv \dot{x}_i(t) \tag{1.2}$$

- le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\, x_i}{dt^2} \equiv \dot{\mathbf{V}} \equiv \ddot{x}_i(t) \tag{1.3}$$

- Le corps mobile sera appelé point matériel. On parle de point matériel lorsque les dimensions du mobile sont considérées négligeables dans les conditions du problème.

- En mécanique classique, la vitesse V du point M est négligeable par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide.

Remarque 1:

Dans le cas d'un mouvement circulaire l'accélération à deux composantes $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\ \vec{U}_\perp$ (r: rayon)

$\vec{a}_t = \frac{dV}{dt}\ \vec{U}_{/\!/}$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r}\,\vec{U}_{\perp} + \frac{dV}{dt}\,\vec{U}_{/\!/} \qquad (1.4)$$

- Plusieurs particules ponctuelles : On représente la position de N particules dans notre espace par N triplets de nombres (total 3N)

$$\mathbf{r}_{\alpha} = (\mathbf{x}_{\alpha 1}, \mathbf{x}_{\alpha 2}, \mathbf{x}_{\alpha 3}) \;;\; \alpha = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (1.5)$$

Position de N points matériels données par n coordonnées généralisées.

On note (x_i ou q_i)

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) = r_1(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n) \\ r_2 &= r_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) = r_2(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n) \\ &\vdots \\ r_N &= r_N(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) = r_N(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n) \end{aligned} \qquad (1.6)$$

1.2.Dynamique d'une particule :

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ces causes sont les interactions entre particules et sont représentées par les forces.

- **Loi fondamentale de la dynamique :**
  - **1^ér loi de Newton :** principe de l'inertie galiléen

    Si le corps matériel n'est soumis a aucune force $\vec{F}^{ext} = 0$:

    -soit en mouvement rectiligne uniforme.

    -soit au repos, s'il était initialement au repos.
  - **2^éme loi de Newton :**

    La dérivé de la quantité de mouvement s'appelle force :

$$\vec{F}^{ext} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = m\frac{\overrightarrow{dmv}}{dt} \Rightarrow \vec{F}^{ext} = m\vec{a} \qquad (1.7)$$

- **3$^{\text{éme}}$ loi de Newton :** principe de l'action et de a réaction

  Lorsque deux particules sont en influence mutuelle, la force appliquée par la première particule sur la deuxième est égal et de signe contraire à la force appliquée par la deuxième particule sur la première.

  $\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$

  $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$ (1.8)

- **Moment cinétique d'une particule :** En mécanique classique, le **moment cinétique** ou **moment angulaire** (par anglicisme) d'un point matériel M par rapport à un point O est le moment de la quantité de mouvement par rapport au point O, c'est-à-dire le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p} \quad (1.9)$$

$$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = m\dot{r}\wedge\dot{r} + mr\wedge\ddot{r} = r\wedge m\ddot{r} = r\wedge \vec{F}^{ext} \quad (1.10)$$

$$r\wedge \vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ est constante}$$

Remarque 2 : Si l'on repère les particules par un indice i, on définit :

m_i = masse de la particule i.

$\overrightarrow{OM}_i = r_i$: Position de la particule i.

$\vec{v}_i$: vitesse de la particule i.

$\vec{P}_i = m\vec{v}_i$:impulsion de la particule i.

$\vec{a}_i$: Accélération de la particule i.

$\frac{dP_i}{dt} = \vec{F}_i$ (i=1, 2,3,…………………N (particules)).

$\vec{F}_i(\vec{r}_i,\dots\dots\ \vec{r}_N,\vec{r}_1\dots\dots\dots\dots\vec{r}_1,t) = m_i\,\ddot{\vec{r}}_i$

1.3.Travail et énergie :

Le travail de la force $\vec{F}^{ext}$ le long d'une trajectoire allant d'un point 1 à un point 2 est défini par :

$$W_{12}=\int_1^2 \vec{F}^{ext}\,\overrightarrow{ds} \qquad (1.11)$$

Ou $\vec{s}$ est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire.

Puisque :

$\vec{F}^{ext} = m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$ et $\overrightarrow{ds} = vdt$, on a

$$W_{12}=\int_1^2 m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}\,vdt \qquad (1.12)$$

$W_{12}=\frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$

Mais $\frac{mv^2}{2} \equiv T$ énergie cinétique.

$$\text{Donc : } W_{12}=T_2-T_1 \qquad (1.13)$$

Cas particulier : Systèmes conservatifs

Un système est dit conservatif si le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Conséquence :

$$W= \oint \vec{F}.\overrightarrow{ds} \qquad (1.14)$$

En effet, décomposons le chemin C en deux chemins C' et C'' tels que C=C'∪C''.
L'intégrale se fait le long d'une trajectoire (le chemin est fermé).

$$\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} = \oint_{1C'}^{2} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} + \oint_{1C''}^{2} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} = 0 \qquad (1.15)$$

On peut écrire F comme le gradient d'une fonction scalaire :

F= -∇ V(r) V(r) : l'énergie potentiel

$$\oint_1^2 \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} = \oint_1^2 -\nabla\, V(r)dS = V_1 - V_2 \qquad (1.16)$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \Rightarrow V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \qquad (1.17)$$

Remarque 3 :

Dans certain cas l'intégrale ne dépend pas de la trajectoire mais uniquement du point initial et final, on dit que la force est conservatrice.

1.4.Systèmes à N particules et forces extérieures :

Considérons un système de N particules dont les interactions mutuelles sont régies par la troisième loi de Newton (principe de l'action et de la réaction).

$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\overrightarrow{dP}_i}{dt} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}$

$\vec{F}_i^{ext}$: La force externe

$\vec{F}_{ji}$: La force due a l'interaction de Jéme particules sur Iéme, $\vec{F}_{jj} = 0$, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Il est utile d'introduire les définitions suivantes :

Centre de masse :

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \qquad (1.18)$$

Impulsion totale :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}} \qquad (1.19)$$

M : masse totale

On obtient donc :

$$\frac{\overrightarrow{dp}_i}{dt} = \frac{dM\dot{\vec{R}}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \qquad (1.20)$$

Théorème : le centre de masse se comporte comme un point matériel de masse totale M soumis a une force externe égale a la somme des forces extérieures s'exerçant sur chacune des particules.

Si : $\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{dp}_i}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_i$ constante (système isolé ou corollaire)

Introduisons les coordonnées barycentriques par rapport au centre de masse.

$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$

$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i'$

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}$

Repère barycentrique :

Définition : repère lie au centre de masse G animé d'un mouvement de translation par rapport a un repère galiléen.

Moment cinétique :

$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_i (\vec{R}_i + \vec{r}_i^{\,\prime}) \wedge m_i (\vec{V} + \vec{v}_i^{\,\prime})$

$\vec{L} = \sum_i (\vec{R}_i \wedge m_i \vec{V} + \vec{r}_i^{\,\prime} \wedge m_i \vec{V} + \vec{R}_i \wedge m_i \vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{r}_i^{\,\prime} \wedge m_i \vec{v}_i^{\,\prime})$

- $\sum_i \vec{R}_i \wedge m_i \vec{V} = M\vec{R}_i \wedge \vec{V}$
- $\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0$
- $\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\prime} = 0$

$$\vec{L} = M\vec{R}_i \wedge \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \wedge \vec{P}_i^{\,\prime} \qquad (1.21)$$

Première théorème de Koning :

Le moment cinétique par rapport au point O est égal à la somme du moment cinétique du centre de masse par rapport au point O et des moments cinétiques des particules par rapport au centre de masse.

Energie : l'énergie cinétique totale est donnée par :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{m v^2} + \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{m_i \vec{v}_i^{\,\prime 2}} \qquad (1.22)$$

$E_C = \frac{1}{2} m v^2$: énergie cinétique de centre de masse.

$E_C = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\prime 2}$: énergie cinétique des particules.

1.5.Degrés de liberté :

Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant :

Où, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles :

$$d = N - r$$

$\boldsymbol{d}$: Degré de liberté ;

$\boldsymbol{N}$ **:** Nombre de coordonnées généralisées

$\boldsymbol{r}$ **:** Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles

Exercices :

Exercice 1 : Système solide-ressort horizontal sans frottement

Soit un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal sans masse.

Le point M se déplace sans frottement sur le plan horizontal. A t = 0, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x_m puis on le lâche sans vitesse initiale.

Quel est son mouvement, quels sont ses caractéristiques ?

Exercice 2 : Système solide-ressort vertical sans frottement

Soit un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort vertical sans masse. A t = 0, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x_m puis on le lâche sans vitesse Initiale. 1. Quel est son mouvement, quels sont ses caractéristiques ?

Expression de l'équation harmonique à partir d'une étude énergétique

Exercice 3 : Le **système est conservatif**

Donner l'expression de l'énergie cinétique du système {masse}.

L'expression de l'énergie potentielle élastique étant Ep=1/2 kx^2, en déduire une expression de l'énergie mécanique. Retrouver l'équation harmonique ?

Exercice 4 : **Système solide-ressort avec frottements fluides.**

On reprend l'exemple des oscillateurs précédents : système masse-ressort horizontal ou Vertical, ou balançoire. Mais cette fois-ci, des frottements fluides viennent freiner le point M dans son mouvement.

Comment ce mouvement est-il modifié ? Quelles sont ces nouvelles caractéristiques ?

Comment établir l'équation harmonique dans le cas de *n* ressorts

Exercice 5 : Le ressort est comprimé

Un objet ponctuel M de masse *m* est accroché à *n* ressorts horizontaux de longueur à vide l_0, ayant des raideurs respectives k_1, k_2, k_3, …, k_n. On néglige les frottements.

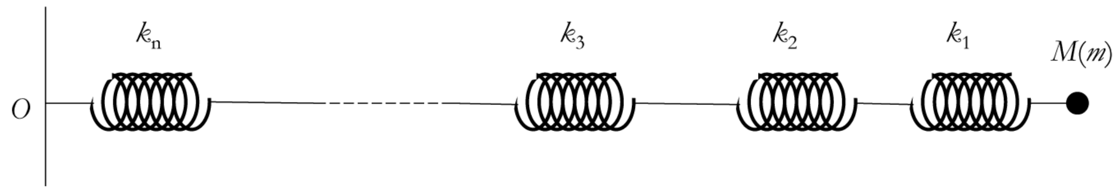


Figure.1.

Le ressort 1 est fixé à une de ses extrémités et l'objet ponctuel est accroché au bout du premier ressort, telle que le précise la figure ci-dessous.

Déterminer l'expression de la force de rappel qu'exerce cet ensemble de ressorts horizontaux de masses négligeables sur M et en déduire l'équation harmonique en fonction des paramètres des ressorts. Que vaut alors la pulsation ?

Exercice 6: Pendule simple

Un enfant, assimilé à un point matériel M de masse *m*, est assis sur une balançoire. Les cordes de la balançoire sont inextensibles, de longueur ` et n'ont pas de masse. Un adulte écarte d'un petit angle l'enfant de sa position d'équilibre puis la lâche sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements.

Quel est le mouvement de l'enfant ? Les caractéristiques de celui-ci ?

Exercice 7 :

Soient les systèmes mécaniques suivants :

Une poulie de masse M, de moment d'inertie J, et de rayon R, suspendue au point O par un ressort de raideur k. Le fil inextensible glisse sur la poulie sans frottement relié par une masse m, Figure 2.

Un système de bras rigidement liés et tournant dans le plan de la figure autour du point fixe O. A l'équilibre le bras l_3 est vertical.

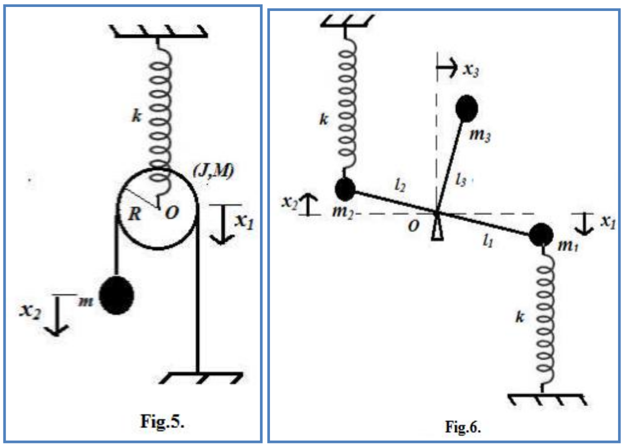


Fig.5. Fig.6.

Figure .2.

Dans le cas des oscillations linéaires, déterminer pour chaque système :

Le nombre de degré de liberté ?

Chapitre II.

Formalisme de Lagrange

Dans la mécanique analytique, Lagrange propose de considérer les problèmes de mécanique de façon suivante, au lieu de déterminer la position q(t) et $\dot{q}(t)$, il pose la question quelle est la trajectoire effectivement suivie par la particule, partant de P_1 a l'instant t_1 elle arrive en P_2 a t_2 ?

2.1. Coordonnées généralisées:

a. Principe de base :

Les coordonnées généralisées sont l'ensemble de variables réelles **indépendantes** ou **liée** permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant t.

Par exemples :

1- un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par 3 coordonnées généralisées (x, y, z);

2- un corps solide peut être déterminé par 6 coordonnées généralisées :
- 03 coordonnées relatives au centre de gravité.
- 03 coordonnées liées aux angles d'Euler (φ, ψ, θ).

3- Les coordonnées généralisées d'un système de P points matériels et Q corps solides sont défini par : $N = 3P + 6Q$ coordonnées.

b. Principe de moindre action :

Une trajectoire α est caractérisé par une quantité, appelée action d'un mouvement se déroulant entre les instants t_1 et t_2 : telle que

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i^{(\alpha)}(t), \dot{q}_i^{(\alpha)}(t), t\right) dt \tag{2.1}$$

Remarque 1 :

- On aurait pu prevoir L ait une dépendance en $\ddot{q}$ mais l'expérience (posé par lagrange) nous indique que ce n'est pas nécessaire.
- Le principe de moindre action dit que la trajectoir physique effectivement suivie $q_i^{\alpha}(t)$ est telle que S est minimale,ou plus genéralement extrémale.

$$\left.\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\overline{\alpha}} = 0 \tag{2.2}$$

2.2. Variation fonctionnelle :

La variation est faite en comparant des trajectoires, c'est-à-dire en variant selon les fonctions $q_i^{\alpha}(t)$. **Figure 2.1**

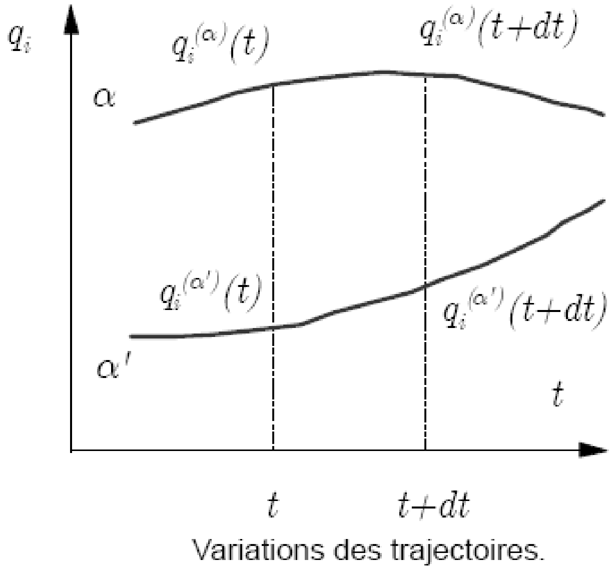


Figure 2.1

On notera de telles variation à l'aide du symbole δ (delta) plutôt que du symbole d, la distinction est claire.

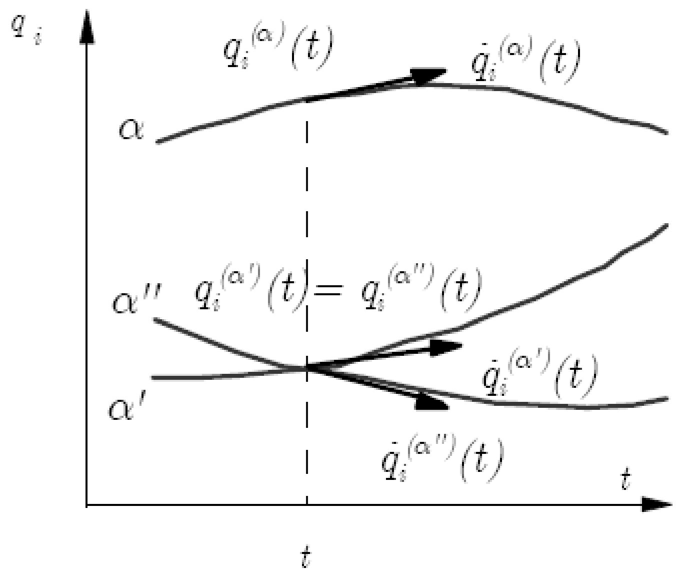
$$\text{différence } d \quad : \quad dq_i^{(\alpha)}(t) = q_i^{(\alpha)}(t+dt) - q_i^{(\alpha)}(t) \tag{2.3}$$

$$\text{variation } \delta \quad : \quad \delta q_i^{(\alpha)}(t) = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t). \tag{2.4}$$

Sur une trajectoire donnée on connait (**Figure 2.2**) :

$$q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t) = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha'')}(t) = \delta q_i^{(\alpha)}(t) \tag{2.5}$$

$$\dot{q}_i^{(\alpha)}(t) - \dot{q}_i^{(\alpha')}(t) \neq \dot{q}_i^{(\alpha)}(t) - \dot{q}_i^{(\alpha'')}(t) \tag{2.6}$$



Comparaison des trajectoires α et α': $\delta q^{(\alpha)}(t)$ est le même.

Figure 2.2

Les variations des vitesses sont donc indépendantes de variations des coordonnées dans ce formalisme.

$$\delta \dot{q}_i^{(\alpha)}(t) = \delta \left(\frac{d}{dt} q_i^{(\alpha)}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\delta q_i^{(\alpha)}(t) \right). \tag{2.7}$$

-Si nous calculons la différentielle ordinaire d'une fonction *f*(x,y) , c'est-à-dire d*f* nous obtiendrons :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{2.8}$$

-Si la variation dx et dy sont indépendants (par exemple dL) :

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \tag{2.9}$$

Il n'y pas de terme $\frac{\delta L}{\delta t} \delta t$ puisque$\delta t = 0$.

On applique le principe de moindre action :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q_i}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q_i}, t)dt = 0 \tag{2.10}$$

$$0 \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q_i}, t)dt \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \delta \dot{q_i} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \frac{d\left(\delta q_i\right)}{dt} \right] dt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

On intègre par parties le deuxième terme du crochet :

$$\int_a^b U(x)W(x)dx = \int_a^b (U,W)'xdx - \int_a^b U'(x)W(x)dx \tag{2.13}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \frac{d\left(\delta q_i\right)}{dt} dt \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \delta q_i \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \right) \delta q_i dt \tag{2.14}$$

$$= \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \right) \delta q_i dt \tag{2.15}$$

$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \tag{2.16}$$

Posant que le q_i sont indépendantes et comme ils sont quelconques, la seul façon de satisfaire cette équation est que chaque terme dans le crochet soit identiquement nul :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{2.17}$$

Identité de Beltrami :

- Un cas particulier fréquent est celui ou la fonction L est indépendante de t.
- L'équation d'Euler-Lagrange prend la forme suivante, appelée identité de Beltrami :

$$L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = C = \text{constante} \qquad (2.18)$$

-pour s'en rendre compte ,décrivons par rapport au temps l'identité de Beltrami :

$$\frac{d}{dt} \left(L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \qquad (2.19)$$

$$\frac{dL}{dt} = \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \frac{dq_i}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) \qquad (2.20)$$

$$= \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i \right) \qquad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = \ddot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \qquad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \qquad (2.23)$$

$$\left(\dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \ddot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \ddot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \qquad (2.24)$$

$$\left(\dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \qquad (2.25)$$

$$\dot{q}_i \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \qquad (2.26)$$

l'équation d'Euler-lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \tag{2.27}$$

2.3. Le Lagrangien :

-Il est évident, toute la validité de la méthode repose sur le chois ou la définition de L.

- les équations d'Euler-Lagrange prétendent résoudre le problème mécanique ayant la trajectoire comme solution.

-Et que ces équations devront correspondre aux équations de Newton.

a-Forces conservatrices :

On appelle une force conservatrice :

$$\nabla \wedge \vec{F} = 0 \tag{2.28}$$

F(r) une telle force peut s'écrire alors :

$$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \tag{2.29}$$

V(r) énergie de potentiel.

$$L=T-V \tag{2.30}$$

T : l'énergie cinétique.

-On va vérifier que les équations d'Euler-Lagrange correspondent aux équations de Newton : $x_i=(x,y,z)$ *(utilisons les coordonnées cartésiennes noté* x_i*)*

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2, \quad V = V(x_j). \tag{2.31}$$

$$L = T - V = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 - V(x_j). \tag{2.32}$$

-l'équation d'Euler-lagrange por le degré de liberté x_i :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \quad \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = m\ddot{x}_i \qquad (2.34)$$

-l'équation d'Euler-lagrange donne donc ici :

$m\ddot{x}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} = \vec{F}_i$. Il y a donc équivalence complète avec Newton.

b- Force non conservateurs :

$$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \neq -\nabla V(\mathbf{r}). \qquad (2.35)$$

Peut de fonctions F dérivent d'un gradient, il en est ainsi par exemple des forces de frictions que l'on écrit souvent empiriquement comme

$$\vec{F}_{\text{frict.}} = -k_{(n)}\dot{x}^n \qquad (2.36)$$

Où typiquement $n \approx 1$ pour les basses vitesses (écoulement laminaire) et $n \approx 2$ pour des vitesses plus élevées (écoulement turbulent).

Est alors l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \qquad (2.37)$$

2.4. Coordonnées curvilignes :

a- Pendule simple, plan :

Soit une masse m accrochée à une tige de longueur ρ constante, dans un champ de gravitation g_j, oscillant dans le plan (x, y). On note F la force exercée par la tige sur la masse m. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m?

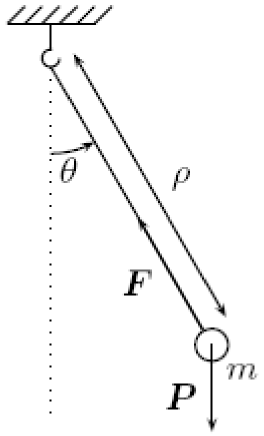


Figure.2.3

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - (-mg\rho\cos\theta) \\ &= \tfrac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho\cos\theta \end{aligned} \tag{2.38}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \\ &\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\theta}\right) = -mg\rho\sin\theta \\ &\rho\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

b-Pendule sphérique :

Soit un pendule de masse m et de longueur r pouvant osciller dans toutes les directions **Fig.2.4**. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m?

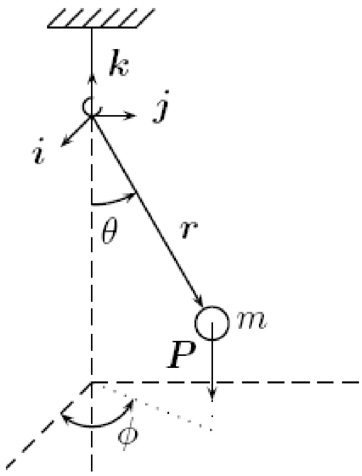


Figure.2.4

Résolution par la mécanique de Lagrange :

En coordonnées sphérique (r, θ, φ), le vecteur position s'écrit :

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + r\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{2. 40}$$

Et le vecteur vitesse :

$$\boldsymbol{v} = \left(r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)\boldsymbol{i} + \left(r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)\boldsymbol{j} - r\dot{\theta}\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} v^2 &= r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi - 2r^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi \\ &\quad + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi + 2r^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi \\ &\quad + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \\ &= r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \tfrac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) \tag{2.41}$$

Et l'énergie potentielle :

$$V = -mgr\cos\theta \tag{2.42}$$

Le Lagrangien a pour expression :

$$L = T - V \tag{2.43}$$

$$= \tfrac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + mgr\cos\theta \tag{2.44}$$

La coordonnée généralisée φ étant cyclique, son moment conjugue est une intégrale première du mouvement. Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - mr^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgr\sin\theta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0 \end{cases} \tag{2.46}$$

$$\begin{cases} mr^2\ddot{\theta} - mr^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + mgr\sin\theta = 0 \\ \dot{\phi}\sin^2\theta = C^{ste} \end{cases} \tag{2.47}$$

Nous obtenons l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g\sin\theta}{r} \\ &= \dot{\phi}^2 \sin^4\theta \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g\sin\theta}{r} \\ &= C^{ste} \times \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g\sin\theta}{r} \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.5. Contraintes holonomes et non holonomes :

$$f(q_1,q_2,\ldots\ldots\ldots\dot{q}_1,\dot{q}_2\ldots.) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

Les cas d'intégralité correspondent à des contraintes non holonomes. En fait, on définit comme contraintes holonomes.les contraintes qui s'écrivent :

$$f\,(q_i,\dot{q}_i\,,t)=\frac{d}{dt}h(q_i,t) = 0 \; soit \;\; h\,(q_i,t) = C \tag{2.50}$$

Ou h (q_i, t) est une fonction quelconque des coordonnés (et du temps).On appelle non holonomes celles qui n'obéissent pas à une telle relation. Soit que

1. $f\,(q_i,\dot{q}_i\,,t)\neq \frac{d}{dt}h(q_i,t)$ (2.51)

2. ou $f\,(q_i,\dot{q}_i\,,t)< 0$ ou $f\,(q_i,\dot{q}_i\,,t)> 0$ (2.52)

Par ailleurs, si l'équation de la contrainte holonome dépend du temps, elle est dite rhéonome si elle n'en dépend pas, elle est dite scléronome.

f=0, $\frac{\partial f}{\partial t}$ ≠0 contrainte rhéonome.

f=0, $\frac{\partial f}{\partial t}$ =0 contrainte scléronome.

2.6. Le principe de D'Alembert :

En notant F_i le modèle de la force totale extérieure exercée sur le solide i, et p_i la quantité de mouvement de ce même solide, nous avons :

$$\vec{F}_i = \dot{p}_i \tag{2.53}$$

Tout problème de dynamique peut se réduire à un problème de statique, simplement en écrivant que :

$$\vec{F}_i - \dot{p}_i = 0 \tag{2.54}$$

Et en considérant que la force d'inertie P_i est maintenant une force appliquée. Puisqu'il y a équilibre, on applique le principe des travaux virtuels :

$$(\vec{F}_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \tag{2.55}$$

Cela étant valable pour chaque solide nous pouvons sommer sur i. Si de plus nous utilisons les équations de liaison, nous obtenons le principe de D'Alembert :

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \tag{2.56}$$

La force Fi s'exerçant sur le solide i se décompose en une force active et une force de contrainte :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,active} + \vec{F}_i^{\,contrainte} \tag{2.57}$$

En général, nous choisirons des déplacements virtuels pour lesquels les forces de contrainte ne travaillent pas :

$$\vec{F}_i^{\,contrainte} \cdot \delta r_i = 0 \tag{2.58}$$

Et dans ce cas le principe de D'Alembert s'écrit,

$$\sum_i (\vec{F}_i^{\,active} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \tag{2.59}$$

2.7. Applications :

2.7.1. Particule dans un champ gravitationnel :

Une particule de masse m dans le champ gravitationnel prés de surface à une énergie potentielle V=mgz ou z mesure sa hauteur et g est l'accélération due à la gravité.

Son énergie cinétique est :

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2.60}$$

Donc :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \tag{2.61}$$

On à trois équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = c. \tag{2.63}$$

$$x(t) = ct + a \tag{2.64}$$

Ou les constantes C et a sont déterminées par les conditions initiales du problème de la même façon.

$$Y(t)=C'+a' \tag{2.65}$$

Pour z nous avons :

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z} \tag{2.67}$$

$$m\ddot{z} + mg = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{z} = -g \tag{2.68}$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + c''t + a'' \tag{2.69}$$

C' et a" sont déterminées par les conditions du problème.

$$\begin{aligned} x(t) &= ct + a \\ y(t) &= c't + a' \\ z(t) &= -\frac{gt^2}{2} + c''t + a'' \end{aligned}$$

2.7.2. Particule liée à un ressort :

Une particule de masse m est suspendue à un ressort de constante K dans le champ gravitationnel prés de la surface de la terre. On pose que seul le mouvement vertical permis son énergie potentiel est :

$$V = \frac{k}{2}(z - z_0)^2 + mgz$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{z}^2$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{k}{2}(z - z_0)^2 - mgz$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= -k(z - z_0) - mg \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}. \end{aligned} \qquad (2.70)$$

L'équation d'Euler-Lagrange : (il y a qu'un seul degré de liberté)

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + k(z - z_0) + mg = 0 \\ m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg. \end{aligned} \qquad (2.71)$$

On va diviser la solution d'une telle équation en deux parties :

$$z = z_h + z_p \qquad (2.72)$$

1-solution homogène Z_h qui est solution de :

$$m\ddot{z}_h + kz_h = 0. \qquad (2.73)$$

2-Solution particulière Z_p telle que :

$$m\ddot{z}_p + kz_p = kz_0 - mg \qquad (2.74)$$

L'équation homogène trouve solution avec la forme :

$$z_h = Ae^{st}$$

$$\frac{dz_h}{dt} = sz_h$$

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_h + kz_h &= 0 \\ &\Downarrow \\ ms^2 + k &= 0 \end{aligned}$$

$$s^2 = -\frac{k}{m} \Longrightarrow s = \pm i\omega \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.75}$$

La solution générale s'écrit :

$$z_h(t) = A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t} = A\sin(\omega t + \delta) \tag{2.76}$$

Le terme non homogène obéit :

$$m\ddot{z}_p + kz_p = kz_0 - mg = \text{ constante.}$$

$$z_p = \text{constante} = C$$

$$\begin{aligned} z(t) &= z_h(t) + C \\ &= A\sin(\omega t + \delta) + C \end{aligned}$$

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}_h + 0 = -\omega^2 A\sin(\omega t + \delta)$$

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg \tag{2.77}$$

-le champ gravitationnel cause un déplacement du ressort (vers le bas) d'une longueur mg/k.

2.7.3. Problème à deux corps :

C'est le système physique fermé le plus simple qui existe. Deux particules, de masses m_1 et m_2, dont les positions instantanées sont r_1 et r_2 interagissent via un potentiel :

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{2.78}$$

Alors le lagrangien s'écrira :

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{2.79}$$

$r=r_1+r_2$ est la coordonnée de centre de masse.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.80}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \tag{2.81}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \tag{2.82}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}} \tag{2.83}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}} \tag{2.84}$$

Remplaçant dans le lagrangien nous obtenons :

$$L = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 = \text{masse totale du système} \\ m &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{masse réduite du système} \end{aligned}$$

et le lagrangien se décompose en deux éléments qui ne sont pas reliés :

$$L = L_{\text{CM}} + L_{\text{rel.}}. \tag{2.86}$$

L_{CM} est simplement l'énergie cinétique globale du système (À noter que si $m_2 \gg m_1$ (par exemple le cas Soleil-Terre), alors $m \simeq m_1$, Lrel. = Lm_1) et

$$L_{\text{CM}} = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 \tag{2.87}$$

R est une variable cyclique :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \mathbf{C} = \text{vecteur constant}$$

Le C.M. se déplace à vitesse constante. La deuxième partie, relative, est :

$$L_{\text{rel.}} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \tag{2.88}$$

C'est le lagrangien d'une particule de masse m et de position r.

2.7.4. Le potentiel central :

Nous étudions ici un problème à un corps à un corps qui est aussi assimilable à celui d'une particule soumise à une force centrée à l'origine l'lagrangien est de la forme :

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \tag{2.89}$$

Le moment cinétique :

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \tag{2.90}$$

$$\dot{\mathbf{l}} = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \tag{2.91}$$

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{vecteur constant}$$

$$\mathbf{l} \perp \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \tag{2.92}$$

Lagrangien en coordonnées polaires :

Choisissons un plan xoy avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\dot{\theta} = 0$ et sin $\frac{\pi}{2}$=1.

On trouve :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \tag{2.93}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = l,$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0} \tag{2.94}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$\boxed{m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{mr^3} \equiv -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r}} \tag{2.95}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

$$\boxed{m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} = \vec{F}_{\text{eff}}(r).} \qquad (2.96)$$

Le potentiel efficace **Veff(*r*)** est constitué du potentiel original *V*(*r*) plus $\frac{l^2}{2mr^2}$ qui représente une répulsion centrifuge.

Exercices :

Exercice N° 1 :

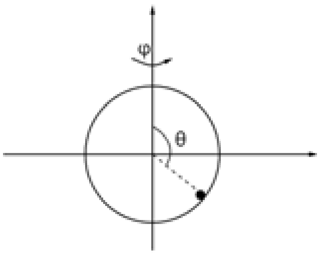
Déterminer l'équation d'Euler-Lagrange en utilisant deux méthodes différentes :

Indication :

1. $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$
2. $\int_a^b U(x)W(x) = \int_a^b (u,w)'xdx - \int_a^b (u)'w(x)dx$
3. $L - \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$=constante

Exercice N°2 :

Une bille glisse sans frottement le long d'un cerceau de rayon R animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à vitesse angulaire ω constante. La position de la bille sur le cerceau est déterminée par un seul degré de liberté, l'angle θ avec la verticale. La position du cerceau est elle d´écrite par l'angle φ (voir la **FIG.1**).



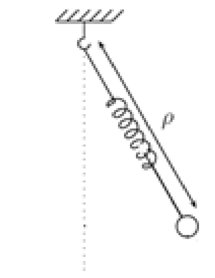
La bille sur le cerceau en rotation.

Figure.1.

1. Ecrire le Lagrangien de ce système et en déduire l'équation du mouvement ?

Exercice N°3 :

Soit un pendule simple, à ressort, de longueur $\rho(t)$ variable. La masse m est supposée osciller dans le plan. (**Fig.2**) Quelle est l'équation de son mouvement :



Pendule plan à ressort

Figure.2.

1. résolution par la mécanique de Newton ?
2. résolution par la mécanique de Lagrange ?

Exercice N°4 :

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit :

$$\mathbf{U(q)=\frac{1}{2}\, m\omega^2 q^2}$$

1- écrire le lagrangien de l'oscillateur harmonique et en déduire l'équation du mouvement ?

Exercice N°5 :

On considère l'électron d'un atome hydrogénoide subissant l'effet du potentiel central :

$$\mathbf{V(r)}=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{C}{r}$$

1- Donner l'expression du lagrangien de ce système en coordonnées sphériques et en déduire les équations du mouvement ?

2- En déduire l'existence de quantités conservées ? interpréter ?

Exercice N°6 : Machine d'Atwood à rendre :

Considérer le dispositif de double poulie, présenté ci-contre, soumis à la seule action de la pesanteur. **Fig.3.**

1- Donner les contraintes de ce système ?

2- Ecrire le Lagrangien de ce système en choisissant les positions des masses m_1 et m_3 comme coordonnées généralisées ?

3- Dériver les équations du mouvement de ces masses et déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3 ?

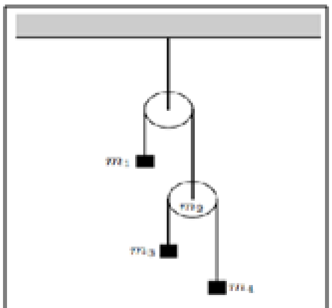


Figure 3

Exercice N°8 :

Deux masses m_1 et m_2 sur un double plan incline sont reliées entre elles par un fil de longueur constante passant par une poulie. Les masses se déplacent sans frottement. Quelle est l'´equation de leurs mouvements ? Résolution par le principe d'Alembert.

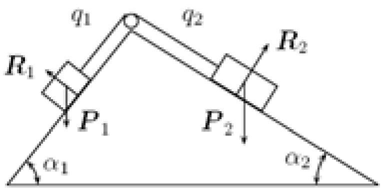


Figure.4.

Chapitre III.

Formalisme de Hamilton

3. Introduction :

Le formalisme d'Hamilton consiste à réécrire les N équations du second ordre d'Euler Lagrange comme un système de 2N équation du premier ordre.

3.1.Transformation de Legendre :

Soit une fonction $f(u, v)$ où u et v sont les deux variables indépendantes :

$$w = \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = w(u,v). \tag{3.1}$$

La transformation de Legendre permet de définira une fonction $g(u, w)$ qui peut remplacer :

$$f(u,v) \mapsto g(u,w) = v \cdot w - f. \tag{3.2}$$

En effet :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial u}du + wdv. \tag{3.3}$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} dg &= wdv + vdw - df \\ &= wdv + vdw - \frac{\partial f}{\partial u}du - wdv \\ &= vdw - \frac{\partial f}{\partial u}du \quad \Longrightarrow \quad g = g(u,w) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pouvoir l'inverser en $v = v(u, \omega)$:

$$g(u,w) = wv(u,w) - f(u, v(u,w)). \tag{3.5}$$

Puisque g est fonction de u et ω

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial w}dw \tag{3.6}$$

Et on identifie avec *dg* :

$$v = \frac{\partial g}{\partial w}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}. \tag{3.7}$$

3.2. L'Hamiltonien :

On pose :

$$\begin{gathered} L(q_i, \dot{q_i}, t) \Longleftrightarrow f(u, v) \\ q_i \Longleftrightarrow u \\ \dot{q_i} \Longleftrightarrow v \\ p_i \left(\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) \Longleftrightarrow w \left(= \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ H(q_i, p_i, t) \Longleftrightarrow g(u, w) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Nous définissons le moment canonique :

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} = p_i(q_j, \dot{q_j}, t); \quad i, j = 1, 2, ...n \tag{3.9}$$

Pouvoir l'inverser en :

$$\dot{q_i} = \dot{q_i}(q_j, p_j, t); \quad i, j = 1, 2, ...n \tag{3.10}$$

Par analogie :

$$\begin{array}{ccccccc} g(u, w) & = & v \cdot w & - & f \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ H(q_i, p_i, t) & = & \sum_i^n \dot{q_i} p_i & - & L(q_i, \dot{q_i}, t) \end{array} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} d\dot{q_i} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n p_i d\dot{q_i} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{3.12}$$

On calcule dH :

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i^n \dot{q}_i dp_i + \sum_i^n p_i d\dot{q}_i - \underbrace{\sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i^n p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt}_{dL} \\ &= \sum_i^n \dot{q}_i dp_i - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{3.13}$$

On peut écrire aussi dH :

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{3.14}$$

On comparant (3.13) avec (3.14) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad n \text{ équations} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i; \quad n \text{ équations} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si H ne dépend pas du temps : $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

On écrit :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \tag{3.16}$$

Et nous définissons les 2n équations canoniques du mouvement :

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i = 1, 2, \ldots n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \ldots n \end{aligned}\right\} \quad 2n \tag{3.17}$$

Exemple
Soit une particule de masse m se déplaçant en une dimension et soumise à une force $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x).$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m}.$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}(p)p - L(x, \dot{x}(p)) \\ &= \frac{p}{m}\cdot p - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2\,m} + V(x) \end{aligned}$$

$$H = T + V$$

3.3. Crochets de Poisson et Variables canoniques :

3.3.1. Crochets de Poisson :

Nous définissons le crochet de Poisson $\{A, B\}_{q,p}$:

$$\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_{i}^{n} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right] \qquad (3.18)$$

Soit une fonction quelconque $F\,(q_i, p_i, t)$. Sa dérivée totale par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i\right] + \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (3.19)$$

Avec :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (3.20)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

si F ne dépend pas du temps $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$

Alors $F(q_i, p_i)$ est une constante du mouvement si son crochet de Poisson avec H est nul.

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} \tag{3.22}$$

$$\text{Si } \{F, H\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dF}{dt} = 0 \tag{3.23}$$

Propriétés des crochets de Poisson :

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \tag{3.24}$$

$$\{A, b\} = 0 \qquad b = \text{constante} \tag{3.25}$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \tag{3.26}$$

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{A, B\} = \left\{\frac{\partial A}{\partial t}, B\right\} + \left\{A, \frac{\partial B}{\partial t}\right\} \tag{3.28}$$

$$\{A, q_i\} = -\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{3.29}$$

$$\{A, p_i\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \tag{3.30}$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 \tag{3.31}$$

L'équation (3.31) est l'identité de Jacobi.

Variables canoniques :

calculons les crochets de poisson entre des variables canoniques : coordonnées et moments : $\{q_k, q_j\}$, $\{p_k, p_j\}$ et $\{q_k, p_j\}$ (k et j sont fixés) .

$$\{q_k, q_j\} = \sum_i^n \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right] \equiv 0 \tag{3.32}$$

Puisque

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0 \tag{3.33}$$

Parce que les variables canoniques sont indépendantes et :

$$\{p_k, p_j\} = 0 \tag{3.34}$$

Pour la même raison, mais

$$\begin{aligned} \{q_k, p_j\} &= \sum_i^n \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right] \\ &= \sum_i^n \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\ &= \sum_i^n \delta_{ki} \delta_{ji} = \delta_{kj} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ou δ_{Kj} est le delta de Kronecker ($\delta_{Kj} = 1$ *si* i=j et $\delta_{Kj} = 0$ si i≠j)

3.4. Moments généralisés :

Nous avons vus, les p_i étaient les composantes de P :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{3.36}$$

Cette définition n'est pas toujours vrai lorsque les itérations dépendent des vitesses.

Exemple :

Une particule de masse m et de charge e dans un champ électromagnétique en coordonnée cartésienne x_i=(x, y, z) :

$$L = \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 + e\sum_i \dot{x}_i A_i - eV \tag{3.37}$$

A et V sont les potentiels scalaire et vectoriel du champ électromagnétique.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i \tag{3.38}$$

On peut écrire :

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \tag{3.39}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L \tag{3.40}$$

On obtient :

$$H = \frac{1}{2m}\sum_i (p_i - eA_i)^2 + eV. \tag{3.41}$$

3.5. Transformations canoniques :

Nous noterons Q_i et P_i les nouvelles variables canoniques obtenues suite à une telle transformation :

$$q_i, p_i \underset{\text{T.C.}}{\Longrightarrow} Q_i, P_i \tag{3.42}$$

Définissant un nouvel Hamiltonien que nous noterons :

$$q_i, p_i, H(q_i, p_i) \underset{\text{T.C.}}{\Longrightarrow} Q_i, P_i, H'(Q_i, P_i) \tag{3.43}$$

On calcule les trois crochets de poisson entre les variables canoniques :

$$\{Q_k, Q_j\}_{Q,P} = 0, \{P_k, P_j\}_{Q,P} = 0, \ \{Q_k, P_j\}_{Q,P} = \delta_{kj} \tag{3.44}$$

Et les équations canoniques :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \tag{3.45}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}. \tag{3.46}$$

Avec :

$$\begin{matrix} Q_i = Q_i(q_j, p_j, t) \\ P_i = P_i(q_j, p_j, t) \end{matrix} \qquad i, j = 1, 2, ..., n \tag{3.47}$$

Exemple de T.C :

$$\begin{array}{rl}
\text{Choisir la T.C.:} & q_i, P_i \underset{\text{T.C.}}{\Longrightarrow} p_i, Q_i \\
& \Downarrow \\
\text{Écrire } p_i \text{ et } Q_i : & p_i = p_i(q_j, P_j, t) \\
& Q_i = Q_i(q_j, P_j, t) \\
& \Downarrow \\
\text{Inverser } p_i = p_i(q_j, P_j, t) : & P_j = P_j(q_i, p_i, t) \\
& \Downarrow \\
\text{Substituer dans } Q_i = Q_i(q_j, P_j, t) : & Q_i(q_j, P_j, t) \Longrightarrow Q_i(q_j, p_j, t)
\end{array} \tag{3.48}$$

Fonction génératrices :

$$L = \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \quad \text{où} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial p_i} \tag{3.49}$$

On peut écrire :

$$\delta S = \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 L dt = 0. \tag{3.50}$$

Si L correspond à H donc L' correspondra à H'

$$\delta \int_1^2 L' dt = 0 \quad \text{où} \quad L' = \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H'. \tag{3.51}$$

Et nous aurons

$$L, H \underset{\text{T.C.}}{\Longrightarrow} L', H' \tag{3.52}$$

L et L' ne peuvent différer l'un de l'autre que par la dérivée totale d'une fonction F :

$$L = L' + \frac{dF}{dt}. \tag{3.53}$$

On trouve donc :

$$\delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dF}{dt} \right] dt \tag{3.54}$$

On appelle F le générateur de la T.C et on identifie généralement quatre cas :

Variables indépendantes	**Variable dépendantes**	**Générateurs**
q_i, Q_i	p_i, P_i	$F_1(q_i, Q_i, t)$
q_i, P_i	p_i, Q_i	$F_2(q_i, P_i, t)$
p_i, Q_i	q_i, P_i	$F_3(p_i, Q_i, t)$
p_i, P_i	q_i, Q_i	$F_4(p_i, P_i, t)$

$$\frac{dF_1}{dt} = \{F_1, H\}_{q,Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{3.55}$$

$$= \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\sum_i^n p_i\dot{q}_i - H(q_i,p_i,t) &= \sum_i^n P_i\dot{Q}_i - H'(Q_i,P_i,t) + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i \\ &\quad + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

On identifie, q_i, Q_i et donc $\dot{q}_i$ et $\dot{Q}_i$ comme étant indépendantes :

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i}F_1(q_j,Q_j,t) = p_i(q_j,Q_j,t)\\ P_i &= -\frac{\partial}{\partial Q_i}F_1(q_j,Q_j,t) = P_i(q_j,Q_j,t)\\ H' &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t}\end{aligned} \tag{3.58}$$

Et de même façon, on identifie les facteurs des variables indépendantes, $\dot{q}_i$et $\dot{P}_i$ pour la fonction F2 :

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i}F_2(q_j,P_j,t) = p_i(q_j,P_j,t)\\ Q_i &= \frac{\partial}{\partial P_i}F_2(q_j,P_j,t) = Q_i(q_j,P_j,t)\\ H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t}\end{aligned} \tag{3.59}$$

3.6. La méthode de Hamilton-Jacobi :

Les transformations canoniques ont pour but de simplifier les problèmes. L'une d'entre elle est l'équation de Hamilton-Jacobi.

Le but de la méthode est d'opérer une T.C. telle que :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 \Longleftrightarrow Q_i = \beta_i = \text{ constantes} \tag{3.60}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \Longleftrightarrow P_i = \alpha_i = \text{ constantes} \tag{3.61}$$

Donc, on trouve :

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_j, P_j, t) \\ &= q_i(\beta_j, \alpha_j, t) \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(Q_j, P_j, t) \\ &= p_i(\beta_j, \alpha_j, t) \end{aligned} \tag{3.63}$$

Nous chercherons la fonction génératrice F2($q_{\boldsymbol{i}}, P_{\boldsymbol{i}}, t$) que nous noterons de façon standard $S(q_{\boldsymbol{i}}, \alpha_{\boldsymbol{i}}, t)$, telle que :

$$H'(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0. \tag{3.64}$$

C'est l'équation de Hamilton-Jacobi, une équation différentielle pour S de n variables nécessitera n constantes d'intégration qui sont précisément les constantes αi

L'approche 1 : (conservatif)

La T.C. est de type $F2$ et donc

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{3.65}$$

Le but recherché est H+$\frac{\partial S}{\partial t} = H'$=0.

Équation fondamentale après remplacement des P_i dans H.

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0. \tag{3.66}$$

Une fois que l'on connaît S, il ne reste qu'à opérer les T.C.

$$p_i = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial q_i} = p_i(q_j, \alpha_j, t) \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} Q_i &= \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i} \\ &= Q_i(q_j, \alpha_j, t) = \beta_i. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Ces *n* équations peuvent s'inverser en

$$q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t) \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(q_i, \alpha_i, t) = p_i(q_j(\alpha_k, \beta_k, t), \alpha_i, t) \\ &= p_i(\alpha_l, \beta_l, t). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Par séparation de variables, on écrit :

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t \tag{3.71}$$

On calcul :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \Longrightarrow p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \tag{3.72}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0. \tag{3.73}$$

Et on peut écrire la dépendance en *W* sur *qk :*

$$W \sim \alpha_k q_k \Longrightarrow p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k} = \alpha_k : \text{ constante} \tag{3.74}$$

$$W(q_i, \alpha_i) = \sum_k^{\text{cycliques}} \alpha_k q_k + W'(q_j, \alpha_j) \tag{3.75}$$

Où les *qk* cycliques n'apparaissent pas dans W'.

Approche 2 : (conservatif)

Pour un mouvement périodique, il est plus de parler de fréquence ou période constante et donc *:*

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i \tag{3.76}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \tag{3.77}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} Q_i(t) = \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i \qquad &\text{(dépendance linéaire)} \\ P_i = \alpha_i = \text{constantes} & \end{aligned}$$

$$H'(Q_i, P_i) = H(q_i, p_i) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = \text{ constante.} \tag{3.78}$$

On peut écrire :

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) \tag{3.79}$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \Longrightarrow p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \tag{3.80}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi devient simplement

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0. \tag{3.81}$$

Et on trouve

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i \tag{3.82}$$

3.7. L'espace des phases :

-L'espace à 2N dimensions des impulsions en fonction de leurs coordonnées conjuguées est l'espace de phase.

-Pour un système autonome (H ne dépend pas de temps) l'équation des trajectoires dans l'espace de phases est donnée par :

$$H(q,p) = E \tag{3.83}$$

-Une collection d'orbites d'un système est un portrait de phase.

3.8. Variables angle-action :

- Dans un système à un degré de liberté effectuant un mouvement périodique, on appel variables action-angle, note (I ; w), le couple de variables canoniques conjuguées variable action I, coordonnée, w tel que I soit constante et w augmente de 2π au cours d'une période, avec :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q} dq \tag{3.84}$$

avec W(q; α) solution de l'équation de Hamilton-Jacobi.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{q_1}^{q_2} \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q - \int_{q_2}^{q_1} \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{q_1}^{q_2} \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{3.85}$$

-La méthode des variables action-angles est utile pour calculer la fréquence d'oscillation autour d'un point d'équilibre pour un système dont la solution complète n'est pas connue.

3.9. Systèmes intégrables :

Un système à n degrés de libertés est dit intégrable s'il existe n intégrales premières indépendantes telles que :

$$\{I_i, I_j\} = 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \tag{3.86}$$

On dit alors que les intégrales sont en involution.

-Considérons un volume V de l'espace de phases défini par :

$$V = \int_\Omega \prod_i \mathrm{d}p_i \mathrm{d}q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{3.87}$$

-Et avec une transformation passons des coordonnées (qi; pi) à (Qi, Pi) et donc au volume V' défini de manière analogue.

$$V = V' \tag{3.88}$$

Théorème de Liouville : Le volume de l'espace de phases est conserve au cours du temps.

Exercices :

Exercice1 :

1- Soit une particule de masse m se déplaçant en une dimension (disons x) et soumise à une force **F=**$-\frac{\partial V}{\partial x}$ .Nous savons que son lagrangien est : $\mathbf{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \mathbf{V(x)}$

a- Ecrire l'équation du moment de ce système ?

b- Prouvez que H=T+V ?

2- Soit une particule de masse m se déplaçant en trois dimensions sous l'influence d'une force **F=-∇ V(r).**

a- Déterminer le lagrangien, et l'Hamiltonien de ce système ?

b- Etablir les équations canoniques du système ?

c- déterminer l'équation de newton ?

Exercice 2 :

On considère l'Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Telle que :

$$x = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}}q \quad \text{et} \quad p_x = \sqrt{2m}p$$

$$q = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}x \quad \text{et} \quad p = \frac{p_x}{\sqrt{2m}}.$$

1. Ecrire l'Hamiltonien de ce système, Essayes de passer de (x, p_x) à (q,p) ?
   Indication : $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$
2. Etablir l'équation différentielle du système ?
3. Vérifier que c'est une transformation canonique ?

Exercice 3 :

Trouver les Hamiltonien correspondant aux lagrangiens suivants :

1- pendule en rotation $\mathbf{L}\ (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})=\frac{\boldsymbol{mR^2}}{2}\,(\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{sin}^2\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{mgR}\cos\boldsymbol{\theta}$

2- pendule sphérique $\mathbf{L}\ (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})=\frac{\boldsymbol{mR^2}}{2}\,(\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 \boldsymbol{sin}^2\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{mgR}\cos\boldsymbol{\theta}$

3- Système de ressorts $\mathbf{L}\ (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \dot{\boldsymbol{x}}_2)=\frac{\boldsymbol{m}}{2}\left(\dot{\boldsymbol{x}}_2^2 + \dot{\boldsymbol{x}}_1^2\right) - \frac{\boldsymbol{k}}{2}\boldsymbol{x}_1^2 - \frac{\boldsymbol{k}}{2}\boldsymbol{x}_1^2 - \frac{\boldsymbol{k}}{2}\,(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2})^2$

Exercice 4 :

Une particule se déplaçant sur l'axe x, est soumise a un potentiel $\mathbf{V\ (x)} = \boldsymbol{V_0}\ \mathbf{sin}^2\ \boldsymbol{x}.$

a) Ecrire l'Hamiltonien de ce système ?

d- Ecrire l'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante et déterminer la forme de la solution ?

Exercice 5 :

On considère l'Hamiltonien suivant $\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2)$

Telle que $\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{ip})$ $\quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{iq})$ les nouvelles variables

1- Vérifier que c'est une transformation canonique ?

2- Ecrire les anciennes variables en fonction des nouvelles ainsi que l'Hamiltonien ?

3- Ecrire l' Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension et de masse m ?

4- Ecrire l'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante ?

Chapitre IV.

Mouvement d’un solide indéformable.

4. Introduction :

- **Système :** C'est l'objet ou l'ensemble d'objets que l'on étudie.
- **Système indéformable :** le système est dit indéformable si sa structure n'est pas modifiée au court du temps (c'est-à-dire si la distance qui sépare tous les points de ce solide reste la même au court du temps). (ex : la table)
- **Système déformable :** La distance qui sépare les différents points du système varie. (ex : éponge)
- **Référentiel (ou repère) :** C'est un solide indéformable par rapport auquel on étudie le mouvement du système.

4.1. Degrés de liberté d'un solide :

Par définition, les degrés de liberté d'un solide sont ces déplacements élémentaires.

1. Dans l'espace : Il y a six degrés de liberté $\Rightarrow$Trois rotations et trois translations.
2. Dans le plan : il y a trois degrés de liberté $\Rightarrow$ une rotation et deux translations.

4.2. Angles d'Euler :

La **Figure 4.1** indiqué le repère fixe $OXY\,Z$ et le repère tournant $Ox_1x_2x_3$

- la droite ON qui est la droite de contact entre les plans XOY et x_1Ox_2. : **On l'appelle la ligne nodale**.
- L'angle ϕ est l'**angle entre l'axe** OX **et cette ligne nodale** suite à une rotation dans le plan XOY.
- L'angle ψ est l'angle entre cette même ligne nodale et l'axe Ox_1
- l'angle θ, c'est simplement l'angle entre l'axe OZ et l'axe Ox_3,
- les rotations sont représentés par $\dot{\varphi}$, $\dot{\Psi}$ et $\dot{\theta}$.

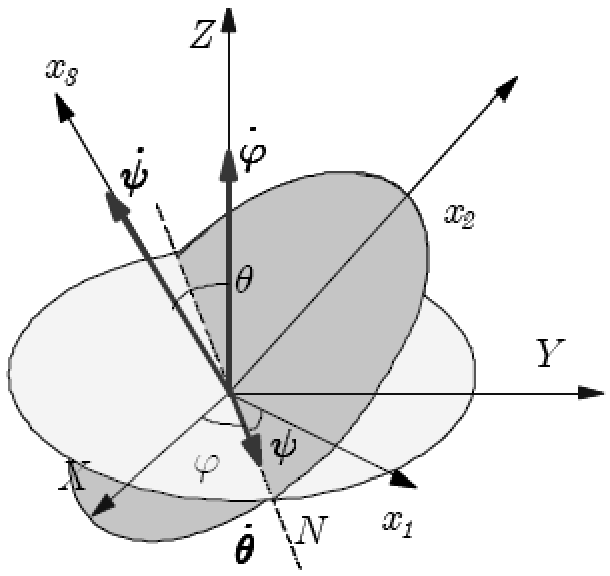


Figure .4.1

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi; \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi; \quad \dot{\theta}_3 = 0 \tag{4.1}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi; \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi; \quad \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta \tag{4.2}$$

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 = 0; \quad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi} \tag{4.3}$$

Les composantes Ω1, Ω2, et Ω3 de Ω sont simplement les sommes des composantes respectives. Par exemple

$$\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\varphi}_i + \dot{\psi}_i, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.3. Axes principaux, Moment cinétique et tenseur d'inertie :

- Les axes propres, ou axes principaux, d'un solide sont les directions qui diagonalisent le tenseur d'inertie.

- Ces axes correspondent aux axes de symétrie du solide et sont caractérisés par leur base unitaire notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- Le solide est considéré comme un système de points discrets notés A_α Le moment cinétique total dans un référentiel mobile, s'écrit :

$$\vec{L}_{/G} = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{GA}_\alpha \wedge m_\alpha \dot{\overrightarrow{GA}}_\alpha\right) = \sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{GA}_\alpha \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GA}_\alpha\right) \quad (4.6)$$

Où les rotations sont prises en compte dans l'expression des vitesses.
Si le double produit vectoriel est développé selon la formule :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C}).\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C} \quad (4.7)$$

- l'expression finale du moment cinétique peut être posée selon la forme simplifiée suivante :

$$\vec{L}_{/G} = \sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{GA}_\alpha \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GA}_\alpha\right) = \sum_\alpha \left[\overrightarrow{GA^2}_\alpha.\vec{\Omega} - \overrightarrow{GA}_{\alpha'}\left(\overrightarrow{GA'_\alpha}.\vec{\Omega}\right)\right] \quad (4.8)$$

- Le vecteur rotation est alors projetée :

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{e}_x + \Omega_y \vec{e}_y + \Omega_z \vec{e}_z \quad (4.9)$$

- et la position de chaque point exprimée selon

$$\overrightarrow{GA}_\alpha = x_\alpha \vec{e}_x + y_\alpha \vec{e}_y + z_\alpha \vec{e}_z \,. \quad (4.10)$$

L'évaluation de chacun des termes du moment cinétique devient alors systématique.

- L'expression du moment cinétique en fonction de la vitesse angulaire est linéaire :

$$\vec{L}_{/G} = \Im_{/G}.\vec{\Omega} \quad (4.11)$$

- La forme tensorielle s'écrit selon la forme générale suivante et cela quel que soit le centre :

$$\Im = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (4..12)$$

*Les termes diagonaux sont les moments d'inertie par rapport aux axes :

$$I_{xx} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\left(z_{\alpha}^{2} + y_{\alpha}^{2}\right) \quad ; \quad I_{yy} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\left(x_{\alpha}^{2} + z_{\alpha}^{2}\right) \quad ; \quad I_{zz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\left(x_{\alpha}^{2} + y_{\alpha}^{2}\right)$$

*Les termes non diagonaux sont tels que :

$$I_{xy,yx} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} \quad ; \quad I_{zy,yz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \quad ; \quad I_{xz,zx} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha}$$

.

4.4. Energie cinétique :

- Dans le cas général où C est un point quelconque du solide, le calcul complet conserve les trois contributions :

$$\varepsilon_K = \frac{1}{2} m_{\text{totale}} \vec{V}_C^{2} + \vec{V}_C . \left(\vec{\Omega} \wedge \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{CA}_{\alpha}\right]\right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CA}_{\alpha}\right)^{2} \qquad (4.13)$$

- Une autre façon d'écrire l'énergie cinétique pour un point C quelconque paraît sous la forme :

$$\varepsilon_K = \frac{1}{2} m_{\text{totale}} V_C^{2} + m_{\text{totale}} \vec{\Omega} . \left(\overrightarrow{CG} \wedge \vec{V}_C\right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CA}_{\alpha}\right)^{2} \qquad (4.14)$$

- L'énergie cinétique de rotation

$$\varepsilon_{K.\text{rot.}/C} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} . \vec{L}_C = \frac{1}{2} \vec{\Omega} . \left(\Im_C . \vec{\Omega}\right) = \frac{1}{2} \Im_{C,ik} \Omega_i \Omega_k \qquad (4.15)$$

4.5. Toupie symétrique :

Le solide ayant trois axes principaux ou axes propres, les relations entre les moments d'inertie définissent les différents types de toupies.

- Le cas général, tel que $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, indique une **toupie asymétrique**.
- La **toupie symétrique** est un solide pour lequel $I_1 = I_2 = I$ et $I_3 \neq I$.
- La **sphère** est une toupie symétrique particulière pour laquelle $I_3 = I$.

- Le **rotateur** est un système de particules distribuées le long d'une droite : par exemple x_3, auquel cas $I_1=I_2$ et $I_3=0$.

4.6. Équations d'Euler.

Exprimé dans le référentiel mobile $C_{x_1x_2x_3}$, le moment cinétique est déterminé par ses trois composantes :

$$L_1 = I_1\Omega_1 \text{ , } L_2 = I_2\Omega_2 \text{ et } L_3 = I_3\Omega_3. \tag{4.16}$$

Il vérifie les **équations d'Euler** suivantes :

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\ \Omega_2\Omega_3 = M_1 \tag{4.17}$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\Omega_1 = M_2 \tag{4.18}$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 = M_3 \tag{4.19}$$

Exercices :

Exercice N°1:

On considère un cube de côtés $O_1A = O_1B = O_1C = 1$, en mouvement par rapport à un repère orthonormé direct fixe, R(O, x, y, z). A tout instant, les projections des vecteurs vitesses des points A, B et C sont telles que :

$$\vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = 2\omega \text{ et } \vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = \omega$$

$$\vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \text{ et } \vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = 0$$

$$\vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \text{ et } \vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = \omega$$

Soit $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au cube dans son mouvement par rapport à R avec $\vec{i}_1 = \overrightarrow{O_1A}$, $\vec{j}_1 = \overrightarrow{O_1B}$ et $\vec{k}_1 = \overrightarrow{O_1C}$ (voir figure 1).

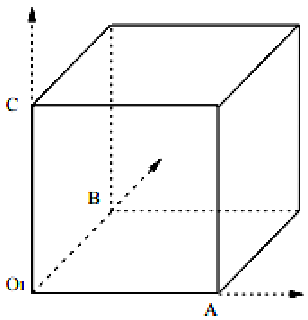


Figure 1

1- Déterminer dans R, les vecteurs vitesses des points A, B et C. En déduire le vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ qui caractérise la rotation instantanée du cube par rapport à R.

2- Déterminer le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R)$ du cube par rapport à R. En déduire les vecteurs vitesses des points A, B et C.

3- Déterminer la vitesse du point O_1 par rapport à R, $\vec{v}(O_1/R)$.

4- Déterminer l'invariant scalaire I du torseur cinématique.

Exercice N°2:

Un cerceau (C) de centre A et de rayon a, dont le plan est perpendiculaire à x_0Oy_0, roule sans glisser sur le plan horizontal (P). L'axe du cerceau reste parallèle à l'axe (OI_G) et le point de contact I_G décrit un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante (figure 2). L'angle variable θ caractérise la rotation propre du cerceau autour de son axe. On désigne par $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ le repère fixe, $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ un repère intermédiaire et par $R(O, x, y, z)$ le repère lié à (P). On suppose que le plan (P) est fixe dans R_0. Soient I_1, I_2 et I_G les points de contact entre le cerceau et le plan (P) tels que $I_1 \in (C)$, $I_2 \in (P)$ et I_G point géométrique.

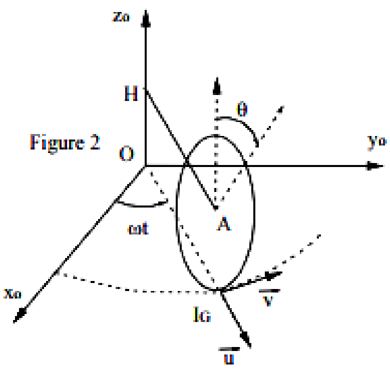


Figure 2

1- Calculer la vitesse $\vec{v}(A/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(A/R_0)$ du point A dans R_0.

2- Quel est le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(C/R_0)$.

3- Donner les éléments de réduction du torseur cinématique en A. En déduire sa nature.

4- Calculer la vitesse $\vec{v}(I_1/R_0)$. En déduire la condition du roulement sans glissement.

Types de document et références bibliographiques

Ce document pédagogique couvre une partie de ce qui est traité dans les volumes suivants.

1. *M.Bouriche, mécanique des systèmes de solide indéformable. 2éme édition 2014.*
2. *Jonathan Ferreira. Cours de Mécanique Analytique. Laboratoire d'AstrOphysique de Grenoble http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/ferreira.*
3. *Introduction au principe variationnel et à la mecanique analytique. Nicolas Sator. Laboratoire de Physique Theorique de la Matiere Condensee Universite Pierre et Marie Curie Paris 6.*
4. *Olivier Castera.La mécanique analytique. E-mail address: o.castera@free.fr URL: http://o.castera.free.fr/*
5. *P.Amiot et L.Marleau. Mécanique classique II .université laval. canada.*
6. *Ch. Duval.Decembre 2008Mecanique du solide et Mecanique analytique. Departement de Physique, Universite de la Mediterranee & CPT-CNRS, Luminy,Case 907, F{13288 Marseille, Cedex 9, FRANCE; mailto : duval@cpt.univ-mrs.fr.*
7. *MHIRECH Abdelaziz.Professeur à L'Université Mohamed V.Faculté des Sciences – Rabat – Agdal.Cours de mecanique du point materiel. Pour le premier semestre des filieres SM et SMI.*
8. *Resume du cours de Mecanique Analytique.jean-eloi.lombard@ep.ch. 22 janvier 2009.*
9. *Hassina ZEGHLACHE. - Université de Lille. Date : 18 AOUT 2012. Éléments de mécanique du solide [en ligne]. Disponible sur :* http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M02_G01/co/NLP_C_M02_G01_web.html
10. *Principe de moindre action et formalisme lagrangien. http:// ob_379aa4_12-principe-de-moindre-action-et-formalisme-lagra.*
11. *Chapitre 1 : Oscillateur harmonique.2090375_C01_BAT.indd 10 date 09/08/13*